УДК 517.977;681.5

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СВЕРХУСТОЙЧИВЫХ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ТАКАГИ – СУГЕНО

Ю.В. Талагаев

Представлен подход, использующий условия сверхустойчивости для анализа и синтеза непрерывных нечетких систем Такаги — Сугено. Исследованы практически важные свойства класса сверхустойчивых нечетких систем (поведение решений, робастность). Показано, что синтез нечеткого регулятора сводится к решению набора задач линейного программирования. Получено решение задач робастного синтеза и оценки состояния нечеткой системы при наличии внешних ограниченных возмущений. Приведено решение задачи робастной сверхстабилизации гиперхаотической системы, представленной нечеткой моделью.

Ключевые слова: нечеткая система, сверхустойчивость, анализ, синтез, оценка состояния, робастность, ограниченные возмущения, гиперхаотическая система.

ВВЕДЕНИЕ

Нечеткие системы Такаги — Сугено (TS-системы) предоставляют универсальный способ аппроксимации нелинейных систем управления в виде выпуклой комбинации линейных подсистем, взвешенных функциями принадлежности [1]. Поскольку нелинейная динамика описывается совокупностью локальных линейных представлений, это позволяет задействовать для исследования нелинейной системы, представленной нечеткой моделью, методы теории линейных систем управления.

Развитым подходом, применяемым к широкому спектру задач анализа устойчивости и управления нечеткими TS-системами, служит аппарат линейных матричных неравенств (LMI) [1—4]. Подход основывается на поиске общей для всех линейных подсистем квадратичной функции Ляпунова и сводится к решению системы LMI. Несмотря на разработанность численных методов, применение техники LMI к анализу и управлению нечеткими системами может приводить к затруднениям. Они вызываются консерватизмом условий квадратичной устойчивости, выражаясь в том, что соответствующая достаточным условиям устойчивости система LMI может не иметь решения (общая квадратичная функция Ляпунова не существует). Особенно заметно это проявляется в задачах робастного анализа и синтеза неопределенных нечетких TS-систем, для которых характерен рост числа и громоздкость LMI.

Разработке способов ослабления консерватизма условий квадратичной устойчивости (или стабилизации) нечетких TS-систем посвящено большое число публикаций. Помимо исследований условий существования общей квадратичной функции Ляпунова [1, 5, 6], усилия были направлены на разработку альтернативных методов, построенных на условиях устойчивости, связанных с другими типами функций Ляпунова (см. работу [7], содержащую обширный обзор по данной проблематике). Анализ работ показывает, что формулируемые в виде LMI условия устойчивости не всегда позволяют обеспечить желаемые характеристики переходного процесса. Например, в экспериментальных результатах нередко можно видеть, что начальный этап переходного процесса сопровождает нежелательный на практике эффект всплеска, характеризующийся резким возрастанием нормы решения нечеткой системы. Для обеспечения требуемых свойств переходного процесса может применяться подход (см. работу [8] и ссылки в ней), основанный на размещении полюсов нечеткой системы в заданной области, описываемой LMI.

Однако он не позволяет избежать затруднений, вызываемых консерватизмом условий устойчивости. Отметим, что помимо подходов, использующих LMI, разработаны другие продуктивные подходы к анализу TS-систем, основанные, например, на применении методов абсолютной устойчивости [9, 10].

Возможный способ, позволяющий обойти затруднения, возникающие при исследовании управляемых нечетких TS-моделей, описывающих нелинейные процессы, заключается в использовании концепции сверхустойчивости [11, 12]. Сверхустойчивые линейные системы характеризуются кусочно-линейной функцией Ляпунова, условия существования которой формулируются в виде линейных неравенств с элементами матрицы системы. Так же, как и квадратичная устойчивость, сверхустойчивость является достаточным условием устойчивости, предоставляющим удобный инструмент для решения ряда трудных задач линейной теории управления.

Сверхустойчивость сохраняется при наличии нелинейных возмущений, что позволяет непосредственно использовать соответствующие ей условия для анализа и управления нелинейными системами со сложной динамикой [13—15]. Широту применения такого подхода сужают ограничения, которым должна подчиняться нелинейная часть уравнений системы. Переход к нечеткому моделированию позволяет снять это ограничение. Нелинейная система заменяется эквивалентной ей нечеткой TS-моделью, представляющей собой взвешенный набор линейных подсистем, к каждой из которых применимы условия сверхустойчивости. Идея применения условий сверхустойчивости к нечетким TS-системам была предложена в работе [16]. Однако в этой и последующей работе [17], где представлено решение сложной задачи синтеза робастного сверхстабилизирующего нечеткого регулятора в форме обратной связи по выходу, рассмотрен только частный случай функционирования нечеткой TS-системы (матрицы входов линейных подсистем идентичны).

Цель настоящей работы состоит в развитии и обобщении подхода, использующего концепцию сверхустойчивости для анализа и синтеза непрерывных нечетких TS-систем. Для этого рассматривается общий случай, когда нечеткая TS-система описывается набором линейных подсистем, имеющих различные матрицы входов и подверженных действию ограниченных внешних возмущений. Помимо демонстрации сохранения работоспособности подхода в задачах стабилизации и робастного синтеза, представлены результаты оценки инвариантного множества нечеткой TS-системы при действующих возмущениях. Для иллюстрации возможностей подхода, в дополнение к рассмотренным в работах [16, 17] трехмерным хаотическим системам приводится развернутый пример сверхстабилизации гиперхаотической системы, представленной нечеткой TS-моделью.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Сверхустойчивые системы

Условия сверхустойчивости формулируются в виде линейных ограничений на элементы матрицы системы. Эти ограничения говорят о наличии отрицательного диагонального доминирования.

Определение 1. *Матрица A называется сверхустойчивой, если*

$$A \in S = \{A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}: \sigma(A) > 0\},$$

где $\sigma(A) = \min\limits_i \left(-a_{ii} - \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|\right)$ *— степень сверхустойчивости A, $i, j = 1, ..., n$.* ♦

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ — состояние, $u(t) \in R^m$ — вход (или внешнее возмущение), $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$.

