УДК 62-50

DOI:https://doi.org/10.25728/pu.2018.4.3

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ВЫБОР НАСТРОЙКИ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.М. Цирлин, В.С. Овсепян

Рассмотрена задача о робастной устойчивости и выборе параметров типовых регуляторов одноконтурных линейных систем с обратной связью для технологических объектов с запаздыванием. Множество возможных значений параметров передаточной функции объекта предполагается замкнутым и ограниченным, при этом модуль и фаза амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы монотонно уменьшаются с частотой.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, робастная устойчивость, технологические объекты, робастная настройка.

Памяти В.Я. Ротача

ВВЕДЕНИЕ. ОСОБЕННОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В последние годы значительное внимание исследователей привлекает задача управления объектами с изменяющимися динамическими характеристиками и синтеза робастных регуляторов, которые без перенастройки способны управлять целым классом объектов или одним объектом в широком диапазоне изменения его параметров, нагрузок и пр. Методы синтеза таких систем с оценкой допустимой области возможных параметров объекта развиты в работах [1—4] и др. Большая часть этих работ посвящена линеаризованным системам, левая часть характеристического уравнения которых

$$P_n(a, p) = a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n = 0 \qquad (1)$$

представляет собой полином, причем коэффициенты полинома могут принимать значения, принадлежащие некоторому множеству V_a. Полином $P_n(a, p)$ робастно устойчив, если он устойчив для любого $a \in V_a$. Для этого необходимо, но недостаточно, чтобы его коэффициенты были положительны $\forall a \in V_a$.

В работах [1, 2] задача робастной устойчивости полинома решена для случая, когда множество V_a представляет собой параллелепипед, выделяемый интервальными ограничениями

$$\underline{a}_i \le a_i \le \overline{a}_i, \quad i = 0, \ldots, n. \qquad (2)$$

В работе [2] построены четыре полинома, для которых значения a выбраны так, что их устойчивость гарантирует устойчивость полинома (1). В работе [3] с использованием критерия устойчивости Михайлова по ограничениям (2) получена система, характеристики которой определены вектором $a_0 \in V_a$ и отклонениями $|a_i - a_0| \le \gamma a_i$. Там показано, что требуется построить только один годограф Михайлова этой системы, чтобы узнать, будет ли исходный полином робастно устойчив для заданного γ и при каком максимальном γ эта устойчивость сохраняется.

Между тем, существует важный класс объектов регулирования, для которых полученные результаты неприменимы. Это технологические объекты в химической, металлургической, пищевой промышленности, энергетике и др. Динамика этих объектов определяется главным образом процессами тепло- и массопереноса. Они устойчивы, характеризуются распределенными параметрами, и апериодическим видом переходных процессов. На практике при расчете систем регулирования распределенность аппроксимируют введением чистого запаздывания.

Обозначим через $W_0(p)$ и $W_r(p)$ передаточные функции объекта и регулятора соответственно.

Передаточные функции технологических объектов содержат звено чистого запаздывания, а их характеристическое уравнение не имеет комплексных корней. Модуль и фаза амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) таких объектов с ростом частоты монотонно уменьшаются, причем модуль стремится к нулю, а фаза к минус бесконечности (свойство «монотонности»). Свойство монотонности модуля и фазы технологических объектов в большинстве случаев справедливо и для разомкнутых систем регулирования, что, как показано ниже, позволяет упростить решение задачи о робастной устойчивости и о выборе робастных настроек регуляторов.

Знаменатель передаточной функции замкнутой системы регулирования технологических объектов не является полиномом и все результаты теории автоматического управления, основанные на свойствах полиномов, к таким системам неприменимы. Это относится к критериям устойчивости Рауса — Гурвица, Михайлова, к методам логарифмических частотных характеристик, методам пространства состояний и пр. Неприменимы к технологическим объектам и упомянутые выше результаты по робастной устойчивости динамических систем с полиномиальными характеристическими уравнениями. Особенности динамических свойств технологических объектов и систем управления ими неоднократно подчеркивал В.Я. Ротач [5].

