

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ВОКСЕЛЬНЫМ МЕТОДОМ

А.В. Толоч, Н.Б. Толоч

Рассмотрен один из подходов к решению задач математического программирования с применением средств функционального моделирования. Изложены некоторые инструменты функционально-воксельного метода для компьютерного решения оптимизационных задач с помощью воксельного алгоритма градиентного спуска. Приведены наглядные примеры компьютерного вычисления в сопоставлении с бескомпьютерными решениями.

**Ключевые слова:**  $R$ -функция,  $R$ -функциональное моделирование, воксель, локальные геометрические характеристики, функционально-воксельный метод, функционально-воксельная модель,  $M$ -образ, математическое программирование.

## ВВЕДЕНИЕ

Существуют некоторые подходы к решению задач математического программирования однокритериальных задач компьютерными средствами. Они, как правило, базируются на табличном задании параметров, а затем требуют проведения дополнительных процедур по организации расчетов для получения результата. При этом каждый вариант постановки задачи может влиять на выбор метода решения, а значит, говорить об универсальности подхода не приходится. В случае увеличения размерности задачи положение разработчика вновь усугубляется необходимостью приведения постановки к разрешимым условиям. На данном этапе развития таких методов можно констатировать несовершенство теоретической основы для разработки автоматизированной системы, приводящей к единому модельному подходу к решению задач математического программирования.

Авторы предлагают принцип компьютерных вычислений, приводящий к единому подходу к решению рассмотренных в работе задач линейного и нелинейного программирования. Этот принцип основан на двух активно развивающихся методах: *R-функциональном моделировании* [1, 2] и *функционально-воксельном моделировании* (ФВМ) [3]. Как аналитическое средство построения сложных геометрических моделей  $R$ -функциональное моделирование базируется на применении математического аппарата  $R$ -функций, разработанного академи-

ком В.Л. Рвачевым [2]. По сути, аппарат позволяет производить теоретико-множественные операции над неявно заданными функциями, увеличивая при этом размерность пространства.

В 2016 г. был сформулирован компьютерный метод функционально-воксельного моделирования, основанный на принципах линейной аппроксимации функционального пространства для вычисления его локальных геометрических (дифференциальных) характеристик [3]. При этом под термином *воксель* понимается цветовая характеристика в заданном целочисленном пространстве, которая служит средством отображения локальной геометрической характеристики. В работах [4–8] приводятся различные приложения метода и раскрываются его достоинства. Главная особенность этого метода заключается в его преимуществах в организации компьютерного графического подхода к решению математических задач с геометрической постановкой. Отметим, что к геометрической постановке можно сводить решение достаточно широкого класса математических задач, основанных на применении функциональных зависимостей.

## 1. ФУНКЦИОНАЛЬНО-ВОКСЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В работе [3] построение функционально-воксельной модели основано на принципах линейной аппроксимации пространства функции для вычисления его локальных геометрических характеристик. В отличие от существующих подходов к ли-

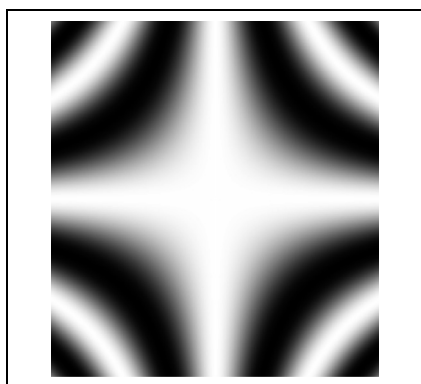


Рис. 1. Образ поверхности функции  $z = \cos((5\pi/2)xy)$

нейной аппроксимации локальные геометрические характеристики этой модели представлены компонентами нормали повышенной размерности пространства. В основе такого представления лежит

**Утверждение.** В пространстве  $E^{m+1}$  семейство гиперплоскостей вида  $n_1x_1 + \dots + n_mx_m = p$  представимо как  $n_1x_1 + \dots + n_mx_m + n_{m+1}x_{m+1} = 0$ . ♦

Линейная аппроксимация определяет плоскую окрестность в точке 3D-пространства компонентами нормали  $\vec{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$  для нормального уравнения  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 = 0$ .

