

# СИСТЕМА СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УСЛОВИЯХ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПОМЕХ

А.М. Цыкунов

Рассмотрена задача робастного слежения за эталонным сигналом для объекта с распределенным запаздыванием, когда на него действуют ограниченные внешние возмущения, а вектор состояния измеряется с помехами. Получен алгоритм управления, позволяющий получить асимптотически точную оценку источника помех и компенсировать внешние ограниченные возмущения с требуемой точностью. Приведен числовой пример и результаты моделирования.

**Ключевые слова:** робастное управление, вектор состояния, возмущения, распределенное запаздывание.

## ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем теории автоматического управления динамическими объектами заключается в компенсации внешних неизмеряемых возмущений и помех. В таких условиях проектируемая система управления должна обеспечивать выполнение основной цели управления, например, слежение за эталонным сигналом с требуемой точностью, что возможно осуществить, если скомпенсировать внешние возмущения и помехи. Один из основных подходов решения этой задачи состоит в применении робастных систем управления. Достаточно подробно эта проблема изложена в книге [1], где приводится классификация задач проектирования робастных систем управления и различных типов возмущений.

Существует немало подходов и методов, позволяющих сконструировать системы управления, которые компенсируют априорную неопределенность в математических моделях объектов управления и внешние ограниченные возмущения — метод инвариантных эллипсоидов [2, 3], метод матричных неравенств [4, 5], метод гарантированного управления [6], решается задача компенсации возмущения с помощью линейного динамического регулятора, для построения которого применяется

метод инвариантных эллипсоидов [7], используются специальные фильтры [8], применяется специальный вспомогательный контур [9—11], позволяющий получить оценку возмущений. Задача робастного управления объектами с запаздыванием исследована в ряде работ [12—14]. Решены задачи робастного управления для объектов с запаздыванием нейтрального типа [15—18]. Исследована компенсация возмущений и неопределенности параметров математической модели с распределенным запаздыванием исследована [19].

В настоящей статье результаты, полученные в работе [20], используются для получения оценки векторного источника помех и компенсации внешних неизмеряемых возмущений для объекта с распределенным запаздыванием.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого задана уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta + Bu(t) + \Gamma f(x, t),$$

$$z(t) = x(t) + N\xi(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (1)$$

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0],$$



где  $x \in R^n$ ,  $u(t)$  и  $y(t)$  — скалярные управляющее воздействие и регулируемая переменная, которая не измеряется,  $z(t)$  — измеряемый вектор,  $f(x, t) \in R^v$  — внешнее, векторное возмущение,  $\varphi(\theta)$  — непрерывная начальная векторная функция,  $\xi \in R^r$  — вектор, который является источником помех,  $N$  — матрица интенсивности помех,  $h$  — время запаздывания,  $A, D, B, \Gamma, C$  и  $N$  — числовые матрицы соответствующих порядков.

Требуется получить алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t \geq T_0, \quad (2)$$

где  $y_m(t)$  — сигнал, который должен отслеживаться выходом объекта управления, величина  $\delta > 0$  характеризует точность слежения,  $T_0$  — время, по истечении которого с начала функционирования системы выполняться целевое неравенство. Иными словами, выражение (2) означает, что целевое неравенство должно выполняться за конечное время, которое зависит от многих факторов: начальных условий объекта и источника помех, величины возмущений и эталонного сигнала.

Будем решать сформулированную задачу при следующих ограничениях.

**Предположения**

1. Пара  $(A, B)$  — управляема, а пара  $(A, C)$  — наблюдаема.

2. Уравнение (1) — минимально-фазовое, т. е. квазиполином  $\text{Cadj}\Lambda(s)B$  является гурвицевым, где  $s$  — комплексная переменная в преобразовании Лапласа,  $\Lambda(s) = (I_n s - A - D\sigma(s))$ ,  $I_n$  — единичная матрица порядка  $n \times n$ ,  $\text{adj}\Lambda(s)$  — присоединенная матрица (транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы  $\Lambda(s)$ ),

$$\sigma(s) = \int_{-h}^0 e^{s\theta} d\theta = \frac{1 - e^{-hs}}{s}.$$

3. Ранг матрицы  $\Gamma$  плюс размерность вектора-источника помех не должны превышать размерности вектора  $x$ ,  $\text{rank}\Gamma + r \leq n$ . Без потери общности будем считать что  $\text{rank}\Gamma + r = n$ ,  $\text{rank}N = r$ .

