

## КОНСТРУКТИВНОЕ D-РАЗБИЕНИЕ ДЛЯ ДВУХ ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИХ В ПОЛИНОМ ПАРАМЕТРОВ. Ч. 2. Аппроксимация областей устойчивости и анализ робастности<sup>#</sup>

А. А. Тремба

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва  
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный

✉ atremba@ipu.ru

**Аннотация.** Для полинома, линейно зависящего от двух параметров, предлагаются несколько способов аппроксимации области устойчивости по отношению к заданной области локализации корней. Первый способ состоит в покрытии границы области устойчивости достаточно равномерной сеткой, гарантирующей такое покрытие с заданной точностью. Второй способ позволяет получить внутреннюю аппроксимацию области устойчивости с помощью отрезков или кривых, ограниченных областью устойчивости. Третий способ позволяет осуществить покрытие границы области устойчивости простыми множествами и тем самым получить кусочно-линейные внутренние и внешние аппроксимации области устойчивости. Все методы основаны на конструктивном D-разбиении, описывающем границу области устойчивости в виде набора участков дробно-рациональных кривых и отрезков. На плоскости параметров получена как простая оценка радиуса устойчивости, так и его точное значение. Реализация всех методов и алгоритмов сводится к нахождению вещественных корней полиномов.

**Ключевые слова:** конструктивное D-разбиение, дробно-рациональные кривые, аппроксимация области устойчивости, достаточно равномерная сетка, сеточные методы, полусеточные методы, опорная функция, радиус устойчивости.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается анализ расположения корней полинома в зависимости от двух параметров, входящих в полином степени  $n$  линейно:

$$G(s, k_1, k_2) = k_1 P(s) + k_2 Q(s) + R(s). \quad (1)$$

Для заданного множества локализации корней  $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$  требуется определить множество, называемое *областью устойчивости*, на плоскости параметров  $(k_1, k_2)$ , каждая точка которого соответствует устойчивому полиному

$$D_n = \{(k_1, k_2) : \text{все } n \text{ корней } G(s, k_1, k_2) \text{ лежат в } \mathbf{D}\}. \quad (2)$$

Напомним, что устойчивость (D-устойчивость<sup>1</sup>) корней и полинома определяется относительно заданного множества локализации корней  $\mathbf{D}$  и обобщает понятие гурвицевых и шуровских полиномов, соответствующих устойчивым (в классическом смысле) системам непрерывного и дискретного времени. Задача поиска области устойчивости возникает при синтезе регуляторов для линейных систем управления в случае, когда два параметра регулятора входят в характеристический полином

<sup>#</sup> Результаты исследований, представленных в § 2 и 3, получены за счёт средств Российского научного фонда, грант № 21-71-30005-П, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

<sup>1</sup> Существует схожее по названию, но существенно отличающееся по смыслу понятие D-устойчивых (D-stable) матриц [1].

степени  $n$  линейно, или при анализе устойчивости в зависимости от двух (или одного, см. п. 2.1) параметров.

Выбором множества локализации корней  $\mathbf{D}$  можно гарантировать степень устойчивости, показатель колебательности замкнутой системы и пр. [2–4]. Предполагается, что  $\mathbf{D}$  – регулярное открытое множество. В этом случае область устойчивости также открытое множество.

Данная статья является второй частью исследования, в первой части которого [5] предложено конструктивное D-разбиение – описание границы области устойчивости с помощью D-разбиения плоскости параметров. Напомним идею этого метода (см. работы [6–10]).

Первое множество определяется отображением границы области локализации корней  $\partial\mathbf{D}$  на плоскость параметров с помощью *основного уравнения*

$$K_{bnd} = \{(k_1, k_2) : G(s, k_1, k_2) = 0_{\mathbb{C}}, s \in \partial\mathbf{D}\}. \quad (3)$$

Второе множество определяется *условием понижения степени* на коэффициент при  $s^n$ :

$$K_{deg} = \{(k_1, k_2) : G_n(k_1, k_2) = 0_{\mathbb{C}}\}. \quad (4)$$

Множества (3) и (4) определяют D-разбиение – разделение плоскости параметров на односвязные области, некоторые из которых составляют область устойчивости. В каждой из областей D-разбиения число устойчивых корней не меняется при непрерывном изменении параметров внутри области при условии, что коэффициенты полинома зависят от параметров непрерывно. Уравнение в формуле (3) определяет граничный случай, при котором хотя бы один из корней полинома находится на границе  $\partial\mathbf{D}$ .

Приведём ряд свойств D-разбиения для полинома (1) вместе с результатами из первой части статьи [5].

Во-первых, множество  $K_{bnd}$  состоит из так называемой основной кривой и набора прямых, называемых *особыми прямыми*, определяемыми уравнениями

$$a_i k_1 + b_i k_2 + c_i = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad (5)$$

а  $K_{deg}$  является особой прямой (возможно, пустым множеством), определяемой уравнением

$$P_n k_1 + Q_n k_2 + R_n = 0.$$

Граница области устойчивости принадлежит объединению этих множеств:

$$\partial D_n \subset K_{bnd} \cup K_{deg}.$$

Во-вторых, если граница области локализации корней  $\Gamma = \partial\mathbf{D}$  состоит из конечного набора участков дробно-рациональных кривых,

$$\Gamma = \bigcup_{\ell} \Gamma_{\ell}, \quad \Gamma_{\ell} = \{s_{\ell}(w) \in \mathbb{C} : w \in W_{\ell}\}, \\ \ell = 1, \dots, L,$$

то решение основного уравнения из формулы (3) эквивалентно решению  $L$  систем двух полиномиальных уравнений с некоторыми полиномами  $P_{\ell,1}(w), P_{\ell,2}(w), Q_{\ell,1}(w), Q_{\ell,2}(w), R_{\ell,1}(w), R_{\ell,2}(w)$ , зависящими от исходных полиномов  $P, Q, R$  и дробно-рациональных функций  $s_{\ell}(w)$ :

$$\begin{cases} k_1 P_{\ell,1}(w) + k_2 Q_{\ell,1}(w) + R_{\ell,1}(w) = 0, \\ k_1 P_{\ell,2}(w) + k_2 Q_{\ell,2}(w) + R_{\ell,2}(w) = 0, \end{cases} \quad (6) \\ w \in W_{\ell}, \quad \ell = 1, \dots, L.$$

Решением каждой системы являются дробно-рациональная кривая (*основная кривая*)

$$k_{\ell,1}(w) = \frac{1}{\det T_{\ell}(w)} (R_{\ell,2}(w) Q_{\ell,1}(w) - \\ - R_{\ell,1}(w) Q_{\ell,2}(w)), \\ k_{\ell,2}(w) = \frac{1}{\det T_{\ell}(w)} (R_{\ell,1}(w) P_{\ell,2}(w) - \\ - R_{\ell,2}(w) P_{\ell,1}(w)), \\ w \in W_{\ell}, \quad (7)$$

и набор особых прямых вида (5), соответствующих для каждого  $\ell = 1, \dots, L$  таким вещественным корням (так называемым критическим частотам) уравнения

$$\det T_{\ell}(w) = P_{\ell,1}(w) Q_{\ell,2}(w) - \\ - Q_{\ell,1}(w) P_{\ell,2}(w) = 0, \quad w \in W_{\ell},$$

при которых система (6) имеет решение. Далее индекс  $\ell$  может опускаться для краткости.

В-третьих, доказано, что при локализованном D-разбиении – ограниченном на компактном множестве  $\mathbf{K}$  – указанные дробно-рациональные кривые определены или доопределяются на замкнутых интервалах (отрезках), а особые прямые становятся отрезками. Более того, если граница  $\mathbf{K}$  состоит из конечного набора участков дробно-рациональных кривых, то D-разбиение также состоит из конечного числа участков дробно-рациональных кривых и отрезков. Предложенный метод конструктивного D-разбиения позволяет определить интервалы параметризации этих участков дробно-рациональных кривых и отрезков как



участков особых прямых с помощью нахождения вещественных корней полиномов.

В частности, граница области устойчивости (2) в пределах множества  $K$  состоит из конечного набора дробно-рациональных функций вида (7) и отрезков. Отрезки удобно представлять в параметрическом виде как

$$k(t) = t d + p, \quad t \in [t_1, t_2], \quad p, d \in \mathbb{R}^2, \quad d \neq 0,$$

где векторы  $d = (-b, a)^T$ ,  $p = -\left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}\right)$

получены из уравнений прямых (5), здесь и далее индексы опущены для краткости.

Параметр и точка пересечения прямой, исходяно заданной в виде  $k(t) = t d + p$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ , и прямой вида (5) задаются выражениями

$$t^* = -\frac{c + ap_1 + bp_2}{ad_1 + bd_2} = -\frac{c + (a, b)p}{(a, b)d}, \quad (8)$$

$$k^* = t^* d + p = -\frac{c + (a, b)p}{(a, b)d} d + p.$$

Подчеркнём одну особенность построения локализованного D-разбиения. Дробно-рациональные участки границ области устойчивости вида (7) определены на замкнутых интервалах, но при этом может существовать бесконечный интервал, например,  $(-\infty, +\infty)$  или  $[w_1, +\infty)$ . Для сведения области определения к конечному замкнутому интервалу используется замена параметра, см. п. 1.2.

### Пересечение основных кривых с прямыми и локализованное D-разбиение

Напомним некоторые результаты, касающиеся пересечения дробно-рациональных кривых с прямыми. В частности, пересечение особых прямых (5) с основной кривой D-разбиения (7) задаётся уравнениями

$$a_i (R_2(w)Q_1(w) - R_1(w)Q_2(w)) + b_i (R_1(w)P_2(w) - R_2(w)P_1(w)) + c_i (P_1(w)Q_2(w) - Q_1(w)P_2(w)) = 0, \quad (9)$$

$$i = 0, \dots, K.$$

Здесь индекс 0 соответствует особой прямой  $K_{deg}$ . Полученные уравнения относительно  $w$  полиномиальные, и их вещественные корни можно вычислить явно, обозначим их совокупность как  $w_m$ ,  $m = 1, \dots$ . Эти корни вместе с критическими частотами  $w_i$  разбивают интервал  $W$  на отрезки и

интервалы, соответствующие простым непрерывным частям границ D-разбиения, участкам основной кривой. Собственно, эти участки и образуют криволинейную часть D-разбиения. Сами точки пересечения определяются из уравнения (7) как  $k(w_m) = (k_1(w_m), k_2(w_m))$ . Они, вместе с предельными точками  $\lim_{w \rightarrow w_m} k(w)$ , если таковые существуют, не только разбивают основную кривую на участки, но и разбивают особые прямые на отрезки или бесконечные интервалы (лучи). В случае локализованного D-разбиения бесконечные интервалы отсутствуют. Схожим образом можно найти точки самопересечений и пересечений нескольких основных кривых между собой (см. первую часть статьи [5]).

Локализованное D-разбиение удобно осуществлять в прямоугольнике  $K = [k_1, \bar{k}_1] \times [k_2, \bar{k}_2]$ , границы которого – вертикальные и горизонтальные отрезки. Для них уравнение (9) упрощается, так как достаточно рассмотреть каждую компоненту дробно рациональной кривой (7) отдельно:

$$R_2(w)Q_1(w) - R_1(w)Q_2(w) = x(P_1(w)Q_2(w) - Q_1(w)P_2(w)), \quad (10)$$

$$x = k_1, \bar{k}_1,$$

$$R_1(w)P_2(w) - R_2(w)P_1(w) = y(P_1(w)Q_2(w) - Q_1(w)P_2(w)), \quad (11)$$

$$y = k_2, \bar{k}_2.$$

После решения каждого из этих уравнений надо проверить, попадает ли вторая координата в нужный интервал, т. е. пересекается ли основная кривая со стороной прямоугольника. Например, если корни уравнения (10) равны  $w_m$ , то надо выбрать только те из них, для которых  $k_2(w_m) \in [k_2, \bar{k}_2]$ , и наоборот.

