



УПРАВЛЕНИЕ ЭНЕРГИЕЙ ТРЁХ ИДЕНТИЧНЫХ МАЯТНИКОВ ПРИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Б. Сулиман*, А. Л. Фрадков**

***Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия,

*Университет Алеппо, г. Алеппо, Сирия

**Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

*✉ st102994@student.spbu.ru, **✉ fradkov@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача управления энергией трёх идентичных независимых маятников, находящихся под действием одного скалярного управляющего воздействия. В качестве цели ставится асимптотическое достижение энергией первого маятника заданного уровня при одновременном соблюдении ограничений на энергии двух других маятников. Для описания требуемого режима используется функция Ляпунова штрафного типа, содержащая квадрат ошибки достижения целевой энергии и барьерные слагаемые, препятствующие нарушению ограничений. На основе метода скоростного градиента получен явный закон управления, пригодный для численной реализации. Дополнительно приведены пояснения к базовым уравнениям модели и обсуждены механизмы селективного перераспределения энергии. Численные эксперименты подтверждают достижение целевого режима и выполнение заданных энергетических ограничений.

Ключевые слова: энергетическое управление, идентичные маятники, метод скоростного градиента, штрафные функции, гамильтоновы системы, численное моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи управления энергией колебательных механических систем с ограничениями возникают в приложениях – например, в системах сбора и накопления энергии на основе маятниковых массивов [1], системах виброзащиты космических аппаратов [2] и носимых устройствах для сбора и накопления энергии от движений человека [3], – где требуется селективно возбуждать энергию некоторой подсистемы (один режим движения), не выводя другие подсистемы за пределы допустимых уровней энергии. Для неполноприводных (*underactuated*) систем такого типа эффективным инструментом управления является метод скоростного градиента и его варианты [4–6], дополненные штрафными, или барьерными функциями [7–10].

В настоящей работе рассматривается обобщение ранее исследованной задачи для двух маятников на случай трёх идентичных механических подсистем, на которые действует одно и то же скалярное управление. Такая постановка сохраняет

структурную простоту модели, однако существенно усложняет задачу целенаправленного разделения движений, поскольку управлять необходимо одновременно тремя степенями свободы при единственном управляющем канале.

В отличие от классической задачи стабилизации одной координаты, здесь требуется организовать направленное перераспределение энергии: первый маятник должен получать энергию до требуемого уровня, тогда как энергия второго и третьего маятников должна оставаться в пределах заданных ограничений. Симметрия модели делает задачу особенно чувствительной к выбору начальных условий, поскольку при совпадающих начальных состояниях подсистем общее управление не может сформировать селективный режим.

Метод скоростного градиента [4, 5] удобен для решения таких задач, поскольку позволяет строить управление непосредственно по производной специально выбранной целевой функции. В рассматриваемой работе в эту функцию включены барьерные члены, не допускающие приближения энергий

второго и третьего маятников к предельным значениям. Подобная конструкция является естественным развитием результатов для системы из двух маятников [8, 9] и даёт компактный аналитический закон управления.

Хорошо известная техника управления, объединяющая требования устойчивости и безопасной работы, основана на использовании барьерных функций Ляпунова (БФЛ, англ. *barrier Lyapunov functions*, BLF). Понятие барьерных функций восходит к 1940-м гг. (см. исследования инвариантности множеств, результаты М. Нагумо [11]), а само название может быть связано с барьерными функциями, используемыми в оптимизации – компонентами, добавляемыми к целевой функции, чтобы предотвратить попадание переменных решения в запрещённую область. Современная концепция БФЛ зародилась в первом десятилетии XXI в., когда были объединены понятия управляющей функции Ляпунова (англ. *control Lyapunov function*, CLF) и барьерной функции [12, 13]. Функция БФЛ – это CLF, которая стремится к бесконечности, когда её аргументы приближаются к точкам некоторого «запрещённого» множества. Обеспечение ограниченности барьерной функции Ляпунова в замкнутом контуре гарантирует, что решение не попадет в это множество. А поскольку БФЛ остаётся функцией Ляпунова (положительно определённой с отрицательно определённой производной), она также используется для доказательства устойчивости предельного множества замкнутой системы. В настоящее время БФЛ стали распространённым инструментом для синтеза регуляторов для многочисленных приложений. Только одна популярная база данных сообщает о более чем 1 500 ссылках, использующих термин “BLF” за последние три года. Среди них широко представлены варианты управления движением.

Большинство ранних работ по БФЛ использовали логарифмическую БФЛ для синтеза управления [13]. Со временем были введены другие типы БФЛ, такие как квадрат тангенса [14], тангенс квадрата переменной [15] или обратный гиперболический тангенс [16]. В настоящее время используется несколько типов БФЛ. Хотя некоторые сравнения доступны [15], проблема систематического выбора конкретной БФЛ для конкретного приложения остаётся актуальной. Недавний обзор литературы показывает, что подход с использованием БФЛ продолжает оставаться популярным. В последних работах [17–20] также рассматриваются различные аспекты применения БФЛ.

Важно подчеркнуть, что БФЛ и метод скоростного градиента (СГ) органично дополняют друг друга в данной работе. Метод СГ позволяет стро-

ить закон управления непосредственно по производной целевой функции, что даёт явный аналитический вид регулятора. В свою очередь, БФЛ вводится в состав целевой функции в виде штрафных слагаемых (барьерных членов), которые стремятся к бесконечности при приближении энергий второго и третьего маятников к заданным ограничениям. Таким образом, метод СГ обеспечивает формирование закона управления, а БФЛ – гарантированное выполнение энергетических ограничений на протяжении всего переходного процесса. Такое сочетание позволяет получить единый адаптивный алгоритм, который одновременно решает задачу стабилизации энергии первого маятника и соблюдения ограничений на энергии двух других маятников.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Рассматривается система из трёх идентичных независимых маятников, управляемых одним общим входным воздействием $u(t)$. Требуется обеспечить:

- асимптотическое приближение энергии первого маятника к заданному уровню E_1 ;
- сохранение энергий второго и третьего маятников ниже предельных значений E_2 и E_3 соответственно.

