

# РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

А.М. Цыкунов

Исследована задача робастного управления для линейной системы с переключениями. Отмечено, что цель работы состоит в создании системы управления, обеспечивающей заданную ошибку слежения за эталонным сигналом при произвольных параметрах из класса возможных значений. Подчеркнуто, что измерению доступны только скалярные вход и выход системы, а на каждую из подсистем действуют неизмеряемые ограниченные возмущения. Предложен алгоритм, гарантирующий отслеживание эталонного сигнала с требуемой точностью. Полученные результаты проиллюстрированы примером: слежение за эталонным сигналом в системе, состоящей из трех подсистем.

**Ключевые слова:** система с переключениями, робастное управление, функция Ляпунова, эталонный сигнал.

## ВВЕДЕНИЕ

С помощью дифференциальных уравнений с коммутлируемыми параметрами описываются системы управления дорожным движением, объекты энергетической и химической промышленности [1], различные экономические модели [2, 3]. Во многих опубликованных работах [4–11] исследуются различные аспекты работы таких систем объектов синтезируются для них соответствующие системы управления. Так, в работе [4] синтезирована система управления с помощью коммутлируемой функции Ляпунова.

Общий подход к анализу коммутлируемых систем при произвольном способе переключений параметров изложен в работе [5]. С помощью неравенства Ляпунова исследуется задача стабилизации [6], решается задача стабилизации для нелинейной системы с запаздыванием нейтрального типа, когда измерению доступен вектор состояния и сигнал переключения [7]. С помощью функционала Ляпунова — Красовского, который формируется для каждой подсистемы, получены матрицы обратной связи для каждой из подсистем. Окончательный результат формулируется в терминах матричных неравенств.

В работе [8] рассматривается линейная система с запаздыванием по состоянию. Управляющим параметром служит сигнал переключения, алгоритм

формирования которого и получают. Исследования опираются на принцип расширенной инвариантности [9], применение геометрического подхода [10], методы теории робастного управления [11]. Получен критерий существования общей квадратичной функции Ляпунова для множества линейных систем второго порядка [12]. Гибридные механические системы с переключающимися силовыми полями, математическими моделями которых служат дифференциальные уравнения второго порядка, исследованы в работах [13–15].

В настоящей работе переключение параметров рассматривается как параметрические возмущения, это позволило, используя полученные ранее результаты [16], предложить робастный алгоритм управления, позволяющий без переключения параметров управляющего устройства качественно управлять объектом с коммутлируемыми параметрами при наличии неконтролируемых ограниченных внешних возмущений.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(q(t))x(t) + B(q(t))u(t) + E(q(t))f(t), \\ y(t) &= Lx(t),\end{aligned}\quad (1)$$



где  $x \in R^n$  — вектор состояния,  $y \in R$ ,  $u \in R$  — регулируемая и управляющая переменные,  $f \in R$  — внешнее возмущающее воздействие,  $A(q(t))$ ,  $B(q(t))$ ,  $E(q(t))$  — набор постоянных числовых матриц,  $q(t): [t_0, \infty) \rightarrow I = \{1, \dots, r\}$  — сигнал переключений. В зависимости от его значения осуществляется коммутация матриц в уравнении (1). Иными словами, имеется  $r$  наборов матриц  $A(q(t))$ ,  $B(q(t))$ ,  $E(q(t))$ , которые коммутируются в процессе функционирования системы по сигналу  $q(t)$ .

Требуется получить алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta, \text{ когда } t > t_0 \quad (2)$$

для любого данного набора матриц при произвольном сигнале переключений. В данном случае  $y_m(t)$  — эталонный ограниченный сигнал, который должен отслеживаться с заданной погрешностью  $\delta$  за некоторое конечное время  $t_0$ .

Будем решать хорошо известную задачу слежения за эталонным сигналом для объекта с коммутируемыми параметрами при следующих **предположениях**.