Определение 2. *Система* (1) *называется сверхустойчивой, если $A \in S$.* ♦

Сверхустойчивые системы (1) являются классом устойчивых систем, обладающих при $u(t) \equiv 0$ кусочно-линейной функцией Ляпунова $V(x) = \|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$. С практической стороны привлекательность сверхустойчивости обусловливается следующими свойствами [11]:

1) при $u(t) \equiv 0$ для решения сверхустойчивой системы (1) верна оценка $\|x(t)\|_\infty \leq \|x_0\|_\infty e^{-\sigma(A)t}$, $t \geq 0$, исключающая возникновение на начальном участке траектории эффекта всплеска;

2) если возмущение присутствует и ограничено ($\|u(t)\|_\infty \leq 1$), то решение сверхустойчивой системы (1) также ограничено и удовлетворяет условию $\|x(t)\|_\infty \leq \lambda + \eta e^{-\sigma(A)t}$, $t \geq 0$, где $\lambda = \|B\|_1/\sigma(A)$, $\eta = \max\{0, \|x(t)\|_\infty - \lambda\}$, $\|B\|_1 = \max\limits_i \left(\sum\limits_j |b_{ij}|\right)$.

Из свойства 2 следует, что при $\|x_0\|_\infty \leq \lambda$ для всех $t \geq 0$ будет $\|x(t)\|_\infty \leq \lambda$, а значит, $Q = \{x(t) \in R^n: \|x(t)\|_\infty \leq \lambda\}$ является инвариантным множеством сверхустойчивой системы.

1.2. Нечеткие системы Такаги — Сугено

Нечеткое моделирование служит продуктивным способом оценки и описания отношения «вход — выход» в нелинейных системах управления. Широкий класс систем

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) + d(x(t))w(t),$$

где $x(t) \subset \Lambda \in R^n$ — состояние системы, $\Lambda = \{x \in R^n$: $\|x(t)\|_2 \le \mu$, $\mu > 0\}$, $u(t) \in R^m$ — вход, $w(t) \in R^{m_1}$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее для всех $t \ge 0$ ограничению $\|w(t)\|_\infty \le 1$, $f(x(t))$, $g(x(t))$, $d(x(t))$ — нелинейные вектор-функции, с достаточно высокой точностью может быть аппроксимирован нечеткой TS-моделью (анализ аппроксимационных свойств дан в работе [1]), которая задается набором нечетких правил

$$\Pi_l\text{: ЕСЛИ } z_1(t) \text{ есть } M_{l1} \text{ и ... и } z_p(t) \text{ есть } M_{lp},$$

$$\text{ТО } \dot{x}(t) = A_l x(t) + B_l u(t) + D_l w(t), \quad l = 1, ..., q.$$

Здесь $z_1(t)$, ..., $z_p(t)$ — переменные посылок, M_{lk} — нечеткие множества, $k = 1, ..., p$, $A_l = (a_{ij}^l) \in R^{n\times n}$, $B_l = (b_{is}^l) \in R^{n\times m}$, $D_l \in R^{n\times m_1}$ — постоянные матрицы, соответствующие правилу l, q — число нечетких правил.

Переменные посылок $z_k(t)$, образующие вектор $z(t) = (z_1(t), ..., z_p(t))$, могут являться функциями состояния системы $x(t)$, входных переменных $(u(t), w(t))$ и/или времени. В дальнейшем предполагается, что $z_k(t)$ выражаются только через элементы $x_i(t)$ вектора состояния. Известно [1], что это допущение (выполняющееся при моделировании многих физических систем) упрощает процедуру нечеткого вывода и не ограничивает результаты исследования. Определяемый в ходе дефаззификации выход нечеткой TS-модели описывается общей нечеткой TS-системой

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{q} h_l(z(t))(A_l x(t) + B_l u(t) + D_l w(t)), \quad (2)$$

получаемой нечетким «смешиванием» линейных подсистем. Функции принадлежности $h_l(z(t))$ — нормированные веса для каждого нечеткого правила — определяются в виде

$$h_l(z(t)) = \omega_l(z(t)) / \sum_{l=1}^{q} \omega_l(z(t))$$

и удовлетворяют свойствам $h_l(z(t)) \ge 0$, $\sum_{l=1}^{q} h_l(z(t)) = 1$, где $\omega_l(z(t)) = \prod_{k=1}^{p} M_{lk}(z_k(t))$ — произведение всех различных $M_{lk}(z_k(t))$, соответствующих l-му нечеткому правилу, $M_{lk}(z_k(t))$ — степень принадлежности элемента $z_k(t)$ к множеству M_{lk}.

Переход к нечеткому описанию позволяет заменить нелинейную систему совокупностью простых линейных подсистем, связанных функциями принадлежности. Получаемая нечеткая TS-система описывает поведение исходной через локальные линейные представления. Это дает возможность развить на основе условий сверхустойчивости линейных систем аналитические методы исследования нелинейных динамических процессов. Отметим, что определение параметров нечеткой TS-системы предполагает, что известны уравнения нелинейной системы и границы ограниченной области, где эволюционирует ее состояние. Требование ограниченности состояния выполняется для многих встречающихся на практике динамических систем. В их круг входят хаотические системы, для которых ограниченность траекторий является одним из условий возникновения сложной динамики. Примеры построения нечетких TS-систем можно найти в работах [1—4].

2. АНАЛИЗ

В данном разделе всюду предполагается, что $u(t) \equiv 0$.

2.1. Сверхустойчивые нечеткие системы

Рассмотрим невозмущенную (в системе (2) $w(t) \equiv 0$) нечеткую систему

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{q} h_l(z(t)) A_l x(t). \quad (3)$$

Определим степень сверхустойчивости линейных подсистем в системе (3) как

$$\sigma(A_l) = \min_i \Big(-a_{ii}^l - \sum_{j\ne i} |a_{ij}^l|\Big).$$

Теорема 1. *Нечеткая TS-система* (3) *сверхустойчива, если* $\min_l \sigma(A_l) > 0$.