Далее на основе конструктивного описания границы области устойчивости предлагаются несколько способов аппроксимации границы или самой области устойчивости. Кроме того, предложенный метод применяется для анализа положения области устойчивости (см. п. 4.3) и робастного анализа (см. п. 4.4). Полученная параметризация границы области устойчивости может быть использована для последующей оптимизации внутри области устойчивости и для иных задач, связанных с анализом и синтезом регуляторов с заданными характеристиками, определяемыми областью локализации корней.

## 1. АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЦЫ D-РАЗБИЕНИЯ ТОЧКАМИ

Рассмотрим локализованное D-разбиение на ограниченном множестве  $K$ , например, на прямоугольнике  $[\underline{k}_1, \bar{k}_1] \times [\underline{k}_2, \bar{k}_2]$ . После применения алгоритма конструктивного D-разбиения по формулам (8) и (10), (11) можно определить пересечение особых прямых (5) и основных кривых (7) D-разбиения с границами множества  $K$ . В результате будет найдена область устойчивости  $D_n$ , ограниченная конечным числом отрезков  $k_m(t)$  и участками дробно-рациональных основных кривых  $k_\ell(w)$ :

$$\partial D_n = \cup_m k_m(t) \cup_\ell k_\ell(w).$$

Согласно леммам 1 и 4 из первой части статьи [5], каждый из участков границы  $k_m(t)$ ,  $k_\ell(w)$  параметризован отрезком  $W_\ell = [w_{\ell,1}, w_{\ell,2}]$  или замкнутым бесконечным интервалом. Более того, в теореме 1 [5] продемонстрирована возможность заменить бесконечный интервал параметризации отрезком (или отрезками). Далее эта замена в контексте аппроксимации кривой рассмотрена отдельно в п. 1.2.

Задача состоит в том, чтобы выбрать конечный набор точек – *узлов*, в совокупности образующих сетку  $K_{grid} = \{k_r, r=1, \dots\}$  на этих кривых и отрезках, аппроксимирующий границу области устойчивости с заданной мелкостью  $\rho > 0$ . Мелкость сетки относительно множества определяется ограничением расстояния Хаусдорфа между набором точек и множеством, в данном случае – границей области устойчивости. Будем выбирать узлы, лежащие на границе,  $k_r \in \partial D_n$ . Они должны удовлетворять условию

$$\text{dist}_H(K_{grid}, \partial D_n) = \max_{k \in \partial D_n} \min_r \|k - k_r\| \leq \rho. \quad (12)$$

Таким образом, для построения сетки необходимо и достаточно, чтобы круги радиуса  $\rho$ , центры которых находятся в  $k_r$ , покрывали границу. Будем называть такую аппроксимацию и соответствующую сетку *достаточно равномерными*.

Аппроксимацию границы просто сделать для каждого участка границы по отдельности, явно добавив узлы в точках сопряжения участков границы. Для участков-отрезков  $k_m(t) = t d_m + p_m$ ,  $t \in [t_{m,1}, t_{m,2}]$ , предлагается очевидная равномер-

ная аппроксимация с  $N$  интервалами, включающая оба конца отрезка:

$$k_{m,r} = (t_{m,1} + r\delta) d_m + p_m, \quad r = 0, 1, \dots, N, \\ \delta = \frac{t_{m,2} - t_{m,1}}{N}, \quad N = \left\lceil \frac{t_{m,2} - t_{m,1}}{2\rho} \right\rceil. \quad (13)$$

Расстояние между двумя узлами не превышает  $2\rho$ . Эта сетка – оптимальная среди всех сеток, включающих крайние точки, с той точки зрения, что она равномерная и её число узлов минимально.

С криволинейными участками границы  $k_\ell(w)$ , определёнными на замкнутых интервалах, ситуация сложнее. Напомним, что на этих интервалах функция  $k_\ell(w)$  непрерывна. Рассмотрим один участок,  $k(w)$ ,  $w \in W$ , опустив индекс.

Формально можно получить равномерную аппроксимацию участка гладкой кривой с любой заданной точностью, если использовать так называемую натуральную (естественную) параметризацию участка кривой с помощью функции длины кривой от точки  $k(w_1)$  в сторону увеличения значения параметра. Функцию длины можно определить по «скорости движения» точки вдоль кривой,  $v(w) = \|k'(w)\| = \sqrt{k_1'(w)^2 + k_2'(w)^2}$ , которую будем называть параметрической скоростью или просто скоростью. Функция длины равна

$$\lambda_{w_1}(w) = \int_{w_1}^w v(\tau) d\tau, \quad w \geq w_1 \\ \text{и} \\ \lambda_{w_1}(w) = - \int_w^{w_1} v(\tau) d\tau, \quad w < w_1. \quad (14)$$

Для монотонной функции  $\lambda(w)$ ,  $w \geq w_1$ , строится обратная функция  $w(\lambda)$ . Затем отрезок  $[0, \lambda(w_2)]$  разбивается равномерно числами  $\lambda_r$  на участки длины не больше  $2\rho$  аналогично формуле (13). Итоговый набор  $k_r = k(w(\lambda_r))$  разбивает кривую  $k(w)$ ,  $w \in W$ , на участки равной длины, каждый из которых не больше  $2\rho$ . Из непрерывности кривой и правила треугольника следует, что расстояние от каждой точки участка до одной из соседних узловых точек, включающих концы  $k(w_1)$  и  $k(w_2)$ , не превышает  $\rho$ . К сожалению, аналитическое вычисление сначала интеграла, а потом и обратной функции обычно недоступно, так как компоненты вектора скорости



$k_1'(w), k_2'(w)$  задаются дробно-рациональными функциями.

### 1.1. Алгоритмы построения достаточно равномерной сетки

Предлагаются два алгоритма, использующие верхнюю оценку скорости на подынтервалах и последовательно добавляющие узлы сетки. Особенность алгоритмов состоит в том, что оценка скорости не равномерная, и это позволяет «расходовать» узлы сетки эффективнее. Полученная сетка, удовлетворяющая условию (12), будет достаточно равномерной, при этом в первом алгоритме узлы на кривой будут располагаться регулярным (по  $w$ ) образом.

Вычислим набор точек, содержащих экстремальные значения скорости внутри отрезка  $W_\ell$  с помощью необходимого условия экстремума:

$$\begin{aligned} & \text{Arg extr}_{w \in W_\ell} v(w) \in \\ & \in \text{Arg extr}_{w \in W_\ell} v(w)^2 \in \{w : (v(w)^2)' = 0\} = \quad (15) \\ & = \{w : k_{\ell,1}'(w)k_{\ell,1}''(w) + k_{\ell,2}'(w)k_{\ell,2}''(w) = 0\}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что так как функции дробно-рациональные, поиск нахождения экстремальных точек сводится к вычислению корней соответствующего полинома. Обозначим множество экстремальных точек как  $\{w_s\}$  и определим функцию  $v_{\max}(w_a, w_b)$  для произвольного отрезка  $[w_a, w_b] \in W_\ell, w_a < w_b$ , возвращающую максимальное значение скорости на этом интервале:

$$\begin{aligned} v_{\max}(w_a, w_b) = \max \{ & v(w_a), v(w_b), \\ & \max \{v(w_s) : w_s \in (w_a, w_b)\} \}. \quad (16) \end{aligned}$$

Формула (16) использует теорему Ферма, т. е. тот факт, что на отрезке максимальное значение непрерывной дифференцируемой функции достигается либо на концах отрезка, либо внутри него. Для внутренних точек максимума выполняется необходимое условие экстремума, которому и удовлетворяют точки из набора  $\{w_s\}$ . Вычисление функции  $v_{\max}(w_a, w_b)$  можно упростить, если среди экстремальных использовать только точки (локального) максимума, определяемые условием на вторую производную:  $v''(w_s) < 0$ . При равенстве второй производной нулю надо смотреть на производные высшего порядка или оставлять такие точки в качестве кандидатов.

Таким образом, согласно формуле (14), на отрезке  $[w_a, w_b]$  имеет место оценка для длины кривой от конца  $k_\ell(w_a)$  до промежуточной точки  $k_\ell(w)$ :

$$\lambda_{w_a}(w) \leq v_{\max}(w_a, w_b) \cdot (w - w_a), w \in [w_a, w_b]. \quad (17)$$

Аналогичная оценка верна и для длины кривой в обратную сторону, от  $w_b$  к  $w$ . Из этих оценок и правила треугольника для каждой половины кривой, до и после  $w_c = (w_a + w_b) / 2$ , имеют место верхние и нижние неравенства на длину кривой:

$$\begin{aligned} \|k_\ell(w_a) - k_\ell(w)\| & \leq \lambda_{w_a}(w) \leq \lambda_{w_a}(w_c) \leq \\ & \leq v_{\max}(w_a, w_b) \cdot \frac{w_b - w_a}{2}, w \in [w_a, w_c], \\ \|k_\ell(w_b) - k_\ell(w)\| & \leq \lambda_{w_b}(w) \leq \lambda_{w_b}(w_c) \leq \\ & \leq v_{\max}(w_a, w_b) \cdot \frac{w_b - w_a}{2}, w \in [w_c, w_b]. \end{aligned}$$

Из них следует достаточный критерий: если  $v_{\max}(w_a, w_b) \cdot (w_b - w_a) \leq 2\rho$ , то участок кривой  $k_\ell(w), w \in [w_a, w_b]$ , лежит в объединении двух кругов радиуса  $\rho$  с центрами в  $k(w_a)$  и  $k(w_b)$ .

Предлагается следующий итеративный алгоритм нахождения достаточно равномерной сетки  $K_{set}$ , покрывающей участок кривой  $k_\ell(w), w \in W_\ell$ , использующий функцию  $v_{\max}(w_a, w_b)$  на подынтервалах.

#### Алгоритм 1. Достаточно равномерная сетка для участка дробно-рациональной кривой.

**Дано:** дробно-рациональная кривая  $k_\ell(w), w \in W_\ell = [w_1, w_2]$ , знаменатель которой не обращается в нуль на отрезке  $W_\ell$ , параметр мелкости  $\rho > 0$ .

1. Вычислить экстремальные точки  $\{w_s\}$  для скорости по формуле (15) (или точки локальных максимумов), принадлежащие  $W_\ell$ , и определить функцию верхней границы  $v_{\max}(w_a, w_b)$ .
2. Задать начальный список узлов из двух точек как  $\{k(w_1), k(w_2)\}$ . Задать начальный список интервалов, содержащий один элемент – интервал  $[w_1, w_2]$ .
3. Если список интервалов пуст, то завершить работу алгоритма и вернуть список узлов. В противном случае выбрать любой из интервалов (например, первый по счёту, или крайний левый);

обозначить его как  $[w_a, w_b]$  и извлечь его из списка интервалов.

4. Если выполняется неравенство  $v_{\max}(w_a, w_b) \times (w_b - w_a) \leq 2\rho$ , то перейти к шагу 3.