1. Объект (1) является стабилизируемым для любых значений  $q(t)$ .
2. Элементы матриц неизвестны, но известны диапазоны их возможных значений.
3. Известна максимально возможная относительная степень  $\gamma = \max \gamma_i$ ,  $\gamma_i = n - m_i$  для передаточных функций подсистем  $W(\lambda) = R_{m_i}(\lambda)/Q_n(\lambda) = L(\lambda I_n - A(i))^{-1}B(i)$ , где  $\lambda$  — комплексная переменная в преобразовании Лапласа,  $n$ ,  $m_i$  — порядки полиномов,  $I_n$  — единичная матрица порядка  $n \times n$ .
4. Возмущающее воздействие  $f(t)$  и эталонный сигнал  $y_m(t)$  — гладкие ограниченные функции.
5. Измерению доступна регулируемая переменная, но ее производные не измеряются.
6. Сигнал коммутации  $q(t)$  не измеряется.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Преобразуем уравнение (1) к форме «вход — выход» и запишем его в операторном виде

$$Q_n(p, q(t))y(t) = R_{m_i}(p, q(t))u(t) + G_g(p, q(t))f(t), \quad (3)$$

где  $p$  — оператор дифференцирования,  $Q_n(p, q(t))$ ,  $R_{m_i}(p, q(t))$ ,  $G_g(p, q(t))$  — линейные операторы, параметры которых коммутируются по сигналу  $q(t)$ . Индексы у операторов здесь и далее указывают на их порядок. Оператор  $Q_n(p, q(t))$  — нормированный.

Воспользуемся очевидным полиномиальным равенством

$$Q_\gamma(p)M_{n-1}(p, i) = Q_n(p, i)S_{\gamma_i-1}(p, i) + N_{n+\gamma-2}(p, i). \quad (4)$$

Здесь все полиномы нормированные и многочлены  $Q_\gamma(p, i)$ ,  $M_{n-1}(p, i)$ ,  $S_{\gamma_i-1}(p, i)$  являются гурвицевыми. Очевидно, что всегда существует полином  $N_{n+\gamma-2}(p, i)$ , обеспечивающий равенство (4). Соотношение (4) доказано для структурно-неопределенных многосвязных объектов [17], что справедливо, в частности, для объектов вида (1).

Умножим уравнение (4) на  $y(t)$  и в первое слагаемое правой части подставим  $y(t)$ , определенное из уравнения (3):

$$Q_\gamma(p)M_{n-1}(p, i)y(t) = S_{\gamma_i-1}(p, i) \times (R_{m_i}(p, i)u(t) + G_g(p, i)f(t)) + N_{n+\gamma-2}(p, i)y(t).$$

Выполним «операторное деление»

$$\frac{S_{\gamma_i-1}(p, i)R_{m_i}(p, i)}{M_{n-1}(p, i)} = r_0(i) + \frac{D_{n-2}(p, i)}{M_{n-1}(p, i)},$$

$$\frac{N_{n+\gamma-2}(p, i)}{M_{n-1}(p, i)} = G_{\gamma-1}(p, i) + \frac{K_{n-2}(p, i)}{M_{n-1}(p, i)}.$$

Здесь  $r_0(i)$  — коэффициент при старшей степени оператора  $R_{m_i}(p, i)$ . В результате выполненных преобразований получим

$$Q_\gamma(p)y(t) = r_0(i)u(t) + \chi_1(t, i),$$

где  $\chi_1(t, q(t)) = G_{\gamma-1}(p, i)y(t) + \frac{D_{n-2}(p, i)}{M_{n-1}(p, i)}u(t) + \frac{K_{n-2}(p, i)}{M_{n-1}(p, i)}y(t) + \frac{S_{\gamma_i-1}(p, i)G_g(p, i)}{M_{n-1}(p, i)}f(t).$

Введем новое управляющее воздействие  $v(t)$  в соответствии с формулой  $u(t) = \alpha v(t)$ ,  $\alpha > 0$ , и составим уравнение для ошибки слежения  $e(t) = y(t) - y_m(t)$ :

$$Q_\gamma(p)e(t) = v(t) + \chi(t, i). \quad (5)$$

Здесь  $\chi(t, i) = (r_0(i)(\alpha - 1)v(t) + \chi_1(t, i)) - Q_\gamma(p)y_m(t)$ .