Такая постановка описывает задачу селективного возбуждения заданного режима при наличии жёстких ограничений на остальные режимы.

Для k -го маятника полная механическая энергия определяется выражением

$$H_0^k(p_k, q_k) = \frac{p_k^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos q_k), \quad (1)$$

$k = 1, 2, 3.$

Здесь H_0^k – собственная энергия k -го маятника; q_k – угол отклонения от нижнего положения равновесия; p_k – обобщённый импульс; m – масса груза; l – длина подвеса; g – ускорение свободного падения.

Полная энергия трёхмаятниковой системы равна сумме энергий отдельных подсистем:

$$H_0(p, q) = \sum_{k=1}^3 H_0^k(p_k, q_k). \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) вектор $q = (q_1, q_2, q_3)$ содержит угловые координаты, а вектор $p = (p_1, p_2, p_3)$ – соответствующие импульсы. Аддитивность H_0 отражает отсутствие прямых механических связей между маятниками.



С учётом общего скалярного управляющего воздействия $u(t)$ управляемый гамильтониан принимает вид

$$H(p, q, u) = H_0(p, q) + H_1(q)u, \quad (3)$$

$$H_1(q) = -l \sum_{k=1}^3 \sin q_k.$$

Здесь $u(t)$ – управляющее воздействие, одинаково действующее на все три подсистемы; функция $H_1(q)$ характеризует геометрическую чувствительность системы к управляющему входу. Знак перед $H_1(q)u$ определяется выбранной записью потенциально-силового взаимодействия.

Уравнения движения следуют из гамильтонова описания (3) и записываются как

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{p_k}{ml^2}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -mgl \sin q_k + ul \cos q_k, \quad k=1, 2, 3. \quad (4)$$

Первое соотношение в выражении (4) задаёт кинематическую связь между углом и импульсом, а второе описывает баланс между гравитационным моментом $mgl \sin q_k$ и моментом управления $ul \cos q_k$. Множитель $\cos q_k$ показывает, что эффективность управления зависит от текущего положения маятника.

Дифференцируя собственную энергию H_0^k вдоль решений системы (4), получаем

$$\frac{dH_0^k}{dt} = u \frac{p_k \cos q_k}{ml}, \quad k=1, 2, 3. \quad (5)$$

Формула (5) имеет важный физический смысл: изменение энергии каждого маятника определяется знаком произведения $up_k \cos q_k$. Следовательно, один и тот же управляющий сигнал может одновременно подводить энергию к одной подсистеме и отводить её от другой. Именно этот механизм лежит в основе селективного энергетического управления.

2. СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

Требуемый режим задаётся условиями

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_0^1(p_1, q_1) = E_1, \quad H_0^2(p_2, q_2) < E_2, \quad (6)$$

$$H_0^3(p_3, q_3) < E_3, \quad t \geq 0.$$

Здесь E_1 – целевой уровень энергии первого маятника, а E_2 и E_3 – допустимые верхние границы энергий второго и третьего маятников. Неравен-

ства должны выполняться на всём интервале движения, а не только в установившемся режиме.

Для объединения целевого условия и ограничений вводится штрафная целевая функция

$$V(p, q, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} (H_0^1(p_1, q_1) - E_1)^2 + \frac{\alpha}{E_2 - H_0^2(p_2, q_2)} + \frac{\beta}{E_3 - H_0^3(p_3, q_3)}. \quad (7)$$

Параметры $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ определяют вес барьерных членов. При приближении H_0^2 к E_2 или H_0^3 к E_3 соответствующее слагаемое в выражении (7) быстро возрастает, что усиливает реакцию закона управления на опасное приближение к границе допустимой области [21].

В соответствии с методом скоростного градиента управление выбирается по правилу

$$u(t) = -\Gamma \frac{\partial \dot{V}}{\partial u}, \quad \Gamma > 0, \quad (8)$$

где

$$\dot{V} = u \left[\frac{(H_0^1(p_1, q_1) - E_1) p_1 \cos q_1}{ml} + \frac{\alpha p_2 \cos q_2}{ml(E_2 - H_0^2)^2} + \frac{\beta p_3 \cos q_3}{ml(E_3 - H_0^3)^2} \right].$$

Здесь Γ – коэффициент усиления алгоритма. Закон (8) определяет скорость реакции системы на текущую величину градиента и влияет на компромисс между быстроедействием и амплитудой управляющего сигнала.

После вычисления производной $\dot{V}$ по переменной u получаем явный закон управления

$$u(t) = -\Gamma \left[\frac{(H_0^1(p_1, q_1) - E_1) p_1 \cos q_1}{ml} + \frac{\alpha p_2 \cos q_2}{ml(E_2 - H_0^2)^2} + \frac{\beta p_3 \cos q_3}{ml(E_3 - H_0^3)^2} \right]. \quad (9)$$

Формула (9) показывает, что управляющее воздействие складывается из трёх компонентов: первый член подводит энергию к первой подсистеме в направлении достижения уровня E_1 , тогда как второй и третий члены препятствуют превышению ограничений E_2 и E_3 . Квадрат в знаменателях барьерных слагаемых обеспечивает резкое увеличение корректирующего влияния при приближении к критическим значениям.

Подставляя выражение для управления из формулы (9) в выражение для $\dot{V}$, получим, что целевая функция ограничена сверху своим начальным значением, что влечет соблюдение ограничений (6).

3. ЗАМЕЧАНИЯ

С точки зрения механики управление (9) реализует не непосредственную стабилизацию координат, а целенаправленное перераспределение энергии. При этом роль общего входа заключается не в независимом управлении каждой подсистемой, а в использовании различий между множителями $p_k \cos q_k$ в формуле (5). Именно эти различия позволяют выделять нужный маятник и формировать требуемый режим даже при одном скалярном управлении.

