

# РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ<sup>1</sup>

А.М. Цыкунов

Решена задача робастного управления с эталонной моделью объектом с распределенным запаздыванием, когда на него действуют ограниченные внешние возмущения, а параметры математической модели неизвестны. Получен алгоритм управления, позволяющий компенсировать априорную неопределенность параметров и внешние ограниченные возмущения с требуемой точностью. Приведен числовой пример и результаты моделирования.

**Ключевые слова:** робастное управление, вектор состояния, возмущение, распределенное запаздывание.

## ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем теории автоматического управления динамическими объектами заключается в проектировании алгоритмического обеспечения регулирующих устройств в условиях априорной неопределенности параметров математических моделей объектов и внешних неизмеряемых возмущений. Проектируемая система управления должна обеспечивать выполнение основной цели управления, например, слежение за эталонным сигналом с требуемой точностью. Это возможно осуществить, если скомпенсировать параметрические и внешние возмущения. Один из основных подходов к решению данной задачи состоит в применении робастных систем управления. Достаточно подробно эта проблема изложена в работе [1], где приводится классификация задач проектирования робастных систем управления и различных типов возмущений.

Бурное развитие теории робастных систем управления началось с публикации [2], в которой были доказаны необходимые и достаточные условия устойчивости интервальных полиномов. Разработаны различные подходы и методы построения робастных систем управления и исследования

их устойчивости. Особенно отметим различные подходы, базирующиеся на «2-Риккати подходе», который был предложен в работе [3], метод инвариантных эллипсоидов [4, 5], метод матричных неравенств [6]. Эти методы наиболее часто используются для проектирования алгоритмического обеспечения робастных систем управления. Метод инвариантных эллипсоидов был применен для проектирования робастного динамического регулятора [7], а метод матричных неравенств — для синтеза субоптимального регулятора по выходу для гашения ограниченных возмущений [8].

Задача робастного управления объектами с запаздыванием исследована в работах [9–11]. Решены задачи робастного управления для объектов с запаздыванием нейтрального типа [12–14]. В работах [15, 16] запаздывающие составляющие принимаются как внутренние возмущения, и их влияние на регулируемые переменные компенсируется. В результате уравнения замкнутой системы не содержат запаздывающих составляющих. Однако такой подход не всегда применим в реальных условиях. Для многих технических и технологических объектов запаздывающие составляющие нельзя компенсировать, что связано с техническими и технологическими условиями автоматизируемого объекта.

В данной статье рассматривается задача робастного управления объектом, математическая модель которого описывается дифференциальным

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-08-00164).



уравнением с распределенным запаздыванием. Такие модели имеют место в химической промышленности, в электроэнергетике, в технических системах, содержащих гидравлические трубы [17].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + D \int_{-h}^0 y(t + \theta) d\theta + Bu(t) + \Gamma f(t), \\ y(t) &= Lx(t), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $u(t)$  и  $y(t)$  — скалярные управляющее воздействие и регулируемая переменная,  $f(t)$  — внешнее возмущение,  $\varphi(\theta)$  — непрерывная начальная функция,  $h$  — время запаздывания,  $A$ ,  $D$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  и  $L$  — числовые матрицы соответствующих порядков.

Задано уравнение эталонной модели

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + D_m \int_{-h}^0 y_m(t + \theta) d\theta + B_m g(t), \\ y_m(t) &= L_m x_m(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_m \in R^n$ ,  $g(t)$  и  $y_m(t)$  — скалярные задающее воздействие и выход эталонной модели,  $A_m$ ,  $D_m$  и  $B_m$  — числовые матрицы соответствующих порядков, начальные условия нулевые.

Требуется получить алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t \geq T_0, \quad (3)$$

где величина  $\delta > 0$  характеризует точность слежения,  $T_0$  — время, по истечении которого с начала функционирования системы должно выполняться целевое неравенство.

Будем решать сформулированную задачу при следующих *предположениях*.

1. Пара  $A$ ,  $B$  — управляема.
2. Известны диапазоны возможных значений элементов матриц  $A$ ,  $D$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  и  $L$ .
3. Уравнение (1) является минимально-фазовым, т. е. полином  $L(I_n s - A)^+ B$  — гурвицев, где  $s$  — комплексная переменная в преобразовании Лапласа,  $(I_n s - A)^+$  — транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы  $(I_n s - A)$ ,  $I_n$  — единичная матрица порядка  $n \times n$ .
4. Внешнее возмущение  $f(t)$  и задающее воздействие  $g(t)$  являются гладкими ограниченными функциями.

5. Производные регулируемой переменной и управляющего воздействия не измеряются.