5. Разбить интервал  $[w_a, w_b]$  пополам точкой  $w_c = (w_a + w_b) / 2 \in (w_a, w_b)$ , добавить  $k(w_c)$  в список узлов, добавить интервалы  $[w_a, w_c]$  и  $[w_c, w_b]$  в список интервалов и перейти к шагу 3.

**Результат алгоритма:** набор параметров из интервала  $[w_1, w_2]$  и соответствующий ему набор узлов, являющийся достаточно равномерной сеткой.

Алгоритм 1 конечен, так как параметрическая скорость ограничена сверху на всём интервале  $W_\ell$ , см. оценку (18) ниже. Из построения следует, что полученная алгоритмом 1 сетка не только осуществляет покрытие кривой окружностями радиуса  $\rho$ , но и разбивает саму кривую на участки длины не больше  $2\rho$ . Алгоритм 1 тривиально обобщается на любые кривые, для которых есть оценка скорости  $\bar{v}(w) \geq v(w)$ . При этом он эффективно реализуется, если эта оценка скорости является полиномом или иной функцией с просто или заранее вычисляемыми экстремумами (максимумами). На рис. 1 приведена параметрическая скорость и достаточно равномерная сетка для участка границы области устойчивости в примере 1 (см. § 5).

В частном случае при использовании в качестве верхней оценки максимальной скорости  $\bar{v}(w) = v_{\max}(w_1, w_2) = \text{const}$  результатом алгоритма 1 будет равномерная (бинарная) сетка:

$$k_r = k(w_r), \quad w_r = w_1 + r \delta_2, \quad \delta_2 = \frac{w_2 - w_1}{2^M},$$

$$M = \max \left\{ 0, \left\lceil \log_2 \frac{v_{\max}(w_1, w_2)(w_2 - w_1)}{\rho} \right\rceil - 1 \right\}, \quad (18)$$

$$r = 0, \dots, 2^M.$$

Равномерная бинарная сетка в общем случае хуже (по числу узлов, но не более чем в два раза) равномерной сетки, построенной по оценке максимальной скорости  $v_{\max}(w_1, w_2)$  аналогично формуле (13) как

$$w_r = w_1 + r \delta, \quad r = 0, 1, \dots, N, \quad \delta = \frac{w_2 - w_1}{N}, \quad (19)$$

$$N = \left\lceil \frac{v_{\max}(w_1, w_2)(w_2 - w_1)}{2\rho} \right\rceil.$$

При этом в алгоритме 1 расстояние между узлами сетки  $k_r = k(w_r)$  адаптируется под максимальную скорость в каждом подынтервале, и на практике он эффективнее, так как требует существенно меньшего числа узлов, чем равномерная сетка (19). Это связано с тем, что функция скорости связана с дробно-рациональными функциями и потому существенно неравномерна, особенно на краях интервалов определения.

Отметим, что поскольку каждый раз при делении отрезка берётся его середина  $w_c = (w_a + w_b) / 2$ , то полученные алгоритмом 1 интервалы будут кратны самому маленькому интервалу  $\delta_2 = 2^{-M}(w_2 - w_1)$  для того же  $M$ , поскольку хотя бы на одном из подынтервалов максимальное значение скорости достигается.

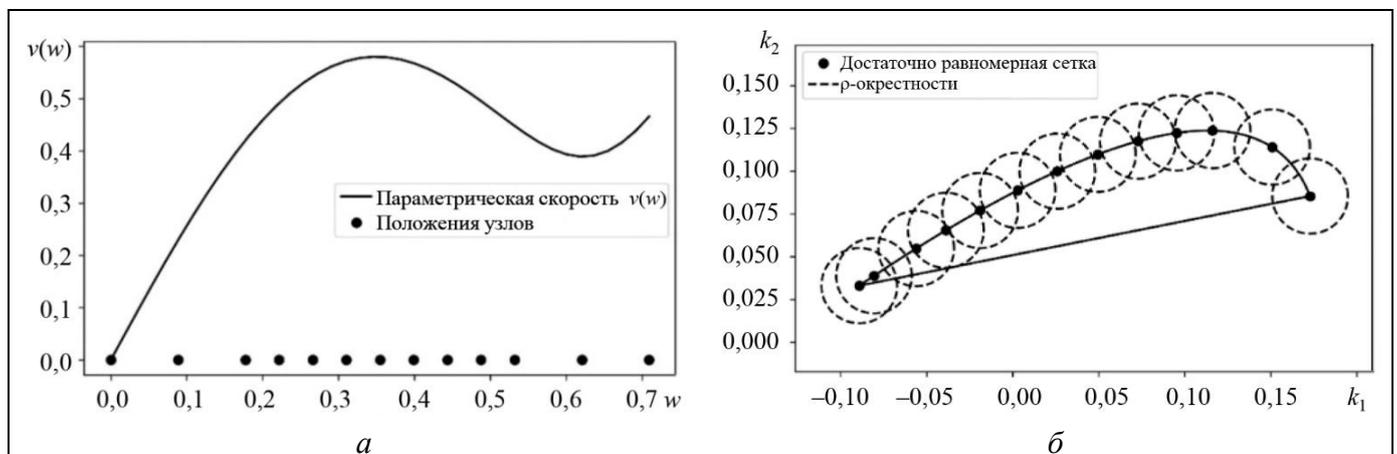


Рис. 1. *a* – Параметрическая скорость для криволинейной части границы области устойчивости примера 1, *b* – достаточно равномерная сетка, построенная по алгоритму 1, вместе с набором покрывающих кругов



Вычисление функции  $v_{\max}(w_a, w_b)$  в формуле (17) становится тривиальным, если интервал не содержит экстремумов:

$$v_{\max}(w_a, w_b) = \max\{v(w_a), v(w_b)\},$$

если  $\nexists w_s \in (w_a, w_b)$ .

Используя этот факт, алгоритм 1 можно упростить, сразу разбив интервал  $[w_1, w_2]$  точками, подозрительными на экстремум (или точками максимума). Тогда на каждом подынтервале максимальная скорость будет определяться исключительно скоростями на концах отрезка, то же относится и к последующему подразделению на более мелкие отрезки.

**Алгоритм 2. Достаточно равномерная сетка для участка дробно-рациональной кривой (упрощённый вариант).**

**Дано:** дробно-рациональная кривая  $k_\ell(w)$ ,  $w \in W_\ell = [w_1, w_2]$ , знаменатель которой не обращается в нуль на отрезке  $W_\ell$ , параметр мелкости  $\rho > 0$ .

1. Вычислить экстремальные точки  $\{w_s\}$  для скорости по формуле (15) (или точки локальных максимумов), принадлежащие  $W_\ell$ , и разбить ими интервал  $[w_1, w_2]$ .

2. Задать начальный список узлов как  $\{k(w_1), k(w_2)\} \cup \{k(w_s)\}$ . Задать начальный список интервалов, полученный разбиением интервала  $[w_1, w_2]$  набором  $\{w_s\}$ .

3. Если список интервалов пуст, то завершить работу алгоритма и вернуть список узлов. В противном случае выбрать любой из интервалов (например, первый по счёту, или крайний левый, обозначим его как  $[w_a, w_b]$ ), и извлечь его из списка интервалов.

4. Если выполняется неравенство  $\max\{v(w_a), v(w_b)\} \cdot (w_b - w_a) \leq 2\rho$ , то перейти к п. 3.

5. Разбить интервал  $[w_a, w_b]$  пополам точкой  $w_c = (w_a + w_b) / 2 \in (w_a, w_b)$ , добавить  $k(w_c)$  в список узлов, добавить интервалы  $[w_a, w_c]$  и  $[w_c, w_b]$  в список интервалов и перейти к п. 3.

**Результат алгоритма 2** такой же, как у алгоритма 1: набор параметров из интервала  $[w_1, w_2]$  и соответствующий ему набор узлов, являющийся достаточно равномерной сеткой.

По сравнению с алгоритмом 1, алгоритм 2 требует меньше вычислений, так как не требуется проверять принадлежность подозрительных на экстремум параметров  $\{w_s\}$  текущему интервалу, но сетка при этом получается нерегулярной.

**1.2. Бесконечные интервалы и перепараметризация**

Дополняют алгоритмы 1 и 2 следующие рассуждения. Во-первых, для локализованного D-разбиения, согласно леммам 1–3 из первой части статьи [5], конечный интервал, на котором определён (или доопределён) участок дробно-рациональной кривой  $k_\ell(w)$  вида (7) внутри множества  $\mathbf{K}$ , всегда замкнутый. Чтобы применять аппроксимацию на бесконечных интервалах по  $w$ , делается замена переменных [11]. Пусть без ограничения общности дробно-рациональная кривая  $k_\ell(w)$  задана и непрерывна на интервале  $W_\ell = [w_1, \infty)$  и выбрана конечная точка  $w_0 < w_1$  – некоторое конечное значение,  $w_0 \neq -\infty$ , например,  $w_0 = w_1 - 1$ . Поскольку D-разбиение локализовано, то существует предельная точка  $k_\infty = \lim_{w \rightarrow \infty} k_\ell(w) \in \mathbf{K}$  – в противном случае верно утверждение леммы 3 [5] и достаточно рассматривать конечный интервал, на котором кривая находится внутри множества  $\mathbf{K}$ . Заменой переменной  $w = w_0 + 1/u$ ,  $u \in U = (0, 1/(w_1 - w_0)] \subset (0, 1]$ , получается другая параметризация того же участка кривой  $k_{\ell,u}(u) = k_\ell(w_0 + 1/u)$ ,  $u \in U$ , при этом вместо узла  $k_{\ell,u}(0)$  берётся та же предельная точка  $k_\infty = \lim_{u \rightarrow +0} k_{\ell,u}(u)$ , а значение скорости в нем полагается равным нулю. Эта замена позволяет получить параметризацию конечных участков границы на конечном интервале. Случай  $W_\ell = (-\infty, +\infty)$  приводит к разбиению на два конечных интервала после замены параметра.

Аналогичное доопределение скорости нулевым значением применяется при доопределении значения дробно-рациональной функции на конце интервала  $[w_1, \dots)$ , если  $w_1$  является корнем знаменателя дробно-рациональной функции, но предельная точка  $\lim_{w \rightarrow w_1} k_\ell(w)$  существует.

Отметим, что для не локализованного D-разбиения части границы  $k_\ell(w)$  могут быть неограниченными из-за неограниченного либо открытого интервала  $W_\ell$ , включая случаи, когда гра-

ница интервала  $W_\ell$  является нулём знаменателя одной из компонент  $k_\ell(w)$ . В этих случаях предел  $k_\ell(w)$  не существует, а неограниченную кривую нельзя приблизить конечным числом точек с заданной точностью. В таких случаях дробно-рациональная кривая (7) имеет асимптоты с соотношением

$$k_{\ell,1}(w) : k_{\ell,2}(w) = R_{\ell,2}(w) Q_{\ell,1}(w) - R_{\ell,1}(w) Q_{\ell,2}(w) : \\ : R_{\ell,1}(w) P_{\ell,2}(w) - R_{\ell,2}(w) P_{\ell,1}(w) \\ \text{при } w \rightarrow \infty,$$

и в качестве множества, аппроксимирующего D-разбиение, можно рассмотреть сочетание набора точек и лучей. Анализ качества и точности такой аппроксимации является отдельной задачей и выходит за рамки настоящей статьи.