Цель настоящей работы заключается в получении условий существования и алгоритма выбора робастных настроек типовых промышленных регуляторов в системах регулирования технологических объектов для ограниченного и замкнутого множества V_a возможных значений параметров передаточной функции объекта; уравнений, определяющих границу робастного D-разбиения в предположении, что модуль АФХ разомкнутой системы монотонно падает с ростом частоты, а также конкретизация этих результатов для типового технологического объекта.

1. ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ И ГИПОТЕЗА КРАТНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

Характеристическое уравнение замкнутой системы регулирования имеет вид

$$1 + W(a,\ C,\ p) = 0.$$

Здесь $W(a, C, p)$ — передаточная функция разомкнутой системы, a и C — параметры объекта и регулятора, p — переменная преобразования Лапласа. Эта передаточная функция равна произведению передаточной функции объекта регулирования $W_0(a, p)$ на передаточную функцию регулятора $W_r(C, p)$, $C \in V_C$, а обратная связь отрицательная.

Регуляторы имеют типовую структуру, представляющую собой параллельное соединение пропорционального, дифференциального и интегрального блоков. Так, что передаточные функции объекта и регулятора имеют вид

$$W_0(p) = Ke^{-p\tau}\prod_{K=1}^{N}(1 + T_K p)^{-1}, \tag{3}$$

$$W_r(p) = -(C_0/p + C_1 + C_2 p). \tag{4}$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$W_0(a,\ p)\,W_r(C,\ p) = -1. \tag{5}$$

В общем случае левая часть уравнения (5) для технологических объектов может быть записана в форме квазиполинома

$$Z(C,\ p) = \sum_{j=1}^{r} Q_j(a,\ p)\,e^{\tau_j p} - \sum_{k=1}^{m} C_k p^{k-1} = f(p,\ a) - \sum_{k=1}^{m} C_k p^{k-1}. \tag{6}$$

Здесь первое слагаемое не зависит от параметров регулятора. Обозначим его как $f(p, a)$.

В том случае, когда передаточные функции объекта и регулятора имеют вид (3) и (4), уравнение (5) принимает форму

$$\frac{K}{pe^{p\tau}\prod\limits_{K=1}^{N}(1 + T_K p)}(C_0 + C_1 p + C_2 p^2) = 1$$

и может быть приведено к форме (6) как

$$pe^{p\tau}\prod_{K=1}^{N}(1 + T_K p) - K(C_0 + C_1 p + C_2 p^2) = 0.$$

Первое слагаемое в левой части этого уравнения обозначено выше через $f(p, a)$.

Решение задачи о выборе параметров регулятора, обеспечивающих максимум степени устойчивости системы, в работах [6—9] основывалось на предположении, что максимум степени устойчивости для системы, имеющей m варьируемых коэффициентов, достигается в случае, когда ближайшим к мнимой оси является действительный корень кратности $(m + 1)$. В этой точке характеристическое уравнение (для определенности рассмотрим ПИД-регулятор, для которого $m = 3$)

$$M(p,\ a,\ C) = f(p,\ a) - K(C_0 + C_1 p + C_2 p^2) = 0,$$

в котором комплексная переменная p может быть заменена на действительную переменную x, имеет корень кратности $(m + 1)$, т. е. не только значение функции, но и значение всех ее производных до порядка m равно нулю, что приводит к системе уравнений:

$$M^{(3)} = f^{(3)}(x, a) = 0, \quad M^{(2)} = f^{(2)}(x, a) - 2KC_2 = 0,$$
$$M^{(1)} = f^{(1)}(x, a) - KC_1 - 2KC_2x = 0,$$
$$M(x, a, C) = 0.$$

Только первое из этих уравнений нелинейно. Оно определяет зависимость максимальной степени устойчивости от параметров объекта $\eta^*(a)$. Для простых случаев оно имеет аналитическое решение. В общем случае приходится точно или приближенно находить эту зависимость численно. Остальные уравнения линейны по искомым параметрам регулятора, решаются поочередно, так что каждое из них содержит лишь одну переменную.