**Определение.** Графический образ, соразмерный его прототипу и отображающий некоторое единственное свойство прототипа, называется графическим *образом-моделью* прототипа, или графическим *M-образом*. ♦

Поскольку создаваемая воксельная геометрическая модель базируется на отображении локальных геометрических характеристик, то каждый из воксельных образов модели есть графический *M-образ*.

Представим аппроксимированную модель  $x'_3 = g(n_1, \dots, n_4, x_1, x_2)$  некоторой функции  $x_3 = f(x_1, x_2)$  (рис. 1) нормальным векторным полем, выраженным четырьмя скалярными полями  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  согласно условиям утверждения.

Установим некоторое соответствие скалярных полей  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , определяемых на промежутке  $[-1, 1]$  с их воксельным представлением  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , выразив через градацию интенсивности тона монохромной палитры, например  $[0, P]$ , где  $P = 255$  — верхнее значение интенсивности цвета палитры (рис. 2):

$$C_1 = \frac{P(1+n_1)}{2}, \quad C_2 = \frac{P(1+n_2)}{2}, \quad C_3 = \frac{P(1+n_3)}{2},$$

$$C_4 = \frac{P(1+n_4)}{2}.$$

Характерно то, что на этом этапе прекращается компьютерная обработка функции аналитического вида и в дальнейших преобразованиях появляется возможность использовать только графические данные полученных базовых *M-образов* для реализации различных вычислений. Аналитическая функция может быть востребована лишь при определении максимально точных решений, а значит, в достаточно редких случаях, либо для промежуточного уточнения модели при накоплении возможной погрешности от целочисленных вычислений в ходе ее преобразований.

Основное достоинство такого компьютерного представления геометрической модели состоит в ее соразмерной связи с евклидовым пространством  $E^n$ , позволяющей работать с любой размерностью задаваемых функций.

Одним из конструкций функционально-воксельного моделирования является алгоритм градиентного спуска [3], работающий на основе порожденных *M-образов*. К примеру, двумерные *M-образы* задаются как

$$C_{\alpha_{xy}}^{\text{II}} = \left( \cos \alpha_{ij}^{\text{IV}} / \sqrt{(\cos \alpha_{ij}^{\text{IV}})^2 + (\cos \beta_{ij}^{\text{IV}})^2 + 1} \right) P/2,$$

$$C_{\beta_{xy}}^{\text{II}} = \left( \cos \beta_{ij}^{\text{IV}} / \sqrt{(\cos \alpha_{ij}^{\text{IV}})^2 + (\cos \beta_{ij}^{\text{IV}})^2 + 1} \right) P/2,$$

где верхний индекс указывает на размерность компонент вектора нормали,  $i$  и  $j$  — индексы массива точек образа,  $\alpha$  и  $\beta$  — углы отклонения от осей  $Ox$

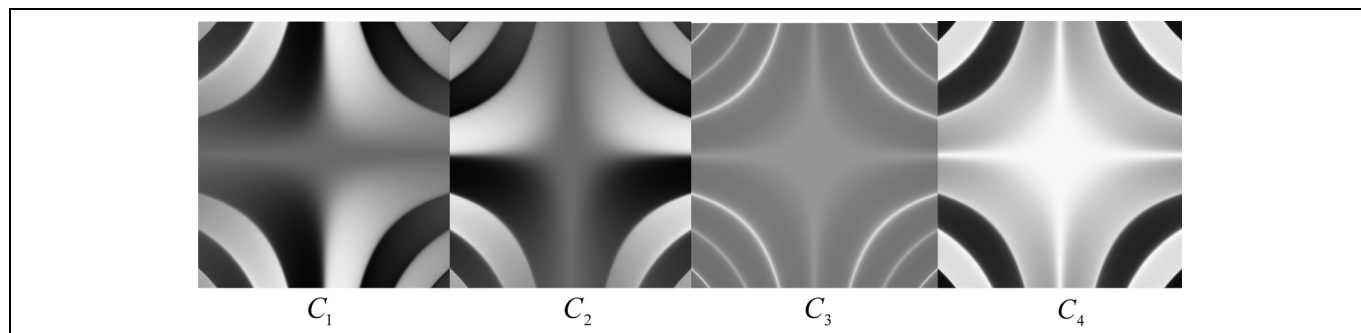


Рис. 2. Воксельное отображение компонентов нормали функции  $z = \cos((5\pi/2)xy)$