### 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Преобразуем уравнения (1) и (2) в форму «вход — выход» и применим преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} Q(s)y(s) &= G(s) \int_{-h}^0 e^{s\theta} d\theta y(s) + kM(s)u(s) + \\ &\quad + N(s)f(s) + K(s), \\ Q_m(s)y_m(s) &= G_m(s) \int_{-h}^0 e^{s\theta} d\theta y_m(s) + k_m M_m(s)g(s), \end{aligned}$$

где  $Q_m(s) = \det(I_n s - A_m)$ ,  $G(s) = L(I_n s - A)^+ D$ ,  $G_m(s) = L_m(I_n s - A_m)^+ D_m$ ,  $Q_m(s) = \det(I_n s - A)$ ,  $M(s) = L(I_n s - A)^+ B$ ,  $M_m(s) = L_m(I_n s - A_m)^+ B_m$ ,  $N(s) = L(I_n s - A)^+ \Gamma$ ,  $\deg Q(s) = \deg Q_m(s) = n$ ,  $\deg N(s) = n_1 \leq n - 1$ ,  $\deg G(s) \leq n - 1$ ,  $\deg G_m(s) \leq n - 1$ ,  $\deg M(s) = m$ ,  $\deg M_m(s) \leq m$ . Полиномы  $Q(s)$ ,  $Q_m(s)$ ,  $M(s)$ ,  $M_m(s)$  — нормированы,  $K(s)$  — изображения по Лапласу, связанные с начальными условиями.

Составим уравнение для ошибки  $\bar{e}(s) = y(s) - y_m(s)$ :

$$\begin{aligned} Q_m(s)\bar{e}(s) &= G_m(s) \int_{-h}^0 e^{s\theta} d\theta \bar{e}(s) + \Delta Q(s)y(s) + \\ &\quad + \Delta G(s) \int_{-h}^0 e^{s\theta} d\theta y(s) + kM(s)u(s) + \\ &\quad + N(s)f(s) - k_m M_m(s)g(s) + K(s), \end{aligned}$$

где  $\Delta Q(s) = Q_m(s) - Q(s)$ ,  $\Delta G(s) = G_m(s) - G(s)$ .

Применим алгоритм деления Евклида к многочленам  $Q_m(s)$  и  $G_m(s)$ :

$$\begin{aligned} Q_m(s) &= \bar{Q}(s)M(s) + M_1(s), \\ G_m(s) &= \bar{G}(s)M(s) + M_2(s), \quad \deg \bar{Q}(s) = \gamma, \\ \gamma &= n - m, \quad \deg M_1(s) \leq m - 1, \quad \deg \bar{G}(s) \leq \gamma - 1, \\ &\quad \deg M_2(s) \leq m - 1. \end{aligned}$$

Разложим полиномы  $\bar{Q}(s)$  и  $\bar{G}(s)$ :  $\bar{Q}(s) = Q_0(s) + \Delta_1(s)$ ,  $\bar{G}(s) = G_0(s) + \Delta_2(s)$ , и разделим на многочлен  $M(s)$ . Требования для выбора гурвицевого полинома  $Q_0(s)$  и  $G_0(s)$  будут представлены в дальнейшем изложении. В результате этих преобразо-

ваний уравнение ошибки в изображениях по Лапласу примет вид

$$Q_0(s)\bar{e}(s) = G_0(s) \int_{-h}^0 e^{s\theta} d\theta \bar{e}(s) + ku(s) + \frac{1}{M(s)} \left( N_1(s)y(s) + N_2(s) \int_{-h}^0 e^{s\theta} d\theta y(s) + N(s)f(s) - k_m M_m(s)g(s) + K(s) \right), \quad (4)$$

где  $N_1(s) = \Delta Q(s) - M_1(s) - \Delta_1(s)$ ,  $N_2(s) = \Delta G(s) + M_2(s) + \Delta_2(s)$ ,  $\deg N_1(s) = n - 1$ ,  $\deg N_2(s) \leq n - 1$ . Выделим целые составляющие в выражениях:

$$\frac{N_1(s)}{M(s)} = N_3(s) + \frac{N_4(s)}{M(s)}, \quad \frac{N_2(s)}{M(s)} = N_5(s) + \frac{N_6(s)}{M(s)},$$

$$\deg N_3(s) = \gamma - 1, \quad \deg N_5(s) \leq \gamma - 1.$$

Преобразуем уравнение (4) в операторную форму

$$Q_0(P)e(t) = G_0(P) \int_{-h}^0 e(t + \theta) d\theta + ku(t) + \psi_1(t), \quad (5)$$