Гипотеза кратности действительных корней приводит к такой последовательности расчета параметров регулятора.

1. Находят максимальный корень $\zeta_m = \eta^*(a)$ уравнения

$$f^{(m)}(x, a) = 0, \quad m = 1, 2, 3. \qquad (7)$$

Отметим, что в уравнение (7) входят только параметры объекта.

2. Для $m = 1$ (И-регулятор)

$$C_0^* = f(\zeta_1)/K. \qquad (8)$$

Для $m = 2$ (ПИ-регулятор)

$$C_1^* = f'(\zeta_2)/K, \quad C_0^* = f(\zeta_2)/K - C_1^*\zeta_2. \qquad (9)$$

Для $m = 3$ (ПИД-регулятор)

$$C_2^* = 0{,}5f''(\zeta_3)/K, \quad C_1^* = f'(\zeta_3)/K - C_2^*\zeta_3,$$
$$C_0^* = f(\zeta_3)/K - C_1^*\zeta_3 - C_2^*\zeta_3^2. \qquad (10)$$

Для пропорционального регулятора, как и для интегрального, $m = 1$, но

$$f(p, a) = \prod_{K=1}^{N}(1 + T_Kp)e^{p\tau}.$$

Является ли найденное значение ζ_m максимальной степенью устойчивости системы, вообще говоря, не было доказано. В ряде случаев можно воспользоваться [9] достаточным условием того, что расстояние η корня ζ характеристического уравнения (6) от мнимой оси совпадает со степенью устойчивости: *для того чтобы действительный корень ζ характеристического уравнения системы с обратной связью был ближайшим к мнимой оси, достаточно выполнения неравенства*

$$|W_0(i\omega - \zeta)W_r(i\omega - \zeta)| < 1 \quad \forall\omega \neq 0.$$

При $\omega = 0$ левая часть этого неравенства равна единице, т. е. достаточно, чтобы модуль расширенной АФХ разомкнутой системы монотонно уменьшался с ростом частоты.

В работе [10] доказана теорема Попова — Пухова (ПП-теорема), приведем ее формулировку.

1. Степень устойчивости системы для квазиполинома $Z(C, p)$ вида (6) меньше либо равна модулю ζ_m, ближайшего к мнимой оси действительного корня уравнения (7). Так что, в случае, когда для фиксированных параметров объекта система уравнений (7)—(10) имеет действительное решение, найденная степень устойчивости является максимально-возможной, а соответствующие ей настройки регулятора оптимальными по этому показателю.

2. Эта система всегда имеет решение для технологических объектов, если $m < 3$.

3. Для системы с ПИД-регулятором условие кратности действительных корней выполнено (ближайший к мнимой оси корень — действительный кратности три), если отношение максимальной постоянной времени к времени запаздывания $T_{i\max}/\tau > 0{,}5$.

Задача о выборе робастных параметров регуляторов в этих работах не рассматривалось.

2. РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим одноконтурные системы, у которых передаточная функция объекта зависит от коэффициентов $a \in V_a$, с типовыми регуляторами.

Для пропорционального регулятора $W_r(C, p) = -C_1$, для пропорционально-интегрального $W_r(C, p) = -(C_0/p + C_1)$. Наконец, для ПИД регулятора $W_r(C, p) = -(C_0/p + C_1 + C_2p)$. Параметры регуляторов неотрицательны.

Будем предполагать разомкнутые системы устойчивыми или нейтральными, модуль и фаза которых удовлетворяют условиям монотонности:

$$M(a, C, \omega_k) \geq M(a, C, \omega_{k+1}), \qquad (11)$$

где ω_k — решение уравнения

$$\varphi(a, C, \omega_k) = -\pi(1 + 2k),$$
$$k = 0, 1, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} < 0 \;\; \forall a \in V_a. \qquad (12)$$

Для технологического объекта и любого регулятора, у которого модуль и фаза АФХ не растут с частотой, эти условия выполнены. Если же регулятор содержит дифференцирующее звено, условия монотонности можно проверить по неравенству (11).

