

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.М. Цыкунов

Предположено, что параметры математической модели неизвестны, а измерению доступны только выходные переменные. В качестве целевых условий принята точность отслеживания эталонного сигнала. Получены алгоритмы управления, позволяющие компенсировать априорную неопределенность и существенно уменьшить влияние неизмеряемых внешних ограниченных возмущений на выходные переменные. Приведен численный пример и результаты моделирования, демонстрирующие эффективность полученного алгоритма слежения.

Ключевые слова: распределенное запаздывание, робастное управление, функционал, эталонный сигнал.

ВВЕДЕНИЕ

Многие объекты управления в химической промышленности, атомной энергетике, биологии, экономике и других отраслях описываются дифференциальными уравнениями с запаздыванием [1, 2]. Получение алгоритмов управления такими объектами в условиях неопределенности параметров математической модели и при наличии неконтролируемых внешних возмущений представляют собой важную научную и практическую задачу. В зависимости от типа запаздывания они подразделяются на объекты с запаздыванием по состоянию, управлению и нейтрального типа. Кроме того, запаздывание может быть сосредоточенное (в иностранной литературе оно называется дискретным) и распределенное. Естественно, что имеются объекты, в математические модели которых входят различные типы запаздываний. Каждый тип уравнений требует своих подходов к решению задач управления.

Имеется большое число опубликованных работ, посвященных построению алгоритмов управления для различных типов объектов при наличии той или иной априорной информации о

параметрах математической модели и внешних возмущениях.

Задаче управления нелинейным объектом с запаздыванием при ограничениях на управляющее воздействие посвящена работа [3]. Система стабилизации нейтрального объекта исследуется в работе [4], а задача робастного управления нейтральным объектом и нелинейным — в работах [5, 6] соответственно. Задачи управления объектом с распределенным запаздыванием решаются в работах [7–11]. Обширная библиография имеется в обзорной статье [12], а также в трудах 14-го и 15-го конгрессов ИФАК.

Для качественного управления объектом возникает необходимость в подавлении влияния возмущений и в компенсации априорной неопределенности параметров математической модели. Задача существенно усложняется, если управление строится по выходу для нелинейного объекта, так как не для любой нелинейной модели можно получить алгоритм управления по выходу.

Можно выделить два основных способа построения систем управления в данной ситуации: построение различных наблюдателей вектора состояния и оценка обобщенных возмущений, в которые входят априорно неопределенные парамет-



ры и внешние возмущения. Второй из них был применен в работах [10, 11], а также в данной статье. Однако, в отличие от работ [10, 11], здесь не используются вспомогательный контур и наблюдатель производных. Закон управления выбран так, что фактически он функционирует на основании информации об обобщенном возмущении. Доказано, что при соответствующем выборе параметров управляющего устройства существенно подавляется влияние возмущений на точность слежения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, математической моделью которого служат уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D \int_{-h}^0 F(y(t+\theta))d\theta + Bu(t) + \Gamma f(t),$$

$$y(t) = Cx(t), \quad x(0) = \varphi(0), \quad \theta \in [-h, 0], \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $u(t)$ и $y(t)$ — скалярные управляющее воздействие и регулируемая переменная, $f(t)$ — внешнее скалярное неизмеряемое возмущающее воздействие, $F(y(t))$ — нелинейная функция, $\varphi(0)$ — непрерывная начальная функция, h — время запаздывания, A , B , D , Γ и C — числовые матрицы соответствующих порядков.

Требуется получить алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta, \quad t \geq T_0, \quad (2)$$

где $y_m(t)$ — сигнал, который должен отслеживаться выходом объекта управления, величина $\delta > 0$ характеризует точность слежения, T_0 — время, по истечении которого с начала функционирования системы выполняться целевое неравенство. Иными словами, условие (2) означает, что целевое неравенство должно выполняться за конечное время, которое зависит от многих факторов: начальных условий объекта, уровня возмущений и эталонного сигнала.

Будем решать сформулированную задачу при следующих **предположениях**.

1. Пара (A, B) — управляема, а (A, C) — наблюдаема.

2. Известны диапазоны возможных значений

элементов матриц $A = \begin{bmatrix} a_1 & I_{n-1} \\ \vdots & \\ a_n & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}$, B , D , Γ ,

$C = [1, 0, \dots, 0]$, где $0_{1 \times (n-1)}$ — нулевая матрица-строка.