## 2. ПОЛУСЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ

Наряду с изложенным в § 1 методом поточечной аппроксимации границ можно предложить ряд численных методов оценки как границы D-разбиения, так и областей D-разбиения. Их можно разделить на два способа.

Идея первого способа состоит в параметризации плоскости параметров  $k_1, k_2$  двумя вспомогательными параметрами и формировании дискретной сетки по одному из вспомогательных параметров. Далее надо взять полученный набор линий (непрерывных по второму вспомогательному параметру, например, прямых или кривых) и найти пересечение границы D-разбиения с этой сеткой. Во-первых, с помощью пересечений будет получена некоторая поточечная аппроксимация границы. Во-вторых, если на этих линиях определить интервалы устойчивости – те части линий, которые попадут в область устойчивости – то будет получена внутренняя аппроксимация области устойчивости. Соответствующие методы, основывающиеся на расслоении пространства параметров, назовём полусеточными (*semi-grid*). В качестве простейшего примера можно взять набор горизонтальных (или вертикальных) линий.

По сути, используются одномерная параметризация (декомпозиция, сечение, расслоение) плоскости или пространства параметров и сетка для этой параметризации. При трёх и более параметрах аналогичная идея применяется для визуализации трёхмерного D-разбиения, см. п. 2.5.

Второй способ состоит в разбиении плоскости параметров на простые множества-ячейки  $K_i$  и выборе тех из них, которые пересекаются с грани-

цей области устойчивости. Эти множества образуют покрытие границы области устойчивости и, следовательно, дополнение к их объединению содержит внутреннюю аппроксимацию области устойчивости на плоскости параметров. При этом по одной части границы объединения покрывающего множества формируется внутренняя, а по другой – внешняя аппроксимация области устойчивости, см. рис. 3. Проверки пересечения границы D-разбиения и множеств  $K_i$  предлагается сделать эффективными, выбирая  $K_i$  как элементы регулярной сетки (*grid*).

Оба способа используют результат конструктивного D-разбиения в виде набора участка границ области устойчивости или одномерное D-разбиение. При этом для второго способа конструктивное D-разбиение необходимо, так как оно позволяет гарантировать отсутствие «пропущенных» компонент области устойчивости, целиком лежащих в одной из ячеек.

Приведём ряд полусеточных методов, а затем, в § 3, ряд сеточных методов, предварив их описанием одномерного D-разбиения.

### 2.1. Одномерное D-разбиение и его связь с конструктивным D-разбиением

Одномерное D-разбиение относится к полиному  $G(s, t)$ , коэффициенты которого зависят от скалярного параметра  $t \in \mathbb{R}$ . В этом случае вещественная прямая параметра разбивается некоторыми значениями  $t_i$  на отрезки и лучи, соответствующие областям D-разбиения. Точки  $t_i$ , определяющие границы одномерного D-разбиения, будем называть критическими точками. Как и в случае двух параметров, они определяются основным уравнением

$$G(s, t) = G_n(t)s^n + G_{n-1}(t)s^{n-1} + \dots \\ + G_1(t)s + G_0(t) = 0_{\mathbb{C}}, \quad s \in \Gamma, \quad (20)$$

и уравнением понижения степени  $G_n(t) = 0$ . Если граница области локализации корней  $\Gamma$  описывается кусочно-дробно-рациональной кривой от параметра  $w$ , а полином  $G$  зависит от  $t$  полиномиально, то основное уравнение можно свести к системе двух полиномиальных уравнений от двух неизвестных.

Ситуация упрощается, если полином зависит от  $t$  линейно, тогда основное уравнение принимает вид:

$$G(s, t) = t P_t(s) + R_t(s) = 0_{\mathbb{C}}. \quad (21)$$



Его можно решить явно, предполагая отсутствие общих корней<sup>2</sup> полиномов  $P_t(s), R_t(s)$  на  $\Gamma$ . Критические точки  $t_i$ , разбивающие прямую параметров на отрезки (и лучи) с постоянным числом устойчивых корней, удовлетворяют уравнению

$$t = -\frac{R_t(s(w))}{P_t(s(w))}. \quad (22)$$

С учётом комплекснозначной правой части, можно исключить переменную  $t$ , решив уравнение относительно  $w$ :

$$\operatorname{Im} \frac{R_t(s(w))}{P_t(s(w))} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} R_t(s(w)) \operatorname{Re} P_t(s(w)) = \\ & = \operatorname{Re} R_t(s(w)) \operatorname{Im} P_t(s(w)), \quad s \in \Gamma, \end{aligned} \quad (23)$$

за исключением тех точек, где  $P_t(s(w)) = 0$ . Такие точки заведомо не являются решением исходного уравнения (21), так как в них  $R_t(s(w)) \neq 0$  из-за отсутствия общих корней. Уравнение (23) сводится к полиномиальному относительно  $w$  для дробно-рациональных функций  $s(w)$ . Найденные корни  $w_i$  остаётся подставить в уравнение (22), получив  $t_i$ . К ним добавляется корень уравнения понижения степени  $t_0 = R_{t,n} / P_{t,n}$ , если он вещественный и  $P_{t,n} \neq 0$ . Наконец, для интервалов  $(t_i, t_{i+1})$ , на которые разбивается прямая параметра, определяется число устойчивых корней, например, по корням полинома в серединах отрезков  $G(s, (t_i + t_{i+1})/2)$  и в двух точках за пределами интервала  $[\min_i t_i, \max_i t_i]$ .

Аналогично двумерному D-разбиению, для дробно-рациональной функции границы  $s(w)$  можно сначала привести уравнение (21) к полиномиальной зависимости от  $w$ , а только затем переходить к соотношениям (22) и (23). Если граница множества локализации корней  $\Gamma$  состоит из не-

скольких участков, то уравнение (21) надо решать для каждого участка.

В общем случае для полинома, линейно зависящего от  $m$  параметров, одномерное D-разбиение позволяет в явном виде найти пересечение области устойчивости с произвольной прямой (или отрезком)

$$k(t) = td + p, \quad t \in [t_1, t_2], \quad p, d \in \mathbb{R}^m,$$

где границы могут быть как ограниченными, так и нет. В двумерном случае полином (1) принимает вид (21):

$$\begin{aligned} G(s, t) = G(s, k_1(t), k_2(t)) = \\ = (d_1 P(s) + d_2 Q(s))t + p_1 P(s) + p_2 Q(s) + R(s). \end{aligned} \quad (24)$$

Критические точки  $t_i$  являются корнями некоторого полинома согласно формуле (23). Среди них выбираются только те, которые принадлежат интервалу  $[t_1, t_2]$ . Этот метод применяется для анализа произвольных прямых и отрезков в пространстве параметров любой размерности, в том числе как вспомогательный для анализа неявно заданных множеств – в качестве оракула, определяющего пересечение прямой с областью устойчивости [12].

Отметим, что если для полинома, зависящего от двух параметров, с помощью конструктивного D-разбиения получена характеристика границ области устойчивости в виде набора кривых и прямых, то пересечение области устойчивости с прямыми в пространстве параметров легко получить, применяя результаты о пересечении границ D-разбиения с прямой. В результате будут получены те же отрезки устойчивости на исследуемой прямой, что и с помощью одномерного D-разбиения.

Априори сравнить эффективность этих двух способов – пересечения с кривыми участками границы и одномерного D-разбиения – сложно, так как их трудоёмкость зависит от числа участков границы области устойчивости и степеней вспомогательных полиномов. При этом стоит иметь в виду, что координаты расположения участков границы областей устойчивости на плоскости легко оцениваются, см. п. 4.3. Оценка расположения участков границы позволяет эффективно исключать пересечение отрезков и прямых с областями D-разбиения, например, путём сравнения прямоугольников, содержащих участки границ областей D-разбиения. С другой стороны, одномерное D-разбиение для полинома вида (24), линейного относительно параметра, осуществляется с помощью решения уравнения (21) напрямую и не требует деления границы D-разбиения на основную кривую и особые прямые.

<sup>2</sup> В противном случае полином заведомо неустойчив, так как корень на границе не принадлежит открытому множеству локализации корней  $\mathbf{D}$ . Этот случай аналогичен случаю двух параметров с отсутствием общих корней у полиномов  $P, Q, R$ . Если рассматриваются не открытые множества  $\mathbf{D}$  и общий корень на границе считается устойчивым, его можно сократить.

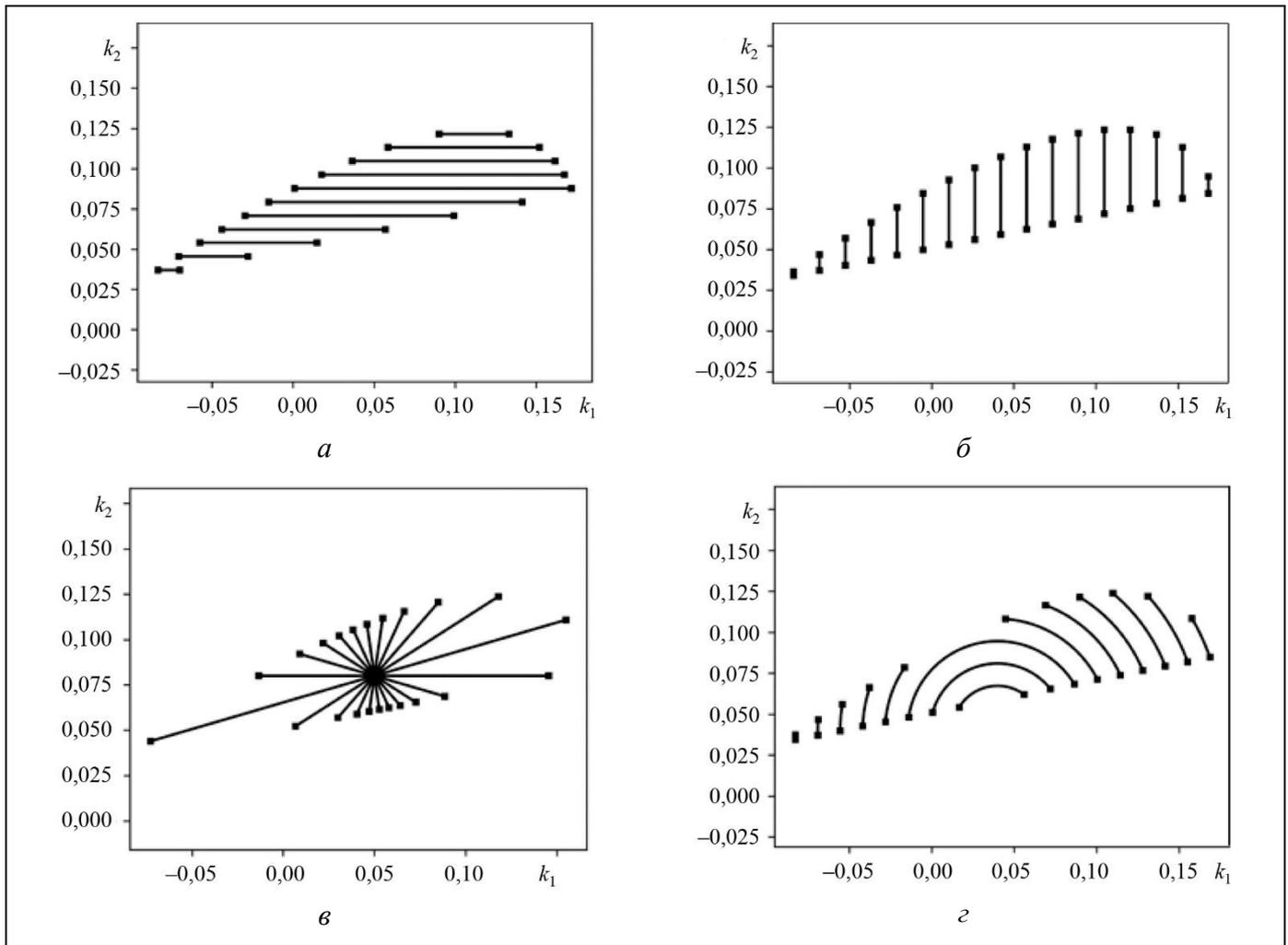


Рис. 2. Внутренние аппроксимации множества устойчивости на сетках: а – из горизонтальных прямых, б – вертикальных, в – концентрических окружностей, z – по угловой сетке