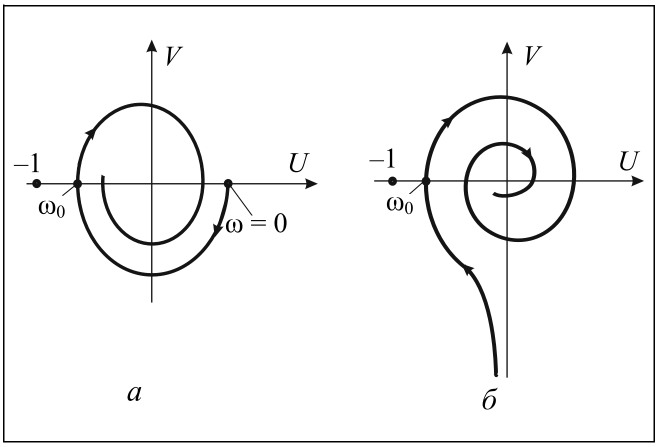

Рис. 1. Вид АФХ разомкнутой системы регулирования технологического объекта: *а* — регулятор не имеет интегральной составляющей; *б* — регулятор содержит интегральную составляющую

Согласно критерию Найквиста динамическая система с обратной связью устойчива, если разомкнутая система устойчива и при изменении ω от нуля до бесконечности годограф АФХ разомкнутой системы $W(a, C, i\omega) = W_r(C, i\omega)W_0(a, i\omega)$ не охватывает точку $(-1, i0)$.

Для систем с модулем АФХ, монотонно уменьшающимся с ростом ω, это значит, что при первом пересечении действительной оси на частоте $\omega_0 > 0$ выполнены условия

$$\varphi(a,\ C,\ \omega_0) = -\pi, \quad M(a,\ C,\ \omega_0) < 1.$$

Для краткости будем обозначать модуль АФХ разомкнутой системы в точке ее пересечения с отрицательной действительной полуосью как $M_\pi(a,\ C,\ \omega_0)$.

Величину $r(a,\ C,\ \omega_0) = 1 - M_\pi(a,\ C,\ \omega_0)$ называют *запасом устойчивости*. Системы, удовлетворяющие условиям (11) и (12), имеют АФХ вида, показанного на рис. 1.

Приведем несколько определений, касающихся робастных систем.

- *Система робастно устойчива в замкнутом состоянии, если найдется такой допустимый вектор C, что $r(a,\ C) > 0 \ \ \forall a \in V_a$.*

Для систем, удовлетворяющих условиям (11) и (12), это означает, что существует вектор параметров регулятора $C^* \in V_C$ такой, что минимум по C максимального по a значения $M_\pi(a,\ C,\ \omega)$ меньше единицы:

$$\min_{C \in V_C}\left(\max_{a \in V_a} M_\pi(a,\ C,\ \omega)\right) = M_\pi^* < 1. \qquad (13)$$

Разницу $r^* = 1 - M_\pi^*$ естественно назвать робастным запасом устойчивости.

- *Настройки регулятора, выбранные по некоторому показателю качества, робастные, если для любых возможных параметров объекта $a \in V_a$ значение этого показателя не хуже его значения, соответствующего выбранным настройкам.*
- *Робастным D-разбиением в пространстве параметров регулятора называют выделение в этом пространстве множества всех значений параметров, для которых система робастно устойчива.* Так что система робастно устойчива, если множество, определенное D-разбиением, не пусто.

Граница области робастной устойчивости в пространстве параметров регулятора C определена условиями

$$\left\{\max_{a \in V_a,\ \omega} M(a,\ C,\ \omega)/\varphi(a,\ C,\ \omega) = -\pi\right\} = 1$$

для всех значений ω, соответствующих неотрицательным значениям C.