3. Уравнение (1) (в случае отсутствия нелинейности $F(y(t)) = 0$) минимально-фазовое, т. е. полином $s \text{Adj} \Lambda(s) B$ является гурвицевым, где s — комплексная переменная в преобразовании Лапласа, $\Lambda(s) = (I_n s - A)$, I_n — единичная матрица $n \times n$, $\text{Adj} \Lambda(s)$ — присоединенная матрица (транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы $\Lambda(s)$),

4. Внешнее возмущение $f(t)$ и эталонный сигнал $y_m(t)$ гладкие и ограниченные функции: $|f(t)| \leq \chi_1$, $|y_m(t)| \leq \chi_2$, $\chi_1 > 0$, $\chi_2 > 0$.

5. Производные регулируемой переменной и управляющего воздействия не измеряются.

6. Функция $F(y(t))$ гладкая и удовлетворяет глобальному условию Липшица, $F(0) = 0$.

Замечание. Отметим, что наличие только одного типа запаздывания, выбор структуры матрицы A , а также скалярной нелинейности и ограничения $r \leq m$ обусловлены исключительно желанием упростить преобразования.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Преобразуем уравнения (1) в форму «вход — выход»:

$$Q_n(P)y(t) = kR_m(P)u(t) + K_r(P) \int_{-h}^0 F(y(t+\theta))d\theta + G_\tau(P)f(t), \quad (3)$$

где $P = d/dt$ — оператор дифференцирования, $Q_n(P)$, $K_r(P)$, $R_m(P)$ — линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_n(P) = n$, $\deg R_m(P) = m$, $\deg G_\tau(P) = \tau$, $\tau \leq n-1$, $\deg K_r(P) = r$, $r \leq m$. Для определенности пусть $r = m$. Операторы $Q_n(P)$ и $R_m(P)$ нормированные.

Применим алгоритм деления Евклида к полиному $Q_n(p)$:

$$Q_n(P) = \bar{Q}_\gamma(P)R_m(P) + \Delta Q_{m-1}(P).$$

Представим многочлен $\bar{Q}_\gamma(P)$ в виде суммы двух полиномов

$$\bar{Q}_\gamma(P) = Q_\gamma(P) + Q_{\gamma-1}(P), \quad \gamma = n - m.$$

Здесь и в дальнейшем индексы будут указывать на полином и его порядок, $Q_\gamma(P)$ — гурвицев полином. Тогда

$$Q_n(P) = (Q_\gamma(P) + Q_{\gamma-1}(P))R_m(P) + \Delta Q_{m-1}(P).$$

Подставив это выражение в уравнение (3) и разделив полученное уравнение слева и справа на нормированный полином $R_m(P)$, получим

$$Q_\gamma(P)y(t) = ku(t) + \psi_1(t).$$

Здесь

$$\psi_1(t) = -Q_{\gamma-1}(P)y(t) + \frac{1}{R_m(P)} \left(-\Delta Q_{m-1}(P)y(t) + K_\gamma(P) \int_{-h}^0 F(y(t+\theta))d\theta + G_\gamma(P)f(t) \right).$$

Составим уравнение для сигнала рассогласования $e(t) = y(t) - y_m(t)$:

$$Q_\gamma(P)e(t) = ku(t) + \psi_1(t) - Q_\gamma(P)y_m(t). \quad (4)$$

Сформируем управляющее воздействие $u(t)$ в соответствии с формулами:

$$u(t) = \alpha \vartheta(t), \quad \vartheta(t) = \vartheta_1(t) + \vartheta_2(t), \quad \alpha > 0,$$

$$M_\beta(P)\vartheta_1(t) = -Q_\gamma(P)e(t), \quad M_\beta(P)\vartheta_2(t) = \vartheta(t). \quad (5)$$

Подставим значение $u(t)$ из первого из уравнений (5) в уравнение (4):

$$Q_\gamma(P)e(t) = \vartheta(t) + \psi_2(t), \quad (6)$$

где $\psi_2(t) = \psi_1(t) + (k\alpha - 1)\vartheta(t) - Q_\gamma(P)y_m(t)$.

Функция $\psi_2(t)$ несет всю информацию о неопределенности параметров математической модели и возмущениях.