4. Компоненты векторной функции  $f(x, t)$  — гладкие ограниченные функции по переменной  $t$ , и удовлетворяющие глобальным условиям Липшица по переменным  $x$ .

5. Функция  $y_m(t)$  является гладкой.

6. Матрицы  $A, B, D, N$  и  $C$  известны.

7. Компоненты векторной функции  $\xi(t)$  — ограниченные функции.

Ясно, что для выполнения целевого условия (2) с требуемым значением величины  $\delta$  необходимо

скомпенсировать влияние возмущений и помех на регулируемую переменную. Однако вектор измеряемых переменных  $z(t)$  несет информацию о возмущениях и помехах. Поэтому первый этап решения сформулированной задачи состоит в выделении сигнала, который бы нес информацию только о помехах, или только о возмущениях.

**2. МЕТОД РЕШЕНИЯ**

Метод решения сформулированной задачи состоит из двух этапов:

— конструирование системы, позволяющей оценить сигналы помех и скомпенсировать их влияние на вектор  $x(t)$ ;

— проектирование системы, позволяющей компенсировать влияние возмущений на точность слежения.

Сформируем новый вектор измерения

$$\bar{z}(t) = z(t) + N\varphi(t). \quad (3)$$

Здесь  $\varphi(t)$  — управляющий сигнал, предназначенный для компенсации влияния помех.

Выберем в матрице  $N$   $r$  строк таких, что составленная из них матрица будет невырожденной. Без потери общности, будем считать, что это первые  $r$  строк.

Преобразуем уравнение (1), положив  $x = T\bar{x}$ .

Берем матрицу  $T$  так, чтобы матрица  $T^{-1}\Gamma$  имела нулевые первые  $r$  строк. Такая матрица всегда существует, так как  $\text{rank}\Gamma = n - r$ . Далее,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) = & T^{-1}AT\bar{x}(t) + T^{-1}DT \int_{-h}^0 \bar{x}(t + \theta)d\theta + \\ & + T^{-1}Bu(t) + T^{-1}\Gamma f(x, t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ,  $T^{-1}DT = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$ ,

$T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ ,  $T^{-1}\Gamma = \begin{bmatrix} 0_{r \times r} \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}$ ,  $0_{r \times r}$  — нулевая матрица

порядка  $n \times n$ . Запишем уравнение (4) в виде системы векторных уравнений

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A_{11}\bar{x}_1(t) + A_{12}\bar{x}_2 + D_{11} \int_{-h}^0 \bar{x}(t + \theta)d\theta + B_1 u(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2(t) = & A_{21}\bar{x}_1(t) + A_{22}\bar{x}_2 + D_{21} \int_{-h}^0 \bar{x}(t + \theta)d\theta + \\ & + B_2 u(t) + \Gamma_2 f(x, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $D_1 = [D_{11} \ D_{12}]$ ,  $D_2 = [D_{21} \ D_{22}]$ ,  $\bar{x}_1(t) \in R^r$ ,  $\bar{x}_2(t) \in R^{n-r}$ .

Введем новый вектор измерения

$$\eta(t) = T^{-1}z(t) = T^{-1}(x(t) + N\xi(t)) = \bar{x} + T^{-1}N\xi(t) = \bar{x} \bar{N} \xi(t), \quad \bar{N} = T^{-1}N.$$

Запишем это матричное равенство в виде двух равенств:

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= L_1 \eta(t) = \bar{x}_1 + N_1 \xi(t), \\ \eta_2(t) &= L_2 \eta(t) = \bar{x}_2 + N_2 \xi(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\eta_1(t) \in R^r$ ,  $\eta_2(t) \in R^{n-r}$ ,  $\eta^T(t) = [\eta_1^T(t), \eta_2^T(t)]$ ,  $L_1 = [I_r \ 0_{(n-r) \times (n-r)}]$ ,  $\bar{N}^T = [N_1^T, N_2^T]$ ,  $L_2 = [0_{r \times r} \ I_{(n-r)}]$ .