Доказательство. Условие $\min_l \sigma(A_l) > 0$ означает, что матрицы A_l, $l = 1, ..., q$, сверхустойчивы, и для состояния каждой сверхустойчивой подсистемы (3) выполнена оценка $\|x(t)\|_\infty \le \|x_0\|_\infty e^{-\sigma(A_l)t}$. При этом каждая подсистема обладает функцией Ляпунова $V(x(t)) = \max\limits_i |x_i(t)|$, удовлетворяющей оценке $V(x(t)) \le e^{-\sigma(A_l)t} V(x_0)$. Выбирая $\sigma_c = \max\limits_l \sigma(A_l)$, получим, что для решения нечеткой системы (3) будет верна оценка $\|x(t)\|_\infty \le \|x_0\|_\infty e^{-\sigma_c t}$. Это означает, что для всех подсистем (3) существует общая кусочно-линейная функция Ляпунова с оценкой $V(x(t)) \le e^{-\sigma_c t} V(x_0)$. Теорема доказана. ♦

Согласно теореме 1, сверхустойчивость нечеткой TS-системы характеризуется выполнением условий сверхустойчивости для каждой ее подсистемы, влекущим существование общей для всех подсистем кусочно-линейной функции Ляпунова. Выполнение условий сверхустойчивости позволяет выделить класс нечетких TS-систем, который обладает полезным свойством, не всегда доступным обычным устойчивым нечетким TS-системам, — монотонное экспоненциальное убывание ∞-нормы решения.

2.2. Робастная сверхустойчивость

Пусть нечеткая система (3) является параметрически неопределенной. Неопределенность выражается в том, что у каждой подсистемы (3) матрица A_l задана интервальным матричным семейством $A_l = A_{l0} + \gamma_l\Delta_l$, где $A_{l0} = (a^l_{ij0}) \in R^{n\times n}$ — матрица номинальной подсистемы, $\gamma_l \ge 0$ — размах неопределенности, $\Delta_l = (\delta^l_{ij}) \in R^{n\times n}$ — неопределенность, $|\delta^l_{ij}| \le \mu^l_{ij}$, $\mu^l_{ij} \ge 0$.

Теорема 2. *Пусть номинальные матрицы A_{l0}, $l = 1, ..., q$, сверхустойчивы. Тогда неопределенная нечеткая TS-система*

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{q} h_l(z(t))(A_{l0} + \gamma_l\Delta_l)x(t) \qquad (4)$$

робастно сверхустойчива для всех

$$\gamma_l < \gamma_{\min} = \min_l \min_i \frac{-a^l_{ii0} - \sum\limits_{j\ne i}\left|a^l_{ij0}\right|}{\sum\limits_j \mu^l_{ij}}.$$

Доказательство. Если матрицы A_{l0}, $l = 1, ..., q$, сверхустойчивы, то $\sigma(A_{l0}) = \min\limits_i\left(-a^l_{ii0} - \sum\limits_{j\ne i}\left|a^l_{ij0}\right|\right) > 0$, и сохранение сверхустойчивости для матричного семейства $A_l = A_{l0} + \gamma_l\Delta_l$ означает выполнение для каждого l условий

$$-(a^l_{ii0} + \gamma_l\delta^l_{ii}) - \sum_{j\ne i}|a^l_{ij0} + \gamma_l\delta^l_{ij}| > 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Они будут выполнены, если $-a^l_{ii0} - \gamma_l\mu^l_{ii} - \sum\limits_{j\ne i}(|a^l_{ij0}| + \gamma_l\mu^l_{ij}) > 0$, $i = 1, ..., n$. Отсюда следует локальная оценка $\gamma_l < \gamma_{l\min} = \min\limits_i\left(-a^l_{ii0} - \sum\limits_{j\ne i}\left|a^l_{ij0}\right| / \sum\limits_j \mu^l_{ij}\right)$, выполняющаяся для каждой подсистемы в системе (4). Тогда общая нечеткая TS-система (4) будет сохранять сверхустойчивость при любых $\gamma_l < \gamma_{\min}$, где $\gamma_{\min} = \min\limits_l \gamma_{l\min}$. Теорема доказана. ♦

Сверхустойчивая нечеткая TS-система всегда устойчива. Сформулированный в теореме 2 результат является решением сложной проблемы робастной устойчивости нечетких TS-систем с интервальной неопределенностью. Величина $\gamma_{\min}$ является для системы (4) нижней оценкой радиуса устойчивости. В случае, если $\mu^l_{ij} \equiv 1$ (размах неопределенности для всех подсистем одинаков), то $\gamma_{\min} = \min\limits_l(\sigma(A_{l0})/n)$.

2.3. Оценка инвариантного множества

Рассмотрим нечеткую TS-систему (3), подверженную действию внешнего ограниченного возмущения

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{q} h_l(z(t))(A_l x(t) + D_l w(t)). \qquad (5)$$

Свойства сверхустойчивых систем позволяют оценить для системы (5) инвариантное множество Q_F, для которого из $x_0 \in Q_f$ следует $x(t) \in Q_f$ при всех $t \ge 0$.

Теорема 3. *Пусть при $w(t) \equiv 0$ нечеткая TS-система (5) сверхустойчива. Тогда инвариантным множеством возмущенной системы (5) является куб*

$$Q_f = \{x(t)) \in R^n: \|x(t)\|_\infty \le \lambda_{\min}\},$$

где $\lambda_{\min} = \min\limits_l \dfrac{\|D_l\|_1}{\sigma(A_l)}$.

Доказательство. Согласно свойствам сверхустойчивых систем (см. свойство 2 в п. 1.1), для каждой сверхустойчивой подсистемы (5) при $\|x_0\|_\infty \le \lambda_l$ выполняется оценка $\|x(t)\|_\infty \le \lambda_l$, где $\lambda_l = \|D_l\|_1/\sigma(A_l)$. Решая задачу $\min\limits_l \lambda_l$, находим $\lambda_{\min}$, которое определяет общее для всех подсистем инвариантное множество Q_f. Теорема доказана. ♦

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 3 $D_1 = D_2 = ... = D_q = D$. Тогда $\lambda_{\min} = \|D\|_1/\sigma^*$, где $\sigma^* = \max\limits_l \sigma(A_l)$.*

3. СИНТЕЗ

Пусть для системы (2) нечеткий регулятор задан в форме линейной статической обратной связи по состоянию:

$$\Pi_l\text{: ЕСЛИ } z_1(t) \text{ есть } M_{l1} \text{ и ... и } z_p(t) \text{ есть } M_{lp},$$

$$\text{ТО } u(t) = K_l x(t), \quad l = 1, ..., q,$$

где $K_l = (k^l_{sj}) \in R^{m\times n}$ — матрицы входов подсистем в системе (2). Предполагается, что каждая подсистема локально управляема. Общий нечеткий регулятор имеет вид

$$u(t) = \sum_{l=1}^{q} h_l(z(t))K_l x(t). \qquad (6)$$

Далее показывается, что использование условий сверхустойчивости позволяет развить подход к синтезу нечетких регуляторов, в рамках которого может быть получено решение задачи стабилизации, робастного синтеза и оценки состояния стабилизированной нечеткой TS-системы при наличии ограниченных возмущений.