Учитывая выражение (6), исключим из уравнений (5) переменные $\vartheta_1(t)$ и $\vartheta_2(t)$, в результате чего получим

$$M_\beta(P)\vartheta(t) = -\psi_2(t). \quad (7)$$

Выберем многочлен $M_\beta(P)$ в виде $M_\beta(P) = (\mu P + 1)^\beta$, где $\beta \geq \gamma$, $\mu > 0$ — достаточно малое число. Подставим $M_\beta(P)$ и $\psi_2(t)$ в уравнение (7):

$$(\mu P + 1)^\beta \vartheta(t) = -\psi_1(t) - (k\alpha - 1)\vartheta(t) + Q_\gamma(P)y_m(t).$$

Преобразуем данное уравнение

$$((\mu P + 1)^\beta - 1 + k\alpha)\vartheta(t) = -\psi(t),$$

где $\psi(t) = \psi_1(t) - Q_\gamma(P)y_m(t)$. Таким образом, математическая модель (4), (5) эквивалентна по выходу системе уравнений:

$$Q_\gamma(P)e(t) = ku(t) + \psi(t),$$

$$((\mu P + 1)^\beta - 1 + k\alpha)u(t) = -\alpha\psi(t). \quad (8)$$

Из этого уравнения следует, что многочлен $(\mu P + 1)^\beta - 1 + k\alpha$ должен быть гурвицевым.

Преобразуем уравнения (8) в векторно-матричную форму

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + b(ku(t) + \psi(t)), \quad e(t) = L\varepsilon(t),$$

$$\mu \dot{z}(t) = F_0 z(t) - b\psi(t), \quad u(t) = L_\alpha z(t). \quad (9)$$

Здесь $\varepsilon \in R^\gamma$, $z \in R^\beta$, $L = [1 \ 0 \dots 0]$, $L_\alpha = [\alpha \ 0 \dots 0]$,

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -q_\gamma & \dots & \dots & \dots & -q_1 \end{bmatrix},$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ -k\alpha + 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

q_i — коэффициенты полинома $Q_\gamma(P)$. Получили сингулярно-возмущенную систему {ХЕ «сингулярно-возмущенная система»} уравнений, так как второе уравнение в выражении (9) описывает быстрые составляющие, если μ — малое число.

Утверждение. Пусть выполнены условия предположений, многочлен $M_\beta(P) - 1 + k\alpha$ является гурвицевым. Тогда существует число $\mu_0 > 0$ такое, что при выполнении неравенства $\mu_0 > \mu$ алгоритм управления (5) обеспечит выполнение целевого условия (2).

Доказательство приведено в Приложении.

Для иллюстрации работы полученного алгоритма слежения рассмотрим числовой пример.