## 2.2. Полусеточный метод с параллельными прямыми

Как было упомянуто выше, проще всего применять метод, зафиксировав один из параметров. В случае двух параметров фиксированному первому параметру на плоскости  $k_1, k_2$  соответствуют вертикальные прямые, а фиксированному второму – горизонтальные. Если задана область локализации  $K = K_1 \times K_2 = [k_1, \bar{k}_1] \times [k_2, \bar{k}_2]$ , проще всего брать равномерную сетку, отталкиваясь либо от мелкости, либо от числа прямых  $N+1$ , см. примеры на рис. 2, а и б. Например, вертикальные прямые  $K_i$  задаются в явном и параметрическом виде как

$$k_1 - k_{1,i} = 0, k_{1,i} = k_1 + i \frac{\bar{k}_1 - k_1}{N}, i = 0, \dots, N, \quad (25)$$

$$\left( \begin{array}{c} 0 \\ \bar{k}_2 - k_2 \end{array} \right) t + \left( \begin{array}{c} k_{1,i} \\ k_2 \end{array} \right), t \in [0, 1], i = 0, \dots, N.$$

Пересечение границ D-разбиения определяется уравнениями (10) и (11) для основной кривой и (8) для прямых либо можно использовать одномерное D-разбиение по  $t$  полинома (24) с использованием параметризации (25). На каждой прямой выделяются отрезки, для которых полином устойчив. Совокупность таких отрезков на всех прямых  $K_i$ , соответствующих областям устойчивости, образует внутреннюю аппроксимацию области устойчивости.

## 2.3. Полусеточный метод с лучами (угловая сетка)

Рассмотрим точку  $k_0$  на плоскости параметров, например, соответствующую устойчивому полиному. Выберем несколько лучей, проходящих через эту точку, и рассмотрим пересечение этих лучей с границами D-разбиения. Для построения удобнее брать не лучи, а прямые, у которых угол



наклона относительно оси равномерно распределён на полуокружности. Например, для  $N$  прямых можно выбрать сетку в виде уравнения

$$(k_1 - k_{0,1}) \sin \frac{i\pi}{N} - (k_2 - k_{0,2}) \cos \frac{i\pi}{N} = 0, \quad (26)$$

$$i = 0, \dots, N-1,$$

или, в параметрической записи,  $k_0 + t \left( \cos \frac{i\pi}{N}, \sin \frac{i\pi}{N} \right)^T$ . В отличие от случая прямых, параллельных координатным осям, точки пересечения с участками границы области устойчивости надо искать с помощью формул (8) и (9). В качестве альтернативы можно использовать одномерное D-разбиение. Если точка  $k_0$ , через которую проходят прямые, соответствует устойчивому полиному, то надо брать минимальные по модулю положительные и отрицательные параметры прямой:  $\max_{m:t_m < 0} t_m \leq t \leq \min_{m:t_m > 0} t_m$ , где  $t_m$  соответствуют точкам пересечения с основной кривой и особыми кривыми. В этом случае будет найдено пересечение прямой с компонентой области устойчивости, содержащей точку  $k_0$ . Пример угловой сетки приведён на рис. 2, в.

Отметим, что при построении сетки по углу можно брать и набор случайно направленных прямых, а точка  $k_0$  не обязательно должна соответствовать устойчивому полиному.

#### 2.4. Полусеточный метод с концентрическими окружностями (радиальная сетка)

Наконец, рассмотрим параметризацию с помощью набора концентрических окружностей  $K_i = \{k : \|k - k_0\| = r_i\}$ . Точки пересечения границ D-разбиения с окружностями находятся явно: для особых прямых в параметрической форме  $td + p$  из квадратичного уравнения

$$(td_1 + p_1 - k_{0,1})^2 + (td_2 + p_2 - k_{0,2})^2 = r_i^2, \quad (27)$$

а для участков основной кривой  $k_\ell(w)$ ,  $w \in W_\ell$ , — из сводимых к полиномиальным по  $w$  уравнений:

$$(k_{\ell,1}(w) - k_{0,1})^2 + (k_{\ell,2}(w) - k_{0,2})^2 = r_i^2. \quad (28)$$

На рис. 2, г приведён пример радиальной сетки с центром вне исследуемого множества.

#### 2.5. Полусеточный метод с параллельными (гипер-)плоскостями

Для полинома, зависящего от трёх параметров, возникающего, в частности, при анализе системы, замкнутой ПИД-регулятором, по одному из параметров берётся сетка. Для каждого фиксированного значения указанного параметра строится D-разбиение по оставшимся двум параметрам, и итоговые плоскости «стыкуются» между собой. Таким образом, построение и визуализация трёхмерной области сводится к построению ряда двумерных областей устойчивости. Этот классический приём используется не только для синтеза стабилизирующих регуляторов, но и для синтеза  $H_\infty$ -регуляторов и пр. [3].

В общем случае фиксация одного параметра уменьшает число свободных параметров, и можно построить или аппроксимировать D-разбиение по остальным параметрам.

### 3. СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ (РАЗБИЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ)

В полусеточных методах отсутствует оценка того, как граница области устойчивости ведёт себя вне множеств, образующих расслоение пространства параметров. Известны только точки её пересечения с прямыми (окружностями, гиперплоскостями), образующими границы расслоения. Конечно, если задана область локализации  $K$ , расслоения порождают ряд ограниченных множеств (отрезков или сегментов окружности), но их размер сравним с размером области  $K$ .

В сеточных методах предлагается более мелкое разбиение пространства параметров или области локализации на множества  $K_i$ , управляемое двумя сетками. Подчеркнём отличие предлагаемого метода от изложенного в работе [13]. Обычно предлагается искать области, для которых все полиномы устойчивы. Здесь же предлагается определять границу области устойчивости в явном виде с помощью конструктивного D-разбиения, а потом проверять её пересечение с конечным набором границ областей  $K_i$ , иначе говоря, явно искать пересечение границ ячеек с границами области устойчивости.

Также предлагается использовать ячеистую сетку, в частности, образованную конечным набором линий, и явно обнаруживать множества ячеек  $K_i$ , содержащие границу, по пересечениям

границ области устойчивости с линиями, образующими сетку. Эти линии одновременно являются границами ячеек. При этом ясно, что остальные ячейки либо целиком принадлежат какой-то области D-разбиения, в том числе области устойчивости, либо содержат какую-то область D-разбиения целиком<sup>3</sup>. В этом смысле подход близок к идеям адаптивного разбиения плоскости параметров: квадратичному дереву (*quadtree*) [14] или с учётом разбиения на пересекающиеся участки [11]. Предложенный метод отличается от методов слежения вдоль границы множества с помощью пересекающих её отрезков (например, таких, как ортогональный, симплексный, гусеничный и пр. методы [2]), так как гарантируется обнаружение всех множеств, покрывающих границу.

### 3.1. Ортогональная линейная сетка

Напрашивается очевидная комбинация одномерных сеток по каждому из параметров  $k_1, k_2$  из п. 2.2, которая приводит к анализу множества прямоугольников. Удобство такого подхода состоит в том, что достаточно проанализировать пересечение границы D-разбиения с вертикальными и гори-

зонтальными прямыми (см. формулы (28), (29)), а точки пересечения линий сетки между собой очевидны. При этом автоматически будут получены прямоугольники-ячейки  $K_i$ , содержащие границу области устойчивости, см. пример на рис. 3, а.

### 3.2. Полярная сетка

Аналогичный подход работает при комбинации лучевой и радиальной сетки. Полученная полярная сетка состоит из концентрических окружностей и радиальных прямых, проходящих через центр окружностей. Радиусы окружностей не обязательно должны быть равномерными, как и сетка по углам прямых. Если выбранный центр лежит внутри области устойчивости, полярная сетка позволяет найти простую секторную внутреннюю (и внешнюю) аппроксимацию области устойчивости.

### 3.3. Треугольная сетка

Приведём ещё один вид сетки, образованной прямыми, – треугольную сетку, которая требует в полтора раз больше вычислений, но порождает более «гладкую» аппроксимацию границы. Для

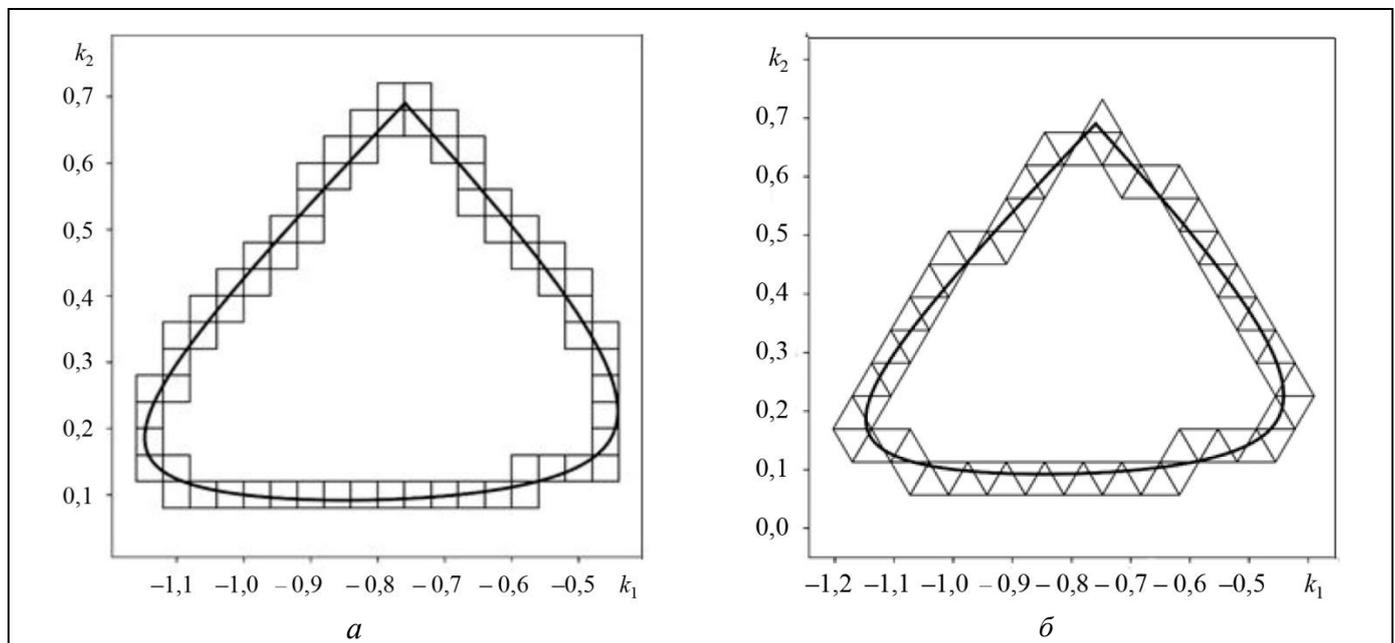


Рис. 3. Аппроксимация границы компоненты области устойчивости примера 2: а – ортогональной сеткой, б – треугольной сеткой

<sup>3</sup> Собственно, это и есть основной недостаток традиционного «сеточного» подхода – он не обнаруживает явно множества, лежащие внутри ячейки  $K_i$ . Это принципиальная особенность, которую нельзя обойти напрямую, уменьшая размер ячеек. Однако, поскольку в указанных предположениях верна теорема 1 из первой части статьи [5], то граница области устойчивости состоит из конечного числа участков, и все они явно перечислены. Таким образом, можно проверить локализацию каждого из этих участков, см. п. 4.3, и проверить их положение относительно ячеек  $K_i$ .