3.1. Задача сверхстабилизации

Начнем с рассмотрения ситуации, когда внешнее ограниченное возмущение в системе (2) отсутствует, т. е. $w(t) \equiv 0$. Подставляя регулятор (6) в систему (2), приходим к замкнутой системе

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{q}\sum_{l'=1}^{q} h_l(z(t))h_{l'}(z(t))(A_l + B_l K_{l'})x(t), \quad (7)$$

где индекс $l' = 1, ..., q$ вводится для учета вариантов комбинирования функций принадлежности системы (2) и регулятора (6).

Задача сверхстабилизации нечеткой системы (2) регулятором (6) состоит в нахождении набора сверхстабилизующих матриц $K_{l'}$, $l' = 1, ..., q$, обеспечивающих сверхустойчивость матриц $A_{cll'} = A_l + B_l K_{l'}$, $l, l' = 1, ..., q$, замкнутой системы (7), т. е. выполнение условия

$$\min_{l,\, l'} \sigma(A_l + B_l K_{l'}) > 0.$$

Теорема 4. *Нечеткий регулятор* (6)*, сверхстабилизирующий замкнутую систему* (7)*, существует, если для каждой ll'-й замкнутой подсистемы* (7) *имеет решение $K_{l'}$ система неравенств*

$$-\Big(a^l_{ii} + \sum_s b^l_{is}k^l_{si}\Big) - \sum_{j\neq i}|a^l_{ij} + \sum_s b^l_{is}\,k^l_{sj}| > 0,$$
$$i = 1, ..., n, \quad l' = l, \qquad (8.1)$$

$$-\Big(a^l_{ii} + \sum_s b^l_{is}k^{l'}_{si}\Big) - \sum_{j\neq i}|a^l_{ij} + \sum_s b^l_{is}\,k^{l'}_{sj}| > 0,$$
$$i = 1, ..., n, \quad l' \neq l. \qquad (8.2)$$

Доказательство. Представим произведение $B_l K_{l'}$ в виде $B_l K_{l'} = ((B_l K_{l'})_{ij}) = \Big(\sum_s b^l_{is}k^{l'}_{sj}\Big)$. Тогда общим условием сверхустойчивости матриц $A_l + B_l K_{l'}$ замкнутой системы (7) являются $i = 1, ..., n$ условий $-\Big(a^l_{ii} + \sum_s b^l_{is}k^{l'}_{si}\Big) - \sum_{j\neq i}|a^l_{ij} + \sum_s b^l_{is}\,k^{l'}_{sj}| > 0$. Этим условиям должна удовлетворять каждая матрица $K_{l'}$, $l' = 1, ..., q$. Разделяя условия, отвечающие случаям $l' = l$ и $l' \neq l$, приходим соответственно к условиям (8.1) и (8.2). Теорема доказана. ♦

Согласно теореме 4, выбор каждой сверхстабилизирующей матрицы $K_{l'}$ стеснен одним ограничением (8.1) и $q - 1$ ограничениями (8.2). Для данного l' сверхстабилизирующая матрица $K_{l'}$ является общим решением (8.1) и (8.2).

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы* 4 $B_1 = B_2 = ... = B_q = B$. *Тогда условием существования сверхстабилизирующего нечеткого регулятора* (6) *является только совместность условий* (8.1).

Замечание. Теорема 4 дает общие условия существования сверхстабилизирующего нечеткого регулятора. Условия сверхустойчивости являются жесткими, и не для каждой линейной системы существует сверхстабилизирующая обратная связь. Для нечетких TS-систем эта проблема усиливается особенностью их описания. Нечеткий регулятор (6) должен обеспечивать сверхустойчивость всех ее линейных подсистем. В меньшей степени, но по аналогичной причине, неизбежно возникает консерватизм применения к нечетким TS-системам условий квадратичной устойчивости, усугубляемый сложностью LMI. Также может показаться, что сверхстабилизация нечеткой TS-системы схожа с задачей одновременной стабилизации некоторого числа линейных систем. Однако в этой задаче ищется один регулятор, одновременно стабилизирующий все данные системы, тогда как для нечеткой системы ищется набор регуляторов, сверхстабилизирующий ее подсистемы.

Особенности существования нечеткого регулятора в задаче сверхстабилизации нечетких TS-систем проиллюстрируем примером.

Пример. Рассмотрим нечеткую TS-систему (2) при $w(t) \equiv 0$, заданную двумя линейными подсистемами с некоторыми функциями принадлежности и матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пары A_1, B_1 и A_2, B_2 выбраны таким образом, чтобы при $a = b = 1$ для A_1 и A_2 выполнялись неравенства $a_{11}^l - a_{21}^l + a_{22}^l - a_{12}^l < 0$, $l = 1, 2$, обеспечивающие (см. пример 1 в работе [12]) существование сверхстабилизирующих матриц $K_1 = (k_1^1 \ k_2^1)$ и $K_2 = (k_1^2 \ k_2^2)$. С учетом условий сверхустойчивости $-(a_{11}^l + k_1^l) > |a_{12}^l + k_2^l|$, $-(a_{22}^l + k_2^l) > |a_{21}^l + k_1^l|$, $l = 1, 2$, матриц $A_l + B_lK_l$ замкнутых подсистем на рис. 1 построена соответствующая выбранной ситуации конфигурация областей существования матриц K_1 и K_2. Штриховка вертикальными сплошными линиями выделяет для матрицы K_1 на плоскости (k_1^l, k_2^l) область Ω_{K_1}, где $A_1 + B_1K_1 \in S$, горизонтальными линиями — область Ω_{K_2} для матрицы K_2, где $A_2 + B_2K_2 \in S$.

В случае, когда $B_1 \neq B_2$, сверхстабилизируемость замкнутой системы означает, что существуют матрицы $K_1 \in \Omega_{K_1}$ и $K_2 \in \Omega_{K_2}$, которые соответственно обеспечивают сверхустойчивость матриц $A_1 + B_1K_1$, $A_2 + B_2K_1$ и $A_2 + B_2K_2$, $A_1 + B_1K_2$. На рис. 1 этому требованию соответствует область пересечения Ω_{K_1} и Ω_{K_2}. Наличие этой области определяет успех решения задачи сверхстабилизации. Фиксируя $a = 1$, можно проверить, что для данной системы область $\Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2}$ существует при $0{,}2 < b < 2$.