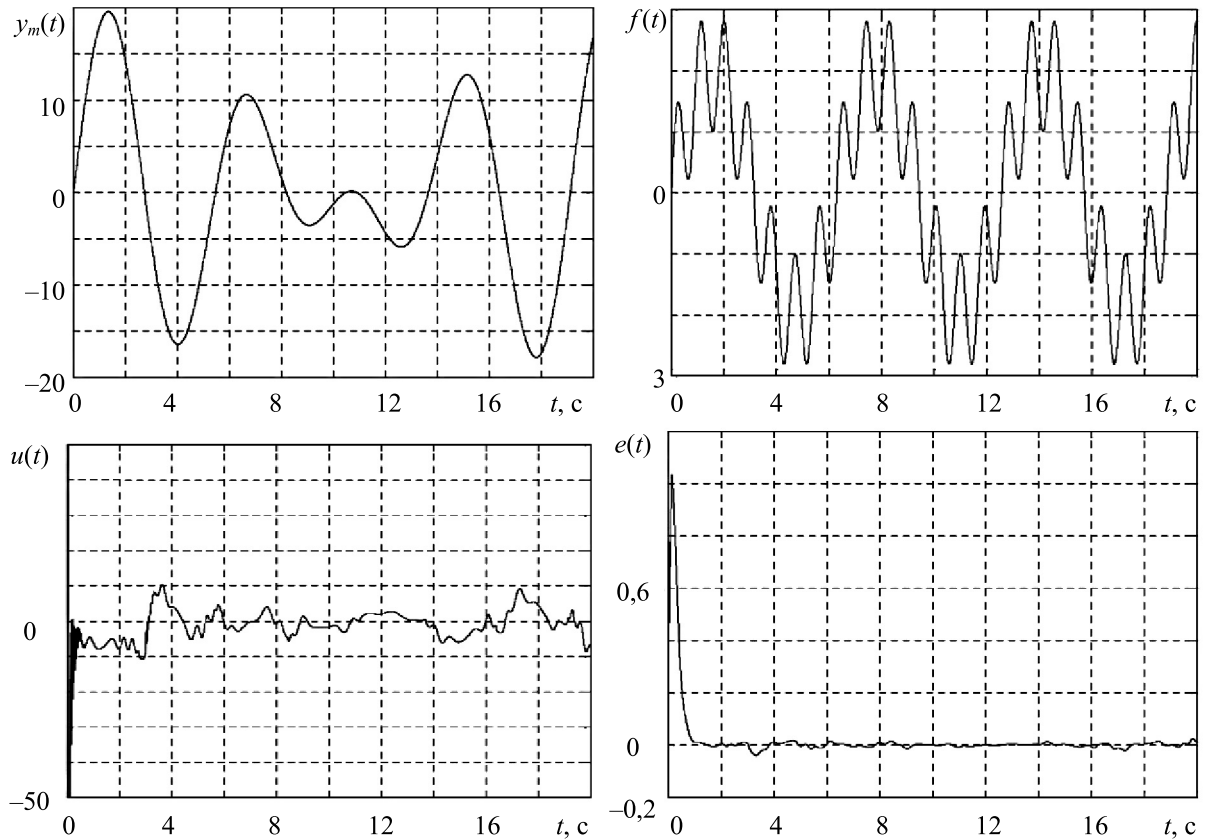
3. ПРИМЕР

Предположим, что динамические процессы в объекте управления описываются уравнениями:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \int_{-4}^0 F(y(t+\theta))d\theta +$$

$$+ k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} f(t), \quad y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x(t),$$

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h \ 0].$$



Переходные процессы

Здесь $F^T(y) = [F_1(y) \ F_2(y) \ F_3(y) \ F_4(y)]$, $F_i(y)$, $i = \overline{1,4}$ — скалярные функции, удовлетворяющие условиям предположений. Класс неопределенности задан неравенствами: $-13 \leq a_i \leq 13$, $-10 \leq d_{ij} \leq 10$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$, $8 \leq k \leq 12$, $|f(t)| \leq 3$, $-10 \leq g_r \leq 10$, $r = 1, 2$, $|y_m| \leq 20$.

Требуется получить алгоритм для слежения за эталонным сигналом с целевым условием (2).

В данном случае величина $\gamma = n - m = 2$. Выберем оператор $Q_2(P) = P^2 + 15P + 56$. Тогда алгоритм управления (5) будет иметь вид

$$u(t) = \alpha \vartheta(t), \quad \vartheta(t) = \vartheta_1(t) + \vartheta_2(t), \quad \alpha > 0,$$

$$(\mu P + 1)^3 \vartheta_1(t) = -(P^2 + 15P + 56)e(t),$$

$$(\mu P + 1)^3 \vartheta_2(t) = \vartheta(t).$$

Выберем число $\mu = 0,01$. Число α выбираем из условия гурвицевости многочлена $(\mu P + 1)^3 - 1 + k\alpha$. Для этого величина $k\alpha$ должна быть меньше девяти. Имеем $8 \leq k \leq 12$. Возьмем $\alpha = 0,5$.

На рисунке приведены результаты моделирования при значениях параметров математической модели $a_1 = a_3 = 12$, $a_2 = -13$, $a_4 = 13$. В этом случае собственные числа матрицы

$$\lambda_1 = 10,9202, \quad \lambda_2 = -0,5599, \quad \lambda_3 = 0,8199 + 1,2058i,$$

$$\lambda_4 = 0,8199 - 1,2058i, \quad d_{ij} = 5, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,4},$$

$$g_1 = g_2 = 10, \quad F_1(y) = \text{sign } y \ln(1 + y^2),$$

$$F_2(y) = \text{sign } y + y \ln(1 + y^2),$$

$$F_3(y) = (\text{sign } y + \ln(1 + y^2)) \text{sign } y,$$

$$F_4(y) = \sin y + \ln(1 + y^2).$$

На управляющее воздействие наложено ограничение $|u(t)| \leq 50$. Начальные условия $\varphi(0)$, $\theta \in [-h, 0]$, $x^T(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Остальные начальные условия нулевые. Для данного варианта параметров объекта управления абсолютная ошибка равна 0,02. При этом для любых параметров из заданного класса неопределенности ошибка не превышает значения 0,05.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача робастного слежения за эталонным сигналом для объекта, математическая модель которого представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение с распределенным запаздыванием. Параметры объекта управления не известны, известны диапазоны их возможных значений; на объект действуют неизмеряемые внешние возмущения. Если возмущения и эталонный сигнал удовлетворяют условиям предположений, то полученный алгоритм слежения позволяет существенно погасить влияние неопределенности и возмущений на регулируемую переменную. Результаты моделирования показывают, что предложенный алгоритм управления позволяет получить качественные переходные процессы. Точность слежения зависит от параметров μ и α .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Вначале докажем работоспособность алгоритма для редуцированной модели. Затем обоснуем близость переходных процессов в исходной системе и в редуцированной модели.