Барьерная структура функции (7) особенно важна для практической реализации. Если энергия второго или третьего маятника приближается к допустимому пределу, производная штрафной функции резко возрастает, и соответствующий компонент управления начинает доминировать. Тем самым ограничения оказываются встроенными непосредственно в структуру закона управления, а не проверяются постфактум после расчёта управления [21].

Следует отметить, что из-за полной идентичности подсистем задача не может быть решена в содержательном виде при полностью совпадающих начальных условиях подсистем. В этом случае общий вход возбуждает одинаковую реакцию во всех каналах, и разделения движений не возникает. Поэтому наличие хотя бы малой начальной асимметрии является естественным условием для селективного энергообмена, что согласуется с результатами для двухмаятниковой системы [8, 9].

Отметим следующие особенности реализации предлагаемого алгоритма:

- Начальная асимметрия. Для получения разделения движений начальные состояния не должны совпадать, иначе идентичные подсистемы будут реагировать на общий вход практически одинаково.
- Выбор параметров. Коэффициенты Γ , α и β следует выбирать согласованно: увеличение Γ ускоряет переходный процесс, а увеличение α и β делает ограничения более жёсткими, но может приводить к росту амплитуды управления.

- Численное интегрирование. Вблизи границ $H_0^2 = E_2$ и $H_0^3 = E_3$ барьерные слагаемые быстро возрастают, поэтому для расчётов желательно использовать достаточно малый шаг интегрирования и контролировать устойчивость численной схемы [22].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для оценки работоспособности предложенного закона управления были рассмотрены два характерных численных примера. В обоих случаях использовались одинаковые параметры механической модели

- $m = 1,0$, $l = 1$, $g = 9,8$;
- $q_1(0) = 0,8$, $q_2(0) = 0,5$, $q_3(0) = 0,3$;
- $p_1(0) = 1,542$, $p_2(0) = 2,378$, $p_3(0) = 2,678$;
- $E_1 = 12$, $E_2 = 6$, $E_3 = 3$;
- $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$, $\Gamma = 0,05$;
- время моделирования 80 с.

На рис. 1 показано поведение системы при следующих параметрах:

- начальные условия: $q_1(0) = 0,8$, $q_2(0) = 0,5$, $q_3(0) = 0,3$ рад;
- параметры управления: $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$, $\Gamma = 0,05$.

Верхний график демонстрирует траектории энергий H_1 , H_2 , H_3 (сплошные линии) и целевые уровни $E_1 = 12$, $E_2 = 6$, $E_3 = 3$ Дж (пунктирные линии). Энергия первого маятника быстро достигает целевого значения, в то время как энергии второго и третьего маятников остаются ниже допустимых пределов. Нижний график показывает управляющий сигнал $u(t)$, который имеет кратковременный всплеск в начале процесса.

Во всех приведённых далее рис. 1–6, б показаны временные зависимости $u(t)$, что позволяет непосредственно сопоставить поведение управляющего сигнала с изменением энергий маятников, представленной на рис. 1–6, а.

На рис. 2 параметр α уменьшен до 0,01 (при неизменных $\beta = 0,1$, $\Gamma = 0,05$).

Уменьшение параметра α ослабляет барьерный член для второго маятника. Как следствие, энергия H_2 приближается к предельному значению $E_2 = 6$ Дж опаснее, чем в базовом сценарии. Управляющий сигнал становится более интенсивным в те моменты, когда H_2 приближается к границе.

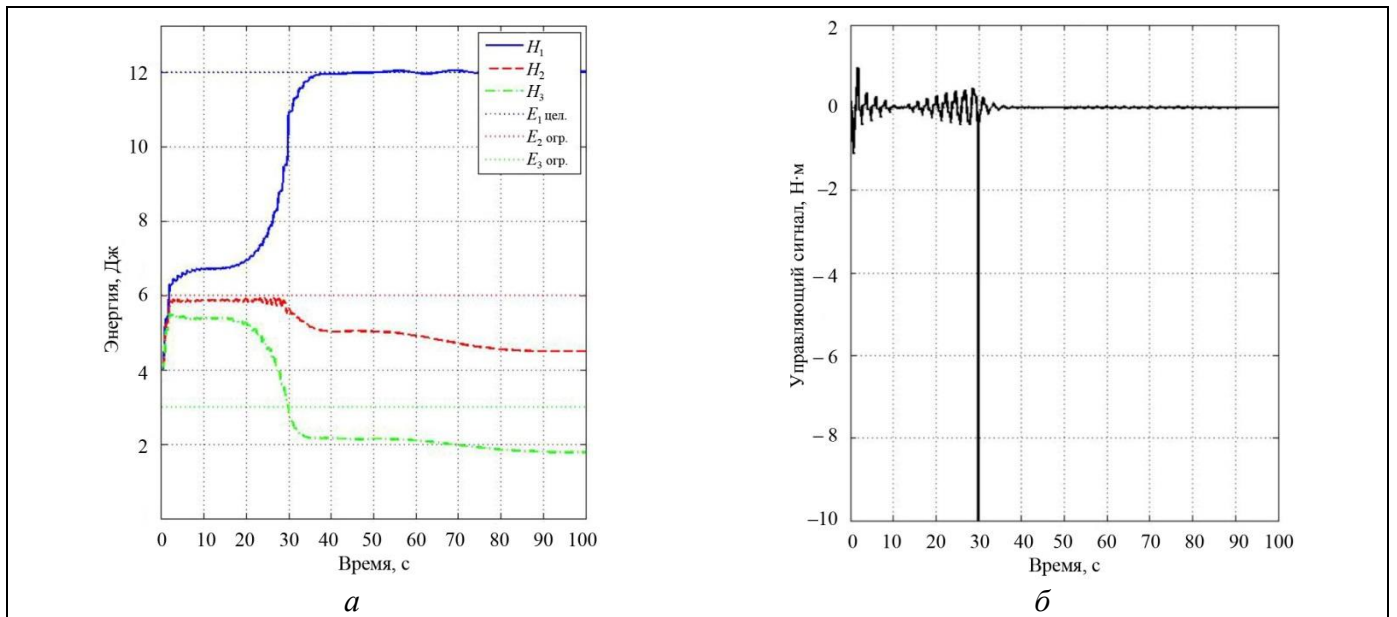


Рис. 1. Базовый сценарий (номинальные параметры): а – графики изменения энергии, б – управляющее воздействие

