УДК 519.7

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ ПО ВЫХОДУ

А.М. Цыкунов

Рассмотрена задача слежения за эталонным сигналом для объекта, динамические процессы в котором описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Получен алгоритм управления, позволяющий осуществлять слежение за эталонным сигналом с требуемой точностью и компенсацию влияния параметрических и внешних ограниченных возмущений на регулируемую переменную. Полученный результат обобщен на нелинейные системы с запаздыванием по состоянию. Приведены числовой пример и результаты его моделирования.

Ключевые слова: робастное управление, запаздывание, функция Ляпунова, эталонный сигнал, возмущающее воздействие.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управления неопределенными объектами — одна из классических задач теории управления. Особое место в классе управляемых систем занимают объекты, динамические процессы в которых описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Это объясняется большим разнообразием нелинейных функций, которые могут входить в математическую модель объекта управления, в результате чего каждый объект требует индивидуального подхода при проектировании системы управления.

Наиболее распространены методы, базирующиеся на прямом методе Ляпунова и дифференциально-геометрической теории дифференциальных уравнений. В работе [1] решаются задачи проектирования различных систем управления для разных классов нелинейных объектов с помощью прямого метода Ляпунова. В работах [2—4] приведена теория построения эквивалентных математических моделей, позволяющая преобразовывать исходные нелинейные уравнения в более простые, а иногда даже в линейные [4], и тем самым упрощать процессы анализа и синтеза систем управления, а также применять ранее разработанные методы проектирования. Дифференциально-геометрическая теория в работе [5] применена для выяснения вопросов управляемости нелинейными системами. В книге [6] приводятся результаты по преобразованию нелинейных уравнений к каноническим формам, что дополняет ранее полученные результаты [1], решаются задачи управления для неопределенных объектов, с помощью метода скоростного градиента проектируются алгоритмы адаптации и пассификации. Обзор работ по пассификации и пассивности нелинейных систем выполнен в работе [7]. Эффективный метод синтеза систем регулирования по выходу, заключающийся в обратном обходе интегратора [8], применяется для проектирования различных типов систем, например, для построения адаптивных и робастных систем управления по выходу [9], для глобальной стабилизации нелинейной системы [6]. Обширную библиографию по эквивалентному преобразованию нелинейных систем можно найти в работах [2, 3, 6], а по различным методам проектирования алгоритмов управления для различных классов объектов — в работах [1, 6, 7, 9].

Как правило, для нелинейных систем решаются задачи стабилизации, а при наличии внешних возмущений требуется обеспечение устойчивости.

В отличие от известных работ по управлению нелинейными системами, в данной статье выделяется сигнал, несущий информацию о возмущениях. Он используется для получения оценки возмущения, что позволяет получить алгоритм управления, компенсирующий параметрические и внешние ограниченные возмущения. Полученный результат обобщается на нелинейные системы с запаздыванием по состоянию. Для иллюстрации работоспособности полученных алгоритмов управления приводится числовой пример и результаты моделирования спроектированной системы управления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого представляет собой дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(x, \xi) + b(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)),$$
$$y(t) = h(x), \quad x(0) = x_0, \qquad (1)$$

где $x \in M \subset R^n$ — вектор состояния, $u \in R$, $y \in Y \subset R$ — управляющее воздействие и регулируемая переменная, $f(x, \xi)$, $b(x, \xi)$, $h(x)$ — гладкие функции соответствующего порядка, $\varphi(x, t)$ — функция, в которой сконцентрированы внутренние и внешние возмущения, $\xi \in \Xi$ — вектор неизвестных параметров, Ξ — ограниченное множество возможных значений вектора ξ, $x_0 \in M$ — вектор начальных условий.

Формулируется традиционная задача слежения за эталонным сигналом $y_m(t) \in R$. Требуется спроектировать алгоритмическое обеспечение управляющего устройства, обеспечивающего выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t > T_0, \qquad (2)$$

где $\delta > 0$, T_0 — время, по истечении которого динамическая ошибка $e(t) = y(t) - y_m(t)$ должна иметь значение, удовлетворяющее приведенному неравенству. При этом все сигналы в замкнутой системе должны быть ограниченны.

Будем решать сформулированную задачу при следующих предположениях.