Запишем уравнение (5) в векторно-матричной форме

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + b v(t) + b \chi(t, i),$$

$$e(t) = L_1 \varepsilon(t), \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\chi(t, i) = (r_0(i)(\alpha - 1)v(t) + \chi_1(t, i)) - Q_\gamma(p)y_m(t), \quad (6)$$

$$\chi_1(t, i) = -c_i Y(t) - \tau_i \sigma_i(t) + g_i \varphi_i(t) + \psi(t, i),$$

$$\dot{\sigma}_i(t) = D_i \sigma_i(t) + b y(t), \quad \dot{\varphi}_i(t) = D_i \varphi_i(t) + b u(t),$$

где  $L_1 = [1, 0, \dots, 0]$ ,  $b^T = [0, \dots, 0, 1]$ ,  $\sigma_i \in R^{n-1}$ ,

$$\varphi_i \in R^{n-1}, Y \in R^r, \varepsilon \in R^r, \psi(t, i) = \frac{S_{\gamma_i-1}(p, i) G_g(p, i)}{M_{n-1}(p, i)} \times$$

$\times f(t), Y^T(t) = [y(t), y'(t), \dots, y^{(\gamma-1)}(t)]$ ,  $c_i, \tau_i$  и  $g_i$  — матрицы-строки, элементами которых являются коэффициенты  $i$ -х операторов  $G_{\gamma+1}(p, i)$ ,  $K_{n-2}(p, i)$  и  $D_{n-2}(p, i)$  соответственно, записанные в обратном порядке,  $A_m$  и  $D_i$  — гурвицевы матрицы в форме Фробениуса, элементами которых являются коэффициенты операторов  $Q_\gamma(p)$  и  $M(p, i)$ . Введем матрицы

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_r \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{bmatrix}, r_0 = \begin{bmatrix} r_{01} \\ \vdots \\ r_{or} \end{bmatrix},$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \end{bmatrix}, \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_r \end{bmatrix}, \psi(t) = \begin{bmatrix} \psi(t, 1) \\ \vdots \\ \psi(t, r) \end{bmatrix}, \omega = [\omega_1, \dots, \omega_r],$$

$$\omega_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = q(t), \\ 0, & \text{если } i \neq q(t) \end{cases} \quad \text{и блочно-диагональные}$$

матрицы  $D = \text{diag}\{D_1, \dots, D_r\}$ ,  $B = \text{diag}\{b, \dots, b\}$ . Тогда уравнения (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) + b v(t) + b \chi(t), \quad e(t) = L_1 \varepsilon(t), \\ \chi(t) &= \omega((r_0 \alpha - 1)v(t) + CY(t) - T\sigma(t) + \\ &\quad + G\varphi(t) + \psi(t)) + Q_\gamma(p)y_m(t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{\sigma}(t) = D\sigma(t) + Bv(t), \quad \dot{\varphi}(t) = D\varphi(t) + Bu(t).$$

Получили систему уравнений, в которой все возмущения и неопределенность сконцентрированы в функции  $\chi(t)$ . При этом переключение параметров рассматривается как ступенчатые параметрические возмущения. Задача построения алгоритма управления состоит в подавлении этих возмущений.

Следуя работе [16], для выделения возмущений введем вспомогательный контур, математическая модель которого имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_b(t) = A_m \varepsilon_b(t) + b v(t), \quad e_b(t) = L_1 \varepsilon_b(t). \quad (8)$$

Составим уравнение для вектора рассогласований  $z(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_b(t)$ , вычитая уравнение (7) из уравнения (8):

$$\dot{z}(t) = A_m z(t) + b \chi(t), \quad \zeta(t) = e(t) - e_b(t) = L_1 z(t).$$

Пусть  $L_1(\lambda I - A_m)^{-1}b = 1/Q_\gamma(\lambda)$ . Следовательно,  $\chi(t) = Q_\gamma(p)\zeta(t)$ . Тогда из уравнения (7) и соотноше-

ния  $u(t) = \alpha v(t)$  следует, что идеальный закон управления определяется формулой  $u(t) = -Q_\gamma(p)\zeta(t)$ . В этом случае решение уравнения ошибки слежения (7) будет асимптотически устойчивым.