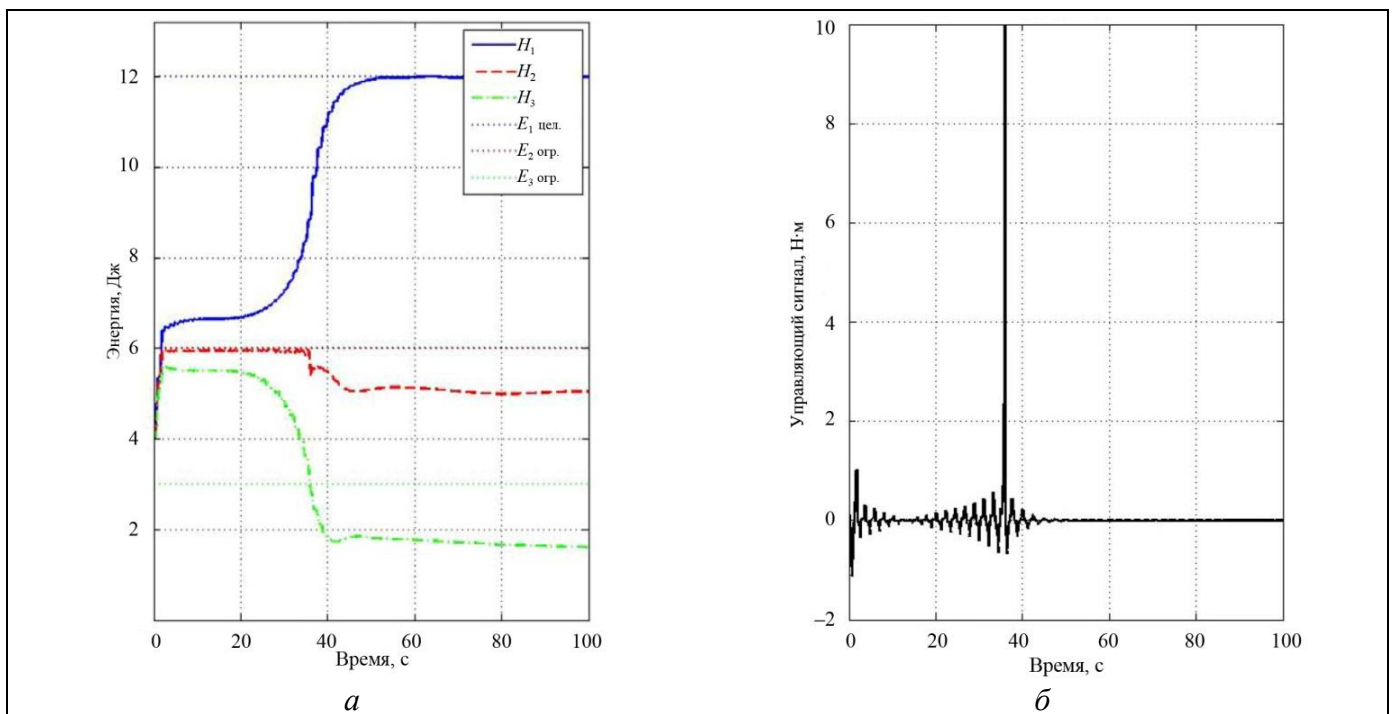


Рис. 2. Влияние малого параметра штрафа α : а – графики изменения энергии, б – управляющее воздействие

На рис. 3 параметр β уменьшен до 0,01 (при $\alpha = 0,1$, $\Gamma = 0,05$).

Ослабление барьерного члена для третьего маятника приводит к тому, что энергия H_3 периодически приближается к пределу $E_3 = 3$ Дж. Управляющий сигнал реагирует на эти приближения дополнительными всплесками. Данный сценарий демонстрирует важность выбора достаточных значений β для обеспечения ограничений.

На рис. 4 коэффициент усиления увеличен до $\Gamma = 0,5$ (при $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$).

Увеличение коэффициента Γ ускоряет переходный процесс: энергия H_1 достигает целевого уровня E_1 значительно быстрее, чем в базовом сценарии. Однако управляющий сигнал становится более высокочастотными и содержит высокочастотные колебания. Это иллюстрирует компромисс между быстродействием и амплитудой управления.