Функции $f(x, \xi)$, $b(x, \xi)$, $h(x)$ гладкие, и для любых $x \in M$, $\xi \in \Xi$ выполнены условия:

$$L_b h = L_b L_f^1 h = \ldots = L_b L_f^{n-2} = 0,$$
$$\beta(x, \xi) = L_b L_f^{n-1} > 0,$$

где $L_f^1 h = \dfrac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$, $L_b h = \dfrac{\partial h(x)}{\partial x} b(x)$ — производные Ли от функции $h(x)$ по направлению векторов $f(x)$ и $b(x)$ соответственно, а производные высших порядков вычисляются по формулам $L_f^2 h = L_f(L_f^1 h)$, $L_f^k = L_f(L_f^{k-1} h)$.

Векторная функция $\bar{x}(t) = \phi(x) = [y, y', \ldots, y^{n-1}]^T = [h(x), L_f^1 h, \ldots, L_f^{n-1}]^T$, взаимно однозначная, т. е. существует гладкая обратная функция $\phi^{-1}(\bar{x})$.

Функция $c(x, \xi) = L_f^n h$ ограниченная или ограниченная по переменной ξ и удовлетворяет условию Липшица по вектору $x \in M$.

Функция $\varphi(x, t)$ ограниченная или ограниченная по переменной t и удовлетворяет условию Липшица по вектору $x \in M$.

Эталонный сигнал $y_m(t)$ и его производные до n-го порядка должны быть ограниченными функциями. ♦

Отметим, что ограничения 1 и 2 такие же, как в работах [2, 6]. Они гарантируют преобразование математической модели (1) в каноническую форму, которая используется для получения алгоритма управления. Условия 3—5 требуются для обеспечения работоспособности системы управления. Например, если функция $\varphi(x, t)$ будет не ограничена по переменной t, управляющее воздействие тоже будет не ограничено, что недопустимо для работоспособности системы управления. Таким образом, приведенные ограничения выделяют класс нелинейных объектов, математическая модель которых может быть преобразована в каноническую форму, и для которых разрешима задача компенсации влияния параметрических и внешних возмущений на регулируемую переменную.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Процесс решения сформулированной задачи состоит из следующих этапов:

— исходную математическую модель преобразуем к каноническому виду и формируем систему получения сигнала, который несет информацию о параметрических и внешних возмущениях;

— формируем алгоритм управления, используя оценки возмущений, для чего будем использовать наблюдатель производных.

Если выполнено первое условие предположений то, продифференцировав уравнение выхода в модели (1) n раз, получим

$$P^n y(t) = c(x, \xi) + \beta(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)), \qquad (3)$$

где $P = d/dt$ — оператор дифференцирования. Учитывая выражение (3), составим уравнение для ошибки $e(t) = y(t) - y_m(t)$:

$$P^n e(t) =$$
$$= c(x, \xi) + \beta(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)) - P^n y_m(t). \qquad (4)$$

Введем новое управляющее воздействие $v(t)$

$$u(t) = \alpha v(t), \quad \alpha > 0. \tag{5}$$

Возьмем вспомогательный контур, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$Q(P)e_v(t) = \gamma v(t). \tag{6}$$

Здесь $\gamma > 0$, $Q(P)$ — линейный дифференциальный оператор n-го порядка, такой, что полином $Q(\lambda)$ гурвицев, где λ — комплексная переменная в преобразовании Лапласа, e_v — скалярный выход вспомогательного контура. Составим уравнение для сигнала рассогласования $\varsigma(t) = e(t) - e_v(t)$, вычитая уравнение (6) из уравнения (4) и принимая во внимание формулу (5):

$$Q(P)\varsigma(t) = \psi(x, \xi, y_m, t), \tag{7}$$

где $\psi(x, \xi, y_m, t) = c(x, \xi) + \beta(x, \xi)\varphi(x, t)) - P^n y_m(t) + Q_{n-1}(P)e(t) + (\beta(x, \xi)\alpha - \gamma)v(t)$ — обобщенное возмущение, $Q_{n-1}(P)$ — дифференциальный оператор степени $n - 1$, полученный из оператора $Q(P)$ путем удаления старшей производной.