где  $\psi_1(t) = \left( N_3(P) + \frac{N_4(P)}{M(P)} \right) y(t) + \left( N_5(s) + \frac{N_6(s)}{M(s)} \right) \times$

$$\times \int_{-h}^0 y(t + \theta) d\theta + \sigma_g(t) + \sigma_f(t) + \sigma(t),$$

$$\sigma_g(t) = \frac{k_m M_m(P)}{M(P)} = k_m g(t) + \frac{\Delta M(P)}{M(P)} g(t),$$

$$\sigma_f(t) = \frac{N(P)}{M(P)} f(t) = \Delta N_1(P) f(t) + \frac{\Delta N_2(P)}{M(P)} f(t),$$

$$\sigma(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(s)}{M(s)} \right\}, \quad e(t) = L^{-1} \{ \bar{e}(s) \} - \text{оригиналы от}$$

изображений Лапласа,  $P = d/dt$  — оператор дифференцирования,  $\deg \Delta N_1(P) = n_1 - m$ ,  $\deg \Delta N_2(P) \leq m$ .

Введем новое управляющее воздействие  $\vartheta(t)$ :

$$u(t) = \alpha \vartheta(t), \quad \alpha > 0, \quad (6)$$

и преобразуем уравнение (5) в векторно-матричную форму:

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_0 \varepsilon(t) + D_0 \int_{-h}^0 e(t + \theta) d\theta + B_0 \beta \vartheta(t) + B_0 \psi(t),$$

$$e(t) = C \varepsilon(t). \quad (7)$$

Здесь

$$\psi(t) = \psi_1(t) + (k\alpha - \beta) \vartheta(t), \quad C = [1, 0, \dots, 0],$$

$$B_0^T = [0, \dots, 0, 1], \quad D_0^T = [g_1, \dots, g_\gamma], \quad A_0 = \begin{bmatrix} -q_1 & I_{\gamma-1} \\ \vdots & \vdots \\ -q_\gamma & 0 \end{bmatrix},$$

$g_1, \dots, g_\gamma$  — коэффициенты полинома  $G_0(s)$ ,

$q_1, \dots, q_\gamma$  — коэффициенты многочлена  $Q_0(s)$ . Эти коэффициенты выбираются так, чтобы решением уравнения

$$PA_0 + A_0^T H + hHD_0 C \Phi^{-1} C^T D_0^T H = -h\Phi - \Lambda \quad (8)$$

была положительно-определенная матрица  $H$ , положительно-определенные матрицы  $\Phi$  и  $\Lambda$  подбираются в процессе решения, чтобы получить требуемый результат. В дальнейшем матрицы вида  $[1, 0, \dots, 0]$  и  $[0, \dots, 0, 1]$  будем обозначать символами  $C$  и  $B_0$ , если их порядок будет очевидным из текста.

Необходимо выделить сигнал, несущий информацию о функции  $\psi(t)$ , так как в ней сконцентрирована вся априорная неопределенность параметров математической модели объекта управления и информация о внешних неконтролируемых возмущениях. Для этой цели введем вспомогательный контур, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$\dot{\varepsilon}_b(t) = A_0 \varepsilon_b(t) + D_0 \int_{-h}^0 e(t + \theta) d\theta + B_0 \beta \vartheta(t),$$

$$e_b(t) = C \varepsilon_b(t). \quad (9)$$

Составим уравнение для вектора рассогласования  $z(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_b(t)$ , вычитая уравнение (9) из уравнения (8)

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + B_0 \psi(t), \quad \zeta(t) = Cz(t). \quad (10)$$

Принимая во внимание структуры матриц, получаем

$$\psi(t) = \dot{z}_\gamma(t) + q_\gamma \zeta(t), \quad (11)$$

где  $z_\gamma(t)$  — последняя компонента вектора  $z(t)$ . Поэтому идеальный закон управления описывается уравнением

$$\vartheta_u(t) = -\frac{1}{\beta} (\dot{z}_\gamma(t) + q_\gamma \zeta(t)), \quad (12)$$

и уравнение замкнутой системы будет иметь вид

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_0 \varepsilon(t) + D_0 \int_{-h}^0 d(\theta) e(t + \theta),$$

$$e(t) = C \varepsilon(t). \quad (13)$$

Система будет асимптотически устойчивой. Однако в соответствии с предположением 5 алгоритм (12) не реализуем. Поэтому будем формировать управляющее воздействие в соответствии с формулой

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{\beta} (\xi_{\gamma+1}(t) + q_\gamma \zeta(t)). \quad (14)$$



Здесь  $\xi_{\gamma+1}(t)$  — последняя компонента вектора состояния наблюдателя  $\xi(t)$  [18], и

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= F_0 \xi(t) + a_m \zeta(t) + B_1(\zeta(t) - \bar{\zeta}(t)), \\ \bar{\zeta}(t) &= C \xi(t), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\xi \in R^{\gamma+1}$ ,  $F_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_1^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{\gamma+1} \\ \mu & \mu^2 & \dots & \mu^{\mu+1} \end{bmatrix}$ .