Принимая во внимание равенства (6), преобразуем первое из уравнений (5):

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1(t) &= A_{11} \eta_1(t) + A_{12} \eta_2 + D_1 \int_{-h}^0 \eta(t + \theta) d\theta + \\ &+ B_1 u(t) + N_1 \dot{\xi}(t) - A_{11} N_1 \xi(t) - A_{12} N_2 \xi - \\ &- D_1 \bar{N} \int_{-h}^0 \xi(t + \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем вспомогательный контур, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_b(t) &= A_{11} \eta_b(t) + A_{12} \eta_2 + D_1 \int_{-h}^0 \eta(t + \theta) d\theta + \\ &+ B_1 u(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Составим уравнение для вектора рассогласования  $\zeta(t) = \eta_1(t) + \eta_b(t)$ , вычитая уравнение (8) из уравнения (7):

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= A_{11} \zeta(t) + N_1 \dot{\xi}(t) - A_1 \bar{N} \xi(t) - \\ &- D_1 \bar{N} \int_{-h}^0 \xi(t + \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда получаем уравнение для оценки вектора, который является источником помех:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}(t) &= N_1^{-1} \left( +A_1 \bar{N} \dot{\xi}(t) + D_1 \bar{N} \int_{-h}^0 \bar{\xi}(t + \theta) d\theta \right) + \\ &+ N_1^{-1} (\dot{\zeta}(t) - A_{11} \zeta(t)), \\ \bar{\xi}(\theta) &= 0, \theta \in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (10)$$

Для работоспособности полученного алгоритма необходимо, чтобы матрица  $A_{11}$  была гурвицевой, а уравнение

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = N_1^{-1} \left( +A_1 \bar{N} \bar{\xi}(t) + D_1 \bar{N} \int_{-h}^0 \bar{\xi}(t + \theta) d\theta \right) \quad (11)$$

асимптотически устойчивым.

Покажем, что в этом случае получается асимптотически устойчивая оценка вектора  $\xi(t)$ .

Применим преобразование Лапласа к уравнениям (9) и (10):

$$\begin{aligned} (I_r s - A_{11}) \zeta(s) &= \left( N_1 s - A_1 \bar{N} - D_1 \bar{N} \frac{1 - e^{-hs}}{s} \right) \xi(s) + \\ &+ \zeta(0) - \xi(0), \\ \left( I_r s - N_1^{-1} \left( +A_1 \bar{N} + D_1 \bar{N} \frac{1 - e^{-hs}}{s} \right) \right) \bar{\xi}(s) &= \\ &= N_1^{-1} ((I_r s - A_{11}) \zeta(s) - \zeta(0)). \end{aligned}$$

Подставив первое уравнение во второе, получим

$$\begin{aligned} \left( I_r s - N_1^{-1} \left( +A_1 \bar{N} + D_1 \bar{N} \frac{1 - e^{-hs}}{s} \right) \right) \bar{\xi}(s) &= \\ = \left( \left( I_r s - N_1^{-1} A_1 \bar{N} - N_1^{-1} D_1 \bar{N} \frac{1 - e^{-hs}}{s} \right) \xi(s) + \right. \\ &\left. + \zeta(s) - \zeta(0) - \xi(0) \right). \end{aligned}$$

Разрешим уравнение относительно оценки  $\bar{\xi}(s)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(s) &= \xi(s) - \\ &- \left( I_r s - N_1^{-1} \left( +A_1 \bar{N} + D_1 \bar{N} \frac{1 - e^{-hs}}{s} \right) \right)^{-1} \xi(0). \end{aligned}$$

Так как уравнение (11) асимптотически устойчиво, то квазиполином  $\det(I_r s - N_1^{-1}(-A_1 \bar{N} - D_1 \bar{N} \times (1 - e^{-hs})/s))$  является гурвицевым. Тогда оригинал изображения  $\chi(t) = L^{-1}(I_r s - N_1^{-1}(-A_1 \bar{N} - D_1 \bar{N} \times (1 - e^{-hs})/s))^{-1} \xi(0)$  мажорируется затухающими экспонентами. Следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = 0, 0$ ,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\xi}(t) = \xi(t)$ . Таким образом,  $\bar{\xi}(t) = \xi(t) - \chi(t)$ .

