

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ ПО КОСВЕННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

А.М. Цыкунов

Исследована задача построения робастной следящей системы для линейного объекта, на входе и выходе которого действуют различные внешние неконтролируемые возмущающие воздействия, а регулируемые переменные недоступны измерению. Предложен алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевых условий слежения за эталонными сигналами и компенсирующий параметрические и внешние возмущения с требуемой точностью. Приведены числовые примеры и результаты компьютерного моделирования.

Ключевые слова: робастное управление, объект управления, наблюдатель, вектор состояния, вспомогательный контур, функция Ляпунова.

ВВЕДЕНИЕ

Построение систем управления, обеспечивающих достижение основной поставленной цели управления в условиях априорной неопределенности о параметрических и внешних возмущениях, — одна из основных проблем теории управления. Впервые на возможность создания систем управления, не чувствительных к внешним возмущениям, было указано в работе [1]. Впоследствии такие системы были названы инвариантными [2, 3]. Этой проблеме посвящено большое число публикаций. Достаточно полно она изложена в работе [3], где приводится классификация задач проектирования инвариантных систем управления и различных типов возмущений.

Выделяется два основных принципа построения систем управления, позволяющих достичь выполнения основных целевых условий при наличии параметрических и внешних возмущений. В инвариантных системах структура и параметры управляющего устройства выбираются таким образом, чтобы обеспечить полную или частичную нечувствительность системы к нежелательным различным воздействиям. Другой принцип построения основан на динамической компенсации возмущений, когда с помощью соответствующим образом сформированного управляющего воздействия подавляется влияние возмущений на систему. В настоящее время системы, обеспечивающие выполнение указанных условий, стали называть

робастными, и разработано большое число способов проектирования таких систем. Теория их построения и обширная библиография приведены в книге [4].

К системам, в которых осуществляется компенсация возмущений, следует отнести управляющие устройства, использующие внутреннюю модель возмущений [5, 6], оценку производных неизмеряемых сигналов [7, 8], идентификацию гармонических воздействий, метод вспомогательного контура [9—12], позволяющий выделить сигналы, несущие информацию о возмущениях. Однако в работах [5—14] предполагается, что внешние возмущения действуют только на вход объекта управления и измерению доступны регулируемые переменные. Задачи, где регулируемые переменные не измеряются и на выходе системы тоже действуют возмущения, исследуются в работах, основанных на применении теории H_∞ -оптимизации [4, 15]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Df(t), & y(t) &= Lx(t) + N\xi(t), \\ \theta(t) &= Mx(t) + Cu(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^m$, $y \in \mathfrak{R}^k$, $\theta \in \mathfrak{R}^r$ — векторы состояния, управления, измеряемых переменных и регулируемых параметров соответственно, $f \in \mathfrak{R}^p$, $\xi \in \mathfrak{R}^l$ — векторы внешних возмущений; A, B, C, D, M, L и N — числовые матрицы соответствующих порядков.

Такой же тип объектов управления исследуется в работе [16], где применяется метод инвариант-

ных эллипсоидов. Предполагается, что $f(t) = \xi(t)$ и выполнены следующие условия: пары (A, B) и (A, D) — управляемы; пары (A, L) и (A, M) — наблюдаемы; $C^T M = [0]$, $C^T C = I$; $DN^T = [0]$, $N^T N = I$. Здесь $[0]$, I — нулевая и единичная матрицы соответствующих порядков.

В практических задачах, как правило, $f(t) \neq \xi(t)$. Кроме того, условие $DN^T = [0]$ иногда не только не выполняется, а искажает исходную постановку задачи. Например, если $f(t)$ и $\xi(t)$ — скалярные величины, то условие $DN^T = [0]$ равносильно тому, что внешнее возмущение действует только на входе или только на выходе.

В данной работе исследуется класс линейных систем, для которых можно построить систему управления, компенсирующую действие внешних и параметрических возмущений при условии, что $f(t) \neq \xi(t)$ и $DN^T \neq [0]$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Динамические процессы в объекте управления описываются уравнением (1), где $C = 0$, $f(t)$ — скалярное возмущающее воздействие. Требуется спроектировать алгоритмическое обеспечение системы управления, обеспечивающей выполнение целевого условия

$$|\theta(t) - \theta_m(t)| < \delta \text{ при } t > T, \quad (2)$$

где $\theta_m(t)$ — вектор эталонных сигналов, δ — достаточно малая величина, характеризующая точность отслеживания эталонных сигналов по истечении времени T .

Иными словами, необходимо, чтобы отклонение неизменяемого вектора регулируемых переменных $\theta(t)$ от значений вектора эталонных сигналов $\theta_m(t)$ было меньше заданной величины.

Сформулированную задачу будем решать при следующих **предположениях**.

1. Выполнены условия структурных согласований: $A = A_n + Dc_1^T$, $B = B_n + Dc_2^T$, где c_1 и c_2 — векторы неизвестных параметров, компоненты которых принадлежат известному ограниченному множеству возможных значений Ξ .

2. Пара (A_n, B) — управляема, а пара (A_n, L) — наблюдаема и существует матрица g такая, что пара (A_n, gL) — наблюдаема и для матрицы N матрица g является левым делителем нуля, т. е. $gN = [0]$.

3. Ранг матрицы N меньше порядка вектора $y(t)$, $r \leq m$, а передаточная матрица $W(\lambda) = M(I_n \lambda - A_n)^{-1} B$ должна быть минимально-фазовой, где λ — комплексная переменная в преобразовании Лапласа.

4. Вектор эталонных сигналов и γ_1 его производных — ограниченные функции времени, $|f(t)| \leq \delta_1$, $\delta_1 \in \Xi$, где γ_1 — максимальная относительная степень по строкам передаточной матрицы $W(\lambda)$.

5. Матрицы A_n, B_n, M, N, L и D — известны. ♦

Задачу будем решать в два этапа. Вначале спроектируем систему оценки вектора состояния $x(t)$, что позволит получить оценки неизменяемых регулируемых переменных $\theta(t)$. Затем, используя полученные оценки, построим следящую систему, обеспечивающую выполнение целевых условий (2).

2. ОЦЕНКА ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Выберем матрицу g , обеспечивающую выполнение второго условия предположений и сформируем новый вектор измеряемых переменных

$$\tilde{y}(t) = gy(t) = gLx(t) + gN\xi(t) = gLx(t) = L_n x(t). \quad (3)$$

Таким образом, новые измеряемые переменные не зависят от возмущений, действующих на выходе объекта управления.

Воспользуемся наблюдателем для оценки вектора состояния

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A_n \tilde{x}(t) + B_n u(t) + \\ &+ K(\tilde{y}(t) - L_n \tilde{x}(t)) + Dv(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $v(t)$ — вспомогательное управляющее воздействие наблюдениями, K — числовая матрица, обеспечивающая гурвицевость матрице $A_0 = A_n - KL_n$. Такая матрица существует, так как по предположению пара (A, gL) наблюдаема.