Числа  $b_1, \dots, b_{\gamma+1}$  выбираются так, чтобы матрица  $F + B_2 C$  была гурвицевой,  $\mu$  — малое положительное число,  $a_m^T = [-q_1, \dots, -q_\gamma, 0]$ ,  $B_2^T = [b_1, \dots, b_{\gamma+1}]$ ,  $\bar{\zeta}(t)$  — оценка сигнала  $\zeta(t)$ .

Отметим, что размерность вектора  $\xi(t)$  на единицу больше, чем это необходимо при технической реализации. Это сделано для удобства аналитических преобразований.

Введя в уравнение (10) новую переменную  $z_{\gamma+1}(t) = \psi(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}(t) &= F_0 \bar{z}(t) + a_m \zeta(t) + B_0 \psi(t), \\ \zeta(t) &= C \bar{z}(t), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\bar{z}^T(t) = [z^T(t), z_{\gamma+1}(t)]$ .

Вектор  $\xi(t)$  является оценкой вектора  $\bar{z}(t)$ . Введем вектор нормированных отклонений  $\eta(t) = \Gamma^{-1}(\bar{z}(t) - \xi(t))$ , где  $\Gamma = \text{diag}\{\mu^\gamma, \dots, \mu, 1\}$ . Вычитая выражение (15) из выражения (16), получим уравнение для нормированных отклонений  $\eta(t)$ :

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{\mu} F \eta(t) + B_0 \psi(t). \quad (17)$$

**Утверждение.** Пусть выполнены предположения 1—5 и матрицы  $A_0$  и  $D_0$  выбраны так, что справедливо уравнение (8). Тогда существует число  $\mu_0 > 0$  такое, что при  $\mu > \mu_0$  для системы (1), (2), (9), (14) и (15) выполнено целевое условие (3). ♦

Доказательство приведено в Приложении.

### 3. ПРИМЕР

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого задана уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \int_{-h}^0 y(t + \theta) d\theta + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} f(t), \end{aligned}$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t), \quad x_i(0) = 1, \quad \theta \in [-h, 0], \quad i = 1, 2, 3.$$

Класс неопределенности задан неравенствами:

$$-3 \leq a_i \leq 3, \quad -5 \leq d_i \leq 5, \quad 1 \leq b_j \leq 7, \quad -2 \leq \gamma_j \leq 2, \\ i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \quad |f(t)| \leq 5.$$

Уравнение эталонной модели

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \int_{-h}^0 y_m(t + \theta) d\theta + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} g(t), \quad y_m(t) = [1 \ 0 \ 0]x_m(t). \end{aligned}$$

Вводится новое управляющее воздействие  $\vartheta(t)$

$$u(t) = \alpha \vartheta(t).$$

Относительная степень передаточной функции объекта управления равна двум. Поэтому уравнение вспомогательного контура (9) возьмем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_b(t) &= \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon_b(t) - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \int_{-h}^0 e(t + \theta) d\theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \beta \vartheta(t), \\ e_b(t) &= [1 \ 0] \varepsilon_b(t). \end{aligned}$$

где  $e(t) = y(t) - y_m(t)$ . Уравнения наблюдателя (15) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) - 7\zeta(t) + \frac{3}{\mu}(\zeta(t) - \xi_1(t)), \\ \dot{\xi}_2(t) = -12\zeta(t) + \frac{3}{\mu}(\zeta(t) - \xi_1(t)), \quad \zeta(t) = e(t) - e_b(t). \end{cases}$$

Управляющее воздействие  $\vartheta(t)$  будем формировать в соответствии с формулой

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{\beta}(\sigma(\dot{\xi}_2(t)) + 12\zeta(t)).$$