Тогда, положив в формуле (3)  $\phi(t) = -\bar{\xi}(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= z(t) + N\phi(t) = x(t) + N\xi(t) - N\bar{\xi}(t) = \\ &= x(t) + \chi(t). \end{aligned} \quad (12)$$



В результате получили асимптотически точную оценку вектора  $x(t)$ .

Отметим, что после того, как отфильтрован сигнал помехи, можно воспользоваться любым известным алгоритмом, который позволяет компенсировать влияние возмущений на регулируемую величину.

В данном случае рассматривается один из возможных алгоритмов. Сформируем оценку регулируемой переменной, принимая во внимание формулу (12):

$$\hat{y}(t) = C\bar{z}(t) = Cx(t) + C\chi(t) = y(t) + C\chi(t).$$

Для проектирования системы слежения имеем математическую модель

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + D \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta + Bu(t) + \Gamma f(x, t), \\ \hat{y}(t) &= y(t) + C\chi(t), \quad x(\theta) = \varphi(\theta), \\ \theta &\in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (13)$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (13) и преобразуем полученное матричное уравнение в скалярное относительно переменной  $\hat{y}(s)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n Q_{n-i}(s)\sigma^i(s)\hat{y}(s) &= \sum_{j=0}^m R_{m-j}(s)\sigma^j(s)u(s) + \\ &+ \sum_{k=1}^v \sum_{g=0}^{n-1} M_{k(m-1-g)}(s)\sigma^g(s)f_k(s) + \\ &+ \sum_{i=0}^n Q_{n-i}(s)\sigma^i(s)C\chi(s) + K(s), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\sum_{i=0}^n Q_{n-i}(s)\sigma^i(s) = \det\Lambda(s)$ ,  $\sum_{j=0}^m R_{m-j}(s)\sigma^j(s) =$

$$= \text{Cadj}\Lambda(s)\Gamma_k, \quad \sum_{g=0}^{n-1} M_{k(m-1-g)}(s)\sigma^g(s) = \text{Cadj}\Lambda(s)\Gamma_k,$$

$\Gamma_k$  —  $k$ -й столбец матрицы  $\Gamma$ ,  $K(s)$  — преобразование Лапласа начальных условий, индексы многочленов указывают на их порядок. Порядки полиномов  $M_k(s)$  взяты максимально возможными. Их порядок зависит от структуры матрицы  $\Gamma$ .

Применим алгоритм деления Евклида к полиному  $Q_n(s)$ :

$$\begin{aligned} Q_n(s) &= Q_\gamma(s)\bar{R}_m(s) + \Delta Q_{m-1}(s), \\ \bar{R}_m(s) &= R_m(s)/r_{m0}, \quad \gamma = n - m. \end{aligned}$$

Здесь  $r_{m0}$  — коэффициент при старшем члене полинома  $R_m(s)$ . Разложим полином  $Q_\gamma(s)$  на две составляющие  $Q_\gamma(s) = Q_{\gamma0}(s) + \Delta Q_{\gamma-1}(s)$ ,  $Q_{\gamma0}(s)$  — гурвицев полином. Тогда получим  $Q_n(s) = Q_{\gamma0}(s)\bar{R}_m(s) + \Delta Q_{\gamma-1}(s)\bar{R}_m(s) + \Delta Q_{m-1}(s)$ . Подставив этот полином в уравнение (14) и разделив левые и правые части уравнения на  $\bar{R}_m(s)$ , получим  $Q_{\gamma0}(s)\hat{y}(s) = r_{m0}u(s) + \psi_1(s)$ . Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим

$$Q_{\gamma0}(P)\hat{y}(t) = r_{m0}u(t) + \psi_1(t),$$

где  $P = 1/dt$  — оператор дифференцирования,  $\psi_1(t)$  — оригинал изображения  $\psi_1(s)$ ,