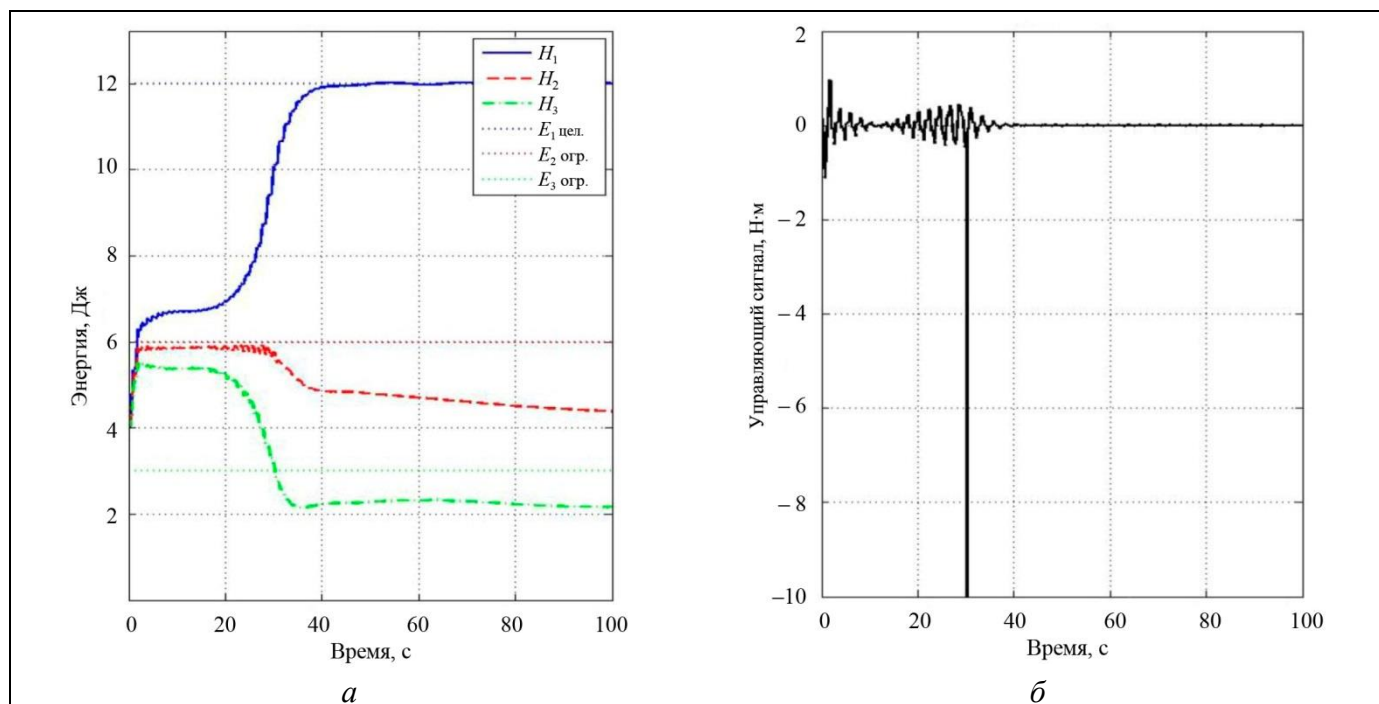


Рис. 3. Влияние малого параметра штрафа $\beta = 0,01$: а – графики изменения энергии, б – управляющее воздействие

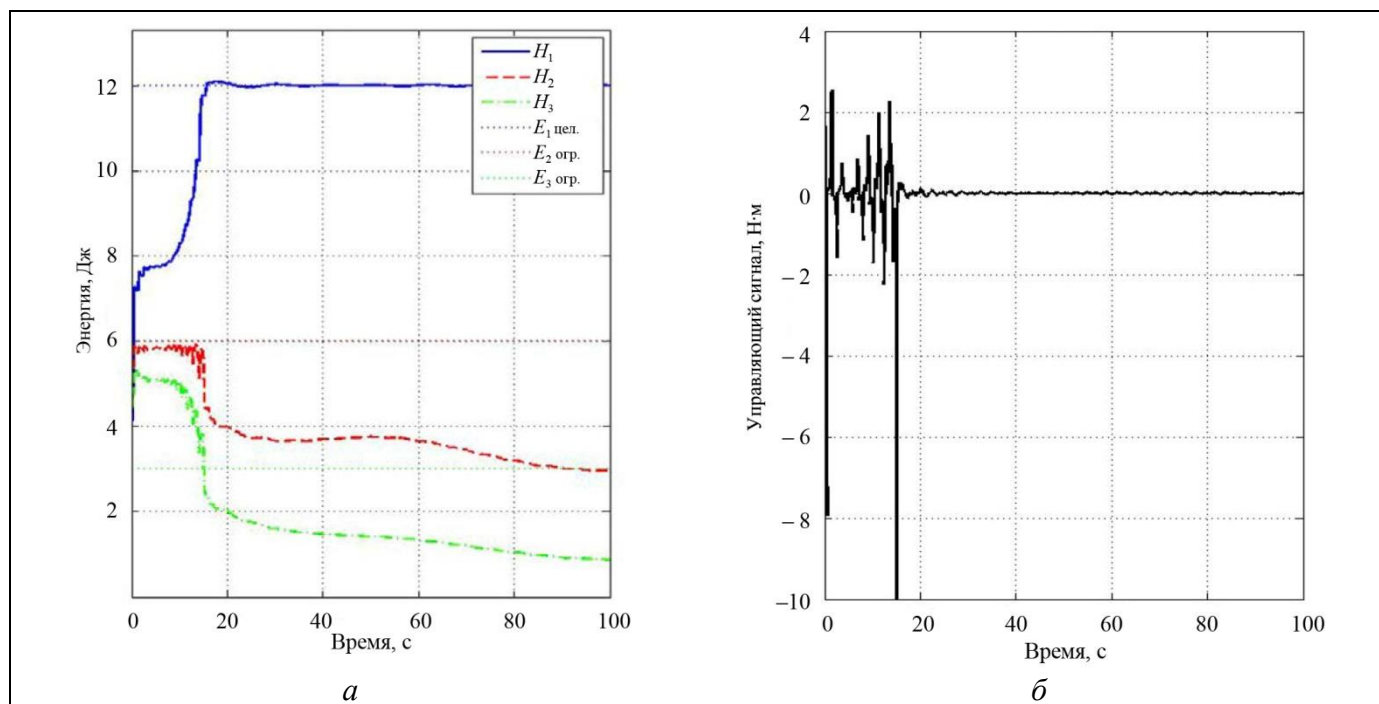


Рис. 4. Влияние увеличенного коэффициента усиления $\Gamma = 0,5$: а – графики изменения энергии, б – управляющее воздействие

На рис. 5 представлен сценарий с близкими начальными углами при номинальных параметрах $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$, $\Gamma = 0,05$.

Из-за слабой начальной асимметрии активная фаза энергоподвода наступает поздно – примерно после $t = 70$ с. До этого момента энергии всех трёх маятников остаются практически одина-

ковыми и не превышают $E_2 = 6$ Дж. После $t = 70$ с энергия H_1 начинает расти и достигает уровня E_1 к концу интервала моделирования. Управляющий сигнал имеет поздний и менее выраженный всплеск.

На рис. 6 начальные углы $q_1(0) = 0,45$ рад, $q_2(0) = 0,3$ рад, $q_3(0) = 0,25$ рад.