Таким образом, получен сигнал $\varsigma(t)$, несущий информацию о параметрических и внешних возмущениях. Идеальный закон управления, позволяющий скомпенсировать влияние возмущений на регулируемую переменную, имеет вид

$$v(t) = -\frac{1}{\gamma}\psi(x, \xi, y_m, t) = -\frac{1}{\gamma}Q(P)\varsigma(t).$$

Однако, он нереализуем, так как производные выходного сигнала не измеряются. Поэтому необходимо получить оценки производных.

Введем векторы $\theta(t) = [\varsigma(t), P\varsigma(t), ..., P^n\varsigma(t)]^T$, $z(t) = [\bar{\varsigma}(t), \varsigma_1(t), ..., \varsigma_n(t)]^T$, где $\bar{\varsigma}(t)$, $\varsigma_i(t)$ — оценки сигнала $\varsigma(t)$ и его производных. Сформируем управляющее воздействие $v(t)$ в виде

$$v(t) = -\frac{1}{\gamma}g^T z(t). \tag{8}$$

Здесь g — вектор, компоненты которого коэффициенты оператора $Q(P)$, записанные в обратном порядке. Оценки производных будем получать с помощью наблюдателя [10], математическая модель которого имеет вид

$$\dot{z}(t) = \Gamma_0 z(t) + d_0(\varsigma(t) - \bar{\varsigma}(t)), \quad \bar{\varsigma}(t) = L_1 z(t). \tag{9}$$

Здесь $z(t) \in R^{n+1}$, $\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $d_0 = \left[\frac{d_1}{\mu}, ..., \frac{d_{n+1}}{\mu^{n+1}}\right]$, $L_1 = [1, 0, ..., 0]$, числа $d_1, ..., d_{n+1}$ выбираются так, чтобы матрица $\Gamma = \Gamma_0 + \bar{d}L_1$ была гурвицевой, $\bar{d}^T = [d_1, ..., d_{n-1}]$, $\mu > 0$ — достаточно малая величина. Отметим, что порядок уравнения (9) на единицу больше, чем это необходимо при реализации. Это сделано для упрощения преобразований при доказательстве работоспособности.

Преобразуем уравнение (8), принимая во внимание идеальный закон управления

$$v(t) = -\frac{1}{\gamma}\psi(x, \xi, y_m, t) + \frac{1}{\gamma}g^T\Delta(t),$$

где $\Delta(t) = \theta(t) - z(t)$. Подставим в полученную формулу выражение для $\psi(x, \xi, y_m, t)$ из уравнения (7):

$$v(t) = -\frac{1}{\gamma}(c(x, \xi) + \beta(x, \xi)\varphi(x, t)) - P^n y_m(t) + $$
$$+ Q_{n-1}(P)e(t) + (\beta(x, \xi)\alpha - \gamma)v(t)) + \frac{1}{\gamma}g^T\Delta(t). \tag{10}$$

Разрешим уравнение (10) относительно переменной $v(t)$:

$$v(t) = -\frac{1}{\alpha}(c(x, \xi) + \varphi(x, t)) -$$
$$- \frac{1}{\beta(x, \xi)\alpha}(Q_{n-1}(P)e(t) - P^n y_m(t) + g^T\Delta(t)). \tag{11}$$

Подставив это значение в выражение (5), а полученный результат — в уравнение (4), получим

$$Q(P)e(t) = g^T\Delta(t). \tag{12}$$

Принимая во внимание гурвицевость полинома $Q(\lambda)$, можно сделать вывод, что для выполнения целевого условия (2) величина $|\Delta(t)|$ должна быть меньше δ.

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия предположений. Тогда существует число* $\mu_0 > 0$ *такое, что при* $\mu < \mu_0$ *алгоритм управления* (5), (6), (8), (9) *обеспечивает выполнение целевого неравенства* (2). *При этом все сигналы в замкнутой системе ограничены.* ♦

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

3. ОБОБЩЕНИЕ НА СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

Рассмотрим объект, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau), \xi) + b(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)),$$
$$y(t) = h(x), \quad x(s) = \sigma(s), \quad s \in [-\tau; 0], \tag{13}$$

где $\sigma(s)$ — начальная ограниченная векторная функция, τ — постоянное время запаздывания. Остальные обозначения такие же, как в уравнении (1).

Формулируется задача слежения за эталонным сигналом с целевым условием (2).