Случай $B_1 = B_2$ более прост. Для сверхстабилизации достаточно, чтобы для каждой подсистемы существовала только собственная сверхстабилизирующая матрица. Фиксируя $b = 1$ и учитывая неравенство $a_{11}^l - a_{21}^l + a_{22}^l - a < 0$, получаем, что для второй подсистемы сверхстабилизирующая матрица K_2 существует при $a > -7$.

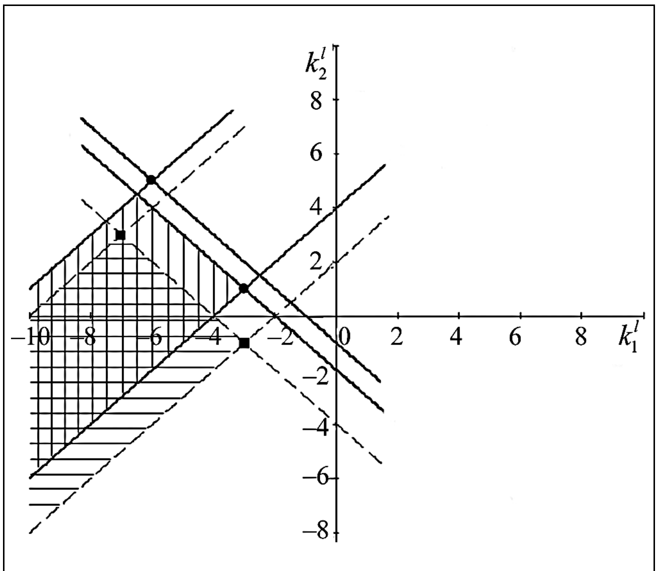

Рис. 1. Область существования нечеткого сверхстабилизирующего регулятора

В заключение примера заметим, что наличие области $\Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2}$ позволяет ставить задачу одновременной стабилизации, решением которой является матрица $K_1 = K_2 = K$.

Существование каждой сверхстабилизирующей матрицы $K_{l'}$ может проверяться сведением к задаче линейного программирования

$$\max \sigma_{l'}, \tag{9}$$

$$-\Big(a_{ii}^l + \sum_s b_{is}^l k_{si}^l\Big) - \sum_{j \neq i} p_{ij}^l \geq \sigma_l > 0, \quad i = 1, ..., n, \quad l' = l, \tag{9.1}$$

$$-\Big(a_{ii}^l + \sum_s b_{is}^l k_{si}^{l'}\Big) - \sum_{j \neq i} p_{ij}^{l'} \geq \sigma_{l'} > 0, \quad i = 1, ..., n, \quad l' \neq l, \tag{9.2}$$

$$-p_{ij}^l \leq a_{ij}^l + \sum_s b_{is}^l k_{sj}^l \leq p_{ij}^l, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j, \quad l' = l, \tag{9.3}$$

$$-p_{ij}^{l'} \leq a_{ij}^l + \sum_s b_{is}^l k_{sj}^{l'} \leq p_{ij}^{l'}, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j, \quad l' \neq l. \tag{9.4}$$

Переменные в задаче (9) матрицы $K_{l'}$, $P_{l'} = (p_{ij}^{l'})$ и скаляр $\sigma_{l'}$. Ограничения (9.1) и (9.3) следуют из условия (8.1). Они представляют собой условия сверхустойчивости матриц $A_l + B_lK_l$, $l' = l$, которые отдельно записаны для ее диагональных элементов (ограничение (9.1)) и всех остальных (ограничение (9.3)). Аналогично для матриц $A_l + B_lK_{l'}$, $l' \neq l$, из условия (8.2) вытекают условия (9.2) и (9.4). Для нечеткой системы (7) возникает q задач (9), дающих набор сверхстабилизирующих матриц K_1, ..., K_q и чисел σ_1, ..., σ_q. Если все $\sigma_{l'} > 0$, то сверхстабилизация возможна. Если среди найденных σ_1, ..., σ_q хотя бы одно число $\sigma_{l'} \leq 0$, сверхстабилизирующий регулятор не существует.

Идентичность матриц B_l также уменьшает число ограничений в задаче (9). Для проверки существования сверхстабилизирующего нечеткого регулятора учитываются только ограничения (9.1) и (9.3). Достоинство подхода заключается в возможности обобщения на случай, когда нечеткий регулятор ищется в форме обратной связи по выходу. Если $y(t) = Cx(t)$ — нечеткий выход системы (2), то в условиях (8.1), (8.2) и (9.1)—(9.4) вместо $\sum_s b^l_{is} k^{l'}_{sj}$ следует рассматривать $(B_l K_{l'} C)_{ij} = b^l_i K_{l'} c_j$, где b^l_i — i-я строка матрицы B_l, c_j — j-й столбец матрицы C.

Таким образом, проблема синтеза сверхстабилизирующего нечеткого регулятора сводится к решению q задач (9), решаемых стандартными средствами. Для сравнения вычислительной эффективности подхода отметим, что квадратичная стабилизация нечеткой TS-системы статической обратной связью по выходу приводит к $N = (q^2 + q)/2 + 1$ условиям в форме LMI [18]. Это означает, что рост q вызывает пропорциональный рост числа задач (9), тогда как число LMI растет нелинейно. Поэтому, если сверхустойчивость достижима, сверхстабилизирующий нечеткий регулятор просто находится, и замкнутая нечеткая система приобретает востребованные на практике свойства.

3.2. Робастный синтез

Рассмотрим неопределенную нечеткую TS-систему

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{q} h_l(z(t))((A_{l0} + \gamma_l \Delta_l)x(t) + B_l u(t)). \quad (10)$$

Задача синтеза робастного сверхстабилизирующего нечеткого регулятора состоит в нахождении общего для всех подсистем (10) размаха неопределенности $\gamma^K_{\min}$, при котором нечеткий регулятор (6) при всех $\gamma_l < \gamma^K_{\min}$ будет сверхстабилизировать замкнутую систему

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{q} \sum_{l'=1}^{q} h_l(z(t)) h_{l'}(z(t)) A_{cll'} x(t), \quad (11)$$

где $A_{cll'} = A^0_{cll'} + \gamma \Delta_l$ — матрица замкнутой неопределенной системы, $A^0_{cll'} = A_{l0} + B_l K_{l'}$ — матрица номинальной замкнутой подсистемы.