Составим уравнение для вектора ошибок оценивания $\varepsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$, вычитая (4) из (1)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_0 \varepsilon(t) + D\varphi(x, u, t) - Dv(t), \\ e(t) &= \tilde{y}(t) - L_n \tilde{x}(t) = L_n \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где в функции $\varphi(x, u, t) = f(t) + c_1^T x(t) + c_2^T u(t)$ сконцентрированы внешние и параметрические возмущения. Воспользуемся методом вспомогательного контура [9, 10] и возьмем подсистему, динамические процессы в которой описываются уравнением

$$\dot{\bar{\varepsilon}}(t) = A_0 \bar{\varepsilon}(t) - Dv(t), \quad \bar{e}(t) = L_n \bar{\varepsilon}(t), \quad (6)$$

где $\bar{\varepsilon} \in R^n$. Составим уравнение для вектора расхождения $\eta(t) = \varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}(t)$, вычитая (6) из (5)

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_0 \eta(t) + D\varphi(x, u, t), \\ \zeta(t) &= e(t) - \bar{e}(t) = L_n \eta(t). \end{aligned} \quad (7)$$



Сформируем новый скалярный выходной сигнал $\zeta(t) = q^T \bar{\eta}(t)$, где q — числовой вектор, и преобразуем векторное уравнение (7) в скалярное уравнение относительно переменной $\zeta(t)$

$$Q_0(P)\zeta(t) = R_d(P)\varphi(x, u, t). \quad (8)$$

Здесь $P = d/dt$ — дифференциальный оператор, $Q_0(P) = \det(I_n P - A_0)$, $R_d(P) = q^T L_n (I_n P - A_0)^+ D$, $(I_n P - A_0)^+$ — присоединенная матрица алгебраических дополнений матрицы $(I_n P - A_0)$. Из уравнения (8) имеем

$$\varphi(x, u, t) = \frac{Q_0(P)}{R_d(P)} \zeta(t) = \left(Q(P) + \frac{\Delta Q(P)}{R_d(P)} \right) \zeta(t), \quad (9)$$

где $\deg Q_0(P) = n$, $\deg Q(P) = \gamma$, $\gamma = n - \deg R_d(P)$. Если сформировать вспомогательное управление $v(t)$ в виде $v(t) = \left(Q(P) + \frac{\Delta Q(P)}{R_d(P)} \right) \zeta(t)$, то получим точную оценку вектора состояния. Однако производные сигнала $\zeta(t)$ недоступны измерению, поэтому будем формировать сигнал управления $v(t)$ в соответствии с формулой

$$v(t) = q_0^T \bar{\zeta}(t) + \frac{\Delta Q(P)}{R_d(P)} \zeta(t), \quad (10)$$

в которой q_0 — вектор, компонентами которого являются коэффициенты полинома $Q(P)$, записанные в обратном порядке, $\bar{\zeta}^T(t) = [\zeta(t), \bar{\zeta}_1(t), \dots, \bar{\zeta}_\gamma(t)]$, $\bar{\zeta}_i$ — оценка i -й производной сигнала $\zeta(t)$. Эти производные получаются с помощью последовательно соединенных реальных дифференцирующих звеньев. Неминимальная математическая модель такого соединения имеет вид

$$\dot{z}_i(t) = \frac{1}{\mu} F_i z_i(t) + \frac{1}{\mu} b_i P^i \zeta(t), \quad (11)$$

$$\bar{\zeta}_i(t) = L_i z_i(t), \quad i = 1, \dots, \gamma,$$

где $z_i \in \mathbb{R}^i$, μ — достаточно малое число, $b_i^T = [0, \dots, 1]$, $L_i = [1, 0, \dots, 0]$ — матрицы порядков $i \times 1$, $1 \times i$ соответственно, $F_i =$

$$F_i = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для определения точности оценки введем векторы:

$$\sigma_i(t) = z_i(t) + F_i^{-1} b_i P^i \zeta(t), \quad i = 1, \dots, \gamma. \quad (12)$$

Здесь вектор $F_i^{-1} b_i = h_i$ имеет первую компоненту, равную -1 , а первой компонентой вектора $z_i(t)$ является оценка i -й производной $\bar{\zeta}_i(t)$. Поэтому, если обосновать, что величина $|\sigma_i(t)|$ будет небольшой, то тем более будет малой величина $|P^i \zeta(t) - \bar{\zeta}_i(t)|$. Из модели (11) получим уравнение динамики для векторов $\sigma_i(t)$:

$$\dot{\sigma}_i(t) = \frac{1}{\mu} F_i \sigma_i(t) + h_i P^{i+1} \zeta(t),$$

$$\varepsilon_{ni}(t) = P^i \zeta(t) - \bar{\zeta}_i(t) = L_i \sigma_i(t), \quad i = 1, \dots, \gamma. \quad (13)$$

Введем составные векторы $\sigma^T(t) = [\sigma_1(t), \dots, \sigma_\gamma(t)]$, $\vartheta^T(t) = [P^2 \zeta(t), \dots, P^{\gamma+1} \zeta(t)]$, и блочно-диагональные матрицы $F = \text{diag}\{F_1, \dots, F_\gamma\}$, $h = \text{diag}\{h_1, \dots, h_\gamma\}$, $\bar{L} = \text{diag}\{L_1, \dots, L_\gamma\}$, $\varepsilon_n^T = [\varepsilon_{n1}(t), \dots, \varepsilon_{n\gamma}(t)]$.

Тогда систему уравнений (13) можно записать следующим образом:

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{1}{\mu_0} F \sigma(t) + h \vartheta(t), \quad \varepsilon_n(t) = \bar{L} \sigma(t), \quad \mu = \mu_0. \quad (14)$$

Подставив формулы (10) в уравнения (5) с учетом выражения (3), получим

$$\dot{x}(t) = A_n x(t) + B_n u(t) + D \varphi(x, u, t),$$

$$\tilde{y}(t) = L_n x(t), \quad \theta(t) = M x(t). \quad (15)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_0 \varepsilon(t) + D q_1^T \bar{L} \sigma(t), \quad e(t) = L_n \varepsilon(t),$$

где q_1 — часть вектора q_0 без первой компоненты.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия предположений 1 — 5, функция $\varphi(x, u, t)$ ограничена и полином $R_d(P)$ гурвицев. Тогда существуют числа μ_0 и T_1 такие, что при $\mu < \mu_0$ и $t > T_1$, для системы (1), (3), (4), (6), (10), (11) выполнено условие

$$|\varepsilon(t)| < \delta_2, \quad (16)$$

где δ_2 — достаточно малое число. ♦

Доказательство приведено в Приложении. В данном случае сделано предположение об ограниченности функции $\varphi(x, u, t)$, поскольку задача компенсации возмущений не решена окончательно. Ограниченность функции $\varphi(x, u, t)$ обеспечится с помощью соответствующего выбора управления $u(t)$.

3. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ СЛЕЖЕНИЯ

Сформируем оценку неизмеряемого вектора регулируемых переменных $\theta(t)$: $\bar{\theta}(t) = M\bar{x}(t) = Mx(t) - M\varepsilon(t)$. Тогда, принимая во внимание выражение (15), из уравнений (1) получим

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_n x(t) + B_n u(t) + D\varphi(x, u, t), \\ \dot{y}(t) &= L_n x(t), \quad \bar{\theta}(t) = Mx(t) - M\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Сформируем вектор управления в виде $u(t) = \alpha v_k(t)$, α — матрица порядка $m \times r$, выравнивающая порядки векторов $\bar{\theta}(t)$ и $v_k(t)$, выбирается так, чтобы не нарушить минимально-фазовость объекта управления.