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= \frac{1}{\bar{R}_m(s)} \left[ \sum_{i=1}^n Q_{n-i}(s)\sigma^i(s)\hat{y}(s) = \right. \\ &= \sum_{j=1}^m R_{m-j}(s)\sigma^j(s)u(s) + \\ &+ \sum_{k=1}^v \sum_{g=0}^{n-1} M_{k(m-1-g)}(s)\sigma^g(s)f_k(s) + \\ &\left. + \sum_{i=0}^n Q_{n-i}(s)\sigma^i(s)C\chi(s) + K(s) \right]. \end{aligned}$$

Составим уравнение для ошибки  $\bar{e}(t) = \hat{y}(t) - y_m(t)$ :

$$Q_{\gamma0}(P)\bar{e}(t) = r_{m0}u(t) + \psi_1(t) + Q_{\gamma0}(P)y_m(t).$$

Введем новое управляющее воздействие  $u(t) = \alpha\vartheta(t)$ ,  $\alpha > 0$ . В результате получим

$$Q_{\gamma0}(P)\bar{e}(t) = \alpha\vartheta(t) + \psi(t),$$

где  $\psi(t) = (r_{m0} - 1)\alpha\vartheta(t) + Q_{\gamma0}(P)y_m(t) + \psi_1(t)$ .

Доказано [21], что алгоритм управления

$$((\mu P + 1)^\gamma - 1)\vartheta(t) = Q_{\gamma0}(P)\bar{e}(t)$$

обеспечивает выполнение целевого условия  $|\bar{e}(t)| < \delta_1$  за конечное время работы системы, если число  $\mu > 0$  выбрать достаточно малым. Другими словами, числа  $\mu$  и  $\alpha$  являются параметрами алгоритма, выбор которых обеспечивает выполнение целевого условия за конечное время.

Принимая во внимание равенство  $\bar{e}(t) = e(t) + C\chi(t)$ , можно сделать вывод. Если выбрать величину  $\delta_1$  меньше числа  $\delta$ , то учитывая условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ , получим  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}(t) = e(t)$ . Следовательно

но, существует момент времени  $T_0$ , по истечении которого будет выполнено целевое условие (2). Таким образом, получили систему управления, математическая модель которой имеет вид:

$$\bar{z}(t) = z(t) + N\phi(t), \quad \eta(t) = T^{-1}z(t), \quad \eta_1(t) = L_1\eta(t),$$

$$\dot{\eta}_b(t) = A_{11}\eta_b(t) + A_{12}\eta_2 + D_1 \int_{-h}^0 \eta(t+\theta)d\theta + B_1 u(t),$$

$$\zeta(t) = \eta_1(t) - \eta_b(t),$$

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = N_1^{-1} (+A_1 \bar{N} \bar{\xi}(t) + D_1 \bar{N} \int_{-h}^0 \bar{\xi}(t+\theta)d\theta) +$$

$$+ N_1^{-1} (\dot{\zeta}(t) - A_{11}\zeta(t)),$$

$$\bar{\xi}(\theta) = 0, \quad \theta \in [-h, 0], \quad \phi(t) = -\bar{\xi}(t), \quad \hat{y}(t) = C\bar{z}(t),$$

$$\bar{e}(t) = \hat{y}(t) - y_m(t),$$

$$u(t) = \alpha \vartheta(t), \quad ((\mu P + 1)^y - 1)\vartheta(t) = Q_{00}(P)\bar{e}(t).$$

### 3. ПРИМЕР

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого задана уравнением

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 x(t+\theta)d\theta +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} f(x, t),$$

$$z(t) = x(t) + \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix} \xi(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x(t), \quad x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Ранг матрица  $\Gamma$  равный двум,  $\xi \in R^2$ ,  $f \in R^4$ ,  $\varphi(\theta)$  — ограниченная начальная векторная функция. Предположение 3 выполнено.