Введем следующие обозначения:

$$\bar{L}_f^1 h = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x, x(t-\tau), \xi),$$

$$\bar{L}_f^2 h = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{L}_f^1 h) f(x, x(t-\tau), \xi) + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial x(t-\tau)}(\bar{L}_f^1 h) f(x(t-\tau), x(t-2\tau), \xi),$$

$$\bar{L}_f^n h = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x(t-i\tau)}(\bar{L}_f^{n-1} h) \times$$
$$\times f(x(t-i\tau), x(t-(i+1)\tau), \xi),$$

$$L_{bu}\bar{L}_f^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i u(t-i\tau) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x(t-i\tau)}(\bar{L}_f^{n-1} h) b(x(t-i\tau), \xi) u(t-i\tau).$$

Пусть выполнены **ограничения.**

1. Функции $f(x, x(t-\tau), \xi)$, $b(x, \xi)$, $h(x)$ гладкие по переменным $x(t)$, $x(t-\tau)$, и для любых $x \in M$, $\xi \in \Xi$, выполнены условия:

$$L_b h = L_b \bar{L}_f^1 h = \ldots = L_b \bar{L}_f^{n-2} = 0, \quad \beta_0 > 0.$$

2. Векторная функция $\bar{x}(t) = \phi(x(t), x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau) = [y, y', \ldots, y^{n-1}]^T = [h(x), \bar{L}_f^1 h, \ldots, \bar{L}_f^{n-1}]^T$ взаимно однозначная, когда $x(t-i\tau) = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$, т. е. существует гладкая обратная функция $\phi^{-1}(\bar{x})$.

3. Разностные уравнения $\phi(x(t), x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau)) = 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i u(t-i\tau) = 0$ асимптотически устойчивые относительно переменных $x(t)$и $u(t)$. Кроме того, решение разностного уравнения $\phi(x(t), x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau)) = [y, y', \ldots, y^{n-1}]^T$ ограничено, если вектор $[y, y', \ldots, y^{n-1}]^T$ ограничен.

4. Функция $c(x(t), x(t-\tau), \ldots, x(t-n\tau), \xi) = L_f^n h$ ограниченная или ограниченная по переменной ξ и удовлетворяет условию Липшица по векторам $x(t-i\tau)$, $i = 0, \ldots, n$, $x \in M$.

5. Функция $\varphi(x, t)$ ограниченная или ограниченная по переменной t и удовлетворяет условию Липшица по вектору $x \in M$.

6. Эталонный сигнал $y_m(t)$ и его производные до n-го порядка ограниченные функции. ♦

В данном случае условия 1—3 обеспечивают возможность преобразования математической модели (13) в каноническую форму, а ограничения 5 и 6 необходимы для обеспечения работоспособности системы управления. Отметим условие 3, которое подчеркивает специфику систем с запаздыванием.

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия ограничений. Тогда существует число* $\mu_0 > 0$ *такое, что при* $\mu < \mu_0$ *алгоритм управления* (5), (6), (8), (9) *обеспечивает выполнение целевого неравенства* (2). *При этом все сигналы в замкнутой системе ограничены.* ♦

Доказательство утверждения и способ получения ранее полученного алгоритма управления (5), (6), (8), (9) точно такие же, как в предыдущем случае. Отличие составляют рассуждения при доказательстве ограниченности управляющего воздействия, для чего используется условие 3 ограничений.

Замечание. При технической реализации алгоритма управления следует учесть тот факт, что в условиях утверждения везде требуется гладкость сигналов. В системах управления, где используются наблюдатели производных, при нарушении этого условия выходные сигналы наблюдателя становятся большими, что ведет к увеличению сигналов управления. Такая ситуация появляется в момент включений, а в системах с запаздыванием в момент времени $t = \tau$. Если в линейных системах это приводит только к увеличению управляющего воздействия, то нелинейная система может стать неустойчивой, если замкнутая система неустойчива в большом. Поэтому целесообразно выходные сигналы наблюдателя искусственно ограничить в разумных пределах. ♦

4. ПРИМЕР

Предположим, что математической моделью объекта управления служит следующая система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \xi_1 \mathrm{arctg} x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + \xi_2(x_2(t-\tau) - x_3(t-\tau)), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)x_2(t) + x_1(t-\tau)x_3(t-\tau) + \\ \qquad + (1 + (\mathrm{arctg} x_2(t))^2)(u(t) + \varphi(x, t)), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2 + x_1(t-\tau)x_3(t-\tau) - x_3(t) + \\ \qquad + (1 + (\mathrm{arctg} x_2(t))^2)(u(t) + \varphi(x, t)), \\ y(t) = x_1(t), \quad x(s) = \sigma(s), \quad s \in [-\tau; 0]. \end{cases}$$