этого берётся ряд горизонтальных прямых и ряд наклонных, см. пример для равномерных треугольников на рис. 3, б. Треугольная сетка удобна тем, что, граница накрывающего границу D-разбиения множества более «равномерная» и «гладкая». Также она состоит из отрезков кратной длины (с углами  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ , и  $240^\circ$ ), если треугольники равносторонние.

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ КОНСТРУКТИВНОГО D-РАЗБИЕНИЯ

Без ограничения общности результаты в этом параграфе также рассматриваются относительно области устойчивости  $D_n$ , а не произвольной области D-разбиения  $D_d$ .

##### 4.1. Области устойчивости на кривой

Конструктивное D-разбиение позволяет найти участки устойчивости вдоль кривой в пространстве параметров. Пусть на плоскости параметров кривая  $K$  задана в явном виде как

$$F(k_1, k_2) = 0. \quad (29)$$

Её точки пересечения с границами областей D-разбиения разбивают её на участки, на которых число устойчивых корней постоянно. В частности, для нахождения «участков устойчивости», соответствующих устойчивым полиномам, достаточно рассмотреть пересечение кривой с границами области устойчивости  $k_\ell(w)$ . Эти точки удовлетворяют уравнениям

$$F(k_{\ell,1}(w), k_{\ell,2}(w)) = 0, \quad w \in W_\ell, \quad (30)$$

для пересечения с границами – участками основной кривой  $k_\ell(w)$  и уравнениям

$$F(d_1t + p_1, d_2t + p_2) = 0 \quad (31)$$

для пересечения с границами – особыми кривыми, заданными в параметрическом виде  $td + p$ .

Если кривая  $K$  алгебраическая, т. е. функция  $F(k_1, k_2)$  является полиномом, то решение обоих уравнений сводится к вычислению корней некоторого полинома. Такой приём использовался в п. 2.4 для анализа пересечений границы D-разбиения с окружностями с помощью уравнений (27) и (28) вместо использования записи окружности в форме (26). Также отметим, что уравнения (30), (31) можно рассматривать как граничные уравнения для кривой  $k_\ell(w)$  [15].

Более того, для алгебраических кривых вида (29) можно получить параметризацию  $K = \{k(v) : v \in \mathbb{R}\}$ , а по точкам пересечения с границами D-разбиения можно восстановить параметры  $v_i$  [16]. Эти точки разбивают кривую на участки с постоянным числом корней, некоторые из которых соответствуют участкам устойчивости. Также при известной параметризации кривой  $K = \{k(v) : v \in \mathbb{R}\}$  можно сразу подставить уравнение кривой в основное уравнение D-разбиения  $G(s, k_1(v), k_2(v)) = 0$ ,  $s \in \partial D$ , и выполнить одномерное D-разбиение по параметру  $v$ . Если параметризация кривой дробно-рациональная, то его можно свести к одномерному D-разбиению для полинома вида (20).

Предложенный подход позволяет анализировать полиномы, коэффициенты которых зависят от одного параметра нелинейно, например  $G(s, t) = f(t)P(s) + g(t)Q(s) + R(s)$ . Сначала находится конструктивное D-разбиение полинома  $G(s, f, g) = fP(s) + gQ(s) + R(s)$  относительно  $f$  и  $g$  как свободных параметров. Затем определяется параметризация кривой  $(f(t), g(t))^T$  в виде (29) и решаются уравнения вида (30) и (31). Аналогичный приём может помочь анализировать полиномы с несколькими нелинейно входящими в коэффициенты параметрами.

##### 4.2. Пересечение с множествами дополнительных ограничений

Описание области устойчивости в виде набора участков границы, полученное в результате конструктивного D-разбиения, позволяет легко учитывать дополнительные ограничения на коэффициенты  $k_1, k_2$ . Пусть эти ограничения заданы множествами  $K_i$ . В этом случае сперва определяются те части границы  $\partial K_i$ , которые лежат внутри области устойчивости, например, как указано в п. 4.1. Затем границы области устойчивости обновляются с учётом этих, новых границ, и с исключением участков границы области устойчивости вне множеств  $K_i$ . Эта процедура повторяется для всех областей дополнительных ограничений  $K_i$ . По сути, каждый раз повторяется отсечение основных кривых и особых прямых аналогично тому, как это сделано в локализованном D-разбиении.

### 4.3. Локализация областей D-разбиения на плоскости параметров и опорная функция

Термин «локализация» может быть использован не только для априорного ограничения множества интересующих параметров, но и для обратной цели – идентификации положения области устойчивости или её компонент на плоскости.

Имея описание множества (в частности, области устойчивости) в виде набора участков границ  $k_i(w)$ ,  $w \in W_i = [w_{i,a}, w_{i,b}]$ , включающих как участки основных кривых, так и отрезки на конечных интервалах  $W_i$ , нетрудно описать его положение. Так, можно найти крайние точки, используя тот факт, что участки границ заданы дробно-рациональными кривыми. Например, определение минимальных и максимальных значений компонент, т. е. прямоугольника, содержащего участок границы  $k_i(w)$ , осуществляется по экстремальным точкам аналогично тому, как это сделано для скорости в п. 1.1. Для этого ищутся корни  $w_{i,1,m}$ ,  $m=1, \dots$ ,  $w_{i,2,\ell}$ ,  $\ell=1, \dots$ , двух уравнений

$$\begin{aligned} w_{i,1,m} : k'_{i,1}(w) &= 0, \quad w \in [w_{i,a}, w_{i,b}], \\ w_{i,2,\ell} : k'_{i,2}(w) &= 0, \quad w \in [w_{i,a}, w_{i,b}]. \end{aligned}$$

Как и для оценки скорости (16), имеют место неравенства, причём крайние значения достигаются в концах участков кривых или в точках  $w_{i,1,m}$ ,  $w_{i,1,\ell}$ , подозрительных на экстремум:

$$\begin{aligned} \min \{ k_{i,1}(w_{i,a}), k_{i,1}(w_{i,b}), \min_m k_{i,1}(w_{i,1,m}) \} &\leq k_{i,1}(w) \leq \\ &\leq \max \{ k_{i,1}(w_{i,a}), k_{i,1}(w_{i,b}), \max_m k_{i,1}(w_{i,1,m}) \}, \\ \min \{ k_{i,2}(w_{i,a}), k_{i,2}(w_{i,b}), \min_\ell k_{i,2}(w_{i,2,\ell}) \} &\leq k_{i,2}(w) \leq \\ &\leq \max \{ k_{i,2}(w_{i,a}), k_{i,2}(w_{i,b}), \max_\ell k_{i,2}(w_{i,2,\ell}) \}. \end{aligned}$$

Вместо экстремальных точек можно использовать только минимумы или максимумы соответственно для нижних и верхних границ.

Для отрезков интервалы определяются по его концам: например, для  $k_1$

$$\begin{aligned} \min \{ k_{i,1}(w_{i,a}), k_{i,1}(w_{i,b}) \} &\leq \\ &\leq k_{i,1}(w) \leq \max \{ k_{i,1}(w_{i,a}), k_{i,1}(w_{i,b}) \}, \end{aligned}$$

аналогично для второй координаты  $k_{i,2}(w)$ .

Пример локализации отдельных компонент области устойчивости приведён на рис. 4.

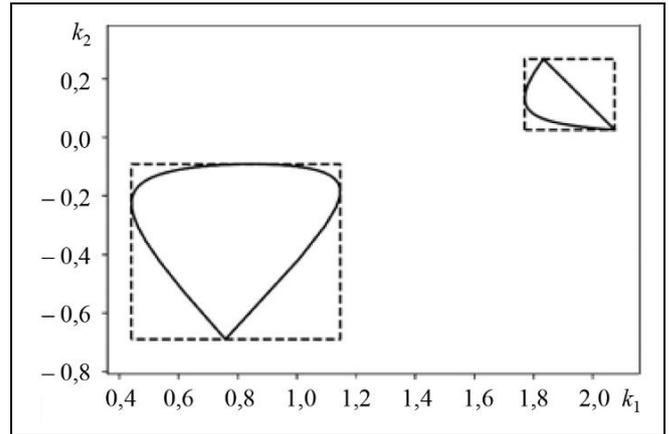


Рис. 4. Локализации двух компонент области устойчивости для примера 2, см. § 5

Схожим образом можно легко получить опорную функцию  $\text{supp}_{D_n}(d) = \max_{k \in D_n} d^T k$  и её опорный элемент  $\text{suppel}(d)$  для области устойчивости в направлении вектора  $d \in \mathbb{R}^2$ . Для этого используется опорная функция для каждого участка границы  $k_i(w)$ :

$$\begin{aligned} \text{supp}_{D_n}(d) &= \max_i \max_{w \in W_i} d_1 k_{i,1}(w) + d_2 k_{i,2}(w), \\ \text{suppel}(d) &= k_j(w_j), \\ w_j &= \arg \max_{w \in W_i} d_1 k_{i,1}(w) + d_2 k_{i,2}(w), \\ j &= \arg \max_i d_1 k_{i,1}(w_i) + d_2 k_{i,2}(w_i). \end{aligned}$$

Поиск максимума дробно-рациональной функции на интервале, на котором знаменатель не обращается в нуль, сводится к вычислению корней полинома в числителе производной. Более того, можно строить опорную функцию не только для всей области устойчивости целиком, а для её отдельной компоненты, взяв в рассмотрение только границы этой компоненты.

В общем случае для первичного анализа области устойчивости предлагается трёхэтапный подход.

1. Получить конструктивное описание границы области устойчивости.

2. Выбрать достаточно большое множество локализации  $\mathbf{K}$ , чтобы получить конечные и замкнутые интервалы параметризации  $W_i$ , применив также результаты из п. 3.2 по замене параметризации.

3. Локализовать область устойчивости по участкам границ внутри множества  $\mathbf{K}$ .

Для начальной локализации с большим множеством  $\mathbf{K}$  используются уравнения (8), (10), (11)



для прямоугольника, (27), (28) – для  $K$  в виде круга и т. д.