Поскольку производные входных и выходных переменных не измеряются, будем формировать сигнал управления  $v(t)$  в виде

$$v(t) = -q_m^T \xi(t), \quad (9)$$

где  $\xi^T(t) = [\bar{\zeta}(t), p\bar{\zeta}(t), \dots, p^{\gamma-1}\bar{\zeta}(t)]$  — вектор оценок производных сигнала  $\zeta(t)$ ,  $q_m$  — вектор, компонентами которого являются коэффициенты оператора  $Q_\gamma(p)$ , записанные в обратном порядке. Вектор  $\xi(t)$  получается с помощью наблюдателя [18]

$$\dot{\theta}(t) = \Gamma_0 \theta(t) + d_0(\zeta(t) - \bar{\zeta}(t)), \quad \bar{\zeta}(t) = L_1 \theta(t). \quad (10)$$

$$\text{Здесь } \xi(t) \in R^\gamma, \Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, d_0 = \begin{bmatrix} d_1 \\ \mu \\ \dots \\ d_\gamma \\ \mu^\gamma \end{bmatrix},$$

числа  $d_1, \dots, d_\gamma$  выбираются так, чтобы матрица  $\Gamma = \Gamma_0 + \bar{d} L_1$  была гурвицевой,  $\bar{d} = [d_1, \dots, d_\gamma]$ ,  $\mu > 0$  — достаточно малая величина. Введем два вектора  $\bar{\sigma}^T(t) = [\zeta(t), p\zeta(t), \dots, p^{\gamma-1}\zeta(t)]$ ,  $\eta(t) = \Gamma^{-1}(\theta(t) - \bar{\sigma}(t))$ ,  $\Gamma = \text{diag}\{\mu^{\gamma-1}, \dots, \mu, 1\}$ . Тогда, принимая во внимание равенство  $\dot{\bar{\sigma}}(t) = \Gamma_0 \bar{\sigma}(t) + b \zeta^\gamma(t)$ , из уравнений (10) получим уравнение для нормированных отклонений  $\eta(t)$

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{\mu} \Gamma \eta(t) - b p^\gamma \zeta(t),$$

$$\Delta(t) = \bar{\zeta}(t) - \zeta(t) = \mu^{\gamma-1} \eta_1(t) = \mu^{\gamma-1} L_1 \eta(t).$$

Подставим значение  $v(t)$  (9) в уравнение (7), в результате получим уравнение замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) + \mu^{\gamma-1} b q_m^T \bar{\Delta}(t), \quad e(t) = L_1 \varepsilon(t), \\ \dot{\varepsilon}_b(t) &= A_m \varepsilon_b(t) - b q_m^T \xi(t), \quad e_b(t) = L_1 \varepsilon_b(t), \\ \zeta(t) &= \varepsilon(t) - \varepsilon_b(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{\mu} \Gamma \eta(t) - b p^\gamma \zeta(t),$$

$$\Delta(t) = \bar{\zeta}(t) - \zeta(t) = \mu^{\gamma-1} \eta_1(t) = \mu^{\gamma-1} L_1 \eta(t),$$

где  $\bar{\Delta}^T(t) = [\eta_1(t), \eta_1'(t), \dots, p^\gamma \eta_1(t)]$ . Получили сингулярно-возмущенную систему уравнений, так как  $\mu$  — малая величина.

**Утверждение.** Пусть выполнены сделанные предположения (см. § 1). Тогда существует число  $\mu_0$  та-



кое, что при выполнении неравенства  $\mu < \mu_0$ , алгоритм управления (8)–(10) обеспечивает выполнение целевого условия (2) для объекта управления (1) при произвольном способе переключения параметров. ♦

Доказательство дано в Приложении.

Таким образом, благодаря преобразованию математической модели по ошибке слежения в форму (6), где переключения рассматриваются в качестве параметрических возмущений, удастся получить алгоритм управления без переключений. Кроме того, при анализе работоспособности достаточно воспользоваться одной функцией Ляпунова.