Класс неопределенности задан соотношениями: $\xi_1 \in [-3; 3]$, $\xi_2 \in [-0,5; 0,5]$, $\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(x_i) + f(t)$,

$f(t) = \sin t$, $\varphi_i(x_i) = x_i^3$, если $|x_i^3| < a_i$, $\varphi_i(x_i) = a_i \mathrm{sign} x_i^3$, если $|x_i^3| \geqslant a_i$, $a_i \in [5; 15]$.

В данном случае

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot y(t) \\ \ddot y(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \xi_1 \mathrm{arctg} x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + \xi_2(x_2(t-\tau) - x_3(t-\tau)) \\ \dfrac{\xi_1}{1+x_1^2}(\xi_1 \mathrm{arctg} x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + \\ + \xi_2(x_2(t-\tau) - x_3(t-\tau))) + x_3(t) + \xi_2 x_3(t-\tau) \end{pmatrix},$$

$$L_{bu}\bar L_f^{n-1} = (1 + \mathrm{arctg} x_2(t))u(t) + \\ + \xi_2(1 + (\mathrm{arctg} x_2(t-\tau))^2)u(t-\tau),$$

$$c(x(t), x(t-\tau), ..., x(t-n\tau), \xi) =$$

$$= \left(\frac{\xi_1^2(1 - 2x_1 \mathrm{arctg} x_1)}{(1+x_1^2)^2} - \frac{2\xi_1 x_1}{(1+x_1^2)^2}(x_2(t) - x_3(t) + \right.$$

$$\left. + \xi_2(x_2(t-\tau) - x_3(t-\tau)))\right)(\xi_1 \mathrm{arctg} x_1(t) + x_2(t) -$$

$$- x_3(t) + \xi_2(x_2(t-\tau) - x_3(t-\tau))) -$$

$$- \left(1 - \frac{\xi_1}{1+x_1^2}\right)x_3 - \left(\xi_2 - \frac{\xi_1\xi_2}{1+x_1^2}\right)x_3(t-\tau).$$

Имеем неустойчивый нелинейный объект с запаздыванием по состоянию. В области начальных условий $\{x \in M \subset R^3 : |x_i| \leqslant 10,\ i = 1, 2, 3\}$ все условия ограничений выполнены.

Управление (5) и уравнение вспомогательного контура (6) выберем в виде

$$u(t) = 70v(t), \quad (P^3 + 9P^2 + 12P + 18)e_v(t) = 5v(t).$$

Возьмем уравнение наблюдателя производных (9)