Утверждение 2. Если выполнены условия предположений 1 — 5, то существуют числа $\chi_0 > 0$, $T_2 > 0$ такие, что при $\chi < \chi_0$ и $t > T_2$ алгоритм управления

$$v_k(t) = U(P)(\bar{\theta}(y) - \theta_m(t)) \quad (18)$$

обеспечивает выполнение условия

$$|\bar{\theta}(t) - \theta_m(t)| < \delta_3, \quad (19)$$

где $U(P) = \text{diag} \left\{ \frac{\beta_i Q_{mi}(P)}{(\chi P + 1)^{\gamma_i} - 1} \right\}$ — диагональная матрица, $Q_{mi}(P)$ — гурвицевы полиномы порядка γ_i , γ_i — относительная степень i -х диагональных элементов числителя и знаменателя передаточной матрицы $M(I_n \lambda - A_n)^{-1} B_n \alpha$, $\beta_i > 0$. ♦

Доказательство приведено в Приложении.

Данное утверждение является обобщением результатов работы [11] на многомерный случай. Рассмотрим процесс получения алгоритма (18), и обоснуем его работоспособность. Преобразуем уравнение (17) в операторную форму относительно вектора $\bar{\theta}(t)$:

$$G(P)\bar{\theta}(t) = R_1(P)v_k(t) + R_2(P)\varphi(x, u, t) + R_3(P)\varepsilon(t). \quad (20)$$

Здесь $G(P) = \text{diag}\{\det(I_n P - A_n)\}$ — диагональная матрица, $R_1(P) = M(I_n P - A_n)^+ B_n \alpha$, $G_1(P) = \det(I_n P - A_n)$, $R_2(P) = M(I_n P - A_n)^+ D$, $R_3(P) = -MG_1(P)$.

Разложим диагональные элементы матриц $G(P)$ и $R_1(P)$ на суммы двух составляющих $G_i(P) = G_{0i}(P) + \Delta G_i(P)$, $R_{ii}(P) = \bar{K} R_{0i}(P) + \Delta R_{ii}(P)$ и выберем гурвицевы полиномы $G_{0i}(P)$ и $R_{0i}(P)$ таким

образом, чтобы выполнялись равенства $G_{0i}(P) = G_{mi}(P)R_{0i}(P)$, $i = 1, \dots, r$, где $\deg G_{mi}(P) = \gamma_i$, $\gamma_i = \deg G_{0i}(P) - \deg R_{0i}(P)$. Тогда уравнение (20) преобразуется к виду $G_m(P)\bar{\theta}(t) = \bar{K} v_k(t) + \Psi(t)$, где $G_m(P) = \text{diag}\{G_{mi}(P)\}$, $\bar{K} = \text{diag}\{k_i\}$, k_i — коэффициенты при старших производных в операторах $R_{ii}(P)$, $\Psi(t) = R_0^{-1}(P)((\Delta R(P) + \bar{R}_1(P))v_k(t) + \Delta G(P)\bar{\theta}(t) + R_2(P)\varphi(x, u, t) + R_3(P)\varepsilon(t))$, $\Delta G(P) = \text{diag}\{\Delta G_i(P)\}$, $R_0(P) = \text{diag}\{R_{0i}(P)\}$, $\Delta R(P) = \text{diag}\{\Delta R_{ii}(P)\}$, $\bar{R}_1(P)$ — матрица с нулевыми диагональными элементами, а остальные элементы такие же, как в матрице $R_1(P)$. Сформируем вектор $v_k(t) = V\bar{v}(t)$, $V = \text{diag}\{\beta_i\}$, $\beta_i > 0$, $i = 1, \dots, r$ и составим уравнение для вектора ошибок $\bar{e}_c(t) = \bar{\theta}(t) - \theta_m(t)$:

$$G_m(P)\bar{e}_c(t) = \bar{v}(t) + \bar{\Psi}(t), \quad (21)$$

где $\bar{\Psi}(t) = \Psi(t) + G_m(P)\theta_m(t) + (\bar{K}V - I_r)\bar{v}(t)$. Введем вспомогательный контур

$$G_m(P)\tilde{e}_c(t) = \bar{v}(t) \quad (22)$$

и составим уравнение для вектора рассогласования $\zeta(t) = \bar{e}(t) - \tilde{e}(t)$, вычитая (22) из (21):

$$G_m(P)\zeta(t) = \bar{\Psi}(t). \quad (23)$$

В векторе $\bar{\Psi}(t)$ сконцентрирована информация о параметрических и внешних возмущениях. Если сформировать вектор $\bar{v}(t)$ в виде

$$\bar{v}(t) = -G_m(P)\zeta(t), \quad (24)$$

то из уравнения (21) получим уравнение $G_m(P)\bar{e}_c(t) = 0$. Однако производные недоступны измерению, поэтому вектор $\bar{v}(t)$ сформируем следующим образом

$$\bar{v}(t) = -\bar{U}(P)G_m(P)\zeta(t), \quad (25)$$

где $\bar{U}(P) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(\chi^P + 1)^{\gamma_i}} \right\}$, χ — достаточно малая величина. Из формулы (25) имеем $\bar{v}(t) = -\bar{U}(P)G_m(P)(\bar{e}(t) - \tilde{e}(t))$. Принимая во внимание выражение (22), получим $\bar{v}(t) = -\bar{U}(P)G_m(P)\bar{e}(t) + \bar{U}(P)\bar{v}(t)$, откуда следует $\bar{v}(t) = -(I_r - \bar{U}(P))^{-1} \times \bar{U}(P)G_m(P)\bar{e}(t)$. Принимая во внимание, что все матрицы диагональные, а $v_k(t) = V\bar{v}(t)$, получаем



формулу (18). Таким образом, динамические процессы в управляющем устройстве следящей системы описываются уравнениями:

$$\tilde{y}(t) = gy(t),$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_n \tilde{x}(t) + B_n u(t) + K(\tilde{y}(t) - L_n \tilde{e}(t)) + Dv(t),$$

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}(t) = A_0 \tilde{\varepsilon}(t) - Dv(t), \quad \tilde{e}(t) = L_n \tilde{\varepsilon}(t),$$

$$\zeta(t) = e(t) - \tilde{e}(t), \quad e(t) = \tilde{y}(t) - L_n \tilde{x}(t),$$

$$v(t) = q_0^T \tilde{\zeta}(t) + \frac{\Delta Q(P)}{R_d(P)} \zeta(t), \quad u(t) = \alpha v_k(t),$$

$$\bar{\theta}(t) = M\tilde{x}(t), \tag{26}$$

$$\dot{z}_i(t) = \frac{1}{\mu} F_i z_i(t) + \frac{1}{\mu} b_i P^i \zeta(t), \quad \bar{\zeta}_i(t) = L_i z_i(t),$$

$$i = 1, \dots, \gamma,$$

$$v_k(t) = U(P)(\bar{\theta}(t) - \theta_m(t)).$$

Утверждение 3. Пусть выполнены условия предположений 1—5, полином $R_d(P)$ гурвицев. Тогда существуют числа μ_0, χ_0 и T такие, что при $\mu < \mu_0, \chi < \chi_0$ и $t > T$ для системы (1), (26) выполнено целевое условие (2). ♦

Доказательство приведено в Приложении.

4. ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим объект управления, математическая модель которого имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D(c_1^T u(t) + c_2^T x(t) + f(t)),$$

$$y(t) = Lx(t) + N\xi(t), \quad \theta(t) = Mx(t),$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Класс неопределенности задан соотношениями: $c_{11} \in [4, 6], c_{12} \in [4, 6], |f(t)| \leq 5, c_{2i} \in [-3, 3], i = 1, \dots, 4, \xi(t)$ — произвольная векторная функция.

Требуется построить систему слежения за двумерным вектором эталонных сигналов $\theta_m(t)$ при условии, что измеряется вектор выходных сигналов $y(t)$. Целевым условием слежения является неравенство (2).

Выберем матрицу $g = [1 \ 0 \ -1]$, обеспечивающую выполнение предположения 2 и сформируем новый вектор измеряемых переменных

$$\tilde{y}(t) = gy(t) = L_r x(t), \quad L_n = [1 \ 1 \ 0 \ 0].$$

Воспользуемся наблюдателем (4)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + K(\tilde{y}(t) - L_n \tilde{x}(t)) + Dv(t),$$

где $K^T = [5 \ 5 \ 1 \ 5]$. Возьмем вспомогательный контур (6)

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}(t) = A_0 \tilde{\varepsilon}(t) - Dv(t), \quad \tilde{e}(t) = L_n \tilde{\varepsilon}(t),$$

где $A_0 = A - KL_n = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Сформируем управление

наблюдениями $v(t)$ в соответствии с формулой (10):

$$v(t) = q_0^T \tilde{\zeta}(t) + \frac{\Delta Q(P)}{R_d(P)} \zeta(t),$$

где $\zeta(t) = e(t) - \tilde{e}(t) = \tilde{y} - L_n \tilde{x}(t) - \tilde{e}(t), R_d(P) = L_n(I_n P - A_0)^+ D = 5P^3 + 40P^2 + 72P + 48$, компоненты вектора $q_0^T = [0, 2 \ 1]$ получены при выполнении «операторного деления» $Q_0(P)/R_d(P) = 0,2P + 1 + \Delta Q(P)/R_d(P), \Delta Q(P) = -(2,4P^2 + 8,6P + 12), Q_0(P) = \det(I_n P - A_0) = P^4 + 8P^3 + 52P^2 + 73P + 36$. Оценку производной сигнала $\zeta(t)$ получим с помощью реального дифференцирующего звена. В результате получаем, что управление $v(t)$ формируется в соответствии с формулой

$$v(t) = \frac{0,2P}{0,01P+1} \zeta(t) + \zeta(t) - \frac{2,4P^2 + 8,6P + 12}{5P^3 + 40P^2 + 72P + 48} \zeta(t).$$

Сформируем оценку регулируемого вектора $\theta(t)$ в виде $\bar{\theta}(t) = M\tilde{x}(t)$ и вычислим передаточную матрицу

$$W_n(\lambda) = M(I_n \lambda - A_n)^{-1} B_n, \quad W_n(\lambda) = \frac{1}{G(\lambda)} R_1(\lambda) = \frac{1}{G(\lambda)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} R_{11}(\lambda) & R_{12}(\lambda) \\ R_{21}(\lambda) & R_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad G(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 - 10\lambda^2 - 29\lambda - 18,$$

$R_{11}(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 30\lambda + 49, R_{12}(\lambda) = 5\lambda^3 + 19\lambda^2 + 15\lambda + 23, R_{21}(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 35\lambda + 11, R_{22}(\lambda) = 10\lambda^2 + 84\lambda + 61$. Анализируя эти выражения, можно сделать такой вывод. Объект минимально-фазовый, если с помощью первой компоненты вектора управления будем управлять второй компонентой вектора выхода. В этом случае относительные степени γ_1 и γ_2 равны единице. Следовательно, алгоритм управления (18) будет иметь вид:

$$u_1(t) = -\frac{2(P+2)}{0,01P} (\bar{\theta}_2(t) - \theta_{m2}(t)),$$

$$u_2(t) = -\frac{2(P+2)}{0,01P} (\bar{\theta}_1(t) - \theta_{m1}(t)).$$

В данном случае в алгоритме (18) $\beta_1 = \beta_2 = 2, \chi = 0,01$.

Таким образом, устройство управления следящей системы описывается следующими уравнениями:

$$\tilde{y}(t) = gy(t) = L_r x(t),$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + K(\tilde{y}(t) - L_n \tilde{x}(t)) + Dv(t),$$

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}(t) = A_0 \tilde{\varepsilon}(t) - Dv(t), \quad \tilde{e}(t) = L_n \tilde{\varepsilon}(t),$$

$$\zeta(t) = \tilde{y} - L_n \bar{x}(t) - \bar{e}(t), \quad \bar{\theta}(t) = M \bar{x}(t),$$

$$v(t) = \frac{0,2P}{0,01P+1} \zeta(t) + \zeta(t) - \frac{2,4P^2 + 8,6P + 12}{5P^3 + 40P^2 + 72P + 48} \zeta(t),$$

$$u_1(t) = -\frac{2(P+2)}{0,01P} (\bar{\theta}_2(t) - \theta_{m2}(t)),$$

$$u_2(t) = -\frac{2(P+2)}{0,01P} (\bar{\theta}_1(t) - \theta_{m1}(t)).$$

Переходные процессы задающих воздействий θ_{m1} и θ_{m2} , ошибок слежения $\Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_{m1}$, $\Delta\theta_2 = \theta_2 - \theta_{m2}$ и ошибок ε оценивания вектора состояния в следящей