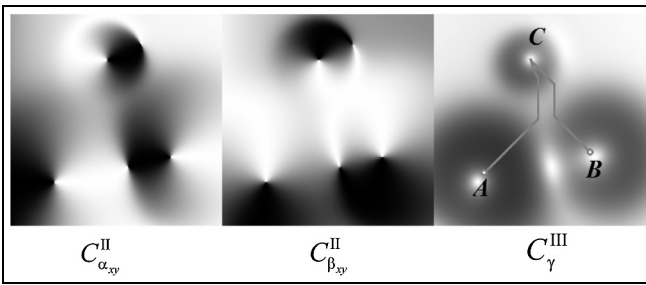


Рис. 3. Пример прокладки градиентного спуска из точек  $A$  и  $B$  в точку  $C$  на основе  $M$ -образов и, наложенного на  $M$ -образ, отображающий интенсивность градиента

и  $O_u$  соответственно, а  $P$  — верхнее значение интенсивности цвета палитры. Пример работы алгоритма приведен на рис. 3.

## 2. R-ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Чтобы моделировать сложные функциональные конструкции с сохранением условий к значениям получаемой при этом функции — ноль на границе, положительные значения внутри функциональной области, а отрицательные снаружи — применим класс  $R$ -функций, нацеленный на решение такой задачи.

Рассмотрим наиболее распространенную полную систему  $R$ -функций, широко применяемую в геометрическом моделировании функционального пространства,  $R_\alpha$ :

$x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{\alpha + 1} (x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy})$  — пересечение двух функциональных областей  $x$  и  $y$ ;

$x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{\alpha + 1} (x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy})$  — объединение двух функциональных областей  $x$  и  $y$ ;

$\bar{x} \equiv -x$  — отрицание на области  $x$ ,  $-1 < \alpha \leq 1$ .

В приложениях часто полагают  $\alpha = 0$ : в результате получается квадратичный закон заполнения функционального пространства при сохранении нулевых значений на границе:

$$x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\bar{x} \equiv -x.$$

Значение  $\alpha = 1$  приводит к линейному закону описания функционального пространства с теми же условиями знака функционального значения:

$$x \wedge_1 y \equiv \frac{1}{2} (x + y - |x - y|);$$

$$x \vee_1 y \equiv \frac{1}{2} (x + y + |x - y|),$$

и это сказывается на форме поверхности значений функционального пространства.

Исходим из того, что математическое программирование рассматривает методы решения задач нахождения экстремумов функций на множествах конечномерного векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). Таким образом, постановка задачи сводится к организации такого геометрического пространства, где определяется область допустимых решений со значениями целевой функции внутри нее (область допустимых планов), а оставшаяся часть пространства не должна противоречить решению поставленной оптимизационной задачи градиентным методом.

В общем случае рассмотрим систему ограничений как пересечение множества предикатных функций  $w_1, w_2, \dots, w_n$  для некоторого пространства  $E^n$ :  $w = w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_n$ .

При этом на границе области функция  $w$  принимает нулевое значение, вне области функция отрицательна, а внутри области присутствует некоторый нелинейный закон распространения положительных значений. Присутствующие положительные значения внутри области  $w$  создают проблему применения данного подхода к исследованию заданной целевой функции  $F$ , описанной в том же пространстве  $E^n$ . Для помещения функции  $F$  в область  $w$  необходимо предварительно обнулить положительные значения внутри области  $w$ .

Для этого предлагается воспользоваться главным свойством теории  $R$ -функций — сохранение нулевой границы в ходе логических операций над предикатами. Вычтем из полученной функциональной зависимости  $w$  ее значение по модулю:  $w_0 = w - |w|$ .