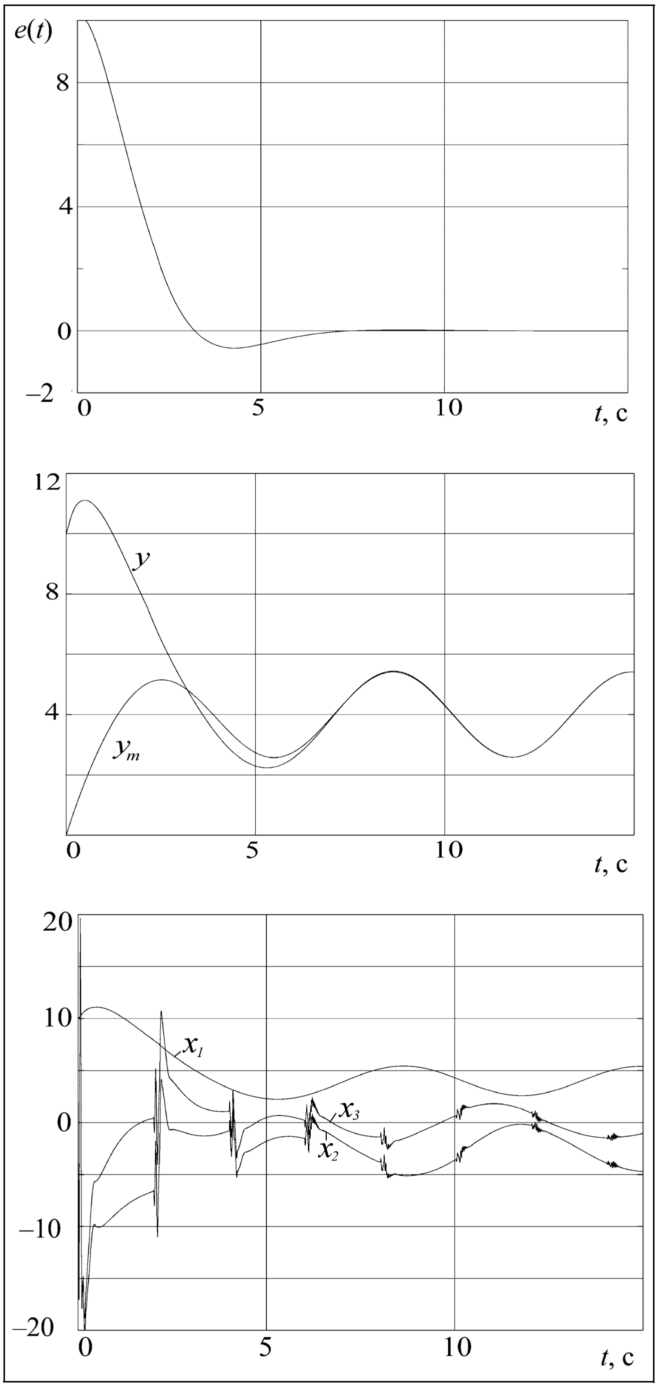
$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 + \dfrac{9}{\mu}(\varsigma - \bar\varsigma), \\ \dot z_2 = z_3 + \dfrac{12}{\mu^2}(\varsigma - \bar\varsigma), \\ \dot z_3 = \dfrac{8}{\mu^3}(\varsigma - \bar\varsigma), \quad \bar\varsigma = z_1, \quad \varsigma = e - e_v, \quad e = y - y_m. \end{cases}$$

Как уже отмечалось, на оценки производных целесообразно ввести ограничения: $\bar z_2 = z_2$, если $|z_2| < 20$, $\bar z_2 = 20\mathrm{sign} z_2$, если $|z_2| \geqslant 20$, $\bar z_3 = z_3$, если $|z_3| < 20$, $\bar z_3 = 20\mathrm{sign} z_3$, если $|z_3| \geqslant 20$, $\bar z_4 = \dot z_3$, если $|\dot z_3| < 20$, $\bar z_4 = 20\mathrm{sign}\dot z_3$, если $|\dot z_3| \geqslant 20$.

Будем вычислять управляющее воздействие $v(t)$ по формуле

$$v(t) = -0{,}2(\bar z_4 + 9\bar z_3 + 12\bar z_2 + 18 z_1).$$

На рисунке приведены результаты моделирования при следующих исходных данных: $\mu = 100$, $\tau = 2$, $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 0{,}5$, $a_1 = 10$, $\sigma(s) = 0$, $s \in [-\tau; 0)$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 10$. Остальные начальные условия нулевые.



Переходные процессы в следящей системе

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Повышенный интерес к нелинейным системам объясняется тем, что математические модели большинства объектов управления описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Мощными средствами анализа и синтеза нелинейных систем управления служит прямой метод Ляпунова и дифференциально-геометрическая теория. Однако, несмотря на то, что аналитически эти методы хорошо обоснованы и есть множество статей и книг, посвященных этому обоснованию, например, [1—6], конструктивные результаты удается получить только при определенных ограничениях на математические модели объектов управления. Это связано с тем, что многие результаты, полученные в рамках теории, зачастую требуют наличия такой информации об объекте управления или его математической модели, которую невозможно или слишком сложно получить. Например, часто требуется знание функции Ляпунова для данного объекта или ее необходимо найти из решения некоторого уравнения, что зачастую представляет собой аналитически неразрешимую задачу.

В данной статье рассмотрен класс нелинейных объектов, математические модели которых можно преобразовать в канонические формы. Для получения оценки параметрических и внешних возмущений вводится вспомогательный контур, который позволяет выделить сигнал несущий информацию о возмущениях. С помощью наблюдателя производных получается оценка возмущений. Формируя управление, противоположное по знаку оценке возмущений, осуществляется их компенсация.