Теорема 5. *Пусть номинальная нечеткая TS-система сверхстабилизируема обратной связью* (6) *и сверхустойчивость* $A^0_{cll'} = A_{l0} + B_l K_{l'}$ *обеспечивают матрицы* $K_{l'}$, $l' = 1, ..., q$. *Тогда неопределенная нечеткая TS-система* (10) *робастно сверхстабилизируема регулятором* (6) *для любого* $\gamma_l < \gamma^K_{\min}$, *где*

$$\gamma^K_{\min} = \min_{l,l'} \min_i \frac{-(a^l_{ii0} + b^l_{is} k^{l'}_{si}) - \sum_{j \neq i} \left| a^l_{ij0} + b^l_{is} k^{l'}_{sj} \right|}{\sum_j \mu^l_{ij}}.$$

Доказательство. Обоснование теоремы состоит в применении теоремы 2 к замкнутой системе (11), где $A_{cll'} = A^0_{cll'} + \gamma_l \Delta_l$, $l, l' = 1, ..., q$. Теорема доказана.

3.3. Оценка состояния

Рассмотрим нечеткую TS-систему (2) в присутствии внешнего ограниченного возмущения $w(t)$. Если система (2) сверхстабилизируема нечетким регулятором (6), то результат теоремы 3 можно применить для оценки инвариантного множества возмущений замкнутой системы

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{q} \sum_{l'=1}^{q} h_l(z(t)) h_{l'}(z(t)) \times \\ \times ((A_l + B_l K_{l'})x(t) + D_l w(t)). \quad (12)$$

Теорема 6. *Рассмотрим нечеткую TS-систему* (2). *Пусть нечеткий регулятор* (6) *сверхстабилизирует замкнутую систему* (12) *при* $w(t) \equiv 0$, *т. е.* $\min_{l,l'} \sigma(A_l + B_l K_{l'}) > 0$. *Тогда для системы* (12) *при любых начальных условиях* $\|x_0\|_\infty \le \lambda^K_{\min}$ *и всех допустимых* $w(t)$ *можно гарантировать выполнение условия* $\|x(t)\|_\infty \le \lambda^K_{\min}$, *где*

$$\lambda^K_{\min} = \min_{l,l'} \frac{\|D_l\|_1}{\sigma(A_l + B_l K_{l'})}.$$

Доказательство. Обоснование теоремы строится на применении теоремы 3 к системе (12). Теорема доказана. ♦

Полученные выше оценки для $\lambda_{\min}$ (теорема 3) и $\lambda^K_{\min}$ (теорема 6) являются верхними границами для критерия качества $J = \max_{\|w\|_\infty \le 1} \max_t \|x(t)\|_\infty$. Возможное развитие результатов теоремы 6 — нахождение такого закона управления (6), который сверхстабилизирует замкнутую нечеткую TS-систему и минимизирует критерий качества J. Такой сверхстабилизирующий нечеткий регулятор будет наилучшим образом подавлять влияние ограниченных возмущений.

4. СВЕРХСТАБИЛИЗАЦИЯ ГИПЕРХАОТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ НЕЧЕТКОЙ TS-МОДЕЛЬЮ

Одна из областей применения представленных выше результатов — сверхстабилизация гиперхаотических систем. Этот класс нелинейных динамических объектов [19], имеющих широкий спектр приложений (передача и защита информации, синхронизация и др.), достаточно хорошо изучен с позиций конструирования и практической реализации. Характеризуясь высокой размерностью фазового пространства ($n \geq 4$), гиперхаотические системы способны демонстрировать как хаотическую динамику (положителен один ляпуновский показатель, типично для хаотических систем с $n = 3$), так и более сложное динамическое поведение — режим гиперхаоса (положительны два и более ляпуновских показателя).

Развитие методов управления гиперхаотическими системами представляет собой актуальную область исследований (см. обзор литературы в работе [20]). Один из способов пополнения ее новыми результатами заключается в использовании возможностей, которые предоставляет переход к нечеткому описанию в форме (2). Однако такой подход приводит к ряду затруднений:

— громоздкость и консервативность условий устойчивости в форме LMI при наличии параметрической неопределенности;

— трудность обеспечения заданных характеристик переходного процесса при выборе закона управления для достижения цели — стабилизации неустойчивого состояния равновесия (подавление хаоса), что является следствием присущей гиперхаотическим системам сильной неустойчивости;

— сложность оценки инвариантного множества системы при наличии внешних ограниченных возмущений (эта проблема лишь недавно получила решение в формате LMI [7]) и др.

Покажем, какие возможности в решении указанных проблем открывает синтез сверхстабилизирующего нечеткого регулятора. В качестве представителя класса гиперхаотических систем рассмотрим систему Лоренца — Стенфло (Lorenz — Stenflo):

$$\dot{x}_1(t) = a(x_2(t) - x_1(t)) + bx_4(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = cx_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - dx_3(t),$$

$$\dot{x}_4(t) = -x_1(t) + ax_4(t), \qquad (13)$$

которая является обобщением на случай большей размерности фазового пространства хорошо известной системы Лоренца и обладает основными свойствами рассматриваемого типа систем. В целях сравнения укажем работу [21], где построена соответствующая системе (13) нечеткая TS-модель и с помощью аппарата LMI найден нечеткий регулятор вида (6), стабилизирующий систему при наличии параметрической неопределенности так, что на начальном этапе переходного процесса наблюдается нежелательный эффект всплеска.

Используя ограниченность траекторий системы (13), допустим, что $z_1(t) = x_1(t) \in [-L, L]$, $L > 0$. Тогда система (13) может быть представлена нечеткой TS-моделью [22]:

$$\Pi_l\text{: ЕСЛИ } x_1(t) \text{ есть } M_l, \text{ ТО } \dot{x}(t) = A_{l0}x(t),\ l = 1, 2,$$

где

$$A_{10} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & b \\ c & -1 & -L & 0 \\ 0 & L & -d & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad A_{20} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & b \\ c & -1 & L & 0 \\ 0 & -L & -d & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

$$M_1(x_1(t)) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_1(t)}{L}\right),$$

$$M_2(x_1(t)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_1(t)}{L}\right), \quad L = 10.$$

Общая нечеткая TS-система имеет вид

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{2} h_l(x_1(t))A_{l0}x(t), \qquad (14)$$

где

$$h_1(x_1(t)) = \frac{M_1(x_1(t))}{M_1(x_1(t)) + M_2(x_1(t))},$$

$$h_2(x_1(t)) = \frac{M_2(x_1(t))}{M_1(x_1(t)) + M_2(x_1(t))}.$$

Результаты моделирования нечеткой системы (14) при значениях параметров $a = 1$, $b = 1{,}5$, $c = 26$, $d = 0{,}7$, соответствующих хаотической динамике системы (13), показаны на рис. 2.

