



# ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ МИГРАЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ И УПРАВЛЕНИЯ КРЕДИТНЫМ РИСКОМ БАНКОВ В РАМКАХ ПОДХОДА НА ОСНОВЕ ВНУТРЕННИХ РЕЙТИНГОВ ЗАЕМЩИКОВ

А.А. Стежкин

Отмечено, что в условиях нестабильности мировой экономики вопросы точности и надежности количественной оценки рисков и их управления приобретают особую актуальность. Подход на основе внутренних рейтингов к оценке кредитного риска позволяет осуществить его подробный анализ с высокой степенью точности. Построен инструмент на основе теории марковских цепей, позволяющий повысить качество оценки кредитного риска и, следовательно, качество систем управления им.

**Ключевые слова:** кредитный риск, подход внутренних рейтингов, матрицы миграций, марковские цепи, вероятность дефолта, экономический цикл, система управления рисками.

## ВВЕДЕНИЕ

Подход на основе внутренних рейтингов заемщиков (IRB-подход или ПВР в российской регулятивной практике) был предложен Базельским комитетом по банковскому надзору для кредитных организаций (в редакции стандартов Базель II — см. <http://www.bis.org/publ/bcbs107.htm>), чьи внутренние системы управления риском развиты в достаточной степени, чтобы использовать «продвинутые» математические модели и методы, в смысле возможностей алгоритмизации и автоматизации подходов, а также наличие высококвалифицированных математиков в составе штата сотрудников. Данный подход служит альтернативой гораздо более простому стандартизированному подходу. Однако ПВР не отменяет необходимости и важности фундаментального анализа финансового положения заемщика, а, напротив, скорее служит его «надстройкой». В общих чертах ПВР представляет собой подход к оценке кредитных рисков банков на основе рейтингов заемщиков, которые устанавливают сами банки. Рейтинговая система представляет собой математическую модель, на входе которой — агрегированные коли-

чественные и качественные показатели заемщиков, а на выходе — определенный кредитный рейтинг с соответствующими вероятностью дефолта и нормой резервирования.

В 2014—2015 гг. Банк России детализировал и уточнил позицию по ПВР, издав Указание Банка России от 06.08.2015 № 3752-У «О порядке рассмотрения Банком России ходатайств банков о применении подхода на основе внутренних рейтингов к расчету кредитного риска», а также Положение Банка России от 06.08.2015 № 483-П «О порядке расчета величины кредитного риска на основе внутренних рейтингов», отдельно отмечая исключительную важность внутренних рейтинговых систем для эффективного управления рисками. Именно на основе информации об ожидаемом профиле риска банка, качестве его активов, потенциальных позитивных или негативных изменений в основных показателях деятельности и принимаются управленческие решения по реализации той или иной стратегии развития. В этом смысле ПВР служит отличным примером подхода к оценке риска, напрямую влияющем на такие аспекты систем риск-менеджмента банка, как досоздание резервов на возможные потери, переход на более продвинутые модели расчета ключевых индикато-

ров рынка, политика управления срочностью активов и пассивов.

Если рассматривать банк и совокупность его заемщиков как замкнутую систему, то можно утверждать, что количественные и качественные показатели заемщиков полностью определяют его платежеспособность, а, следовательно, и вероятность дефолта. Однако, поскольку упомянутая система в действительности не является замкнутой, то необходимо учесть внешние макроэкономические факторы. Так, очевидно, что вероятность дефолта заемщика возрастает в периоды экономических спадов, и, напротив, снижается в периоды экономических подъемов. Например, согласно некоторым исследованиям [1–3], ряд макроэкономических показателей, например, темп роста ВВП, коррелируют со значением вероятности дефолта.

В настоящей статье остановимся на проблеме учета влияния делового (экономического) цикла на финансовые показатели заемщиков банка, а значит, и на все основные показатели их в рамках ПВР, оказывающие значительное влияние на качество управления рисками. В соответствии с действующими подходами Банка России, содержащимися в упомянутых документах, кредитные организации в процессе оценки кредитного риска на основе внутренних моделей, как определенного этапа риск-менеджмента, должны учитывать всю имеющуюся информацию как о заемщике, так и о состоянии рынка и экономической ситуации. Согласно имеющимся примерам международной практики и опыта российских банков, ряд кредитных организаций не усматривают существенного влияния смены периодов экономического цикла на ключевые параметры рейтинговых систем. Другие банки, напротив, уделяют этому довольно большое внимание. Одновременно отметим, что в российской практике примеры учета изменений экономического цикла представлены исключительно в рамках предложенных Базелем II подходов.