В статье приведен числовой пример, для которого дифференциально-геометрическая теория не применима, поскольку она отсутствует для таких классов объектов. Можно попытаться воспользоваться теорией функционалов Ляпунова—Красовского, но выбрать необходимый функционал — довольно сложная проблема. Сложность усугубляется наличием параметрических, априорно неопределенных, возмущений, и действием на объект ограниченных не измеряемых возмущений. Предлагаемый подход позволил, относительно просто, решить сформулированную задачу.

Основные недостатки полученного алгоритма управления:

— отсутствует аналитически обоснованный алгоритм определения величин α и μ;

— применение наблюдателя производных требует подбора ограничений на его выходные сигналы, что необходимо для ограничения управляющего воздействия в момент включения системы в работу; поэтому эти параметры приходится выбирать на этапе моделирования системы.

К достоинствам следует отнести его простоту и легко проверяемые условия для математической модели объекта управления, а самое главное — это возможность компенсации влияния параметрических и внешних возмущений на регулируемые переменные.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача слежения за эталонным сигналом для объектов, математической моделью которых служат нелинейные дифференциальные уравнения с запаздыванием по состоянию. На объект действуют ограниченные внешние, неизмеряемые возмущения, а также присутствуют параметрические возмущения. Выделен класс нелинейных объектов управления, для которых может быть решена задача компенсации внешних и параметрических возмущений, когда измерению доступны регулируемая переменная и управляющее воздействие. Получен алгоритм управления для данного класса объектов, обеспечивающий инвариантность следящей системы к внешним и параметрическим возмущениям с требуемой точностью.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Составим уравнение для нормированного вектора ошибок оценивания производных, принимая во внимание модель (9):

$$\eta(t) = T^{-1}(z(t) - \theta(t)), \quad T = \mathrm{diag}\{\mu^n, ..., \mu, 1\},$$

$$\mu_1 \dot{\eta}(t) = \Gamma\eta(t) - \mu_2 b_1 \varsigma^{n+1}(t), \ \varsigma(t) - \bar{\varsigma}(t) = \mu^n L_1 \eta(t), \quad (\text{П}.1)$$

где $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ $b_1^T = [0, ..., 0, 1]$. Преобразуем уравнение (12) в векторно-матричную форму

$$\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t) - b_1 g^T T\eta(t), \quad e(t) = L_1\varepsilon(t). \quad (\text{П}.2)$$

Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма [11]. *Если динамическая система описывается уравнением*

$$\dot{x}(t) = f(x, \mu_1, \mu_2), \ x(t) \in R^n, \ \mu_1 > 0, \ \mu_2 > 0, \quad (\text{П}.3)$$

где $f(x, \mu_1, \mu_2)$ — непрерывная функция, липшицева по x, и при $\mu_2 = 0$ система (П.3) *имеет ограниченную замкнутую область диссипативности*

$$D_x = \{x : F(x) \leqslant K\}, \quad (\text{П}.4)$$

где $F(x)$ *— непрерывная, кусочно-гладкая, положительно определенная в* R^n *функция, такая, что при некоторых* $\varepsilon > 0$ *и* $\mu_0 > 0$ *выполнено неравенство*

$$\sup_{\mu_i \leqslant \mu_0}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^T f(x, \mu_1, 0)\right] \leqslant -\varepsilon \text{ при } F(x) = C$$

тогда для всех достаточно малых μ_1, $\mu_2 \leqslant \mu_0$ *множество* (П.4) *остается областью диссипативности системы* (П.3). ♦

Если $\mu_2 = 0$ в уравнении (П.1), то система (П.1), (П.2) асимптотически устойчива в области M так, как матрицы Γ и A гурвицевы. Условия леммы выполнены. Требуется доказать ограниченность всех сигналов в замкнутой системе. В этом случае переменная $y(t)$ и n ее производных ограничены в силу условия 5 предположений. Из условия 2 предположений следует ограниченность вектора $x(t)$. Принимая во внимание условия 3—5, из формул (11) и (5) получаем ограниченность управляющего воздействия. Тогда из формулы (6) следует ограниченность сигнала $e_v(t)$ и его производных, а из формулы (7) — ограниченность переменной $\varsigma(t)$ и ее производных. Найдем область притяжения системы (П.1), (П.2), когда $\mu_2 \neq 0$. Пусть $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Возьмем функцию Ляпунова

$$V = \varepsilon^T(t)H\varepsilon(t) + \eta^T(t)\Lambda\eta(t), \qquad (\text{П}.5)$$

где положительно-определенные симметрические матрицы H, Λ являются решением матричных уравнений

$$HA + A^TH = -\rho_1 I,\ \Lambda\Gamma + \Gamma^T\Lambda = -\rho_2 I. \qquad (\text{П}.6)$$

Здесь $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, I — единичная матрица.