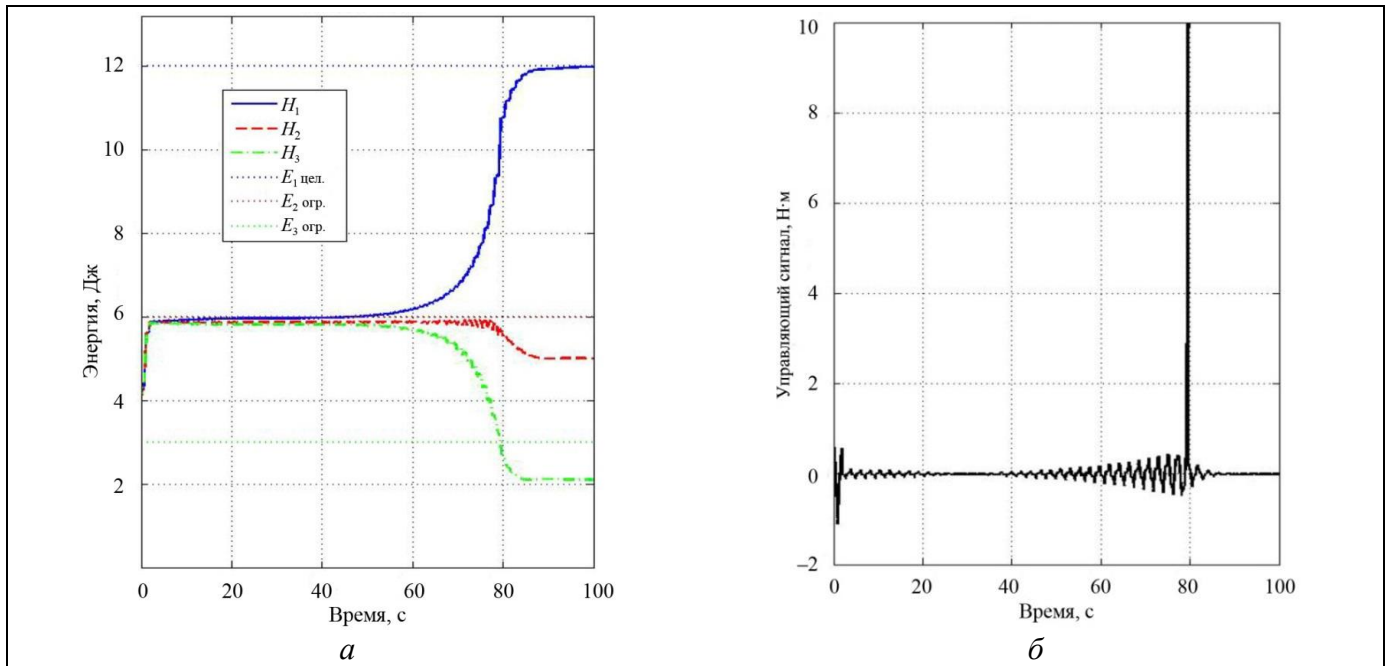


Рис. 5. Сценарий с близкими начальными условиями $q_1(0) = 0,4$, $q_2(0) = 0,3$, $q_3(0) = 0,25$: a – графики изменения энергии, b – управляющее воздействие

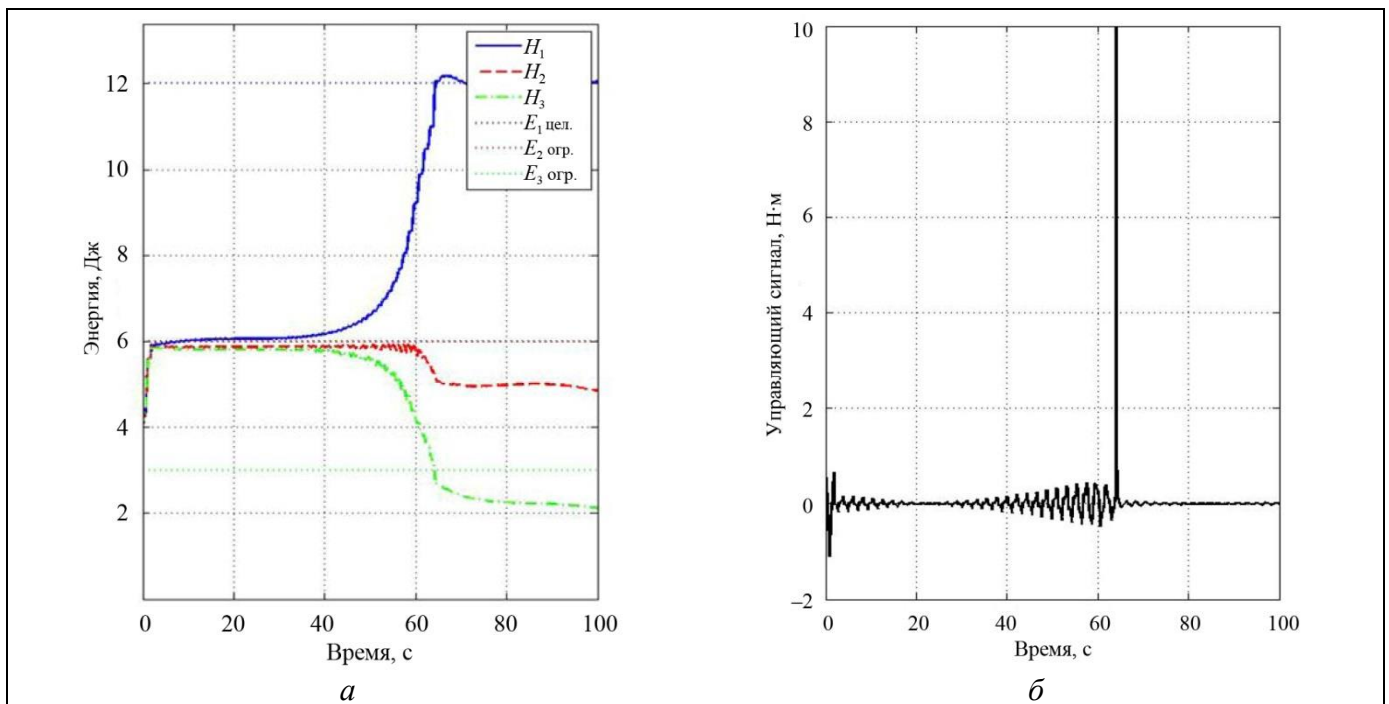


Рис. 6. Сценарий с ещё более близкими начальными условиями $q_1(0) = 0,45$, $q_2(0) = 0,3$, $q_3(0) = 0,25$: a – графики изменения энергии, b – управляющее воздействие