При этом положительная область значений  $w$  обнуляется, а отрицательная область обретает более выраженное убывание значений. Сложение пространства целевой функции  $F$  с пространством области ограничений  $w$  позволяет получить общее пространство функции  $F_w = F + w_0$ , где значения целевой функции сохраняются на области ограничений  $w$ , а на ее границе образуется излом, позволяющий определять экстремальные точки, попадающие на границу области  $w$ . Учитывая возможность негативного влияния формы поверхности  $F$  на форму поверхности  $w_0$ , добавим корректирующий элемент  $1 + |F|$ , тогда получим окончательный вид функции  $F_w \rightarrow \min/\max$ :

$$\begin{cases} F_w = F + w_0(1 + |F|) \rightarrow \max, \\ F_w = F + |w_0(1 + |F|)| \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1)$$

где  $F$  — целевая функция,  $w_0$  — обнуленная область допустимых планов.

Возникает правомерный вопрос о дифференцировании изломов функции  $F_w$ . Решить данную проблему позволяет принцип получения дифференциальных образов-моделей методом ФВМ [3]. В соответствии с этим принципом «окрестность излома» всегда рассматривается с постоянным приближением. Погрешность решения зависит от заданной площади элемента аппроксимации.

Проверим изложенный алгоритм на известных примерах, найденных в различных источниках [9, 10]. Авторы опускают рассмотрение задач линейного программирования в силу их очевидного решения в рамках предлагаемого подхода и переходят сразу к нелинейной постановке задач.

### 3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решим задачу с заданными линейными ограничениями и нелинейной целевой функцией [10].

**Задача 1.** Найти глобальные экстремумы функции  $F = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \rightarrow \min/\max$  на множестве ограничений

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 12, \\ x + y &\leq 9, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

**Классическое решение.** Построим многоугольник допустимых планов и несколько линий уровня (рис. 4). Линии уровня  $F = c$  представляют собой окружности с центром в точке  $A(2, 3)$  и радиусом  $r = \sqrt{c}$ . Видно, что  $F_{\min} = 0$  достигается в точке  $A(2, 3)$ ,  $F_{\max}$  — в точке  $B(9, 0)$ . ♦

Промоделируем решение такой задачи методом ФВМ, используя аппарат  $R$ -функций. Представим многоугольник допустимых планов в виде пересечения функций-предикатов:

$$\begin{aligned} w_1 &= -(x + 2y - 12); \\ w_2 &= -(x + y - 9); \\ w_3 &= x; \\ w_4 &= y; \\ w &= w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4. \end{aligned}$$

Результат построения базовых образов поверхности  $w$  показан на рис. 5.

Получение базовых образов поверхности  $w_0 = w - |w|$  составляет следующий этап преобразования ФВМ (рис. 6).

Сложение целевой функции  $F$  с функцией  $w_0$  позволяет получить новую поверхность  $F_w = F + w_0$ , отображающую внутри многоугольника функцию  $F$  без изменений с характерными изломами по границам многоугольника (рис. 7). При этом возникает проблема: на границах излома направление гради-