Для анализа свойств замкнутой системы воспользуемся методикой [13]. Введем новую переменную $\eta(t) = z(t) - F_0^{-1}b\psi(t)$, где $F_0^{-1}b\psi(t)$ решение уравнения $F_0 z(t) - b\psi(t) = 0$. В новых переменных система уравнений (9) примет вид

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + b(ku(t) + \psi(t)), \quad e(t) = L\varepsilon(t),$$

$$\mu \dot{\eta}(t) = F_0 \eta(t) - \mu F_0^{-1}b\dot{\psi}(t), \quad u(t) = L_\alpha \eta + L_\alpha F_0^{-1}b\psi(t).$$

Подставив значение $u(t)$ в первое уравнение, принимая во внимание равенство $L_\alpha F_0^{-1}b = -1/k$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) + bL_\alpha \eta(t), \quad e(t) = L\varepsilon(t), \\ \mu \dot{\eta}(t) &= F_0 \eta(t) - \mu F_0^{-1}b\dot{\psi}(t). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Составим уравнение для редуцированной модели:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}(t) &= A_m \bar{\varepsilon}(t) + bL_\alpha \bar{\eta}(t), \quad \bar{e}(t) = L\bar{\varepsilon}(t), \\ \mu \dot{\bar{\eta}}(t) &= F_0 \bar{\eta}(t). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

В этом случае функция $\psi(t)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t) &= -Q_{\gamma-1}(P)\bar{y}(t) + \frac{1}{R_m(P)} \left(-\Delta Q_{m-1}(P)\bar{y}(t) + \right. \\ &\quad \left. + K_r(P) \int_{-h}^0 F(\bar{y}(t+\theta))d\theta + G_\tau(P)f(t) - Q_\gamma(P)y_m(t) \right). \end{aligned}$$

Так как матрицы A_m и F_0 являются гурвицевыми, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\eta}(t) = 0$. Принимая во внимание структуру матрицы A_m и порядок полинома $Q_{\gamma-1}(P)$, получим $\lim_{t \rightarrow \infty} P^j \bar{e}(t) = 0$, $j = 1, \dots, \gamma$. Следовательно, переменные $P^j \bar{y}(t)$ — ограничены, так как $\bar{e}(t) = \bar{y}(t) - y_m(t)$, а эталонный сигнал удовлетворяет четвертому условию предположений. Кроме того, нелинейность и возмущения удовлетворяют предположениям 4 и 6. Тогда, учитывая порядки операторов $R_m(P)$ и $K_r(P)$, можно сделать вывод о том, что функция $\bar{\psi}(t)$ и ее производная в редуцированной модели ограничены.

Таким образом, редуцированная система (П.2) асимптотически устойчива по переменным $\bar{\varepsilon}(t)$. Тогда для заданного числа $\delta_1 > 0$ существует момент времени T_1 такой, что при $t > T_1$ будет выполнено неравенство

$$|\bar{y}(t) - y_m(t)| < \delta_1. \quad (\text{П.3})$$

Покажем, что переходные процессы в системах (П.1) и (П.2) при соответствующем выборе числа μ будут близки. Введем векторы рассогласования

$$\xi(t) = \varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}(t), \quad \zeta(t) = \eta(t) - \bar{\eta}(t).$$

Тогда, вычитая систему (П.2) из системы (П.1), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_m \xi(t) + bL_\alpha \zeta(t), \quad \theta(t) = e(t) - \bar{e}(t) = L\xi(t), \\ \dot{\zeta}(t) &= \frac{1}{\mu} F_0 \zeta(t) - F_0^{-1}b(\dot{\psi}(t) - \dot{\bar{\psi}}(t)) - F_0^{-1}b\dot{\bar{\psi}}(t). \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Преобразуем функцию $\psi(t) - \bar{\psi}(t)$:

$$\begin{aligned} \psi(t) - \bar{\psi}(t) &= -Q_{\gamma-1}(P)(y(t) - \bar{y}(t)) + \\ &+ \frac{1}{R_m(P)} \left(-\Delta Q_{m-1}(P)(y(t) - \bar{y}(t)) + K_r(P) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{-h}^0 F(y(t+\theta))d\theta - \int_{-h}^0 F(\bar{y}(t+\theta))d\theta \right) \right). \end{aligned}$$

Продифференцировав эту формулу слева и справа, получим

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) - \dot{\bar{\psi}}(t) &= -PQ_{\gamma-1}(P)(y(t) - \bar{y}(t)) + \\ &+ \frac{P}{R_m(P)} (-\Delta Q_{m-1}(P)(y(t) - \bar{y}(t)) + K_r(P) \times \\ &\times (((F(y(t)) - F(y(t-h))) - ((F(\bar{y}(t)) - F(\bar{y}(t-h)))))). \end{aligned}$$