- *Пусть система робастно устойчива при некотором значении C. Назовем робастной степенью устойчивости η такое неотрицательное число, что система, имеющая расширенную АФХ разомкнутой системы $W(a,\ C,\ i\omega - \eta)$, устойчива при всех $a \in V_a$ за исключением множества значений $a = a^*$, для которых она находится на границе устойчивости.*

Для такой системы

$$\max_{a \in V_a,\ \omega} M(a,\ C,\ \eta,\ \omega) = 1/\varphi(a,\ C,\ \eta,\ \omega) = -\pi. \qquad (14)$$

Здесь $M(a,\ C,\ \eta,\ \omega)$ и $\varphi(a,\ C,\ \eta,\ \omega)$ — модуль и фаза расширенной АФХ разомкнутой системы.

Задача о выборе параметров регулятора по условиям максимума робастной степени устойчивости может быть с учетом введенных определений сформулирована как

$$\eta^* = \max_{C} \min_{a \in V_a} \eta(a,\ C). \qquad (15)$$

Эта задача очень сложна, так как степень устойчивости зависит от a и C алгоритмически и минимум ее по a нужно искать при всех возможных значениях параметров регулятора. Однако, как показано ниже, ее решение существенно упрощается, если порядок операций вычисления минимума и максимума можно изменить на обратный.

Покажем, что для систем регулирования с монотонной АФХ разомкнутой системы справедлива

Теорема. *Задача* (15) *о максимуме робастной степени устойчивости имеет седловую точку* (*величина η^* не зависит от последовательности операций вычисления максимума и минимума*).

Доказательство. Первоначально докажем, что *для объектов с монотонной АФХ разомкнутой системы запас устойчивости и степень устойчивости монотонно связаны друг с другом.*

Действительно, область, ограниченная расширенной АФХ, является отображением всех точек плоскости корней характеристического уравнения замкнутой системы, лежащих правее линии, параллельной мнимой оси, с абсциссой $-\eta$. В силу свойств конформного отображения эта область с ростом η расширяется. Так что модуль расширенной АФХ разомкнутой системы функцией для любого значения фазы и, в частности, $M_\pi(a, C, \eta, \omega)$ с ростом η монотонно возрастает:

$$\frac{\partial M_\pi(a, C, \eta, \omega)}{\partial \eta} > 0. \qquad (16)$$

Из неравенства (16) следует, что для того, чтобы система была робастно устойчивой, необходимо и достаточно существования такого $\eta > 0$, для которого выполнены условия (14).

Чем больше запас устойчивости системы (чем меньше $M_\pi(a, C, \omega)$), тем больше значение степени устойчивости, при котором модуль расширенной АФХ замкнутой системы станет равным единице в точке пересечения с отрицательной действительной полуосью.

Таким образом, решения задач (13) и (15) совпадают. Если первая из них имеет седловую точку, то это же справедливо и для задачи (15).

Задача о робастном значении запаса устойчивости для технологических объектов с монотонными АФХ разомкнутой системы имеет седловую точку (*результат ее решения не зависит от порядка вычисления операций максимума и минимума*), так как функция $M_\pi(a, C, \omega)$ мультипликативна. Модуль АФХ разомкнутой системы равен произведению модуля объекта на модуль регулятора, один из этих сомножителей зависит только от a, а другой — от C:

$$M_\pi(a, C, \omega) = F_a(a, \omega)F_C(C, \omega).$$

Обозначим максимум F_a по $a \in V_a$ и минимум F_C по C как $F_a^*(\omega)$ и $F_C^*(\omega)$. Изменение последовательности операций максимума и минимума не скажется на виде функций F_a^* и F_C^*. Как следствие эквивалентности, то же относится и к задаче о максимуме робастной степени устойчивости. Теорема доказана. ♦

С ростом коэффициента усиления разомкнутой системы величина M_π возрастает (запас устойчивости уменьшается), поэтому, если диапазон изменения коэффициента усиления K объекта не зависит от других его параметров, то минимуму по K степени устойчивости для любых фиксированных настроек регулятора соответствует максимум K.