## 1. РЕЙТИНГОВАЯ ФИЛОСОФИЯ В СООТВЕТСТВИИ С РЕКОМЕНДАЦИЯМИ БАЗЕЛЯ II

Существуют две так называемых рейтинговые философии (rating philosophy). Одна из них носит название «в момент времени» (point-in-time, PIT) и позволяет определить вероятность дефолта, как следует из термина, в конкретный момент времени, т. е., принимая во внимание ожидаемое изменение экономического цикла. Другая называется «в течение цикла» (through-the-cycle, TTC). Она предполагает измерение средней вероятности де-

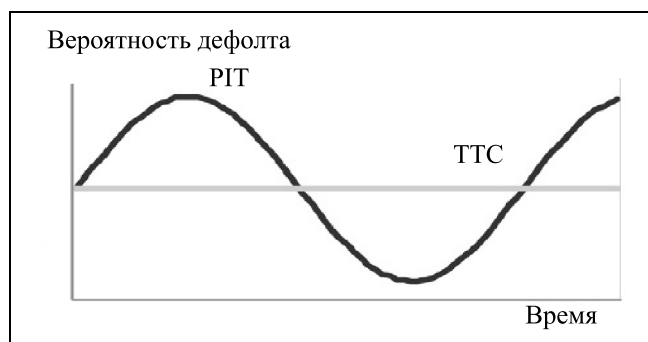


Рис. 1. Зависимость вероятности дефолта от времени в рамках рейтинговых философий PIT и TTC

фолта за весь экономический цикл, т. е. в ее основу заложены некоторые усредненные показатели экономики (рис. 1).

В рамках международной практики предпочтнее зачастую отдается философии TTC, поскольку она позволяет обеспечивать стабильность требований к капиталу, что в свою очередь соответствует ожиданиям как регулятора (в части отсутствия резких колебаний величины достаточности капитала), так и акционеров (в части стабильного дохода).

Модели в рамках TTC, строятся, например, с помощью модели «переменного коэффициента» (Variable Scalar Approach), позволяющей трансформировать модель PIT в TTC, искусственно снижая вероятность дефолта в периоды потерь и, наоборот, повышая ее в периоды роста до некоторого значения, соответствующего средней вероятности дефолта, вычисленной за долгосрочный период.

Опишем формально, как работает эта модель.

*Шаг 1.* Определяем среднюю вероятность дефолта по портфелю за долгосрочный период (положим, она составляла 0,05).

*Шаг 2.* Определяем среднюю вероятность дефолта с использованием текущей рейтинговой модели PIT (положим, она составила 0,025).

*Шаг 3.* Определяем искомый коэффициент путем деления исторической вероятности дефолта (за долгосрочный период) на вероятность дефолта согласно модели (в нашем случае получим:  $0,05/0,025 = 2$ ).

*Шаг 4.* Корректируем результаты рейтинговой модели PIT на полученный коэффициент. Ясно, что средняя вероятность дефолта по полученной скорректированной модели будет соответствовать вероятности дефолта по портфелю за долгосрочный период (т. е. как в модели TTC).



## 2. МАТРИЦЫ МИГРАЦИЙ

Введем понятие матрицы миграций (матрицы переходных вероятностей). Матрицей миграций за период времени  $[t, t + \Delta t]$  назовем матрицу

$$Q(\Delta t) \equiv Q(t, t + \Delta t) = \begin{pmatrix} q_{11}(\Delta t) & \dots & q_{1n}(\Delta t) \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1}(\Delta t) & \dots & q_{nn}(\Delta t) \end{pmatrix},$$

где ее элементы

$$q_{ij}(\Delta t) \equiv P[R(t + \Delta t) = j | R(t) = i] \geq 0, \quad \forall i, j \in S,$$

представляют собой вероятность за промежуток времени  $\Delta t$  поменять рейтинг с  $i$  (в момент времени  $t$ ) на  $j$  (в момент времени  $t + \Delta t$ ),  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество рейтинговых оценок. Рейтингу 1 соответствует наивысший рейтинг, рейтингу  $n$  — дефолт.

Видно, что  $n$ -й столбец матрицы миграций состоит из вероятностей дефолта для всех рейтинговых шкал.