### 3. ПРИМЕР

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим систему (1), состоящую из трех подсистем, в которой

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad L = [1 \ 0 \ 0],$$

$$f(t) = \sin t + \sin 2,2t, \quad y_m(t) = 2\sin t + 2\sin 0,7t.$$

Все подсистемы неустойчивы и имеют разную относительную степень, наибольшая из них равна двум. Поэтому возьмем вспомогательный контур, который описывается уравнением

$$p^2 e_b(t) + 11p e_b(t) + 30e_b(t) = 10v(t), \quad u(t) = 2v(t),$$

$$e(t) = y(t) - y_m(t), \quad \zeta(t) = e(t) - e_b(t),$$

$$v(t) = -0,1(30\xi_1(t) + 11\xi_2(t) + 30\xi_3(t)),$$

где оценки производных сигнала  $\zeta(t)$  получаются с наблюдателя

$$\dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) + \frac{9}{\mu}(\zeta(t) - \xi_1(t)),$$

$$\dot{\xi}_2(t) = \xi_3(t) + \frac{12}{\mu}(\zeta(t) - \xi_1(t)),$$

$$\dot{\xi}_3(t) = \frac{9}{\mu}(\zeta(t) - \xi_1(t)), \quad x^T(0) = [2, 2, 2],$$

остальные начальные условия нулевые,  $\mu = 0,01$ .

На управляющее воздействие наложено ограничение  $|u(t)| \leq 50$ . Переключающий сигнал  $q(t)$  принимает зна-

чения 1, 2, 3. Соответственно подключаются параметры с данным номером. На рисунке представлены переходные процессы по ошибке и управлению, а также график изменения функции  $q(t)$ , которая управляет переключением параметров. Видно, что максимальные всплески сигнала ошибки при переключениях не превышают значения 0,04. Появление всплесков связано с тем, что для оценки производных используется наблюдатель с большим коэффициентом усиления. Однако, если сопоставить это значение с амплитудой эталонного сигнала, которая равна четырем, то получится очень маленькое значение относительной ошибки слежения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преобразование математической модели объекта управления к виду, когда переключения рассматриваются как параметрические возмущения, а также применение подхода построения робастных систем управления [16], позволило получить систему слежения, в которой подавляется обобщенное возмущение, в результате получается система с достаточно малой ошибкой слежения. Полученный результат легко обобщается на системы с запаздыванием, а также на достаточно большой класс нелинейных систем. К недостатку предложенного способа следует отнести тот факт, что не удастся получить аналитическую зависимость ошибки слежения от параметров управляющего устройства. Однако это препятствие легко преодолевается на этапе моделирования систем.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Так как система уравнений (11) сигулярно-возмущенная, анализировать ее работу будем в два этапа. Вначале исследуем редуцированную систему, а затем определим область притяжения системы.

Воспользуемся леммой [19] для системы уравнений

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + \mu_2^{\gamma-1} b q_m^T \bar{\Delta}(t), \quad e_b(t) = L_1 \varepsilon(t),$$