Величина η^* заведомо не превосходит значения (см. работу [11])

$$\eta^0 = \min_{a \in V_a} \max_{C} \eta(a, C). \qquad (17)$$

А в том случае, когда задача имеет седловую точку, она равна η^0.

Множество значений вектора C, для которых система робастно устойчива, может быть построено как D-разбиение по условию устойчивости системы, имеющий расширенную АФХ разомкнутой системы $W(a, C, i\omega - \eta)$, где $a = a^*$, а $\eta < \eta^*$.

Если задачи (15) и (17) эквивалентны и $\eta^* = \eta^0$, то максимум робастной степени устойчивости можно найти, выбрав первоначально настройки регулятора по условию максимума η по C для любых допустимых параметров объекта, а затем вычислить минимум $\eta^*(a)$ по $a \in V_a$. Но первая (внутренняя) задача для рассматриваемого класса систем решена в работах [6—9] с учетом условия кратности действительных корней. Для любых значений коэффициентов a получены параметры регулятора, соответствующие максимальной степени устойчивости.

Внешняя задача является задачей нелинейного программирования о выборе на множестве V_a такого вектора параметров, для которого максимальная по C степень устойчивости (она зависит только от a) минимальна.

3. АЛГОРИТМ ВЫБОРА РОБАСТНЫХ НАСТРОЕК РЕГУЛЯТОРОВ

Использование результатов [6—9] позволяет предельно упростить задачу выбора робастных настроек регуляторов. Ее решение может быть проведено в такой последовательности.

1. Выбрав тип регулятора, записывают уравнение (7) и находят значение его максимального действительного корня $-\zeta = \eta^*(a)$ как функцию параметров объекта. Соответствующие настройки регулятора определены условиями (8)—(10), но считать их для всех $a \in V_a$ не требуется.

2. Решают задачу нелинейного программирования

$$\eta^*(a) \to \min_{a \in V_a}.$$

Если найденная минимальная степень устойчивости положительна, то систему можно сделать робастно устойчивой с помощью выбранного типа регулятора. Соответствующий вектор параметров a^* назовем «критическим». Критическим значением K^* коэффициента усиления объекта является максимальное из его возможных значений.

3. Для найденного критического вектора параметров объекта (только для него) по формулам (8)—(10) вычисляют настройки регулятора, обеспечивающие найденную робастную степень устойчивости системы.

4. Если $m > 2$, то проверяют для рассчитанной системы выполнение неравенства, связывающего

максимальную постоянную времени $T_{\max}$ и величину τ: $2T_{\max} \ge \tau$.

Отметим, что выбор параметров регулятора по условию максимума робастной степени устойчивости более естественен, чем по условию максимума запаса устойчивости, так как η^* прямо связана с продолжительностью переходного процесса в системе [12]. Кроме того, этот выбор существенно облегчается условием кратности ближайшего к мнимой оси действительного корня характеристического уравнения.

4. РОБАСТНЫЕ НАСТРОЙКИ СИСТЕМЫ С ТИПОВЫМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

На практике при проектировании систем регулирования технологических объектов их характеристики представляют в форме звена чистого запаздывания или его последовательного соединения с интегрирующим или апериодическим звеном. Поэтому для иллюстрации возможностей применения приведенных выше соотношений найдем зависимость достижимой робастной степени устойчивости для объекта, который представляет собой звено чистого запаздывания, последовательно соединенное с апериодическим звеном первого порядка:

$$W_0(p) = Ke^{-p\tau}\frac{1}{Tp+1}.$$

Такой объект часто называют *типовым технологическим объектом*, так как эта передаточная функция представляет собой простейшую аппроксимацию в окрестности равновесия распределенных процессов, включающих тепло- и массоперенос, транспорт продуктов, накопление вещества и пр.

Множество возможных параметров объекта зададим неравенствами:

$$K_{\min} \le K \le K_{\max}, \quad a = (T, \tau) \in V_0.$$

Множество V_0 лежит в первом квадранте и для любой его точки $2T \ge \tau$.