Выделим целые части, выполнив «операторное деление» в выражениях

$$\frac{K_r(P)}{R_m(P)} = k_r + \frac{\Delta K_{m-1}(P)}{R_m(P)},$$

$$\frac{P\Delta Q_{m-1}(P)}{R_m(P)} = k_q + \frac{\tilde{Q}_{m-1}(P)}{R_m(P)},$$



где k_p, k_q — коэффициенты при старших членах многочленов $K_r(P)$, $P\Delta Q_{m-1}(P)$ соответственно. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} y(t) - \bar{y}(t) &= (y(t) - y_m(t)) - (\bar{y}(t) - y_m(t)) = \\ &= e(t) - \bar{e}(t) = \theta(t) = L\xi(t). \end{aligned}$$

Тогда будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) - \dot{\bar{\psi}}(t) &= -c_1^T \xi(t) - c_2^T \omega_1(t) - c_3^T \omega_2(t) + L_\alpha \zeta(t), \\ &+ k_r((F(y(t)) - F(\bar{y}(t))) - (F(y(t-h)) - F(\bar{y}(t-h)))), \\ \dot{\omega}_1(t) &= \Lambda \omega_1(t) + b\theta(t), \\ \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda \omega_2(t) + b(F(y(t)) - (F(\bar{y}(t))) - \\ &- b(F(y(t-h)) - F(\bar{y}(t-h))), \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где $c_1^T = [-k_q + q_r, q_{r-1} + g_{r-1}, \dots, q_1 + g_1]$, g_i — коэффициенты полинома $PQ_{r-1}(P)$, c_2, c_3 — векторы, элементами которых служат коэффициенты многочленов $\tilde{Q}_{m-1}(P)$ и $\Delta K_{m-1}(P)$ соответственно, записанные в обратном порядке, Λ — гурвицева матрица в форме Фробениуса, характеристическим полиномом которой является многочлен $R_m(\lambda)$.

Подставив выражение (П.5) в систему уравнений (П.4), получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_m \xi(t) + bL_\alpha \zeta(t), \quad \theta(t) = e(t) - \bar{e}(t) = L\xi(t), \\ \dot{\zeta}(t) &= \frac{1}{\mu} F_0 \zeta(t) - F_0^{-1} b(-c_1^T \xi(t) - c_2^T \omega_1(t) + c_3^T \omega_2(t) + \\ &+ L_\alpha \zeta(t) + k_r((F(y(t)) - F(\bar{y}(t))) - \\ &- (F(y(t-h)) - F(\bar{y}(t-h)))) - F_0^{-1} b\dot{\bar{\psi}}(t), \\ \dot{\omega}_1(t) &= \Lambda \omega_1(t) + b\theta(t), \\ \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda \omega_2(t) + b(F(y(t)) - (F(\bar{y}(t))) - \\ &- b(F(y(t-h)) - F(\bar{y}(t-h))). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Возьмем функционал Ляпунова — Красовского

$$\begin{aligned} V &= \xi^T(t) H \xi(t) + \zeta^T(t) H_1 \zeta(t) + \omega_1^T(t) H_2 \omega_1(t) + \\ &+ \omega_2^T(t) H_3 \omega_2(t) + \int_{t-h}^t |\xi(s)|^2 ds, \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

где положительно-определенные матрицы H, H_1, H_2 и H_3 являются решением матричных уравнений

$$\begin{aligned} HA_m + A_m^T H &= -\rho I, \quad H_1 F_0 + F_0^T H_1 = -\rho_1 I, \\ H_2 \Lambda + \Lambda^T H_2 &= -\rho_2 I, \quad H_3 \Lambda + \Lambda^T H_3 = -\rho_3 I. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Здесь $\rho > 0$, $\rho_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Вычислим производные от функций (П.7) на траекториях системы (П.6), принимая во внимание уравнения (П.8):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\rho |\xi(t)|^2 + 2\xi^T(t) H b L_\alpha \zeta(t) - \frac{\rho_1}{\mu} |\zeta(t)|^2 - \\ &- 2\zeta^T(t) H_1 F_0^{-1} b \dot{\bar{\psi}}(t) - 2\zeta^T(t) H_1 F_0^{-1} b(-c_1^T \xi(t) - c_2^T \omega_1(t) + \\ &+ c_3^T \omega_2(t) + L_\alpha \zeta(t) + k_r((F(y(t)) - F(\bar{y}(t))) - \\ &- (F(y(t-h)) - F(\bar{y}(t-h)))) - \rho_2 |\omega_1(t)|^2 + \\ &+ 2\omega_1^T(t) H_2 b \theta(t) - \rho_3 |\omega_2(t)|^2 + 2\omega_2^T(t) H_3 b(F(y(t)) - \\ &- F(\bar{y}(t))) - (F(y(t-h)) - F(\bar{y}(t-h))) + \\ &+ |\xi(t)|^2 - |\xi(t-h)|^2. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Воспользуемся оценками, принимая во внимание равенство $\|L\| = 1$:

$$2\xi^T(t) H b L_\alpha \zeta(t) \leq \mu |\xi(t)|^2 + \frac{\chi_1}{\mu} |\zeta(t)|^2,$$

$$\chi_1 = \|H b L_\alpha\|^2,$$

$$-2\zeta^T(t) H_1 F_0^{-1} b \dot{\bar{\psi}}(t) \leq \frac{1}{\mu} |\zeta(t)|^2 + \mu \chi_2,$$

$$\chi_2 = \sup_t |H_1 F_0^{-1} b \dot{\bar{\psi}}(t)|^2,$$

$$\begin{aligned} &-2\zeta^T(t) H_1 F_0^{-1} b(-c_1^T \xi(t) - c_2^T \omega_1(t) - c_3^T \omega_2(t) + \\ &+ k_r((F(y(t)) - F(\bar{y}(t))) - (F(y(t-h)) - F(\bar{y}(t-h)))) \leq \\ &\leq \frac{1}{\mu} |\zeta(t)|^2 + \mu \chi_3 |\xi(t)|^2 + \mu \chi_4 |\omega_1(t)|^2 + \mu \chi_5 |\omega_2(t)|^2 + \\ &+ \mu |H_1 F_0^{-1} b k_r|^2 (|F(y(t)) - F(\bar{y}(t))|^2 + (F(y(t-h)) - \\ &- F(\bar{y}(t-h)))^2) \leq \frac{1}{\mu} |\zeta(t)|^2 + \mu \chi_3 |\xi(t)|^2 + \mu \chi_4 |\omega_1(t)|^2 + \\ &+ \mu \chi_5 |\omega_2(t)|^2 + \mu \chi_6 |\xi(t-h)|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2\omega_2^T(t) H_3 b(F(y(t)) - F(\bar{y}(t))) - (F(y(t-h)) - \\ &- F(\bar{y}(t-h))) \leq \frac{1}{\mu} |\omega_2(t)|^2 + \mu \chi_7 |\xi(t)|^2 + \mu \chi_8 |\xi(t-h)|^2, \end{aligned}$$

$$\chi_7 = |H_3 b k_L|^2,$$

$$2\omega_1^T(t) H_2 b \theta(t) \leq \frac{1}{\mu} |\omega_1(t)|^2 + \mu \chi_8 |\xi(t)|^2,$$

$$-2\zeta^T(t) H_1 F_0^{-1} b L_\alpha \zeta(t) \leq \chi_9 |\zeta(t)|^2,$$

где $\chi_3 = \|H_1 F_0^{-1} b c_1^T\|^2$, $\chi_4 = \|H_1 F_0^{-1} b c_2^T\|^2$, $\chi_5 = \|H_1 F_0^{-1} b c_3^T\|^2$, $\chi_6 = k_L^2 |H_1 F_0^{-1} b k_r|^2$, k_L — константа Липшица, $\chi_8 = |H_2 b|^2$, $\chi_9 = \|2H_1 F_0^{-1} b L_\alpha\|$.

Отметим, $\sup_t |H_1 F_0^{-1} b \dot{\bar{\psi}}(t)|^2$ существует, так как была обоснована ограниченность $\dot{\bar{\psi}}(t)$. Подставив приведенные оценки в формулу (П.9), получим неравенство

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(\rho - 1 - \mu(1 + \chi_3 + \chi_6 + \chi_7 + \chi_8))|\xi(t)|^2 - \\ & - \frac{\rho_1 - 1 - \chi_1 - \mu\chi_9}{\mu}|\zeta(t)|^2 - \left(\rho_2 - \frac{1}{\mu}\right)|\omega_1(t)|^2 - \\ & - \left(\rho_3 - \frac{1}{\mu}\right)|\omega_2(t)|^2 - (1 - \mu(1 + \mu(\chi_6 + \chi_7)))|\xi(t-h)|^2 + \mu\chi_2. \end{aligned}$$