Возьмем матрицу преобразований

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (4) будет иметь вид:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 & -7 & 4 \\ -9 & 2 & -10 & 6 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \bar{x}(t+\theta)d\theta +$$

$$+ \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -12 \\ -7 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f(x, t),$$

$$\eta(t) = \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0,5 & -0,2 \\ 0,3 & 0,2 \\ -0,2 & 0,8 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix} \xi(t).$$

Первое уравнение из системы (5) примет вид:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) + \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \bar{x}_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \bar{x}(t+\theta)d\theta + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} u(t).$$

Уравнение (7) запишется как

$$\dot{\eta}_1(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \eta_1(t) + \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \eta_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \eta(t+\theta)d\theta + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} u(t) +$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \xi(t) - \begin{bmatrix} -2,4 & -0,4 \\ -1,9 & -2,2 \end{bmatrix} \xi(t) -$$

$$- \begin{bmatrix} -0,3 & 0,8 \\ 1,1 & 0,4 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \xi(t+\theta)d\theta.$$

Математическую модель вспомогательного контура зададим в виде

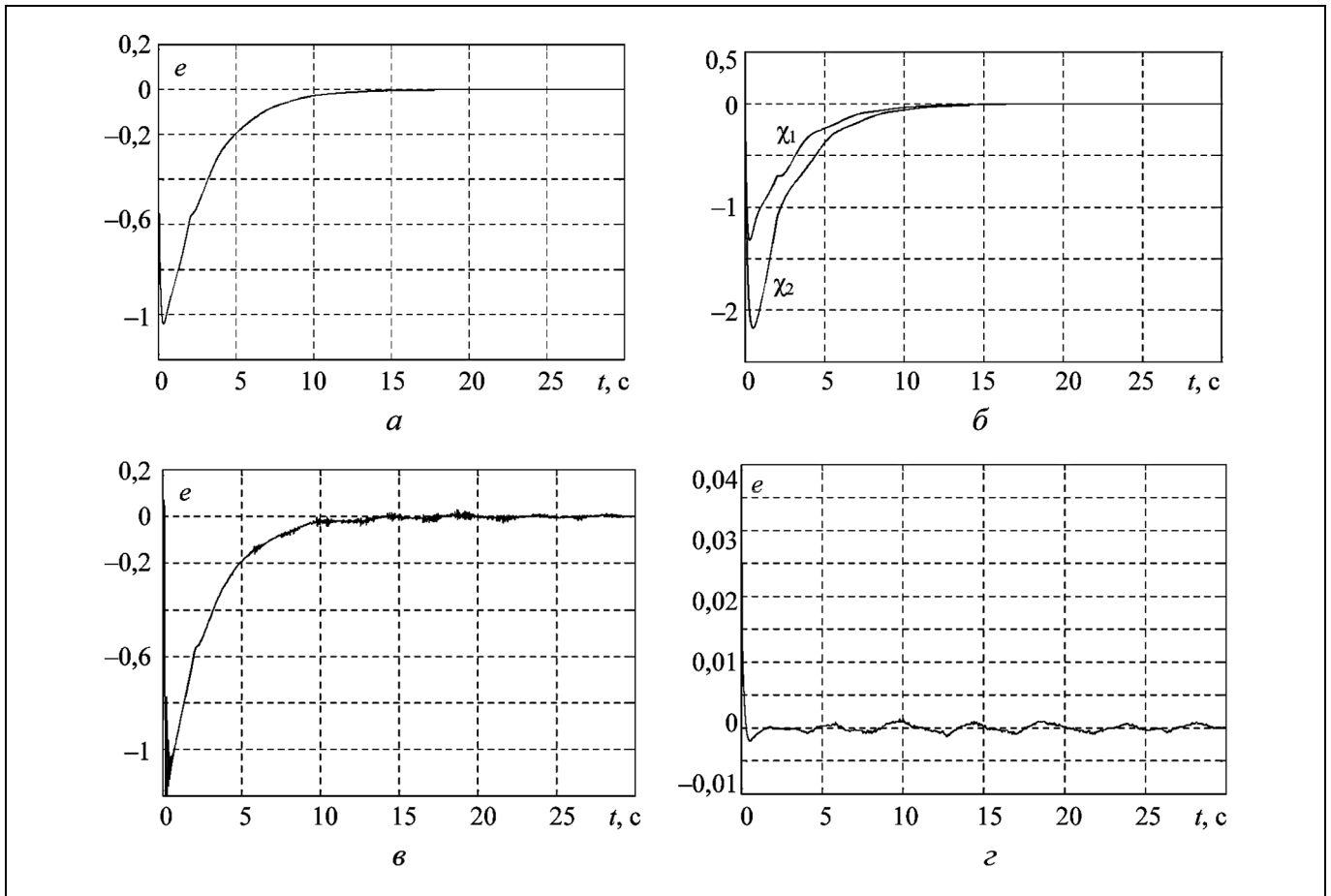
$$\dot{\eta}_b(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \eta_b(t) + \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \eta_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \eta(t+\theta)d\theta + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} u(t).$$