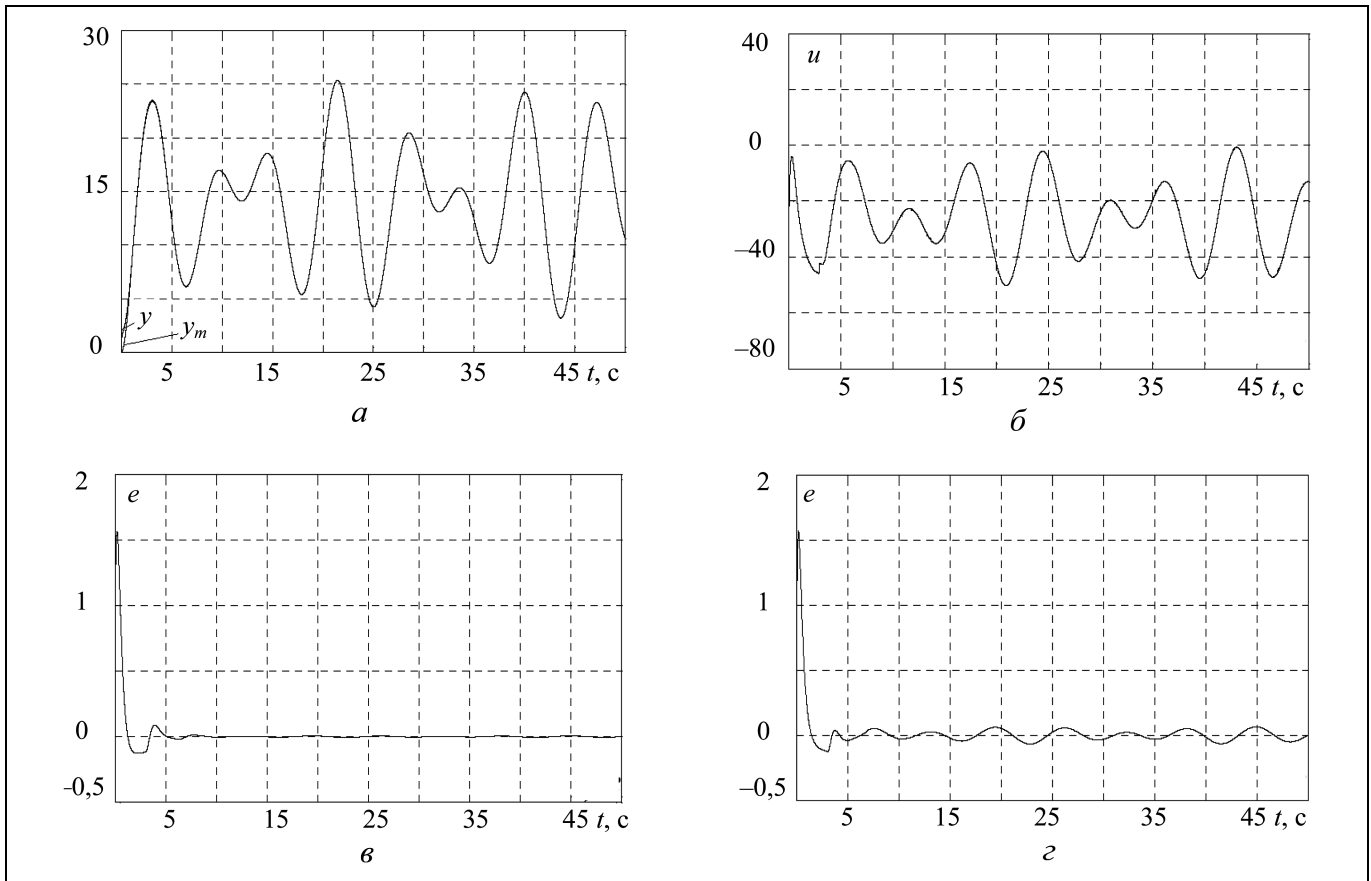
Здесь  $\sigma(\dot{\xi}_2(t))$  — нелинейная функция с насыщением, которая вводится для ограничения управляющего воздействия в момент включения системы в работу. Это, как отмечает автор, предложивший такой наблюдатель [18], является недостатком. В данном случае

$$\sigma(\dot{\xi}_2(t)) = \begin{cases} \dot{\xi}_2(t), & \text{если } |\dot{\xi}_2(t)| < 50, \\ 50, & \text{если } \dot{\xi}_2(t) \geq 50, \\ -50, & \text{если } \dot{\xi}_2(t) \leq -50. \end{cases}$$

На рис. 1 представлены результаты моделирования при следующих исходных данных:  $a_1 = 2, a_2 = a_3 = 3, d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 3, b_1 = 2, b_2 = 5, h = 3c, \gamma_1 = \gamma_2 = 1, a = \beta = 10, f(t) = 2\sin 0,2t + 3\sin 0,7t, g(t) = 10 + 5\sin t + 5\sin 0,7t, \mu = 0,01$  (см. рис. 1, а) и  $\mu = 0,1$  (см. рис. 1, б).

На рис. 1, в представлен переходный процесс по ошибке, когда  $\mu = 0,1$ .

В случае  $\mu = 0,01$  ошибка через 12 с не превышает значения 0,001, а в случае  $\mu = 0,1$  — значения 0,05. Аналогичные переходные процессы получаются при другом времени запаздывания. Предельным значением величины



**Рис. 1. Результаты моделирования:** *a* — управляемая переменная; *b* — управляющее воздействие; *c* — ошибка при  $\mu = 0,01$ ; *d* — ошибка при  $\mu = 0,1$