Добавим в сконструированную нечеткую систему (14) матричную неопределенность, управление и ограниченное возмущение. Получим

$$\Pi_l\text{: ЕСЛИ } x_1(t) \text{ есть } M_l,$$

$$\text{ТО } \dot{x}(t) = (A_{l0} + \gamma_l\Delta_l)x(t) + Bu(t) + D_lw(t),\quad l = 1, 2,$$

и общее представление в пространстве состояний

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{2} h_l(x_1(t))((A_{l0} + \gamma_l\Delta_l)x(t) + Bu(t) + D_lw(t)). \qquad (15)$$

Нечеткий регулятор (6), задаваемый в форме

$$\Pi_l\text{: ЕСЛИ } x_1(t) \text{ есть } M_l, \text{ ТО } u(t) = K_ly(t),\ l = 1, 2,$$

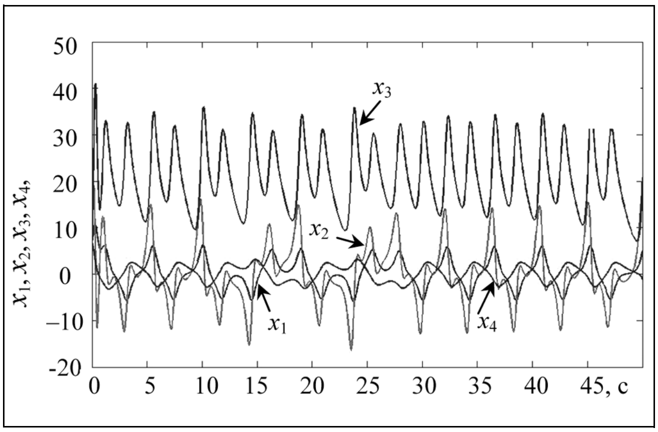

Рис. 2. Хаотическая динамика нечеткой TS-системы (14)

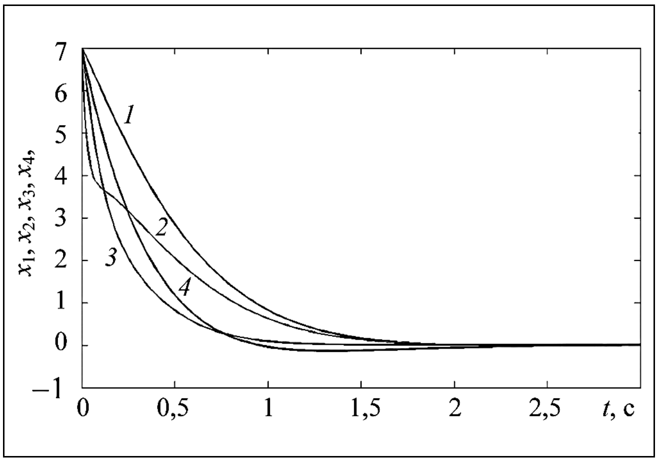

Рис. 3. Переходный процесс сверхстабилизированной нечеткой TS-системы:
1 — x_1, *2* — x_2, *3* — x_3, *4* — x_4

принимает вид

$$u(t) = \sum_{l=1}^{2} h_l(x_1(t))K_l x(t). \qquad (16)$$

После объединения выражений (15) и (16) замкнутая нечеткая система запишется в виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{2}\sum_{l'=1}^{2} h_l(x_1(t))h_{l'}(x_1(t)) \times$$
$$\times ((A^0_{cll'} + \gamma_l \Delta_l)x(t) + D_l w(t)), \qquad (17)$$

где $A^0_{cll'} = A_{l0} + B_l K_{l'}$.

Прежде всего, проверим существование нечеткого регулятора, сверхстабилизирующего номинальную замкнутую нечеткую систему. Положим в уравнении (17) $\gamma_l \equiv 0$ и $w(t) \equiv 0$. Тогда, если $B_1 = B_2 = I$, то нечеткий регулятор (16) с $K_l = \mathrm{diag}(k^l_{11}, k^l_{22}, k^l_{33}, k^l_{44})$, $l = 1, 2$, будет сверхстабилизирующим. Более того, анализируя условия сверхустойчивости для матриц $A^0_{cll'}$

$$\sigma^l_1 = -(-a + k^l_{11}) - |a| - |b| > 0,$$

$$\sigma^l_2 = -(-1 + k^l_{22}) - |c| - |\mp L| > 0,$$

$$\sigma^l_3 = -(-d + k^l_{33}) - |\pm L| > 0,$$

$$\sigma^l_4 = -(-a + k^l_{44}) - |-1| > 0,$$

становится понятно, что матрицы K_1 и K_2 для обеих номинальных подсистем (17) одинаковы, и их коэффициенты могут быть найдены как

$$k_{11} = -b - \sigma_1, \quad k_{22} = 1 - c - \sigma_2,$$

$$k_{33} = d - L - \sigma_3, \quad k_{44} = a - 1 - \sigma_4,$$

где значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 > 0$ выбираются так, чтобы для системы обеспечивалась желаемая степень сверхустойчивости.

На рис. 3 показаны результаты численного моделирования замкнутой системы при большом возмущении начального условия (в эксперименте выбрано $x_0 = (7, 7, 7, 7)$, $\sigma_1 = ... = \sigma_4 = 1$). Видно, что полученный нечеткий регулятор (16) стабилизирует систему, обеспечивая монотонное убывание ∞-нормы решения.