Тогда получим уравнение для вектора рассогласования  $\zeta(t) = \eta_1(t) - \eta_b(t)$

$$\dot{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0,5 & -0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \xi(t) -$$

$$- \begin{bmatrix} -2,4 & -0,4 \\ -1,9 & -2,2 \end{bmatrix} \xi(t) - \begin{bmatrix} -0,3 & 0,8 \\ 1,1 & 0,4 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \xi(t+\theta)d\theta,$$



**Переходные процессы по ошибкам слежения и оценивания помех:** *a* и *б* — начальная функция  $\varphi(\theta) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\theta \in [-2, 0]$ ,  $\mu = 0,01$ , погрешность слежения после 18 с не превышает значения 0,002; оценка помех асимптотически устойчива; *в* —  $\mu = 0,1$ , погрешность слежения 0,03; значения  $\mu$  не влияют на переходные процессы по ошибкам оценивания  $\chi_i(t)$ ; *г* — начальные условия нулевые,  $\mu = 0,01$ , погрешность слежения 0,002

откуда получаем уравнение для оценки источника помех

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} -5,37 & -3,25 \\ -1,4375 & -6,125 \end{bmatrix} \bar{\xi}(t) - \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 4 & -0,25 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \bar{\xi}(t + \theta) d\theta + \begin{bmatrix} 23,75 & -7,5 \\ 9,375 & 1,25 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 1,25 & 1,25 \\ -1,875 & 3,125 \end{bmatrix} \dot{\zeta}(t).$$

Формируем оценки вектора  $x(t)$   $\bar{z}(t) = z(t) - N\bar{\xi}(t) = x(t) + \chi(t)$  и регулируемой переменной  $\hat{y}(t) = \bar{z}(t) = Lx(t) + L\chi(t)$ .

Передаточная функция по управлению имеет вид:

$$W(s, \sigma(s)) = [17s^2 + 100s + 69 + (137 + 30s - 7s^2)\sigma(s) + (42 - 20s)\sigma^2(s) + 4\sigma^3(s)]/G(s, \sigma(s)),$$

$$G(s, \sigma(s)) = s^4 + 13s^3 + 57s^2 + 88s + 14 + (6s^3 + 56s^2 + 236s + 79)\sigma(s) + (13s^2 + 77s + 81)\sigma^2(s) + (10s + 30)\sigma^3(s) + 4\sigma^4(s).$$

Относительная степень равна двум, математическая модель минимально-фазовая. Поэтому берем алгоритм управления

$$u(t) = \rho(\vartheta(t)), \quad \vartheta(t) = 5v(t),$$

$$(\mu^2 P^2 + \mu P)v(t) = (P^2 + 7P + 12)\bar{e}(t),$$

где  $\rho(\vartheta(t))$  — нелинейность с насыщением, равным 30, которая введена для учета ограничений на управляющее воздействие.

На рисунке приведены переходные процессы по ошибке слежения  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  и ошибкам оценивания источника помех  $\chi_i(t) = \bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\xi_1(t) = \sin 3t + \pi(t)$ ,  $\xi_2(t) = \sin 7t + \pi(t)$ , где  $\pi(t)$  — нормированный белый шум,

$$f_i(x, t) = \sin t + \sin x_i + \ln(1 + x_i^2), \quad i = 1, 4,$$

$$y_m(t) = 3\sin 1,3t + 3\sin 0,7t.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача слежения для объекта, математическая модель которого задана уравнением с распределенным запаздыванием. На объект действуют неизмеряемые возмущения, а в каналах измерения присутствуют помехи. Для решения задачи применен подход, предложенный в работе [20], который позволяет получить асимптотически точные оценки вектора — источника помех. Естественно, что на математическую модель объекта управления накладываются ограничения, перечисленные в предположениях. Кроме того, требуется, чтобы уравнения (9) и (10), были асимптотически устойчивыми при отсутствии внешних сигналов. Результаты моделирования показывают, что предложенный алгоритм управления позволяет получить качественные переходные процессы. Точность регулирования зависит от параметров  $\mu$  и  $\alpha$ .