$$\mu_1 \dot{\eta}(t) = \Gamma \eta(t) - \mu_2 b P' \zeta(t),$$

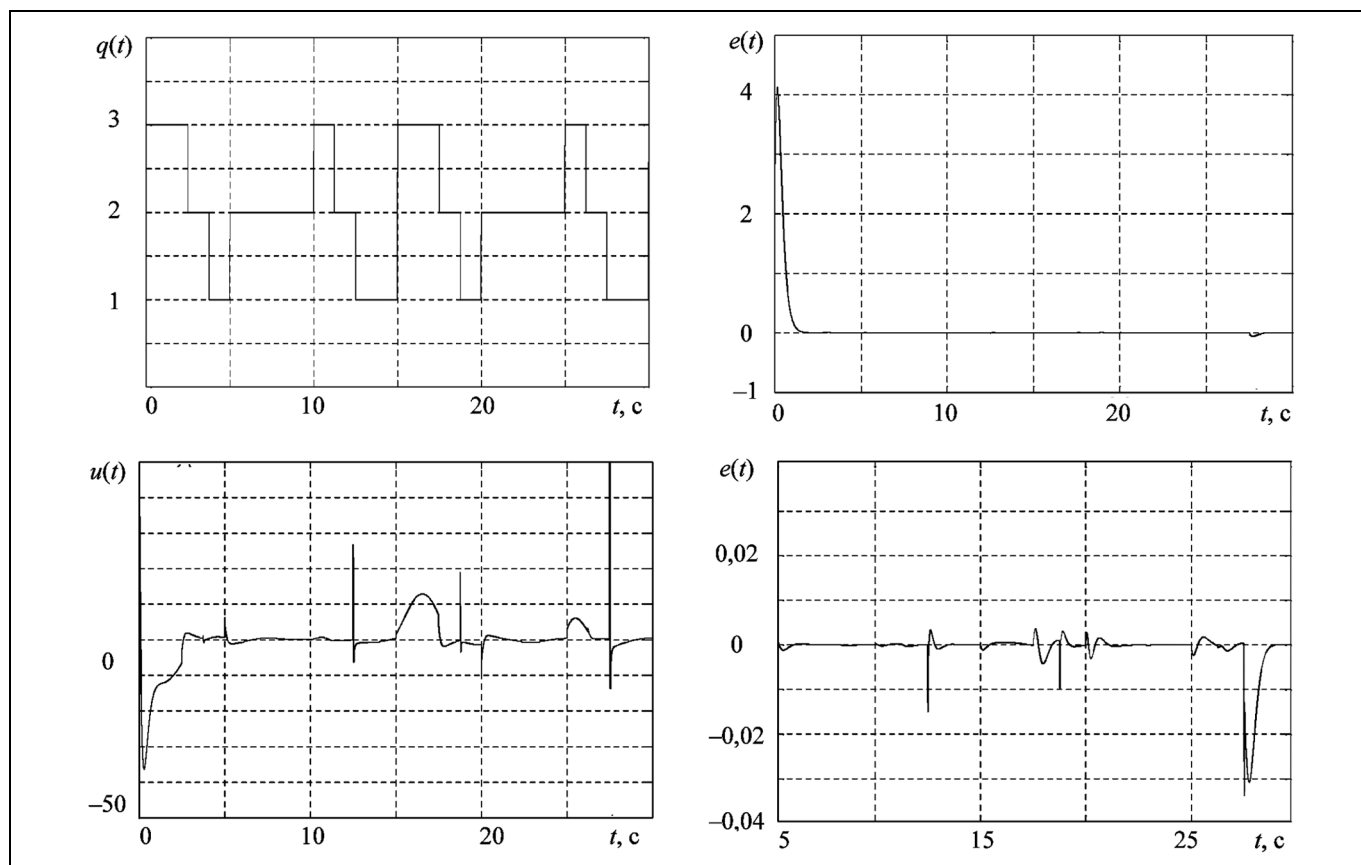
$$\Delta(t) = \bar{\zeta}(t) - \zeta(t) = \mu_1^{\gamma-1} \eta_1(t) = \mu_1^{\gamma-1} L_1 \eta(t), \quad (\text{П.1})$$

где  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ .

**Лемма.** Если динамическая система описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x, \mu_1, \mu_2), \quad x(t) \in R^n, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad (\text{П.2})$$

где  $x \in R^n$ ,  $f(x, \mu_1, \mu_2)$  — непрерывная функция, липшицева по  $x$ , и при  $\mu_2 = 0$  система имеет ограниченную замкнутую область диссипативности  $\Omega_x = \{x: F(x) \leq K\}$ , где  $F(x)$  — непрерывная, кусочно-гладкая, положительно-определенная



## Переходные процессы

в  $R^n$  функция, такая, что при некоторых  $\varepsilon > 0$  и  $\mu_0 > 0$  выполнено неравенство

$$\sup_{\mu_i \leq \mu_0} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^T f(x, \mu_1, 0) \right] \leq -\varepsilon \text{ при } F(x) = C,$$

тогда для всех достаточно малых  $\mu_1, \mu_2 \leq \mu_0$  множество  $\Omega_x$  остается областью диссипативности системы (П.2). ♦

Система уравнений (11) является автономной, поэтому к ней можно применить данную лемму. Пусть в системе уравнений (П.1)  $\mu_2 = 0$ . Тогда

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t), \quad e(t) = L_1 \varepsilon(t),$$

$$\mu_1 \dot{\eta}(t) = \Gamma \eta(t),$$

$$\Delta(t) = \bar{\zeta}(t) - \zeta(t) = \mu_1^{\gamma-1} \eta_1(t) = \mu_1^{\gamma-1} L_1 \eta(t),$$

откуда имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$ . Следовательно,

выполнены соотношения  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = Y_m(t), \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Delta}(t) = 0,$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ , где  $Y_m^T(t) = [y_m(t), y'_m(t), \dots, p^{\gamma-1} y_m(t)]$ .