Этот сценарий характеризуется ещё меньшей асимметрией по сравнению с рис. 5. Как следствие, время до начала активного энергоподвода увеличивается ещё сильнее. Энергия H_1 начинает заметно расти только после $t = 100$ с, а целевой уровень E_1 достигается лишь к концу интервала моделирования. Данный результат подтверждает высокую

чувствительность алгоритма к степени начальной асимметрии системы [23].

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Проведённые вычислительные эксперименты позволяют сделать следующие выводы.

- Базовый сценарий (рис. 1) демонстрирует работоспособность предложенного закона управления при достаточной начальной асимметрии.

- Уменьшение параметров штрафа α или β приводит к более опасному приближению энергий соответствующих маятников к предельным значениям (рис. 2 и 3). Это подтверждает необходимость выбора достаточных значений штрафных параметров.

- Увеличение коэффициента усиления Γ ускоряет переходный процесс, но ценой роста амплитуды и осцилляций управляющего сигнала (рис. 4).

- Имеет место чувствительность к начальным условиям (рис. 5 и 6): чем ближе начальные состояния маятников, тем позже наступает момент селективного энергоподвода. При очень близких начальных условиях время достижения цели может существенно возрастать.

Сравнение с ранее изученным случаем двух маятников [8, 9] показывает, что задача для трёх маятников является существенно более сложной. Во-первых, наличие двух независимых ограничений (E_2 и E_3) приводит к конкуренции барьерных членов в законе управления (9), что вызывает дополнительные высокочастотные колебания сигнала $u(t)$ по сравнению с более гладким управлением в системе двух маятников. Во-вторых, чувствительность к начальной асимметрии возрастает: при одинаковой относительной близости начальных состояний время достижения целевого уровня E_1 в системе трёх маятников существенно больше, чем в системе двух маятников (см. рис. 5 и 6, а также результаты работ [8, 9]). В-третьих, случай полной симметрии ($q_1(0) = q_2(0) = q_3(0)$) делает задачу принципиально неразрешимой, что является более жёстким условием по сравнению с системой двух маятников, где симметрия лишь затрудняет селективный режим, но не блокирует его полностью при малых возмущениях. Таким образом, обобщение на три подсистемы не является тривиальным и требует отдельного анализа, представленного в данной работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен алгоритм управления энергией первого из трёх идентичных маятников при односторонних ограничениях на энергии второго и третьего маятников и единственном скалярном управляющем воздействии. Для синтеза закона управления применяется метод скоростного градиента с целевой функцией, включающей квадрат ошибки по целевой энергии и штрафные слагаемые барьерного типа по ограничениям.

Полученный закон управления имеет явный аналитический вид, допускает простую численную реализацию и опирается на физически прозрачный механизм перераспределения энергии через множители $p_k \cos q_k$.

Численные эксперименты показали, что алгоритм обеспечивает достижение целевого режима как при существенно различных, так и при близких начальных условиях. При этом время переходного процесса и форма управляющего сигнала зависят от степени начальной асимметрии системы.

О сложности задачи говорит, например, тот факт, что если параметры маятников и начальные условия одинаковы, то задача неразрешима как при линейных, так и при нелинейных моделях маятников. Действительно, траектории идентичных динамических систем при идентичных начальных условиях и при одинаковых управлениях совпадают на всём промежутке существования. Отличие данной задачи от случая двух маятников, рассмотренного раньше, в том, что целевая система и система ограничений не идентичны. Представленные результаты могут рассматриваться как шаг к построению методов селективного управления энергией при ограничениях в механических системах со многими степенями свободы.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- впервые предложен закон управления энергией трёх одинаковых маятников с одним скалярным входом и односторонними ограничениями;
- получен явный алгоритм на основе функции Ляпунова штрафного типа;
- обнаружена и количественно проанализирована сильная зависимость времени переходного процесса от начальной асимметрии;
- показано, что при полностью симметричных начальных условиях задача принципиально неразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rajarathinam, M., Awrejcewicz, J., Ali, S.F. A Novel Design of an Array of Pendulum-Based Electromagnetic Broadband Vibration Energy Harvester // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2024. – Vol. 208, no. 4. – Art. no. 110955.
2. Zhang, Y., Li, J. A Bio-Inspired System for Simultaneous Vibration Isolation and Energy Harvesting in Post-Capture Spacecraft // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2023. – Vol. 199, no. 4. – Art. no. 110466.
3. Wang, Z., Fu, H., Xie, H., Deng, F. Double Pendulum-Based Nonlinear Rotational Energy Harvesting from Low-Frequency Human Motion for Self-Powered Sensing // *Proceedings of 2024 IEEE 23rd International Conference on Micro and Miniature Power Systems, Self-Powered Sensors and Energy Autonomous Devices (PowerMEMS)*. – Tonsberg, Norway, 2024. – P. 191–194.



4. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Метод скоростного градиента и его приложения // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 9. – С. 3–72. [Andrievsky, B.R., Fradkov, A.L. Speed Gradient Method and Its Applications // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82, no. 9. – P. 1463–1518.]
5. Ananyevskii, M.S., Fradkov, A.L., Nijmeijer, H. Control of Mechanical Systems with Constraints: Two Pendulums Case Study // Proceedings of the 17th IFAC World Congress. – Seoul, 2008. – P. 7690–7694.
6. Andrievsky, B.R., Orlov, Y., Fradkov, A.L. On Robustness of the Speed-Gradient Sampled-Data Energy Control for the Sine-Gordon Equation: The Simpler the Better // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2023. – Vol. 117. – Art. no. 106901.
7. Ananyevskii, M.S., Fradkov, A.L., Nijmeijer, H. Swinging control of two-pendulum system under energy constraints // In: Dynamics and Control of Hybrid Mechanical Systems. Eds. G. Leonov, H. Nijmeijer, A. Pogromsky, A. Fradkov. – Singapore: World Scientific, 2010. – P. 167–180.
8. Сулиман Б., Фрадков А.Л. Анализ разделимости движений управлением для двух идентичных маятников // Управление большими системами. – 2025. – № 117. – С. 171–187. – DOI: 10.25728/ubs.2025.117.8. [Suliman, B., Fradkov, A.L. Analysis of Motion Separation by Control for Two Identical Pendulums // Large-Scale Systems Control. – 2025. – No. 117. – P. 171–187. – DOI: 10.25728/ubs.2025.117.8 (In Russian)]
9. Suliman, B. Speed-gradient energy control of two pendulums with two-sided constraints // Cybernetics and Physics. – 2025. – Vol. 14, no. 4. – P. 398–406. – DOI: 10.35470/2226-4116-2025-14-4-398-406
10. Fiacco, A.V., McCormick, G.P. Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques. – Philadelphia: SIAM, 1990. – 210 p.
11. Blanchini, F. Set Invariance in Control // Automatica. – 1999. – Vol. 35, iss. 11. – P. 1747–1767.
12. Ngo, K.B., Mahony, R., Jiang, Z.P. Integrator Backstepping Using Barrier Functions for Systems with Multiple State Constraints // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference (CDC-ECC '05). – Seville, Spain, 2005. – P. 8306–8312.
13. Tee, K.P., Ge, S.S., Tay, E.H. Barrier Lyapunov Functions for the Control of Output-Constrained Nonlinear Systems // Automatica. – 2009. – Vol. 45. – P. 918–927.
14. Tang, Z.L., Tee, K.P., He, W. Tangent Barrier Lyapunov Functions for the Control of Output-Constrained Nonlinear Systems. – IFAC Proceedings Volumes. – 2013. – Vol. 46, iss. 20. – P. 449–455.
15. Kabzinski, J., Jastrzebski, M., Mosiolek, P. Comparison of Various Barrier Lyapunov Functions for Adaptive Control of Nonlinear Systems // Proceedings of the 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2016). – Miedzyzdroje, Poland, 2016. – P. 1027–1032.
16. Xia, K., Lee, S., Son, H. Adaptive Control for Multi-Rotor UAVs Autonomous Ship Landing with Mission Planning // Aerospace Science and Technology. – 2020. – Vol. 96. – Art. no. 105549.
17. Wang, Z., Zheng, H., Zhang, G. Prescribed-Time-Based Anti-Disturbance Tracking Control of Manipulators Under Multiple Constraints // Actuators. – 2025. – Vol. 14, no. 4. – Art. no. 157.
18. Wu, L., Zhao, D. Control of Vehicle Lateral Handling Stability Considering Time-Varying Full-State Constraints // Mathematics. – 2025. – Vol. 13, no. 8. – Art. no. 1217.
19. Hejrati, M., Mustalahti, P., Mattila, J. Robust Immersive Bilateral Teleoperation of Beyond-Human-Scale Systems with Enhanced Transparency and Sense of Embodiment // arXiv:2505.14486. – 2025. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.14486>
20. Singh, A., Jain, A. Range-Only Dynamic Output Feedback Controller for Safe and Secure Target Circumnavigation // arXiv:2501.08058. – 2025. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.08058>
21. Ren, W., Li, J., Xiong, J., Sun, X.-M. Vector Control Lyapunov and Barrier Functions for Safe Stabilization of Interconnected Systems // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2023. – Vol. 61, no. 5. – P. 3209–3233.
22. Sankaranarayanan, V.N., Satpute, S., Roy, S., Nikolakopoulos, G. Adaptive Control of Euler-Lagrange Systems under Time-varying State Constraints without a Priori Bounded Uncertainty // IFAC-PapersOnLine. – 2023. – Vol. 56, no. 2. – P. 3360–3365.
23. Su, Z., Kurths, J., Liu, Y., Yanchuk, S. Extreme Multistability in Symmetrically Coupled Clocks // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2023. – Vol. 33, no. 8. – Art. no. 083157.

Статья представлена к публикации членом редколлегии
Л. Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 09.04.2026,
после доработки 29.05.2026.
Принята к публикации 17.06.2026.

Сулиман Башар – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия; Университет Алеппо, г. Алеппо, Сирия
✉ st102994@student.spbu.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0002-6391-7759>

Фрадков Александр Львович – д-р техн. наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург, Россия
✉ fradkov@mail.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5633-0944>

© 2026 г. Сулиман Б., Фрадков А. Л.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons
«Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

ENERGY CONTROL OF THREE IDENTICAL PENDULUMS UNDER ENERGY CONSTRAINTS

B. Suliman* and A. L. Fradkov**

***Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

* University of Aleppo, Aleppo, Syria

**Institute for Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia

*✉ st102994@student.spbu.ru, **✉ fradkov@mail.ru

Abstract. This paper addresses the problem of energy control for three identical independent pendulums driven by a single scalar input. The objective is to asymptotically steer the energy of the first pendulum to a prescribed level while keeping those of the other two below given bounds. A penalty-type Lyapunov function combining a quadratic target term and barrier terms for the constraints is introduced. A numerically implementable explicit control law is derived based on the speed-gradient method. Additional consideration is given to the physical meaning of the basic model equations and the selective energy redistribution mechanism under a common control action. Numerical simulations are provided to confirm the convergence of the first pendulum's energy to the target level while satisfying the imposed constraints.

Keywords: energy control, identical pendulums, speed-gradient method, penalty functions, Hamiltonian systems, numerical simulation.