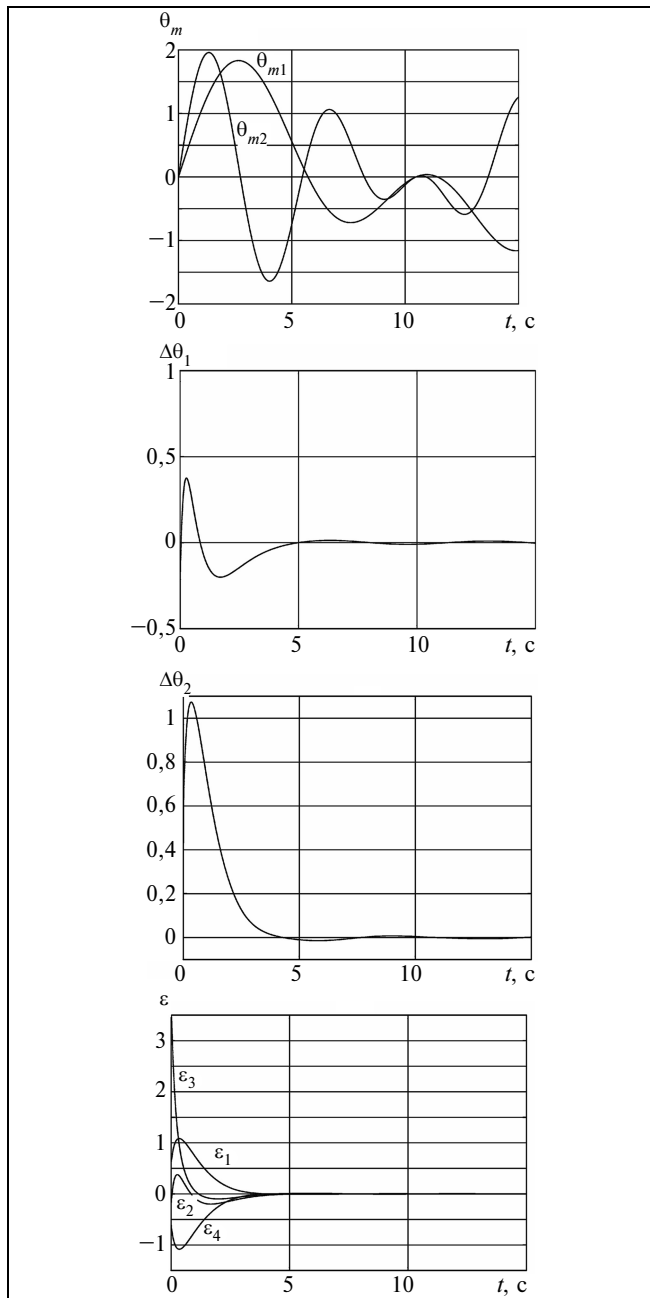


Рис. 1. Переходные процессы в следящей системе

системе приведены на рис. 1 при следующих исходных данных: $x(0) = [1111]^T$, остальные начальные условия нулевые, $c_{11} = c_{12} = 5$, $f(t) = \sin t + \sin 1,3t$, $c_{21} = c_{22} = c_{24} = 3$, $c_{23} = -3$, $\xi_1(t) = \xi_2(t) = 10\sin 4t + 5\sin 2t$, $\xi_3(t) = 5\sin 3t$.

2. Рассмотрим решение задачи компенсации возмущающих воздействий для летательного аппарата при посадке для конкретной траектории глissады, которая в работе [15] решена с помощью метода H_∞ -оптимизации и 2-Риккати подхода. Математическая модель, полученная в работе [17], имеет вид:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \quad y(t) = C_2 x(t), \quad z(t) = C_1 x(t).$$

Здесь использованы такие же обозначения, как и в работе [17], где $x(t) = [\Delta V, \Delta\theta, \Delta\omega_z, \Delta\vartheta, \Delta H, \Delta\delta_{с.т}^*]^T$ — вектор состояния летательного аппарата; ΔV — отклонение воздушной скорости летательного аппарата от заданного значения 71,375 м/с; $\Delta\theta$ — отклонение угла наклона траектории; $\Delta\omega_z$ — отклонение угловой скорости; $\Delta\vartheta$ — отклонение угла тангажа; ΔH — отклонение высоты от значения, которое должно быть при заданной глissаде; $\Delta\delta_{с.т}^*$ — отклонение силы тяги, выраженное в единицах изменения сектора газа; $u(t) = [\vartheta_{с.у}, \Delta\delta_{с.т}^*]^T$ — вектор управления, где $\vartheta_{с.у}$ — сигнал управления, формируемый регулятором, $\Delta\delta_{с.т}^*$ — отклонение ручки сектора газа от заданного значения; $y(t) = [\Delta V, \Delta\theta, \Delta\omega_z, \Delta\vartheta, \Delta H]^T$ — вектор измерения; $z(t) = [\Delta V, \Delta H]^T$ — вектор регулируемых выходов; $w(t) = [w_x, w_y, \dot{w}_x, \dot{w}_y]^T$ — вектор ветровых возмущений;

$$A = \begin{bmatrix} -0,0608 & -0,0815 & 0,0000 & -0,0895 & 0,0000 & 0,0827 \\ 0,2185 & -0,6158 & 0,1082 & 0,7174 & 0,0000 & 0,0033 \\ 0,0053 & 0,5399 & -1,5902 & -1,5728 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0471 & 1,2442 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,400 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,0035 & 0,0658 & -0,9989 & 0,0471 \\ 0,0233 & 0,4939 & -0,0378 & -0,8019 \\ -0,0194 & -0,4319 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0471 & 0,0023 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ -0,1236 & 0,0000 \\ 1,1804 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,4000 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



В данном случае нет необходимости оценивать вектор состояния, так как регулируемые переменные входят в состав вектора измеряемых параметров. Поэтому можно сразу применять утверждение 2. Однако передаточная матрица объекта $C_1(I\lambda - A)^{-1}B_2$ неминимально-фазовая, а значит, данное утверждение неприменимо. Сформируем новый вектор измеряемых параметров $\tilde{y}(t) = GC_2x(t)$ и выберем матрицу G из условий

минимально-фазовости: $G = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0,5 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда полу-

чим $\tilde{y}(t) = Lx(t)$, $L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0,5 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

В этом случае передаточная матрица $L(I\lambda - A)^{-1}B_2 = \frac{1}{g(\lambda)} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(\lambda) & \alpha_{12}(\lambda) \\ \alpha_{21}(\lambda) & \alpha_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$ минимально-фазовая; $g(\lambda) = \lambda^6 + 2,6668\lambda^5 + 3,5523\lambda^4 + 1,8139\lambda^3 + 0,3792\lambda^2 + 0,0298\lambda$, $\alpha_{11}(\lambda) = 0,0958\lambda^5 + 1,5401\lambda^4 + 4,1173\lambda^3 + 6,4463\lambda^2 + 2,1705\lambda + 0,0619$, $\alpha_{12}(\lambda) = 0,0053\lambda^4 + 0,0385\lambda^3 + 0,1081\lambda^2 + 0,1334\lambda + 0,0811$, $\alpha_{21}(\lambda) = 0,0101\lambda^3 - 0,096\lambda^2 - 0,1523\lambda - 0,0449$, $\alpha_{22}(\lambda) = 0,0331\lambda^4 + 0,0729\lambda^3 + 0,0823\lambda^2 + 0,019\lambda$.

Используя результаты утверждения 2, получим следующие алгоритмы управления

$$\vartheta_{cy}(t) = -10 \frac{P+2}{0,1P} \tilde{y}_1(t), \Delta\delta_{cr}(t) = -10 \frac{P^2+4P+3}{0,01P^2+0,1P} \tilde{y}_2(t).$$

В этом случае осуществляется компенсация влияния внешних воздействий на вектор $\tilde{y}(t)$. Однако в его составе сумма измеряемых переменных и $\Delta V(t)$. Следовательно, влияние внешних воздействий на отклонение высоты $\Delta H(t)$ полностью скомпенсировано не будет.

При моделировании синтезированной системы управления исследовалось влияние ветровых возмущений w_x и w_y , графики изменения которых представлены на рис. 2.

Это такие же возмущения, как и в работе [17], что позволяет сравнить полученные результаты с системой управления, исследованной в ней.