Вычислим полную производную от функции (П.5) на траекториях системы (П.1), (П.2), принимая во внимание уравнения (П.6):

$$\dot V = -\rho_1|\varepsilon(t)|^2 - 2\varepsilon^T(t)Hb_1g^TT\eta(t) - -\frac{\rho_2}{\mu_0}|\eta(t)|^2 - 2\eta^T\Lambda b_1\varsigma^{n+1}(t). \qquad (\text{П}.7)$$

Воспользуемся оценками:

$$-2\varepsilon^T(t)Hb_1g^TT\eta(t) \leqslant \mu_0|\varepsilon(t)|^2 + \frac{1}{\mu_0}k_1|\eta(t)|^2,$$

$$k_1 = \|T^Tgb_1^T HHb_1g^TT\|,$$

$$-2\eta^T\Lambda b_1\varsigma^{n+1}(t) \leqslant \frac{1}{\mu_0}|\eta(t)|^2 + \mu_0k_2,\quad k_2 = \sup_t|\Lambda b_1\varsigma^{n+1}(t)|^2.$$

Подставив полученные оценки в выражение (П.7), получим

$$\dot V \leqslant -(\rho_1 - \mu_0)|\varepsilon(t)|^2 - \left(\frac{\rho_2 - 1 - k_1}{\mu_0}\right)|\eta(t)|^2 + \mu_0k_2. \quad (\text{П}.8)$$

Если выбрать числа ρ_1, ρ_2 и ρ_3 из условий $\rho_1 - \mu_0 = \rho_0/\mu_0$, $\rho_2 - 1 - k_1 = \rho_0$, $\rho_0 > 0$, $\rho_3 = \min\left\{\frac{\rho_0}{\lambda_{\max}(H)}, \frac{\rho_0}{\lambda_{\max}(\Lambda)}\right\}$, где $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное число соответствующей матрицы, то из неравенства (П.8) получим $\dot V \leqslant -\frac{\rho_3}{\mu_0}V + \mu_0k_2$. Решим полученное неравенство

$$V(t) \leqslant V(0)\exp\left(-\frac{\rho_3}{\mu_0}t\right) + \frac{\mu_0^2k_3}{\rho_3}\left(1 - \exp\left(-\frac{\rho_3}{\mu_0}t\right)\right),$$

откуда следует

$$\delta^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(H)}V(t) \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(H)} \times \times\left(V(0)\exp\left(-\frac{\rho_3}{\mu_0}t\right) + \frac{\mu_0^2k_2}{\rho_3}\left(1 - \exp\left(-\frac{\rho_3}{\mu_0}t\right)\right)\right).$$

Из этой формулы можно сделать вывод, что, подставив в правую часть значение T_0 из условия (2), можно выбрать величину μ_0 таким образом, что величина δ будет иметь требуемое значение. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khalil H.J.* Nonlinear systems. — N.-J.: Prentice Hall, 1996.
2. *Isidori A.* Nonlinear control systems. — N.-Y.: Springer, 1995.
3. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005.
4. *Елкин В. И.* О редукции нелинейных управляемых систем к линейным // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 2. — С. 45—55.
5. *Sussmann H. J.* A general theorem on local controllability // SIAM J. Control optim. — 1987. — Vol. 25. — P. 138—194.
6. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000.
7. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л.* Пассивность и пассификация нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 3. — С. 3—37.
8. *Byrnes C.I., Isidori A.* New results and examples in nonlinear feedback stabilization // Systems and control letters. — 1989. — Vol. 12. — P. 437—442.
9. *Никифоров В.О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. — СПб.: Наука, 2003.
10. *Atassi A.N., Khalil H.K.* Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1999. — Vol. 44, N 9. — P. 1672—1687.
11. *Брусин В.А.* Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119—127.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Цыкунов Александр Михайлович — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет,
☎(8512) 61-42-48, ✉ tsykunov_al@mail.ru.