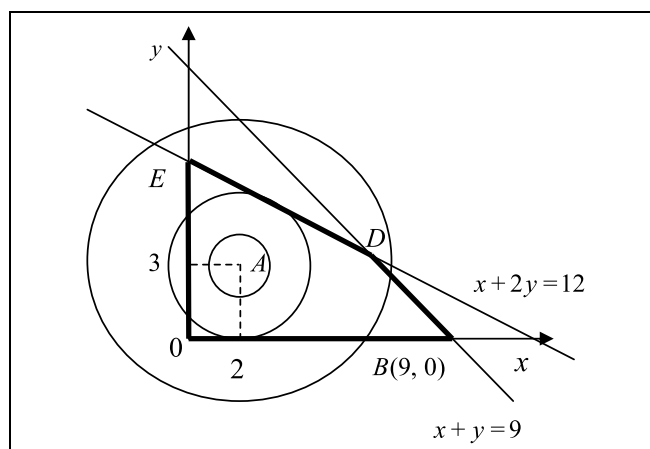


Рис. 4. Графическое представление задачи

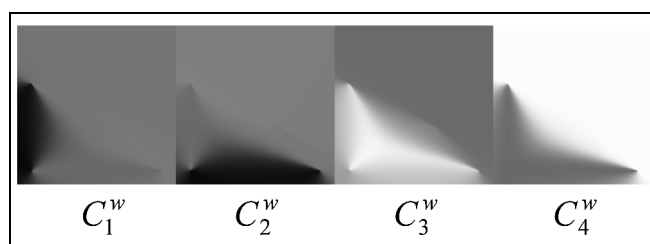


Рис. 5. Представление базовых образов поверхности  $w$

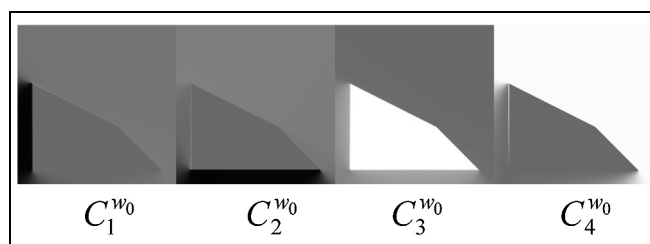


Рис. 6. Базовые образы поверхности

ента всегда должно быть противоположным. Поставив в зависимость от интенсивности изменения значений целевой функции  $F$  полученную функцию  $w_0$ , получим решение этой проблемы (рис. 8):

$$F'_w = F + w_0(1 + |F|).$$

На рис. 9 показаны порожденные  $M$ -образы  $C_{\alpha,xy}^{\Pi}$  для максимизации и минимизации функции  $F_w$  соответственно с выделенными экстремальными точками на ее поверхности, сохраняющей свои значения в многоугольнике допустимых планов. Центр окружности показывает глобальные экстремумы, полученные путем перебора значений функции  $F_w \rightarrow \min/\max$  для полученного множест-



ва экстремальных точек (центр окружности), определяемых работой алгоритма градиентного движения (ломаная линия).

Рассмотрим пример с нелинейными ограничениями и нелинейной целевой функцией [9].

**Задача 2.** Найти глобальные экстремумы функции  $z = x^2 + y^2$  на множестве ограничений

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 + (y - 3)^2 &\geq 9, \\ (x - 5)^2 + (y - 3)^2 &\leq 36, \\ x + y &\geq 8, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

**Классическое решение.** На рис. 10 множество допустимых решений ограничено замкнутой жирной линией. Видно, что оно не является выпуклым. По изображению горизонталей можно заметить, что наименьшее значение функция  $z$  достигает в точке  $B$ , а наибольшее — в точке  $K$  (точка касания окружности  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$  и линии уровня).

Найдем координаты точек  $B$  и  $K$ . Точка  $B$  принадлежит прямой  $x + 8 = y$  и окружности  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$ . Поэтому ее координаты находим из системы уравнений

$$\begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9, \\ x + y = 8, \end{cases}$$

$$B(5 - 3\sqrt{0,5}, 3 + 3\sqrt{0,5}).$$

Точка  $K$  принадлежит линии центров  $OO_1$  с уравнением  $y = \frac{3}{5}x$  и окружности  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$ .

Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 36, \\ x = \frac{3}{5}y, \end{cases}$$

$$K\left(5 + \frac{30}{\sqrt{34}}, 3 + \frac{18}{\sqrt{34}}\right).$$

Следовательно,  $z_{\min} = 43 - 12\sqrt{0,5}$ ;  $z_{\max} = 40 - 12\sqrt{34}$ . ♦

Промоделируем решение такой задачи методом ФВМ на основе построенной  $R$ -функциональной модели (1). Представим многоугольник допустимых планов в виде пересечения предикатов:

$$\begin{aligned} w_1 &= (x - 5)(x - 5) + (y - 3)(y - 3) - 9; \\ w_2 &= -((x - 5)(x - 5) + (y - 3)(y - 3) - 36); \\ w_3 &= x + y - 8; \\ w_4 &= x; \\ w_5 &= y; \\ w &= w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4 \wedge w_5. \end{aligned}$$