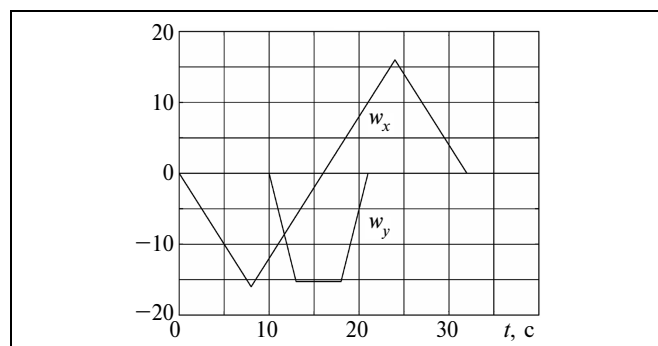


Рис. 2. Составляющие скорости ветра

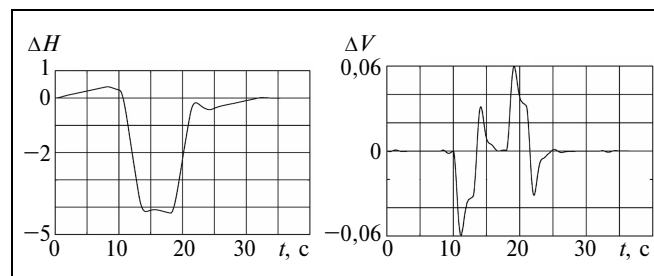


Рис. 3. Переходные процессы регулируемых переменных

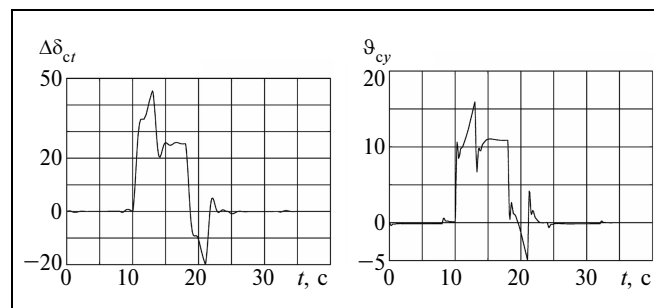


Рис. 4. Переходные процессы по управлениям

На рис. 3 представлены переходные процессы регулируемых переменных, а на рис. 4 — переходные процессы по управляющим воздействиям. Видно, что максимальное отклонение высоты не превышает пяти метров, а отклонение скорости практически нулевое. В работе [17], где приведены результаты моделирования системы управления, полученной с помощью H_∞ -оптимизации, максимальное отклонение высоты равно 26 м, а отклонение скорости 2,8 м/с.

Однако управляющие воздействия получились менее качественными. Их изменение имеет колебательный вид, а максимальное отклонение $\Delta\delta_{cr}$ составляет 45 против 24 в работе [17].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача управления по косвенным измерениям для линейных объектов управления, на входе и выходе которых действуют различные возмущающие воздействия, а также присутствуют параметрические возмущения. Выделен класс объектов, для которых может быть решена задача компенсации параметрических и внешних неконтролируемых возмущений, при условии, что управление осуществляется по косвенным измерениям. Получен алгоритм управления для данного класса объектов, обеспечивающий инвариантность системы к внешним воздействиям, действующим на выходе, и компенсирующий другие возмущения с требуемой точностью.

Численное моделирование приведенных примеров показало, что в следящей системе происходит слежение за эталонными сигналами с хорошей точностью. В системе стабилизации компенсации возмущений на один регулируемый параметр нельзя было достигнуть, так как система была неминимально-фазовой. Однако, по сравнению с имеющимися результатами для аналогичных систем, влияние возмущений на этот параметр уменьшено.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Возьмем функцию Ляпунова

$$V_1 = \varepsilon^T(t)H_1\varepsilon(t) + \sigma^T(t)H_2\sigma(t), \quad (\text{П.1})$$

положительно определенные симметрические матрицы которой определяются из уравнений

$$H_1A_0 = A_0^T H_1 = -2\rho_1 J_n, \quad H_2F + F^T H_2 = -2\rho_2 I_n, \quad (\text{П.2})$$

где $\pi = (1 + \gamma)\gamma/2$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$. Вычислим полную производную функции (П.1) на траекториях системы (13), (15), принимая во внимание уравнения (П.2):

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -2\rho_1|\varepsilon(t)|^2 + 2\varepsilon^T(t)H_1Dq_1^T \bar{L}\sigma(t) - 2\frac{\rho_2}{\mu_0}|\sigma(t)|^2 + \\ & + 2\sigma^T(t)H_2h\vartheta(t). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

В силу предположения об ограниченности функции $\varphi(x, u, t)$, из уравнения (8) следует ограниченность вектора $\vartheta(t)$. Воспользуемся оценками

$$2\varepsilon^T(t)H_1Dq_1^T \bar{L}\sigma(t) \leq \mu_0|\varepsilon(t)|^2 + \frac{k_1}{\mu_0}|\sigma(t)|^2, \quad k_1 = \|H_1Dq_1^T \bar{L}\|^2,$$

$$2\sigma^T(t)H_2h\vartheta(t) \leq \frac{1}{\mu_0}|\sigma(t)|^2 + \mu_0k_2, \quad k_2 = \sup_t |H_2h\vartheta(t)|^2.$$

Подставив эти оценки в производную (П.3), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\rho_1|\varepsilon(t)|^2 - \rho_2/\mu_0|\sigma(t)|^2 - (\rho_1 - \mu_0)|\varepsilon(t)|^2 - \\ & - \frac{1}{\mu_0}(\rho_2 - k_1 - 1)|\sigma(t)|^2 + \mu_0k_2. \end{aligned}$$

Если выбрать числа ρ_1 и ρ_2 из условий $\rho_1 - \mu_0 > 0$ и $\rho_2 - k_1 - 1 > 0$, то

$$\dot{V}_1 \leq -\rho_1|\varepsilon(t)|^2 - \rho_2/\mu_0|\sigma(t)|^2 + \mu_0k_2.$$

Выберем число ρ_3 из условия $\rho_3 = \min\left\{\frac{\rho_1}{\lambda_{\max}(H_1)}, \frac{\rho_2}{\mu_0\lambda_{\max}(H_2)}\right\}$. Принимая во внимание выражение (П.1),

получим неравенство $\dot{V}_1 \leq -\rho_3V_1 + \mu_0k_2$, где λ_{\max} — максимальное собственное значение соответствующей

матрицы. Решив это неравенство, с учетом формулы (П.1) получим:

$$|\varepsilon(t)|^2 \leq \rho_4(e^{-\rho_3 t} V_1(0) + \mu_0k_2/\rho_3), \quad (\text{П.4})$$

где $\rho_4 = \frac{1}{\lambda_{\min}(H_1)}$. Из неравенства (П.4) видно, что существуют числа μ_0 и T_1 , обеспечивающие выполнение неравенства (16) при $t > T_1$ для любого δ_2 .

Доказательство утверждения 2. Для доказательства работоспособности алгоритма (18) для системы (17) необходимо показать, что целевое условие (19) обеспечивает алгоритм, описываемый уравнениями (22) и (24).