ны  $h$  является 6 с. При большем значении  $h$  эталонная модель неустойчива. Таким образом, предложенная система управления дает неплохие результаты для неустойчивого объекта с распределенным запаздыванием, при этом существенно уменьшается влияние ограниченных внешних возмущений на регулируемую переменную.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача робастного управления для объекта, математическая модель которого описывается уравнением с распределенным запаздыванием. Для ее решения применялся подход, предложенный в работе [15]. Однако в отличие от описанных в ней алгоритмов [15], когда для их работы требуется оценка нескольких производных, число которых равно относительной степени передаточной функции объекта управления, в данном случае оценивается только одна переменная, что ведет к увеличению точности. Результаты моделирования показывают, что предложенный алгоритм управления позволяет получить качественные переходные процессы. Точность регулирования зависит от

параметров  $\mu$  и  $\alpha$ , значения которых, однако, приходится подбирать на этапе проектирования, и это следует отнести к недостаткам.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Для доказательства утверждения докажем лемму, которая является аналогом леммы [19], справедливой для систем без запаздывания.

**Лемма.** Пусть математическая модель системы имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(x_t(s), \mu_1, \mu_2), \quad x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \quad (\text{П1})$$

где  $x \in R^n$ ,  $\mu_1 \in R^{n_1}$ ,  $\mu_2 \in R^{n_2}$ ,  $x_t(s) = x(t + s)$ ,  $x_t(s) \in C[-h, 0]$  — банахово пространство непрерывных функций на отрезке  $[-h, 0]$ ,  $\varphi(s)$  — непрерывная начальная функция,  $f(x_t(s), \mu_1, \mu_2)$  — непрерывное отображение из  $R^{n_1 + n_2} \times [-h, 0]$  в  $R^n$ , липшицево по  $x_t(s)$ . Пусть система (П1) имеет ограниченную область диссипативности

$$D = \{x_t(s) : V(x_t(s)) \leq C\},$$



где  $V(x_t(s))$  — гладкий непрерывный положительно-определенный функционал на  $C[-h, 0]$ . Предположим, что для некоторых значений  $\theta_1 > 0, \varepsilon > 0$  при  $\mu_2 = 0$  выполнено условие

$$\sup_{|\mu_1| < \theta_1} \left( \left( \frac{\partial V(x_t(s))}{\partial x} \right)^T f(x_t(s), \mu_1, 0) + \frac{\partial V(x_t(s))}{\partial t} \right) \quad (П2)$$

при  $V(x_t(s)) = C_1$ . Тогда для достаточно малых значений  $\theta > 0$  таких, что  $|\mu_2| \leq \theta$ , область диссипативности  $D = \{x_t(s): V(x_t(s)) \leq C_1\}$  остается областью диссипативности системы (П.1).

Доказательство леммы. Введем обозначение

$$Y(\mu_2) = \sup_{|\mu_1| < \theta_1} \left( \left( \frac{\partial V(x_t(s))}{\partial x} \right)^T f(x_t(s), \mu_1, \mu_2) + \frac{\partial V(x_t(s))}{\partial t} \right) \text{ при } V(x_t(s)) = C_1.$$

В силу того, что функционал  $V(x_t(s))$  является гладким, а отображение  $f(x_t(s), \mu_1, \mu_2)$  непрерывное по  $\mu_2$ , функция  $Y(\mu_2)$  будет непрерывной по  $\mu_2$ . Так как выполнено условие (П2), т. е.  $Y(0) < -\varepsilon$ , то будет существовать  $\theta > 0$  такое, что при выполнении неравенства  $|\mu_2| \leq \theta$ , будет выполнено условие  $Y(\mu_2) < 0$ . Это означает, что область диссипативности остается прежней.

Доказательство утверждения. Подставим управляющее воздействие (14) в уравнения (7) и (9). В результате получим уравнения замкнутой системы

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_0 \varepsilon(t) + D_0 C \int_{-h}^0 \varepsilon(t + \theta) d\theta + B_0 C_{\gamma+1} \eta(t), \\ e(t) &= C \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (П3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_b(t) &= A_0 \varepsilon_b(t) + D_0 C \int_{-h}^0 \varepsilon(t + \theta) d\theta - B_0 (\xi_{\gamma+1}(t) + q_\gamma \zeta(t)), \\ e_b(t) &= C \varepsilon_b(t), \end{aligned} \quad (П4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= F_0 \xi(t) + a_m \zeta(t) + B_1 (\zeta(t) - \bar{\zeta}(t)), \\ \bar{\zeta}(t) &= C \xi(t), \quad \zeta(t) = e(t) - e_b(t), \end{aligned} \quad (П5)$$

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + B_0 \psi(t), \quad \zeta(t) = C z(t), \quad (П6)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \dot{\eta}(t) &= F \eta(t) + \mu_2 B_0 \psi(t), \\ \zeta(t) - \bar{\zeta}(t) &= C T \eta(t), \end{aligned} \quad (П7)$$

где  $C_{\gamma+1} = [0, \dots, 0, 1]$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ .

Пусть внешние воздействия  $g(t) = f(t) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \bar{\psi}_1(t) + (k\alpha - \beta) \vartheta(t), \\ \bar{\psi}_1(t) &= \left( N_3(P) + \frac{N_4(P)}{M(P)} \right) y(t) + \\ &+ \left( N_5(s) + \frac{N_6(s)}{M(s)} \right) \int_{-h}^0 y(t + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

В этом случае система (П3)—(П7) автономна и к ней применима лемма. Пусть  $\mu_2 = 0$ . Возьмем функционал Ляпунова—Красовского

$$\begin{aligned} V(t) &= \varepsilon^T(t) H \varepsilon(t) + \eta^T(t) H_1 \eta(t) + \\ &+ \int_{-h}^0 d\theta \int_{t+\theta}^t \varepsilon^T(\lambda) \Phi \varepsilon(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (П8)$$

где положительно определенные матрицы  $H$  и  $\Phi$  удовлетворяют уравнению (8), а  $H_1$  является решением уравнения

$$H_1 F + F^T H_1 = -\rho_1 I, \quad \rho_1 > 0. \quad (П9)$$

Вычислим производную от функционала (П. 8) на траекториях системы (П3), (П7)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \varepsilon^T(t) (H A_0 + A_0^T H) \varepsilon(t) + \\ &+ 2\varepsilon^T(t) \left( H D_0 C \int_{-h}^0 \varepsilon(t + \theta) d\theta + B_0 C_{\gamma+1} \eta(t) \right) + \\ &+ \eta^T(t) \frac{1}{\mu_1} (H_1 F + F^T H_1) \eta(t) + h \varepsilon^T(t) \Phi \varepsilon(t) - \\ &- \int_{-h}^0 \varepsilon^T(t + \theta) \Phi \varepsilon(t + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Воспользуемся равенством и оценкой

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^T(t) H D_0 C \int_{-h}^0 \varepsilon(t + \theta) d\theta - \int_{-h}^0 \varepsilon^T(t + \theta) \Phi \varepsilon(t + \theta) d\theta = \\ = h \varepsilon^T(t) H D_0 C \Phi^{-1} C^T D_0^T H \varepsilon(t) - \int_{-h}^0 (\varepsilon^T(t) H D_0 C \Phi^{-1} - \\ - \varepsilon^T(t + \theta)) \Phi (\Phi^{-1} C^T D_0^T H \varepsilon(t) - \varepsilon(t + \theta)) d\theta, \\ 2\varepsilon^T(t) H B_0 C_{\gamma+1} \eta(t) \leq \mu_1 |\varepsilon(t)|^2 + \frac{|H B_0|^2}{\mu_1} |\eta(t)|^2. \end{aligned}$$

Подставив эти оценки в формулу для производной от функционала и принимая во внимание уравнения (8) и (П9), получим

$$\dot{V}(t) \leq -(\rho - \mu_1) |\varepsilon(t)|^2 - \frac{\rho_1 - |H B_0|^2}{\mu_1} |\eta(t)|^2,$$

где  $\rho = s_{\min}(\Lambda)$ ,  $s_{\min}(\cdot)$  — наименьшее собственное число соответствующей матрицы.

Если выбрать  $\rho_1$  и  $\mu_1$  из условий  $\rho - \mu_1 > 0$  и  $\rho_1 - |H B_0|^2 > 0$ , то получим, что система (П3) — (П7) асимптотически устойчива по переменным  $\varepsilon(t)$  и  $\eta(t)$ , а так как  $g(t) = f(t) = 0$ , то  $y(t)$  и ее производные стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, и переменная  $\bar{\psi}_1(t)$ , и ее производная стремятся к нулю. Тогда из выражений (11) и (14) имеем

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{\beta} (\xi_{\gamma+1}(t) + q_\gamma \zeta(t)) = -\frac{1}{\beta} (\psi(t) - C_{\gamma+1} \eta(t)).$$

Подставим сюда значение  $\psi(t)$ :

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{\beta} (\bar{\psi}_1(t) + (k\alpha - \beta)\vartheta(t) - C_{\gamma+1}\eta(t)),$$

разрешим полученное уравнение относительно переменной  $\vartheta(t)$ :

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{\beta\alpha} (\bar{\psi}_1(t) - C_{\gamma+1}\eta(t)).$$

Отсюда следует  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t) = 0$ , а из формулы (6) —  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ . Тогда из уравнения (П4) имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_b(t) = 0$ , а из уравнения (П5) следует  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ .

Следовательно, система (П3)—(П7) является асимптотически устойчива, если  $g(t) = f(t) = 0$  и  $\mu_2 = 0$ . Условия леммы выполнены. Следовательно, существует  $\mu_0 > 0$  такое, что система (П3)—(П7) будет диссипативной.