Из уравнений  $\dot{\varepsilon}_b(t) = A_m \varepsilon_b(t) - b q_m^T \xi(t), e_b(t) = L_1 \varepsilon_b(t), \zeta(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_b(t)$  следует  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_b(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = 0$ .

Рассмотрим функцию  $\chi(t)$ , которая является обобщенным возмущением

$$\chi(t) = -\omega((r_0 \alpha - 1) q_m^T \xi(t) + CY(t) - T\sigma(t) + G\varphi(t) + \psi(t) + Q_\gamma(p) y_m(t),$$

$$\dot{\sigma}(t) = D\sigma(t) + B y(t), \quad \dot{\varphi}(t) = D\varphi(t) + B q_m^T \xi(t).$$

Из условий  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = Y_m(t), \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Delta}(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$  следует, что вектор  $\sigma(t)$  ограниченный, а  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ .

Принимая во внимание предположение 3 (см. § 1), можно сделать заключение, что функция  $\chi(t)$  является ограниченной при отсутствии переключений. Если переключение элементов матрицы  $\omega$  осуществляется мгновенно, то векторы  $Y(t), \sigma(t), \varphi(t), \psi(t), r_0$  умножаются на другие константы. Следовательно, появятся ограниченные скачки. В случае, когда при переключении управление отключается на некоторое время, т. е. имеется некоторое время срабатывания переключающих элементов, то появятся короткие импульсы. Это связано с тем, что при этом режиме траектория вектора состояния объекта управления будет отклоняться в связи с отключением управления.



Таким образом, получили, что при  $\mu_2 = 0$  все переменные в замкнутой системе ограничены. При этом квадратичная функция Ляпунова

$$V(\varepsilon, \eta) = \varepsilon^T(t)H\varepsilon(t) + \eta^T(t)\Phi\eta(t) \quad (\text{П.3})$$

удовлетворяет условиям леммы, где положительно-определенные матрицы определяются из матричных уравнений

$$\begin{aligned} HA_m + A_m^T H &= -\rho_1 I_\gamma, & \Phi F + F^T \Phi &= -\rho_2 I_\gamma, \\ \rho_1 > 0, & \rho_2 > 0. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Так как условия леммы выполнены, то существует число  $\mu_0$  такое, что при выполнении неравенств  $\mu_1 < \mu_0$ ,  $\mu_2 < \mu_0$  все переменные системы (11) являются ограниченными величинами. Однако ограниченность всех переменных не гарантирует выполнения целевых условий (2). Выясним область притяжения исходной системы, предполагая, что  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Вычислим производную функции (П.3) на траекториях системы (11), принимая во внимание (П.4)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon, \eta) &= -\rho_1 |\varepsilon(t)|^2 + 2\mu_0^{\gamma-1} \varepsilon^T(t)Hbq_m^T \bar{\Delta}(t) - \\ &- \frac{\rho_2}{\mu_0} |\eta(t)|^2 + \eta^T(t)\Phi b p^\gamma \zeta(t). \end{aligned}$$

Воспользуемся оценками:

$$\begin{aligned} 2\mu_0^{\gamma-1} \varepsilon^T(t)Hbq_m^T \bar{\Delta}(t) &\leq \mu_0^{\gamma-1} |\varepsilon(t)|^2 + \mu_0^{\gamma-1} k_1, \\ 2\eta^T(t)\Phi b p^\gamma \zeta(t) &\leq \frac{1}{\mu_0} |\eta(t)|^2 + \mu_0 k_2, \end{aligned}$$

где  $k_1 = \sup_t |Hbq_m^T \bar{\Delta}(t)|^2$ ,  $k_2 = \sup_t |\Phi b p^\gamma \zeta(t)|^2$ . Тогда получим неравенство

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon, \eta) &\leq -(\rho_1 + \mu_0^{\gamma-1})|\varepsilon(t)|^2 - \frac{\rho_2 - 1}{\mu_0} |\eta(t)|^2 + \\ &+ \mu_0^{\gamma-1} k_1 + \mu_0 k_2. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Очевидно, что существуют числа  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\mu_0$  обеспечивающие положительность чисел  $(\rho_1 + \mu_0^{\gamma-1})$  и  $\frac{\rho_2 - 1}{\mu_0}$ .