Идеальный закон управления в системе слежения по компонентам можно записать в виде $\bar{v}_i(t) = g_{mi}^T \zeta_{pi}(t)$, где g_{mi} — векторы, составленные из коэффициентов полиномов $G_{mi}(P)$, $\zeta_{pi}^T = [\zeta_i(t), P\zeta_i(t), \dots, P^{i-1}\zeta_i(t)]$, $\zeta_i(t)$ — i -я компонента вектора $\zeta(t)$. Для реализации уравнения (24) используем фильтры, аналогичные модели (11)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_{ij}(t) = & \frac{1}{\chi} F_i \bar{z}_{ij}(t) + \frac{1}{\chi} b_i P^i \zeta_j(t), \quad \bar{z}_{ij}(t) = L_i z_{ij}(t), \\ & i = 1, \dots, \gamma i, \quad j = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

где матрицы F_i , b_i и L_i такие же, как в выражении (11), $\bar{z}_{ij}(t)$ — оценка i -й производной j -й компоненты вектора $\zeta(t)$. Введем оценочные векторы $\bar{\sigma}_{ij}(t) = z_{ij}(t) + F_i^{-1} b_i P^i \zeta_j(t)$, $i = 1, \dots, \gamma i, j = 1, \dots, r$. Проведем преобразование, аналогичное тем, которые выполнены при выводе формулы (13), получим

$$\dot{\bar{\sigma}}_j(t) = \frac{1}{\chi} F \bar{\sigma}_j(t) + h \bar{\vartheta}_j(t), \quad \varepsilon_{jc}(t) = \bar{L} \bar{\sigma}_j(t), \quad (\text{П.5})$$

где $\bar{\sigma}_j^T(t) = [\sigma_{1j}(t), \dots, \sigma_{\gamma ij}(t)]$, $\bar{\vartheta}_j^T = [P^2 \zeta_j(t), \dots, P^{i+1} \zeta_j(t)]$. Введем составные векторы $\bar{\sigma}^T(t) = [\bar{\sigma}_1(t), \dots, \bar{\sigma}_r(t)]$, $\varepsilon_c^T(t) = [\varepsilon_{1c}(t), \dots, \varepsilon_{rc}(t)]$, $\bar{\vartheta}^T(t) = [\bar{\vartheta}_1(t), \dots, \bar{\vartheta}_r(t)]$ и блочно-диагональные матрицы $\bar{F} = \text{diag}\{F, \dots, F\}$, $\bar{h} = \text{diag}\{h, \dots, h\}$, $\bar{L} = \text{diag}\{\bar{L}, \dots, \bar{L}\}$. Тогда систему уравнений (П.5) можно записать в виде одного векторно-матричного уравнения

$$\begin{aligned} \chi_1 \dot{\bar{\sigma}}(t) = & \bar{F} \bar{\sigma}(t) + \chi_2 \bar{h} \bar{\vartheta}(t), \quad \varepsilon_c(t) = \bar{L} \bar{\sigma}(t), \\ & \chi_1 = \chi_2 = \chi. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Преобразуем уравнение (21) в векторно-матричную форму, принимая во внимание формулу (25):

$$\dot{\varepsilon}_m(t) = A_m \varepsilon_m(t) + B_m G_m \bar{L} \bar{\sigma}(t), \quad e_c(t) = L_m \varepsilon_{mp}(t). \quad (\text{П.7})$$

Здесь G_m — матрица, у которой элементами строк являются коэффициенты полиномов $G_{mi}(P)$, кроме свободных компонент.



Возьмем функцию Ляпунова

$$V_2 = \varepsilon_m^T(t) H_3 \varepsilon_m(t) + \bar{\sigma}^T(t) H_4 \bar{\sigma}(t), \quad (\text{П.8})$$

где положительно определенные симметрические матрицы H_3 и H_4 определяются из уравнений

$$H_3 A_m + A_m^T H_3 = -2\tau_1 I_n, \quad H_4 \bar{F} + \bar{F}^T H_4 = -2\tau_2 I_n, \quad (\text{П.9})$$

Здесь n_1 — порядок вектора $\bar{\sigma}(t)$, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$. Воспользуемся леммой [18].

Лемма [18]. Если система описывается уравнением $\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2)$, $x \in R^m$, где $f(x, \mu_1, \mu_2)$ — непрерывная функция, липшицева по x , и при $\mu_2 = 0$ имеет ограниченную замкнутую область диссипативности $\Omega_1 = \{x | F(x) < C\}$, где $F(x)$ — положительно определенная, непрерывная, кусочно-гладкая функция, то существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu_1 \leq \mu_0$ и $\mu_2 \leq \mu_0$ исходная система имеет ту же область диссипативности Ω_1 , если для некоторых чисел C_1 и $\bar{\mu}_1$ при $\mu_2 = 0$ выполнено условие

$$\sup_{|\mu_1| \leq \bar{\mu}_1} \left(\left(\frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)^T f(x, \mu_1, 0) \right) \leq -C_1, \text{ при } F(x) = C. \blacklozenge$$

Возьмем в качестве функции $F(x)$ функцию Ляпунова (П.8) и вычислим полную производную от нее на траекториях системы (П.6), (П.7), положив $\chi_2 = 0$ и учитывая условия (П.9),

$$\dot{V}_2 = -2\tau_1 |\varepsilon_m(t)|^2 - 2\frac{\tau_2}{\chi_1} |\bar{\sigma}(t)|^2 + 2\varepsilon_m^T(t) H_3 B_m G_m \tilde{L} \bar{\sigma}(t).$$

Воспользуемся оценкой

$$2\varepsilon_m^T(t) H_3 B_m G_m \tilde{L} \bar{\sigma}(t) \leq \chi_1 |\varepsilon(t)|^2 + \frac{k_3}{\chi_1} |\bar{\sigma}(t)|^2, \quad (\text{П.10})$$

$$k_3 = \|H_3 B_m G_m \tilde{L}\|^2.$$

Подставив эту оценку и выбрав числа τ_1 и τ_2 из условий $\tau_1 > \chi_1$, $\tau_2 > k_3/\chi_1$, получим

$$\dot{V}_2 \leq -\tau_1 |\varepsilon_m(t)|^2 - \frac{\tau_2}{\chi_1} |\bar{\sigma}(t)|^2.$$

Система асимптотически устойчива по переменным $\varepsilon_m(t)$ и $\bar{\sigma}(t)$. Следовательно, векторы $x(t)$ и $\bar{\theta}(t)$ в системе (17) ограничены в силу четвертого условия предположений. Покажем, что все переменные в системе тоже ограничены. Равенство $\chi_2 = 0$ равносильно тому, что вектор $\bar{v}(t)$ определяется в соответствии с формулой (24). Из ограниченности переменных $\bar{\theta}(t)$, $f(t)$ и $\varepsilon(t)$ и гурвицевости полиномов $G_{0r}(P)$ и $R_{0r}(P)$ следует ограниченность составляющей $\Psi_1(t) = R_0^{-1}(P) \times ((\Delta G(P)\bar{\theta}(t) + R_2(P)(c_2^T x(t) + f(t)) + R_3(P)\varepsilon(t)) + G_m(P)\theta_m(t))$ в выражении для векторной функции $\bar{\Psi}(t)$. Подставим в правую часть формулы (24) значение $\bar{\Psi}(t)$, принимая во внимание уравнение (23):