Если на вход диссипативной линейной системы подать ограниченные входные воздействия, то система останется диссипативной, а значит, все переменные в ней будут ограниченными.

Остается выяснить, существует ли значение  $\mu_0 > 0$ , обеспечивающее выполнение целевого условия, когда внешние воздействия  $g(t)$  и  $f(t)$  удовлетворяют условию 4 предположений.

Возьмем функционал (П8) и вычислим производную на траекториях системы (П3)—(П7), принимая во внимание равенство  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \varepsilon^T(t)(HA_0 + A_0^T H)\varepsilon(t) + 2\varepsilon^T(t) \left( HD_0 C \int_{-h}^0 \varepsilon(t + \theta) d\theta + \right. \\ & \left. + B_0 C_{\gamma+1} \eta(t) \right) + \eta^T(t) \frac{1}{\mu_0} (H_1 F + F^T H_1) \eta(t) + \\ & + h\varepsilon^T(t) \Phi \varepsilon(t) - \int_{-h}^0 \varepsilon^T(t + \theta) \Phi \varepsilon(t + \theta) d\theta + 2\eta^T(t) H_1 B_0 \psi(t). \end{aligned}$$

Воспользуемся уже приведенными оценками и неравенством

$$2\eta^T(t) H_1 B_0 \psi(t) \leq \frac{1}{\mu_0} |\eta(t)|^2 + \mu_0 \delta_1, \quad \delta_1 = \sup_t |H_1 B_0 \psi(t)|^2.$$

Тогда, принимая во внимание выражения (8) и (П9), получим

$$\dot{V}(t) \leq -(\rho - \mu_0) |\varepsilon(t)|^2 - \frac{\rho_1 - 1 - |HB_0|^2}{\mu_0} |\eta(t)|^2 + \mu_0 \delta_1.$$

Если выбрать  $\rho_1$  и  $\mu_0$  из условий:  $\rho - \mu_0 = -\rho_2$ ,  $\rho_2 > 0$ ,  $\rho_1 - 1 - |HB_0|^2 = -\rho_3$ ,  $\rho_3 > 0$ , то получим неравенство

$$\dot{V}(t) \leq -\rho_2 |\varepsilon(t)|^2 - \rho_3 |\eta(t)|^2 + \mu_0 \delta_1,$$

откуда следует оценка

$$|e(t)| \leq \frac{|\varepsilon(t)|}{\sqrt{\rho_2}} \leq \sqrt{\frac{\mu_0 \delta_1}{\rho_2}}.$$

Из этой оценки видно, что выбором числа  $\mu_0$  достигается требуемое значение ошибки в целевом условии, причем это значение будет достигнуто за конечный промежуток времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
2. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14, № 11. — С. 2086—2088.
3. Doyle J.C., Glover K., Kharagonkar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1989. — Vol. 34, N 8. — P. 83—847.
4. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С.106—125.
5. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Там же. — 2008. — № 5. — С. 72—90.
6. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе матричных неравенств. — М.: Наука, 2007.
7. Хлебников М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 4. — С. 27 — 42.
8. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез субоптимального регулятора по выходу для гашения ограниченных возмущений // Там же. — С. 3—10.
9. Park P.A delay-dependent stability for systems uncertain time-invariant delays // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1999. — Vol. 44. — P. 876—887.
10. Zhang W., Allgover F., Liu T. Controller parameterization for SISO and MIMO plants with delay // Journal of Process Control. — 2006. — Vol. 55, N 10. — P. 794—802.
11. Gao H., Chen T., Lam J.A new delay system approach to network based control // Automatica. — 2008. — Vol. 44, N 1. — P. 38—52.
12. Ivanescu D., Niculescu S.I., Dugard L., Dion J.M. Verriest E.I. On delay dependent stability of neutral systems // Automatica. — 2003. — Vol. 39, N 2. — P. 255—261.
13. Mishiels W., Engelbarghs K., Roose D., Dochain D. Sensitivity to infinitesimal delays in neutral equations SIAM J. Control Optim. — 2002. — Vol. 40, N 4. — P 1134—1158.
14. Li X.G., Zhu X.J., Cela A., Reama A. Stability analysis of neutral systems with mixed delays // Automatica. — 2008. — Vol. 44, N 11. — P 2698—2772.
15. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007.— № 7. — С. 103—115.
16. Цыкунов А.М. Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу. — М.: Физматлит, 2009.
17. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
18. Khalil H.K. Nonlinear systems. 2nd ed. — N.-Y.: Prentice-Hall, 1996.
19. Брусин В.А. Об одном классе сингулярно—возмущенных адаптивных систем // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119—127.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Александр Михайлович Цыкунов — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет,  
 ☎ (8512) 61-42-48, ✉ tsygunov\_al@mail.ru.