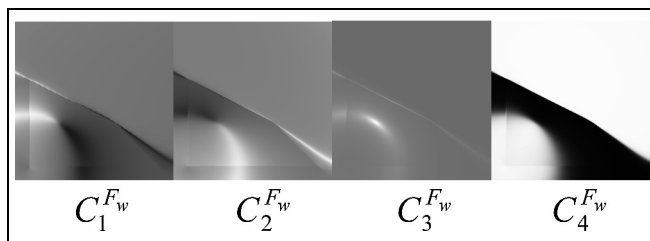


Рис. 7. Базовые образы поверхности  $F_w$

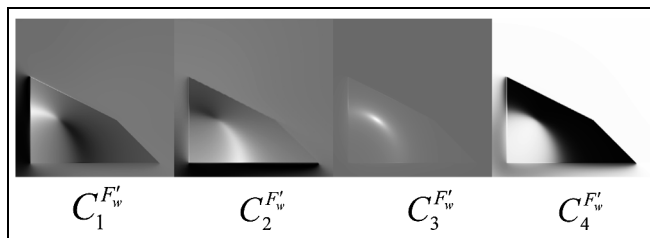


Рис. 8. Базовые образы поверхности

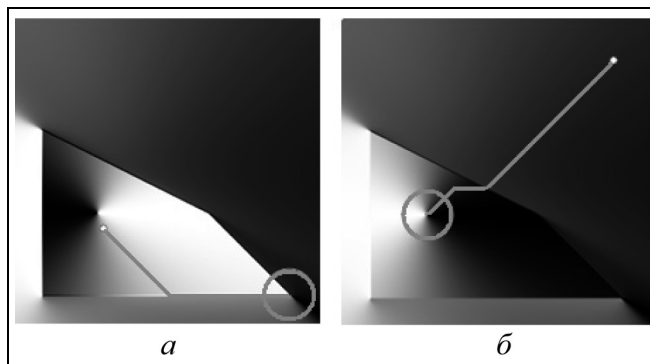


Рис. 9. Построение градиентного движения для решения задачи: а —  $F \rightarrow \max$ ; б —  $F \rightarrow \min$

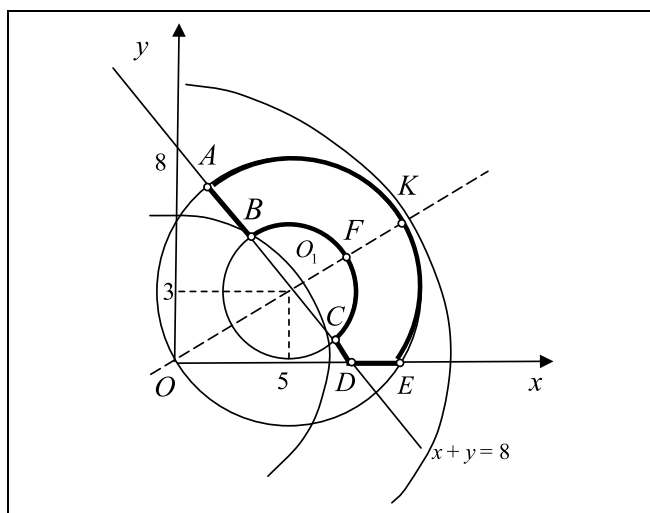
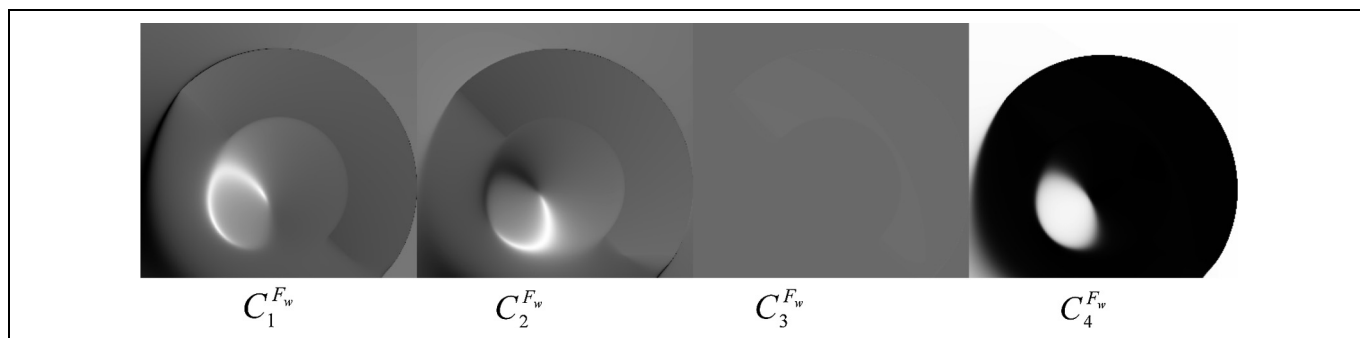
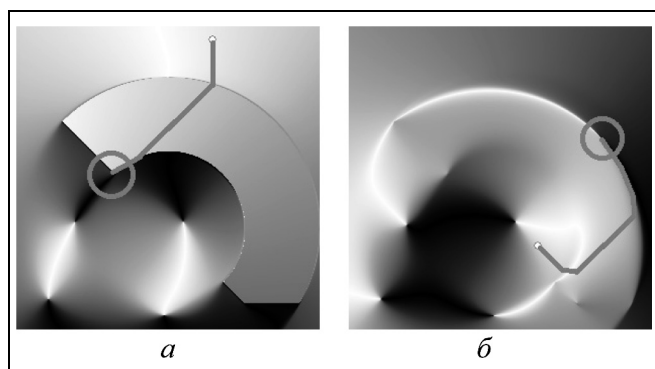