Кроме того, локализацию области устойчивости можно осуществить численно, с использованием достаточно равномерной сетки мелкости  $\rho$ . Пусть, согласно п. 1.1, такая сетка получена в результате применения алгоритма 1 или 2 ко всем участкам границы области устойчивости:  $K_{grid} = \{k_r, r = 1, \dots\}$ . Последовательным соединением узлов сетки будет получен многоугольник, приближающий область устойчивости с точностью не хуже  $\rho$  (параметр сетки). Для этого многоугольника также можно получить явное выражение для опорной функции и опорного элемента по его вершинам:

$$\text{supp}_{D_n}(d) = \max_r d^T k_r,$$

$$\text{suppel}_{D_n}(d) = k_r, \quad r = \arg \max_r d^T k_r.$$

Приведённые выражения являются приближением к опорной функции и элементу, а сама область устойчивости гарантированно лежит в прямоугольнике

$$\begin{aligned} & \left[ -\rho + \min_r k_{r,1}, \max_r k_{r,1} + \rho \right] \times \\ & \times \left[ -\rho + \min_r k_{r,2}, \max_r k_{r,2} + \rho \right], \end{aligned}$$

где  $\rho$  – мелкость достаточно равномерной сетки.

Аналогичным образом для набора точек можно вычислить минимальный покрывающий круг с центром  $k_0$  и радиусом  $R$ . Круг с таким же центром и радиусом  $R + \rho$  будет содержать область устойчивости.

#### 4.4. Расстояние до области устойчивости (области неустойчивости)

Для точки  $k_0$ , характеризующей устойчивый полином  $G(s, k_{0,1}, k_{0,2})$ , естественно ставится задача о расстоянии до ближайшей неустойчивой точки, т. е. задача определения круга максимального радиуса  $\|k - k_0\| \leq R$ , целиком лежащего в области устойчивости. Этот радиус называется радиусом устойчивости [3].

Имея конструктивное D-разбиение, радиус устойчивости можно вычислить точно или получить его оценку по достаточно равномерной сетке на границе. Точное решение определяется задачей минимизации, учитывающей все участки границы области устойчивости  $k_i(w)$ :

$$R = \min_i \min_{w \in W_i} \|k_i(w) - k_0\|.$$

Эта задача распадается на набор подзадач поиска минимумов дробно-рациональных функций на интервале  $\min_{w \in W_i} \|k_i(w) - k_0\|^2$ . В свою очередь, каждая из подзадач сводится к вычислению корней некоторого полинома аналогично тому, как это сделано для параметрической скорости (15), и к проверке концов участков.

Подобным образом, решая задачу максимизации расстояния от точки  $k_0$  до точек границы, можно найти минимальный круг, содержащий область устойчивости, см. рис. 5.

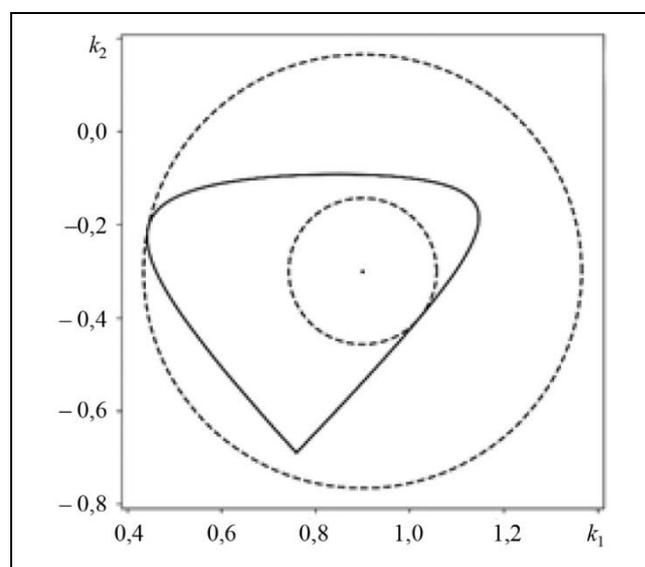


Рис. 5. Круг максимального радиуса с заданным центром, содержащийся в области устойчивости, и круг минимального радиуса, содержащий компоненту области устойчивости, для примера 2, см. § 5

Расстояние до границы области устойчивости можно оценить и по точкам достаточно равномерной сетки на границе как

$$\min_i \min_r \|k_r - k_0\| - \rho \leq R \leq \min_i \min_r \|k_r - k_0\| + \rho.$$

Здесь  $k_r$  – узлы сетки, покрывающей границу области устойчивости. Она состоит из объединения (без повторов) узлов сеток каждого из участков границы  $k_i(w)$ ,  $w \in W_i$ .

#### 4.5. Применение к робастному D-разбиению

В задачах робастного анализа рассматриваются полиномы, зависящие не только от «управляющих» параметров, но и от неопределённых параметров, обозначим их как  $q$ :

$$G(s, k_1, k_2, q) = k_1 P(s) + k_2 Q(s) + R_0(s) + \sum_i q_i R_i(s), \quad q \in Q. \quad (32)$$

Здесь неопределённость в задании полинома характеризуется ограниченным множеством  $Q$ . Таким образом, для каждого фиксированного  $k$  рассматривается семейство полиномов. Полином, для которого выбрано конкретное значение параметров  $q = q_0$ , называется номинальным. В этом случае полином (32) принимает форму (1) с  $R(s) = R_0(s) + \sum_i q_{0,i} R_i(s)$ .

Задача состоит в определении областей робастной устойчивости, т. е. таких  $k$ , что все корни полинома устойчивы для всех параметров  $q \in Q$ . Его построение, будучи идейно таким же, как и построение D-разбиения, существенно сложнее из-за того, что области D-разбиения с постоянным (для любого  $q \in Q$ ) числом устойчивых корней разделяются не одномерными линиями, а двумя множествами. Эти множества определяются принципом исключения нуля, обобщающим уравнения (3) и (4):

$$K_{bnd} = \{k_1, k_2 : G(s, k_1, k_2, q) = 0_{\mathbb{C}}, s \in \partial D, q \in Q\}$$

и

$$K_{deg} = \{G_n(k_1, k_2, q) = 0_{\mathbb{C}}, q \in Q\}.$$

Соответственно, границами областей робастного D-разбиения являются границы этих двух множеств. Границы множества робастной устойчивости всегда лежат внутри множества устойчивости номинального полинома. Это следует из того, что каждый полином семейства (32) должен быть устойчивым, включая номинальный полином  $G(s, k_1, k_2, q_0)$ . Таким образом, при описании границ множества робастной устойчивости можно ограничиться только теми границами множеств  $K_{bnd}$  и  $K_{deg}$ , которые лежат внутри области устойчивости номинального полинома.

Кроме того, можно многократно повторять конструктивное D-разбиение для полиномов  $G(s, k_1, k_2, q_r)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , где каждый полином определяется случайно выбранными параметрами  $q_r \in Q$ . Множество робастной устойчивости лежит в пересечении областей устойчивости всех выбранных полиномов.

Пусть граница множества локализации корней  $\partial D$  имеет параметризацию  $s(w)$ , и номинальный полином имеет границу, параметризованную набором кривых и прямых  $k_i(w)$ ,  $w \in W_i$ . Оказывается,

что граница областей робастного D-разбиения характеризуется подобным образом:  $K_{bnd}$  является огибающей семейства множеств  $K_{bnd}(w) = \{k_1, k_2 : G(s(w), k_1, k_2, q) = 0_{\mathbb{C}}, q \in Q, s(w) \in \Gamma\}$  [3, 17].

Можно было бы ожидать, что интервалы по  $w$  множеств  $K_{bnd}(w)$ , порождающих границу области робастной устойчивости, входят в интервалы  $W_i$  границ области устойчивости без неопределённых параметров. К сожалению, в общем случае гипотеза о вложенности интервалов неверна, так как граница множества  $K_{bnd}(w)$  при  $w \notin W_i$  может влиять на итоговое множество робастной устойчивости. Это зависит от значений функции основной кривой  $k(w)$  для номинального D-разбиения и размера множества  $Q$ . Исследование и построение конструктивного робастного D-разбиения является открытой проблемой даже для случая параметров, линейно входящих в характеристический полином.

## 5. ПРИМЕРЫ

На рисунках были использованы множества устойчивости или их компоненты из двух примеров, подробно разобранных в первой части статьи [5].

**Пример 1** [18, с. 77]. Рассматривается замкнутая система непрерывного времени с характеристическим полиномом

$$G(s, k_1, k_2) = k_1 s(s-1)(s-2) + k_2 (s-1)(s-2) + s(s+1)(s^2 + s + 1). \quad (33)$$

Требуется исследовать его устойчивость относительно области локализации корней  $D = \{s : \operatorname{Re} s < 0, 2\}$  с параметризацией границы  $s(w) = -0,2 + jw$ . Поскольку полином (33) имеет вещественные коэффициенты, достаточно взять верхнюю часть границы,  $W = [0, \infty)$ .

Основная кривая одна,  $w \in [0, \infty)$ , с компонентами

$$k_1(w) = \frac{4,6 w^4 - 7,112 w^2 + 0,62016}{-w^4 - 6,28 w^2 - 6,9696},$$

$$k_2(w) = \frac{-w^6 + 8,68 w^4 - 5,4208 w^2 - 0,230784}{-w^4 - 6,28 w^2 - 6,9696}.$$

Критической частоте  $w_0 = 0$  соответствует единственная особая прямая,  $-0,528k_1 + 2,64k_2 - 0,1344 = 0$ , с параметризацией  $p + td$ , где  $p = (-0,00979021; 0,04895105)^T$ ,  $d = (-2,64; -0,528)^T$ .



Область устойчивости ограничена одним участком основной кривой  $k(w)$ ,  $w \in [0; 0,70951628]$  и отрезком  $p+td$ ,  $t \in [-0,06916025; 0,02999640]$  (рис. 6).

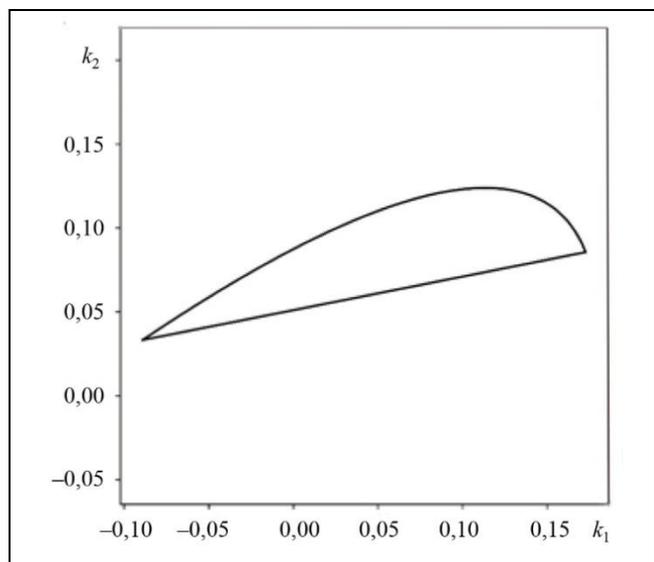


Рис. 6. Область устойчивости для примера 1

На рис. 2 изображён ряд внутренних аппроксимаций области устойчивости с помощью одномерных линий. На рис. 3, а изображены параметрическая скорость  $v(w)$  указанного участка кривой и достаточно равномерные значения параметров, полученные с помощью алгоритма 1 для  $\rho = 0,02$ . На рис. 3, б приведены узловые точки и их окрестности радиуса  $\rho$ , покрывающие этот участок кривой.