Условия максимума степени устойчивости приводят к системе уравнений (7)—(10), в которой

$$f(p, a) = pe^{p\tau}(Tp + 1).$$

И-регулятор. Решение уравнения (7) для $m = 1$ приводит к значению предельной степени устойчивости в функции параметров объекта

$$\eta^*(T, \tau) = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2T} - \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{4T^2}}. \quad (18)$$

Решение задачи о минимуме η^* по $(T, \tau) \in V_0$ определяет значения критических параметров объекта T^*, τ^*. Соответствующее значение робастной настройки регулятора (8)

$$C_0 = \frac{1}{K_{\max}}\eta^* \exp^{-\eta^*\tau^*}(1 - T^*\eta^*).$$

ПИ-регулятор. В этом случае $m = 2$. Решение уравнения (7) для $m = 2$ приводит к значению предельной степени устойчивости:

$$\eta^* = \frac{2}{\tau} + \frac{1}{2T} - \sqrt{\frac{2}{\tau^2} + \frac{1}{4T^2}}. \quad (19)$$

Соответствующие робастные параметры регулятора для критических параметров объекта, минимизирующих ее на V_0 (см. выражения (8), (9)):

$$C_0 = \frac{\tau^*}{K_{\max}}(\eta^*)^2 e^{-\eta^*\tau^*}\left(1 + \frac{T^*}{\tau^*} - T^*\eta^*\right),$$

$$C_1 = \frac{1}{K_{\max}}(e^{-\eta^*\tau^*}[(2T^* + \tau^*)\eta^* - T^*\tau^*(\eta^*)^2 - 1]).$$

ПИД-регулятор. Аналогично двум рассмотренным выше случаям для $m = 3$ получим максимальную по C степень устойчивости

$$\eta^* = \frac{1}{2T} + \frac{3}{\tau} - \sqrt{\frac{3}{\tau^2} + \frac{1}{4T^2}}. \quad (20)$$

Соответствующие настроечные параметры для минимизирующих степень устойчивости T и τ:

$$C_0 = \frac{(\eta^*)^3}{K_{\max}}\left(T^*(\tau^*)^2 - T^*\eta^*(\tau^*)^3 + \frac{(\tau^*)^3}{2}\right)e^{-\eta^*\tau^*},$$

$$C_1 = \frac{e^{-\eta^*\tau}}{K_{\max}}(3T^*\tau^*(\eta^*)^2 + (\eta^*)^2(\tau^*)^2 - \eta^*\tau^* -$$
$$- T^*(\eta^*)^3(\tau^*)^2 - 1),$$

$$C_2 = \frac{e^{-\eta^*\tau}}{K_{\max}}\left(\frac{\eta^*\tau^*}{2} + 2T^*\eta^* - \frac{T^*}{\tau^*} - \frac{T^*\tau^*(\eta^*)^2}{2} - 1\right).$$

П-регулятор. В этом случае $m = 1$, а функция $f(p, a) = e^{p\tau}(Tp + 1)$. Достижимая степень устойчивости (см. работу [9])

$$\eta^*(T, \tau) = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{T}. \quad (21)$$

Робастная настройка пропорционального регулятора

$$C_1 = \frac{0{,}37\,T^*}{K_{\max}\tau^*}e^{-\frac{\tau^*}{T^*}}.$$

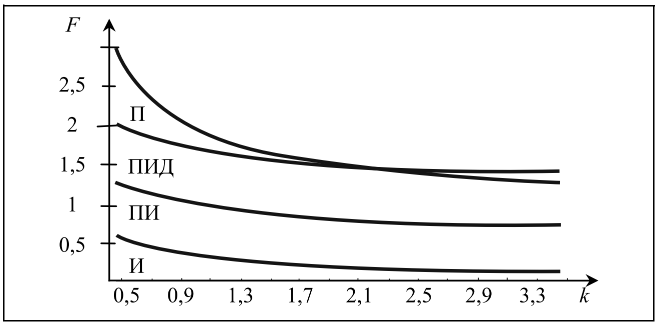

Рис. 2. Зависимость $F = \eta^*\tau$ от отношения $k = T/\tau$ для типового технологического объекта и регуляторов разного типа

Все выражения для предельной степени устойчивости могут быть записаны в форме:

$$\eta^*(T^*, \tau^*) = \frac{F(k)}{\tau^*},$$

где $k = T/\tau$.