К недостаткам следует отнести необходимость подбора параметров  $\mu$  и  $\alpha$  на этапе проектирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
2. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106—125.
3. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 5. — С. 72—90.
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе матричных неравенств. — М.: Наука, 2007.
5. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез субоптимального регулятора по выходу для гашения ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 4. — С. 3—10.
6. Афанасьев В.Н. Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенными объектами // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 1. — С. 24—31.
7. Хлебников М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 4. — С. 72—42.
8. Никифоров В.О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 4. — С. 69—73.
9. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 7. — С. 103—115.
10. Фуртат И.Б., Цыкунов А.М. Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. — 2008. — № 5. — С. 2—7.
11. Цыкунов А.М. Робастное управление линейным объектом по косвенным измерениям // Проблемы управления. — 2009. — № 3. — С. 13—22.
12. Park P. A delay-dependent stability for systems uncertain time-invariant delays // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1999. — Vol. 44. — P. 876—887.
13. Zhang W., Allgover F., Liu T. Controller parameterization for SISO and MIMO plants with delay // Journal of Process Control. — 2006. — Vol. 55, N 10. — P. 794—802.
14. Gao H., Chen T., Lam J. A new delay system approach to network based control // Automatica. — 2008. — Vol. 44, N 1. — P. 38—52.
15. Han Q.L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type // Automatica. — 2002. — Vol. 38, N 4. — P. 719—723.
16. Ivanescu D., Niculescu S.I., Dugard L., Dion J.M., Verriest E.I. On delay dependent stability of neutral systems // Automatica. — 2003. — Vol. 39, N 2. — P. 255—261.
17. Mishiels W., Engelbarghs K., Roose D., Dochain D. Sensitivity to infinitesimal delays in neutral equations SIAM // J. Control Optim. — 2002. — Vol. 40, N 4. — P. 1134—1158.
18. Li X.G., Zhu X.J., Cela A., Reama A. Stability analysis of neutral systems with mixed delays // Automatica. — 2008. — Vol. 44, N 11. — P. 2698—2772.
19. Цыкунов А.М. Робастное управление объектом с распределенным запаздыванием // Проблемы управления. — 2013. — № 3. — С. 2—8.
20. Цыкунов А.М. Робастное управление с компенсацией ограниченных возмущений и помех // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2014. — № 3. — С. 19—26.
21. Цыкунов А.М. Алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами по выходу // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2008. — № 8. — С. 7—12.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Цыкунов Александр Михайлович — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет, ✉ tsygunov\_al@mail.ru.

### Содержание сборника «Управление большими системами», 2015, вып. 56

- ✓ Белов М.В. Системно-инженерные и экономические аспекты управления жизненным циклом
- ✓ Иванов Н.Н. Стохастические сетевые графики с переменной структурой
- ✓ Легович Ю.С., Максимов Д.Ю. Выбор исполнителя в группе интеллектуальных агентов
- ✓ Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Взаимодействующие олигопольные и олигопсонные рынки Курно
- ✓ Марвин С.В. Альтернативная дробная модификация индекса Хирша, учитывающая количество авторов цитируемых статей
- ✓ Паламарчук Е.С. Оптимальное управление в задаче портфельного трекинга с учетом временных предпочтений инвестора
- ✓ Еременко Ю.И., Полещенко Д.А., Глущенко А.И. О применении нейросетевого оптимизатора параметров пирегулятора для управления нагревательными печами в различных режимах работы
- ✓ Пантелеев А.В., Летова Т.А., Помазуева Е.А. Параметрический синтез оптимального в среднем дробного ПИД-регулятора в задаче управления полетом
- ✓ Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Системная сеть с малым диаметром из малопортовых маршрутизаторов
- ✓ Стецюра Г.Г. Средства для расширения функций коммутируемых непосредственных оптических связей в цифровых системах

Тексты статей доступны на сайте <http://ubs.mtas.ru/>