В этом случае, из неравенства (П.5) будем иметь оценку области притяжения  $(\rho_1 + \mu_0^{\gamma-1})|\varepsilon(t)|^2 + \frac{\rho_2 - 1}{\mu_0} |\eta(t)|^2 \leq \mu_0^{\gamma-1} k_1 + \mu_0 k_2$ . Принимая во внимание оценку  $|y(t) - y_m(t)| \leq |\varepsilon(t)|$  и условия (2), получим  $\delta = \sqrt{\frac{\mu_0(\mu_0^{\gamma-2} k_1 + k_2)}{\rho_1 + \mu_0^{\gamma-1}}}$ .

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Mourik S., Zwart H., Keesman K.J. Switching input controller for a food storage room // Control Engineering Practice. — 2010. — Vol. 18, N 5. — P. 507—514.

2. Hespanha J.P. Root-mean-square gains of switched linear systems // IEEE Trans. on Autom. Control. — 2003. — Vol. 48, N 11. — P. 2040—2045.

3. Hespanha J.P., Morse A.S. Switching between stabilizing controllers // Automatica. — 2002. — Vol. 38, N 11. — P. 1905—1917.

4. Daafouz J., Riedinger P., Jung C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach // IEEE Trans. on Autom. Control. — 2002. — Vol. 47, N 11. — P. 1883—1887.

5. Zhai G., Xu X. A unified approach to analysis of switched linear descriptor systems under arbitrary switching // Int. J. of Appl. Mathematics Computer and Science. — 2010. — Vol. 20, N. 2. — P. 249—259.

6. Geromel J., Colaneri P.C. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems // SIAM Journal Contr. and Optim. — 2006. — Vol. 45, N 5. — P. 1915—1930.

7. Tianrui L., Dong Y., Wanjun L. Exponential stabilization for a class switched neutral nonlinear time-delay systems // Int. J. Sensing, Computing & Control. — 2014. — Vol. 4, N 2. — P. 49—58.

8. Galbusera L., Bolzern P., Deaecto G.S., Geromel J.C. Output feedback stabilization of time-delay switched linear systems // Preprints of the 18th IFAC World Congress. — 2011. — P. 1279—1284.

9. Hespanha J.P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of lasalle’s invariance principle // IEEE Trans. on Autom. Control. — 2004. — Vol. 49, N. 4. — P. 470—482.

10. Zattoni E., Perdon A.M., Conte G. Disturbance decoupling with stability in continuous-time switched linear systems under dwell-time switching // Preprints of the 19th IFAC World Congress. — 2014. — P. 164—169.

11. Deaecto G.S., Geromel J.C., Daafouz J. Dynamic output feedback  $H_\infty$  control of switched linear systems // Automatica. — 2011. — Vol. 47, N. 8. — P. 1713—1720.

12. Пакушин П.В., Поздьяев В.В. Критерий существования общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем второго порядка // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 4. — С. 22—27.

13. Александров А.Ю., Косов А.А., Чень Я. Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 5—17.

14. Васильев С.Н., Косов А.А. Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 27—47.

15. Александров А.Ю., Жабко А.П., Жабко И.А. Косов А.А. Исследование устойчивости и стабилизация нелинейных переключаемых механических систем на основе декомпозиции // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2015. — Т. 16, № 12. — С. 807—811.

16. Цыкунов А.М. Алгоритм робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 7. — С. 103—115.

17. Цыкунов А.М. Децентрализованное робастное управление многосвязными структурно неопределенными объектами // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 12. — С. 111—121.

18. Халил Х.К. Нелинейные системы. — М.: Ижевск, 2009. — 832 с.

19. Брусин В.А. Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119—127.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

**Цыкунов Александр Михайлович** — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет, ✉ tsykunov\_al@mail.ru.