$\bar{v}(t) = -R_0^{-1}(P)((\Delta R(P) + \bar{R}_1(P) + R_2(P)\alpha)V\bar{v}(t) + \Psi_1(t)) - (\bar{K}V - I_r)\bar{v}(t)$, откуда $R_0(P)\bar{v}(t) = -((\Delta R(P) + \bar{R}_1(P) + R_2(P)\alpha)V\bar{v}(t) + \Psi_1(t)) - R_0(P)(\bar{K}V - I_r)\bar{v}(t)$. Принимая во внимание равенства $\Delta R(P) + \bar{R}_1(P) + R_0(P)\bar{K} = R_1(P)$, $R(P) = R_1(P) + R_2(P)\alpha = M(I_n\lambda - A_n)^+ B\alpha$ и $v_k(t) = V\bar{v}(t)$, получаем $v_k(t) = R^{-1}(P)\Psi_1(t)$. Так как векторная функция $\Psi_1(t)$ ограничена, а передаточная матрица $M(I_n\lambda - A_n)^+ B\alpha$ минимально-фазовая, тогда вектор $v_k(t)$ тоже ограничен. Учитывая формулу для $\bar{\Psi}(t)$, можно сделать вывод об ограниченности этой функции, а следовательно из уравнения (23) следует ограниченность вектора $\bar{\vartheta}(t)$. Таким образом, при любых начальных условиях существует ограниченная область Ω , в которой находятся все переменные исследуемой системы при $\chi_2 = 0$. Тогда в соответствии с леммой существует число χ_0 такое, что при выполнении условия $\chi < \chi_0$ все переменные тоже будут находиться в этой области. Далее доказательство аналогично доказательству утверждения 1. Вычислим полную производную функции (П.8) на траекториях системы (П.6), (П.7), положив $\chi = \chi_0$, с учетом уравнений (П.9):

$$\dot{V}_2 = -2\tau_1 |\varepsilon_m(t)|^2 - 2\frac{\tau_2}{\chi_1} |\bar{\sigma}(t)|^2 + 2\varepsilon_m^T(t) H_3 B_m G_m \tilde{L} \bar{\sigma}(t) + 2\bar{\sigma}^T(t) H_4 \bar{h} \bar{\vartheta}(t).$$

Воспользуемся неравенством (П.10) и оценкой

$$2\bar{\sigma}^T(t) H_4 \bar{h} \bar{\vartheta}(t) \leq \frac{1}{\chi_0} |\bar{\sigma}(t)|^2 + \chi_0 k_4, \quad k_4 = \sup |H_4 \bar{h} \bar{\vartheta}(t)|^2,$$

в результате чего получим

$$\dot{V}_2 \leq -\tau_1 |\varepsilon_m(t)|^2 - \frac{\tau_2}{\chi_0} |\bar{\sigma}(t)|^2 - (\tau_1 - \chi_0) |\varepsilon_m(t)|^2 - \frac{1}{\chi_0} (\tau_2 - k_3 - 1) |\bar{\sigma}(t)|^2 + \chi_0 k_4.$$

Если выбрать числа τ_1 и τ_2 из условий: $\tau_1 - \chi_0 > 0$ и $\tau_2 - k_3 - 1 > 0$, то

$$\dot{V}_2 \leq -\tau_1 |\varepsilon_m(t)|^2 - \frac{\tau_2}{\chi_0} |\bar{\sigma}(t)|^2 + \chi_0 k_4.$$

Выберем число τ_3 из условия $t_3 = \min \left\{ \frac{\tau_1}{\lambda_{\max}(H_2)}, \frac{\tau_2}{\chi_0 \lambda_{\max}(H_4)} \right\}$. Принимая во внимание (П.8), получим неравенство $\dot{V}_2 \leq -\tau_3 V_2 + \chi_0 k_4$, решив которое с учетом формулы (П.8), получим следующие соотношения:

$$|\varepsilon_m(t)|^2 \leq \tau_4 \left(e^{-\tau_3 t} V_2(0) + \chi_0 \frac{k_4}{\tau_3} \right),$$

где $\tau_4 = \frac{1}{\lambda_{\min}(H_3)}$. Отсюда видно, что существуют числа χ_0 и T_2 , обеспечивающие выполнение неравенства (19) при $t > T$ для любого δ_3 .

Доказательство утверждения 3. В соответствии с утверждением 2, векторная функция $\bar{\Psi}(t)$ ограничена. В этом случае справедливо утверждение 1, если компенсирующее управление формировать в соответствии с формулой (25). Показано, что выполнены условия (16), (19). Тогда можно получить следующую цепочку равенств и неравенств

$$\begin{aligned} |\theta(t) - \theta_m(t)| &= |\theta(t) - \bar{\theta}(t) + \bar{\theta}(t) - \theta_m(t)| \leq \\ &\leq |\theta(t) - \bar{\theta}(t)| + |\bar{\theta}(t) - \theta_m(t)| = |M\varepsilon(t)| + |M\varepsilon_m(t)| \leq \\ &\leq |M|(|\varepsilon(t)| + |\varepsilon_m(t)|) < |M|(\delta_2 + \delta_3), \end{aligned}$$

когда $\mu < \mu_0$, $\chi < \chi_0$. Если выбрать величины δ_1 , δ_2 и T так, чтобы выполнялись условия $|M|(\delta_2 + \delta_3) = \delta$ и $T \geq \max\{T_1, T_2\}$, то получим справедливость целевого условия (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щипанов Г.В.* Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика. — 1939. — № 1. — С. 49—66.
2. *Петров Б.Н.* О реализации условий инвариантности // Тр. 1-го Всесоюзного совещания по теории инвариантности. — Киев: Изв. отделения техн. наук АН УССР. — 1959. — С. 59—80.
3. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. — М.: Изд-во науч. лит-ры Н. Ф. Бочкарёвой, 2006.
4. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 216 с.
5. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних возмущений. 1. Объекты с известными параметрами // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 13—24.
6. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних возмущений. 2. Объекты с неизвестными параметрами // Там же. — № 11. — С. 40—48.
7. *Никифоров В.О.* Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 4. — С. 69—73.
8. *Бобцов А.А.* Алгоритм робастного управления линейным объектом по выходу с компенсацией неизвестного детерминированного возмущения // Там же. — 2003. — № 2. — С. 93—97.
9. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 7. — С. 103—115.
10. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления нестационарным объектом с компенсацией возмущения // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 4. — С. 33—40.
11. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления линейным динамическим объектом // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2008. — № 8. — С. 7—12.
12. *Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.* Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. — 2008. — № 5. — С. 2—7.
13. *Бобцов А.А., Быстров С.В., Григорьев В.В.* Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для неминимально фазового объекта // Тр. 5-й науч.-техн. конф. «Мехатроника, автоматизация, управление». — СПб., 2008. — С. 37—40.
14. *Бобцов А.А.* Алгоритмы управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 9.
15. *Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления* / Под ред. Н.Д. Егупова. — М.: Изд-во МТТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.
16. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 5. — С. 72—90.
17. *Курдюков А.П., Тимин В.Н.* Синтез робастной системы управления на режиме посадки самолета в условиях сдвига ветра // Изв. РАН. Техн. кибернетика. — 1993. — № 6. — С. 200—208.
18. *Брусин В.А.* Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119—127.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.

Цыкунов Александр Михайлович — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет, ☎ (8512) 61-42-48, ✉ tsygunov_al@mail.ru.

Новая книга

Гонтарева И.В., Нижегородцев Р.М., Новиков Д.А. Управление проектами. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 384 с.

Рекомендована учебно-методическим объединением по образованию в области финансов, учета и мировой экономики в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальностям «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Налоги и налогообложение» и «Мировая экономика».

Системно рассмотрен комплекс вопросов, составляющих сравнительно молодую и быстро развивающуюся область экономической и управленческой науки — управление проектами. Оно охватывает все составные части процесса управления проектами (разработка, планирование, бюджетирование, финансирование, оценка эффективности, завершение проекта) и отдельно рассматривает вопросы различных направлений этого управления: управление проектными рисками, управление качеством проекта, управление проектной командой и др. Отдельное внимание уделено управлению инновационными проектами.

Для студентов экономических специальностей, преподавателей и практических работников в области экономики и управления.