Рис. 10. Графическое представление задачи




 Рис. 11. Базовые образы представление поверхности  $F_w$ 

 Рис. 12. Результат определения максимального и минимального значений:  $a - F \rightarrow \min$ ;  $b - F \rightarrow \max$ 

Результат образного представления поверхности  $F_w$  показан на рис. 11.

На рис. 12 демонстрируются  $M$ -образы  $C_{\alpha,xy}^{\Pi}$  для максимизации и минимизации функции  $F_w$  соответственно с выделенными экстремальными точками на ее поверхности, сохраняющей свои значения в многоугольнике допустимых планов. Результат получен в системе РАНОК-МП. Центр окружности показывает глобальные экстремумы, полученные путем перебора значений функции  $F_w \rightarrow \min/\max$  для найденного множества экстремальных точек при помощи градиентного спуска).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Демонстрация работы нового метода — функционально-воксельного моделирования — на простых тестовых примерах, не отличающихся повышенной размерностью и сложностью вычислений, наглядно показывает, что в сочетании с полученной  $RF$ -моделью, он позволяет без особой сложности повышать размерность пространства решаемых задач и применять в описании их постановки уравнения неявного вида любого степенного порядка.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Максименко-Шейко К.В.  $R$ -функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей: монография. — Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. — 306 с.
2. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. — Киев: Наукова думка, 1982. — 552 с.
3. Толок А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании / Под. ред. акад. РАН С.Н. Васильева. — М.: Физматлит, 2016. — 112 с.
4. Толок Н.Б., Ульянов С.А. К планированию маршрутов в 3D-среде с многовариантной моделью / С.Н. Васильев, М.А. Локтев, А.В. Толок и др. // Тр. СПИИРАН. — 2016. — Вып. 2 (45). — С. 5—25.
5. Григорьев С.Н., Локтев М.А., Толок А.В. Построение воксельных моделей геометрических объектов // Прикладная информатика. — 2013. — № 4 (46) — С. 50—55.
6. Пушкарев С.А., Толок А.В. Автоматизация графического способа решения некоторых математических задач / С.Н. Григорьев, Д.А. Силантьев, Е.А. Лоторевич и др. // Прикладная информатика. — 2012. — № 5 (41) — С. 44—50.
7. Ковалев С.П., Толок А.В. Применение модельно-ориентированного подхода в управлении жизненным циклом технических изделий // Информационные технологии в проектировании и производстве. — 2015. — № 2 (158). — С. 3—9.
8. Силантьев Д.А., Лоторевич Е.А., Пушкарев С.А., Толок А.В. Воксельно-математическое моделирование при решении задач определения площади для поверхностей деталей // Информационные технологии в проектировании и производстве. — 2013. — № 3. — С. 29—33.
9. Барский А.Б. Параллельные информационные технологии: учеб. пособие. — М.: Интернет-университет информ. технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 503 с.
10. Монахов В.М. Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике: пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1978.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Г. Лебедевым.

Толок Алексей Вячеславович — д-р техн. наук, зав. лабораторией,  
✉ a.tolok@stankin.ru,

Толок Наталия Борисовна — вед. инженер,  
✉ nat\_tolok@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.