Допустим, что системные параметры в матрицах A_{10} и A_{20} имеют неопределенность $a^l_{ij} = a^l_{ij0} + \gamma\delta^l_{ij}$, $|\delta^l_{ij}| \le \mu^l_{ij}$, где a_{ij0} — номинальные значения параметров, для которых выше был построен сверхстабилизирующий регулятор. Пусть $\mu^l_{ij} \equiv 1$. Тогда, применяя теорему 5, получаем, что при $w(t) \equiv 0$ сверхустойчивость замкнутой нечеткой TS-системы (17) будет сохраняться для всех $\gamma_l < \sigma(A^0_{cll'})/n$. Поскольку $\sigma(A^0_{cll'}) = 1$, имеем $\gamma_l < 0{,}25$.

Положим $\gamma_l \equiv 0$ и допустим, что система (15) подвержена только действию ограниченного возмущения $w(t)$. Применяя теорему 6, получаем оценку состояния сверхстабилизированной нечеткой TS-системы. Для всех начальных условий, удовлетворяющих условию $\|x_0\|_\infty \le \lambda^K_{\min}$, будет выполнено $\|x(t)\|_\infty \le \lambda^K_{\min}$, где $\lambda^K_{\min} = \min_l \|D_l\|_1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены возможности подхода к анализу и синтезу непрерывных нечетких TS-систем, основанного на использовании условий сверхустойчивости. Класс сверхустойчивых нечетких TS-систем характеризуется наличием общей кусочно-линейной функции Ляпунова и обладает востребованными практическими свойствами. Норма решения сверхустойчивой нечеткой TS-системы монотонно экспоненциально убывает, если возмущения отсутствуют, и ограничена при наличии ограниченных внешних возмущений. Если для нечеткой TS-системы сверхустойчивость достижима, то оказывается возможным развить достаточно продуктивный подход к синтезу сверхустойчивых нечетких TS-систем. Вместо решения системы линейных матричных неравенств синтез сверхстабизилирующего нечеткого регулятора сводится к решению стандартных задач линейного программирования. Вычислительная эффективность такого подхода растет с ростом числа нечетких правил, задающих нечеткую TS-систему. При этом простое решение получают задача робастного синтеза и оценка инвариантного множества нечеткой системы, подверженной действию внешних ограниченных возмущений. Продуктивность подхода продемонстрирована на примере сверхстабилизации гиперхаотической системы, представленной нечеткой TS-моделью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tanaka K., Wang H.O.* Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. — N.-Y.: Wiley, 2001. — 305 p.
2. *Feng G.* Analysis and synthesis of fuzzy control systems: a model-based approach. — N.-Y.: CRC Press, 2010. — 299 p.
3. *Lam H.-K., Leung, F.H.F.* Stability analysis of fuzzy-model-based control systems: linear-matrix-inequality approach. — Berlin: Springer, 2011. — 226 p.
4. *Дружинина О.В., Масина О.Н.* Методы анализа устойчивости динамических систем интеллектного управления. — М.: URSS, 2016. — 242 с.
5. *Kim E., Lee H.* New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. — 2000. — Vol. 8, N 5. — P. 523—534.
6. *Fang C.H., Liu Y.S., Kau S.W.,* et al. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems // Ibid. — 2006. — Vol. 14, N 3. — P. 386—397.
7. *Lee D.H., Joo Y.H., Tak M.H.* Local H_∞ control and invariant set analysis for continuous-time T-S fuzzy systems with magnitude- and energy-bounded disturbances // Proc. of the 2014 IEEE Intern. Conf. on Fuzzy Systems. — Beijing, China, 2014. — P. 1990—1997.
8. *Cherifi A., Guelton K., Arcese L.* LMI conditions for non-quadratic stabilization of T-S models with pole placement assignation // Proc. of the 3rd Intern. Conf. on Control, Engineering & Information Technology. — Tlemcen, Algeria, 2015. — P. 1—6.
9. *Круглов В.В., Усков А.А.* Достаточное условие устойчивости замкнутых систем управления с нечеткими логическими регуляторами // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 4. — С. 47—51.
10. *Усков А.А.* Достаточное условие устойчивости систем управления с одномерными блоками нечеткого вывода // Проблемы управления. — 2014. — № 4. — С. 14—19.
11. *Поляк Б.Т, Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 8. — С. 37—53.
12. *Поляк Б.Т, Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез // Там же. — № 11. — С. 56—75.
13. *Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Сверхустойчивость и оптимальное многопараметрическое подавление хаотической динамики класса автономных систем с квадратичными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 1. — С. 148—152.
14. *Talagaev Y.V.* Robust analysis and superstabilization of chaotic systems // Proc. 2014 IEEE Conf. on Control Applications. — Antibes, France, 2014. — P. 1431—1436.
15. *Талагаев Ю.В.* Анализ условий сверхустойчивости и оптимальная коррекция параметров класса хаотических систем // Системы управления и информационные технологии. — 2014. — Т. 55. — № 1.1. — С. 198—204.
16. *Talagaev Y.V.* An Approach to analysis and stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy control systems via superstability conditions // IFAC Proc. Volumes (IFAC-PapersOnLine). — 2015. — Vol. 48, N 11. — P. 426—433.
17. *Talagaev Y.V.* Robust analysis and output feedback controller design of Takagi-Sugeno fuzzy systems via superstability conditions // Ibid. — N 14. — P. 290—295.
18. *Krokavec D., Filasová A.* Stabilizing fuzzy output control for a class of nonlinear systems // Advances in Fuzzy Systems. — 2013. — Vol. 2013, ID 294971. — 9 p.
19. *Sprott J.C.* Elegant chaos. Algebraically simple chaotic flows. — Singapore: World Scientific, 2010. — 304 p.
20. *Талагаев Ю.В.* Робастная стабилизация класса хаотических систем на основе условий сверхустойчивости // Вестник Тамбовского университета. Сер.: Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1478—1486.
21. *Wang B., Xue J.Y., Zhu D.L., Wu P.T.* Control of Lorenz-Stenflo chaotic system via Takagi—Sugeno fuzzy model based on linear matrix inequality // International Journal of Control and Automation. — 2014. — Vol. 7, N 9. — P. 139—154.
22. *Yang C.-H., Wu C.-L., Chen Y.-J., Shiao S.-H.* Reduced fuzzy controllers for Lorenz—Stenflo system control and synchronization // International Journal of Fuzzy Systems. — 2015. — Vol. 17, N 2. — P. 158—169.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Талагаев Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент,
Балашовский институт (филиал)
Саратовского национального исследовательского
государственного университета им. Н.Г. Чернышевского,
✉ shangyi@yandex.ru.