Если выбрать числа ρ , ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 и μ из условий $\rho - \mu(1 + \chi_3 + \chi_6 + \chi_7 + \chi_8) = \sigma$, $\rho_1 - 1 - \chi_1 - \rho_1 - 1 - \chi_1 - \mu\chi_9 = \sigma_1$, $\rho_2 - \frac{1}{\mu} = \sigma_2$, $\rho_3 - \frac{1}{\mu} = \sigma_2$, $1 - \mu(\chi_6 + \chi_7) > 0$, $\sigma > 0$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, то получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \eta) \leq & -\sigma|\xi(t)|^2 - \frac{\sigma_1}{\mu}|\zeta(t)|^2 - \sigma_2|\omega_1(t)|^2 - \\ & - \sigma_2|\omega_2(t)|^2 + \mu\chi_2, \end{aligned}$$

откуда следует, что область притяжений системы (П.6) задана неравенством

$$\sigma|\xi(t)|^2 + \frac{\sigma_1}{\mu}|\zeta(t)|^2 + \sigma_2|\omega_1(t)|^2 + \sigma_2|\omega_2(t)|^2 \leq \mu\chi_2.$$

Из этого неравенства следует цепочка неравенств:

$$|\theta(t)|^2 \leq |\xi(t)|^2 \leq \frac{\mu}{\sigma}\chi_2^2.$$

Принимая во внимание выражения (П.3) и (П.4), получим

$$|e(t)| = |\bar{e}(t) + \theta(t)| \leq |\bar{e}(t)| + |\theta(t)| \leq \delta_1 + \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\chi_2. \quad (\text{П.10})$$

Если числа δ_1 и μ выбрать из условия

$$\delta_1 + \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\chi_2 < \delta,$$

то из неравенства (П.10) получим целевое условие (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D. Introduction to the theory and applications of functional differential equations. — Dordrecht: Kluwer Acad., 1999.
2. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулирования систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
3. Goodall D.P., Postoyan R. Output feedback stabilization for nonlinear time-delay systems subject to input constraints // Int. Journal of Control. — 2010. — Vol. 83. — N 4. — P. 676–693.
4. Ivanescu D., Niculescu S.I., Dugard L., Dion J.M., Verriest E.I. On delay dependent stability of neutral systems // Automatica. — 2003. — Vol. 39. — N 2. — P. 255–261.
5. Han Q.L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type // Automatica. — 2002. — Vol. 38. — N 4. — P. 719–723.
6. Nguang S.K. Robust stabilization of a class of time-delay nonlinear systems. // IEEE Trans. Automat. Contr. — 2000. — Vol. 45. — N 4. — P. 756–762.
7. Xie L., Fridman E., Shaked U. Robust H_∞ control of distributed delay systems with application to combustion control // IEEE Trans. Automat. Contr. — 2001. — Vol. 46. — N 12. — P. 1930–1935.
8. Berezansky L., Braverman E. On nonoscillation and stability for systems of differential equation with a distributed delay // Automatica. — 2012. — Vol. 48. — N 4. — P. 612–618.
9. Zhong Q.-C. On the standard H_∞ control of processes with a single delay // IEEE Trans. Automat. Contr. — 2003. — Vol. 48. — N 6. — P. 1097–1103.
10. Цыкунов А.М. Робастное управление объектом с распределенным запаздыванием // Проблемы управления. — 2013. — № 3. — С. 2–8.
11. Цыкунов А.М. Робастная синхронизация сети объектов с распределенным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 11. — С. 65–75.
12. Richard J.-P. Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems // Automatica. — 2003. — Vol. 39. — N 10. — P. 1667–1694.
13. Khalil H.K. Nonlinear systems. — 3rd ed. — N.-Y.: Prentice-Hall, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Цыкунов Александр Михайлович — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет, tsykunov_al@mail.ru.



MLSD
'2016

Девятая международная конференция

«Управление развитием крупномасштабных систем»

3—5 октября 2016 г.

Направления работы конференции:

- проблемы управления развитием крупномасштабных систем, включая ТНК, госхолдинги и госкорпорации;
- методы и инструментальные средства управления инвестиционными проектами и программами;
- проектные офисы — институты развития крупномасштабных систем;
- имитация и оптимизация в задачах управления развитием крупномасштабных систем;
- управление топливно-энергетическими, инфраструктурными и другими системами;
- управление транспортными системами;
- управление развитием авиационно-космических и других крупномасштабных организационно-технических комплексов и систем;
- управление региональными, городскими, муниципальными системами;
- управление объектами атомной энергетики и другими объектами повышенной опасности;
- информационное и программное обеспечение систем управления крупномасштабными производствами;
- методы, инструментальные средства и приложения мониторинга в задачах управления крупномасштабными системами;
- управление развитием крупномасштабных систем здравоохранения, медико-биологических систем и технологий;
- методология, методы и программно-алгоритмическое обеспечение обработки и интеллектуального анализа больших массивов информации.

Более подробная информация на сайте <http://mlsd2016.ipu.ru>