Для каждого типа регулятора получим:

$$F_{\text{И}}(k) = 1 + \frac{1}{2k} - \sqrt{1 + \frac{1}{4k^2}},$$

$$F_{\text{ПИ}}(k) = 2 + \frac{1}{2k} - \sqrt{2 + \frac{1}{4k^2}},$$

$$F_{\text{ПИД}}(k) = 3 + \frac{1}{2k} - \sqrt{3 + \frac{1}{4k^2}},$$

$$F_{\text{П}}(k) = 1 + \frac{1}{k}.$$

Эти функции показаны на рис. 2. Они монотонны по k, так что для фиксированного значения τ минимуму степени устойчивости соответствует максимум k, а значит T.

Для заданного множества V_0 на плоскости с координатами T, τ для любого значения k минимум по τ достигается в точке пересечения, соответствующего луча с правой границей множества V_0, соответствующей большим значениям τ. Множество таких точек задает зависимость $\tau^*(k)$. Если эта зависимость дифференцируема, то координаты критической точки, в которой отношение $\frac{F(k)}{\tau(k)}$ $F(k)/\tau(k)$ минимально, определяются условием

$$\frac{dF}{dk}\tau(k) = \frac{d\tau}{dk}F(k) = -\frac{T(k)}{k^2}F(k).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для систем регулирования, технологических объектов, содержащих запаздывание, доказана возможность выбора робастных настроек типовых промышленных регуляторов минимизацией на множестве возможных параметров объекта (не обязательно характеризующегося интервальными ограничениями) максимально достижимой степени устойчивости, зависящей от этих параметров.

Для положительных ограниченных значений τ^*, T^* степень устойчивости η^*, найденная по формулам (18), (19), (20), (21), положительна, а значит, найдутся параметры типовых регуляторов, обеспечивающие робастную устойчивость.

Полученные условия позволяют решить и обратную задачу: найти тот диапазон изменения параметров объекта, для которого робастная устойчивость системы регулирования будет не ниже заданной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
2. *Харитонов В.Л.* Асимптотическая устойчивость семейства линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 1, вып. 11. — С. 2086—2088.
3. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастный критерий Найквиста // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 7. — С. 25—31.
4. *Poljak B.T., Tsipkin J.Z.* Robustnes Nykvist-test // Automation and Remote Control. — 1992. — N. 7. — P. 25—31.
5. *Ротач В.Я.* Теория автоматического управления. — М.: МЭИ, 2008. — 396 с.
6. *Татаринов А.В., Цирлин А.М.* Предельная степень апериодической устойчивости линейных систем и выбор параметров промышленных регуляторов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, № 2. — С. 87—96.
7. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием: пер. с польск. — М.: Машиностроение, 1974. — 326 с.
8. *Шубладзе А.М.* Способы синтеза систем управления максимальной степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 1. — С. 28—37.
9. *Загарий Г.И., Шубладзе А.М.* Синтез систем управления на основе критерия максимальной степени устойчивости. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 170 с.
10. *Попов А.Ю., Пухов С.С., Цирлин А.М.* Минимизация точной верхней грани действительных частей корней квазимногочлена и предельная степень устойчивости линейных динамических систем с обратной связью // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 7. — С. 3—25.
11. *Давыдов Э.Г.* Исследование операций. — М.: Высшая школа, 1990. — 384 с.
12. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977. — 560 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Цирлин Анатолий Михайлович — д-р техн. наук,
гл. науч. сотрудник, Институт программных систем
им. А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский,
✉ tsirlin@sarc.botik.ru,

Овсепян Вардгес Сидракович — канд. техн. наук, доцент,
Ванадзорский гос. ун-т им. Ов. Туманяна, Республика Армения,
✉ hovar@inbox.ru.