**Пример 2** [19]. Рассмотрен характеристический полином дискретной системы  $G_0(z, k_1, k_2) = z^n + k_1 z^{n-1} + (1+\varepsilon)z^{n-2} + k_2$  при  $n = 5$  и  $\varepsilon = 0,1$ . Устойчивость дискретного полинома эквивалентна гурвицевости полинома

$$G(s, k_1, k_2) = (s+1)^5 + (1+\varepsilon)(s-1)^2(s+1)^3 + k_1(s-1)(s+1)^4 + k_2(s-1)^5.$$

Граница областей D-разбиения состоит из одной основной кривой

$$k_1(w) = \frac{-16,6 w^8 + 128,8 w^6 - 221,2 w^4 + 128,8 w^2 - 16,6}{8(w^8 - 6 w^6 + 6 w^2 - 1)},$$

$$k_2(w) = \frac{-0,2 w^8 - 0,8 w^6 - 1,2 w^4 - 0,8 w^2 - 0,2}{8(w^8 - 6 w^6 + 6 w^2 - 1)}$$

и двух особых прямых. Одна из них соответствует  $w=0$  и имеет параметризацию  $td+p$ , где  $p = (1,05; 1,05)$ ,  $d = (1, -1)$ . Вторая особая прямая опре-

деляется условием понижения степени (4) с параметризацией  $td+p$ , где  $p = (-1,05; -1,05)$ ,  $d = (-1; 1)$ .

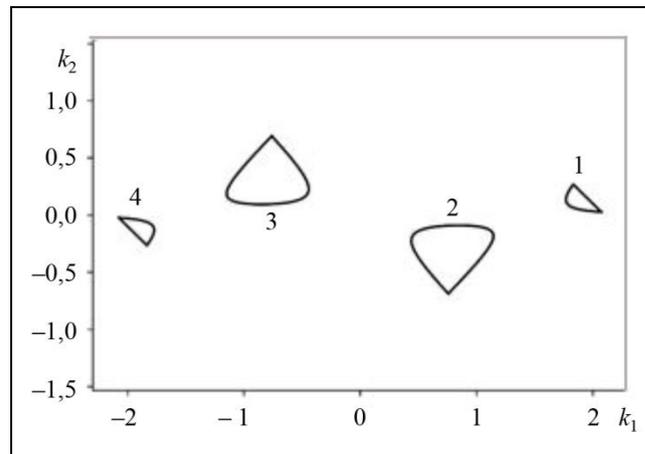


Рис. 7. Компоненты области устойчивости для примера 2

Область устойчивости состоит из четырёх компонент, см. рис. 7:

1) из участка первой особой прямой при  $t \in [1,025; 1,45]$  и участка основной кривой при  $w \in [0; 0,37796447]$ ,

2) участка основной кривой при  $w \in [0,42972375; 0,96431209]$ ,

3) участка основной кривой при  $w \in [1,03700867; 2,32707640]$ ,

4) участка второй особой прямой при  $t \in [1,025; 1,45]$  и участка основной кривой при  $w \in [2,64575131; \infty)$ .

Последний участок кривой можно записать как  $k_u(u) = k_l(1/u)$ ,  $u \in [0; 0,37796447]$ , согласно п. 3.2, при этом значение в  $u = 0$  определено и совпадает с  $k_{(\infty)}$ :

$$k_{u,1}(u) = \frac{16,6 u^8 - 128,8 u^6 + 221,2 u^4 - 128,8 u^2 + 16,6}{8(u^8 - 6 u^6 + 6 u^2 - 1)},$$

$$k_{u,2}(u) = \frac{0,2 u^8 + 0,8 u^6 + 1,2 u^4 + 0,8 u^2 + 0,2}{8(u^8 - 6 u^6 + 6 u^2 - 1)}.$$

Отметим, что полученная параметризация совпадает с исходной параметризацией по  $w$  с точностью до знака, а интервал совпадает с интервалом первого участка. Это связано с симметрией исходного множества локализации корней дискретной системы в виде единичного круга и его параметризации.

На рис. 3 изображены аппроксимации второй компоненты области устойчивости с помощью ортогональной и треугольной сеток. На рис. 4 представлены огра-

ничающие области  $[1,7706; 2,075] \times [0,025; 0,2667]$  для первой компоненты и  $[0,4414; 1,1472] \times [-0,6901; -0,09185]$  для второй компоненты области устойчивости, третья и четвёртая компоненты симметричны второй и первой. На рис. 5 изображены круги с центрами  $k_1 = 0,9$ ,  $k_2 = -0,3$ , меньший из которых полностью лежит в области устойчивости и определяет радиус устойчивости 0,4417 для указанного регулятора. Большой круг радиуса 0,9538 целиком содержит вторую компоненту области устойчивости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе метода конструктивного D-разбиения, развитого в первой части статьи [5], предложены два алгоритма построения достаточно равномерной сетки на границе области устойчивости с заданной мелкостью. Алгоритмы используют оценку параметрической скорости дробно-рациональных кривых. Предложен ряд полусеточных внутренних аппроксимаций области устойчивости, а также способ нахождения регулярного покрытия границы области устойчивости прямоугольниками и треугольниками. Указано применение предложенных методов для ряда задач исследования области устойчивости, включающего вопросы локализации компонент области устойчивости на плоскости, построение их опорных функций и их приближений, а также вычисление радиуса устойчивости.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность анонимным рецензентам и корректору, чьи замечания позволили улучшить статью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Kushel, O.Y.* Unifying Matrix Stability Concepts with a View to Applications // *SIAM Review*. – 2019. – Vol. 61, no. 4. – P. 643–729.
2. *Дидук Г.А.* Машинные методы исследования автоматических систем. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1983. – 176 с. [*Diduk, G.A.* Machine methods for studying automatic systems. – Leningrad: Energoatomizdat, 1983. – 176 s. (In Russian)]
3. *Ackermann, J.* Robust control: The parameter space approach. (2nd ed.). – London: Springer, 2002. – 483 p.
4. *Violet, G.* Continuity argument revisited: geometry of root clustering via symmetric products / arXiv:1512.08645. – 2016. – P. 1–45. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1512.08645>
5. *Тремба А.А.* Конструктивное D-разбиение для двух линейно входящих в полином параметров. Ч. 1. Описание границ областей D-разбиения. – 2025. – № 6. – С. 39–57. [*Tremba, A.A.* Constructive D-Partition for Two Parameters Entering Polynomial Linearly: Part I. Description of the Boundaries of the D-Partition Regions // *Control Sciences*. – 2025. – No. 6. – P. 33–49.]
6. *Грязина Е.Н., Поляк В.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // *Автоматика и телемеханика*. – 2008. – № 12. – С. 3–40. [*Gryazina, E.N., Polyak, V.T., Tremba, A.A.* D-decomposition technique state-of-the-art // *Automation and Remote Control*. – 2008. – Vol. 69, no. 12. – P. 1991–2026.]
7. *Неймарк Ю.И.* Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива // *Автоматика и телемеханика*. – 1948. – Т. 9, № 3. – С. 190–203. [*Neimark, Yu.I.* On the determination of the values of the parameters at which the automatic control system is stable // *Automation and Remote Control*. – 1948. – Vol. 9, no. 3. – P. 190–203. (In Russian)]
8. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с. [*Neimark, Yu.I.* Dinamicheskie sistemy i upravlyаемые processy. – Moscow: Nauka, 1978. – 336 s. (In Russian)]
9. *Gryazina, E.N., Polyak, V.T.* Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited // *Automatica*. – 2006. – Vol. 42, no. 1. – P. 13–26.
10. *Siljak, D.D.* Analysis and synthesis of feedback control systems in the parameter plane, I-linear continuous systems // *IEEE Transactions on Applications and Industry*. – 1964. – Vol. 83, no. 75. – P. 449–458.
11. *Tan, L., Li, B., Zhang, B., Cheng, J.S.* An algorithm for the intersection problem of planar parametric curves // *Proceedings of International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing*. – Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. – P. 312–329.
12. *Polyak, V.T., Gryazina, E.N.* Randomized methods based on new Monte Carlo schemes for control and optimization // *Annals of Operations Research*. – 2011. – Vol. 189. – P. 343–356.
13. *Прышников П.Ф.* D-разбиение при полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена от двух параметров // *Автоматика и телемеханика*. – 2021. – № 3. – С. 32–46. [*Pryashnikova, P.F.* D-decomposition in the case of polynomial dependence of the coefficients of a polynomial on two parameters // *Automation and Remote Control*. – 2021. – Vol. 82, no. 3. – P. 398–409.]
14. *Farouki, R.T.* Reduced difference polynomials and self-intersection computations // *Applied Mathematics and Computation*. – 2018. – Vol. 324. – P. 174–190.
15. *Saydy, L., Tits, A.L., Abed, E.H.* Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials // *Mathematics of Control, Signals and Systems*. – 1990. – Vol. 3, no. 4. – P. 345–371.
16. *Goldman, R.N., Sederberg, T.W., Anderson, D.C.* Vector elimination: A technique for the implicitization, inversion, and intersection of planar parametric rational polynomial curves // *Computer Aided Geometric Design*. – 1984. – Vol. 1, no. 4. – P. 327–356.
17. *Тремба А.А.* Робастное D-разбиение при  $l_p$ -ограниченных параметрических неопределенностях // *Автоматика и телемеханика*. – 2006. – № 12. – С. 21–35. [*Tremba, A.A.* Robust D-decomposition under  $l_p$ -bounded parametric uncertainties // *Automation and Remote Control*. – 2006. – Vol. 67, no. 12. – P. 1878–1892.]



18. *Francis, B.* A Course in  $H_\infty$  Control Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 88. – 150 p.
19. *Грязина Е.Н.* К теории D-разбиения // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 12. – С. 15–28. [*Gryazina, E.N.* The D-Decomposition Theory // Automation and Remote Control. – 2004. – Vol. 65, no. 12. – P. 1872–1884.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии  
С. А. Красновой.

Поступила в редакцию 06.08.2025,  
после доработки 08.10.2025.  
Принята к публикации 23.10.2025.

**Тремба Андрей Александрович** – канд. физ.-мат. наук,  
Институт проблем управления РАН, г. Москва; Московский  
физико-технический институт, г. Долгопрудный.  
✉ [atremba@ipu.ru](mailto:atremba@ipu.ru)  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5783-7600>

© 2026 г. Тремба А. А.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

## CONSTRUCTIVE D-PARTITION FOR TWO PARAMETERS ENTERING A POLYNOMIAL LINEARLY. PART II: Approximation of Stability Regions and Robustness Analysis

A. A. Tremba

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

✉ [atremba@ipu.ru](mailto:atremba@ipu.ru)

**Abstract.** For a polynomial linearly dependent on two parameters, several methods are proposed to approximate its stability region with respect to a given root localization region (also called a root clustering set in the literature). The first method is to apply a sufficiently uniform grid to the stability region boundary that ensures its complete coverage with a given accuracy. The second (semi-grid) method yields an internal approximation of the stability region using line segments or curve arcs bounded by the stability region. The third method is to cover the stability region boundary with simple sets (cells) in order to obtain piecewise linear internal and external approximations of the stability region. All methods are based on the constructive D-partition (constructive D-decomposition) method, which describes the stability region boundary as a set of line segments and rational curve arcs. The exact stability radius and its simple estimate are derived in the parameter plane. Implementation of all methods and algorithms is reduced to finding the real roots of polynomials.

**Keywords:** constructive D-partition, rational curves, approximation of the stability region, sufficiently uniform grid, grid methods, semi-grid methods, support function, stability radius.

**Acknowledgments.** The research presented in Sections 2 and 3 was supported by the Russian Science Foundation, project no. 21-71-30005-II, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>. The author is grateful to the anonymous reviewers and the editorial proof-reader for careful reading of the manuscript and helpful remarks.