В основе процесса рейтинговых миграций лежат два предположения:

- процесс является марковским [4] — вероятность перехода в некое будущее состояние  $j$  зависит только от текущего состояния и не зависит от того, какой рейтинг был ранее, формально это выглядит так:

$$P[R(t + \Delta t) = j | R(t), R(t - 1), R(t - 2) \dots] = P[R(t + \Delta t) = j | R(t)], \quad \forall j \in S;$$

- однородность по времени — вероятности перехода зависят только от конкретного промежутка времени  $\Delta t$ , т. е. имеем семейство матриц перехода

$$Q(\Delta t) \equiv Q(t, t + \Delta t) = Q(t - k, t - k + \Delta t) \quad \forall k.$$

Напомним, что в теории случайных процессов марковской цепью называется последовательность с конечным (дискретное время) или счетным (непрерывное время) числом событий, таких, что при условии фиксированного настоящего будущие значения процесса не зависят от прошлого.

В дискретном времени обозначим за  $N_i(t)$  число заемщиков с рейтингом  $i$  в момент времени  $t$ , а за  $N_{ij}(t, t + 1)$  — число заемщиков, чей рейтинг сменился с  $i$  на  $j$  на момент времени  $t + 1$ .

Тогда частота миграции [5]

$$\hat{q}_{ij}(t, t + 1) = \frac{N_{ij}(t, t + 1)}{N_i(t)}, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

С учетом однородности марковской цепи по времени получим оценку максимального правдоподобия для частоты миграции (вероятности перехода) на горизонте в год:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{ij} &\equiv \hat{q}_{ij}(1) = \sum_{t=1}^T w_i(t) \hat{q}_{ij}(t, t + 1) = \\ &= \sum_{t=1}^T N_{ij}(t)(t, t + 1) / \sum_{t=1}^T N_{-ij}(t) = N_{ij} / N_i. \end{aligned}$$

Здесь  $w_i(t) = N_i(t) / \sum_{t=1}^T N_i(t)$  — веса за соответствующий период  $t$ . Таким образом, частота миграции может быть определена через отношение

полного числа заемщиков, рейтинг которых изменился с  $i$  на  $j$ , к полному числу заемщиков с рейтингом  $i$  в конкретном моменте времени.

В случае непрерывного времени введем понятие матрицы интенсивности переходов (или производящей матрицы). Таковой будем называть матрицу

$$\Lambda_t \equiv \{\lambda_{ij}(t)\}_{ij \in S}$$

в которой каждый недиагональный элемент  $\lambda_{ij}(t)$ ,  $i \neq j$  представляет собой функцию зависимости интенсивности перехода (изменения рейтинга) от времени; диагональные элементы задаются как  $\lambda_{ii}(t) \equiv \lambda_i(t) = -\sum_{i \neq j} \lambda_{ij}(t)$ ; таким образом, сумма элементов каждой строки матрицы  $\Lambda_t$  равна нулю.

Вероятность миграции рейтинга за произвольный промежуток времени  $\tau$ :

$$P[R(t + \Delta t) = j | R(t) = i] = \lambda_{ij}(t)\tau, \quad i \neq j.$$

При условии однородности по времени  $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}$ , и оценка максимального правдоподобия для интенсивностей перехода имеет вид:

$$\hat{\lambda}_{ij} N_{ij}(0, T) / \int_0^T Y_i(s) ds, \quad i \neq j,$$

где  $N_{ij}(0, T)$  — общее число переходов от рейтинга  $i$  к рейтингу  $j$  за весь рассматриваемый период времени;  $Y_i(s)$  — число заемщиков, отнесенных к

рейтингу  $i$  в момент времени  $s$ ; интеграл  $\int_0^T Y_i(s) ds$ ,

таким образом, определяет совокупное время, которое все заемщики выборки находились отнесенными к рейтингу  $i$ .

Оценку для матрицы интенсивности переходов можно представить в виде матричной экспоненты [6, с. 131]):

$$\hat{Q}(\Delta t) = \hat{Q}(t + \Delta t) = e^{(\Delta t)\hat{\Lambda}} = \hat{V} \exp(t\hat{D}) \hat{V}^{-1},$$

где  $\exp(t\hat{D}) = \text{diag}(e^{\alpha_1 t} \dots e^{\alpha_n t})$  — диагональная матрица с  $\alpha_i$  собственными значениями матрицы  $\hat{\Lambda}$ ,  $\hat{V}$  — матрица, составленная из собственных векторов матрицы  $\hat{\Lambda}$ , экспонента  $e^{(\Delta t)\hat{\Lambda}}$  может быть разложена в ряд Тейлора:  $e^{(\Delta t)\hat{\Lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(\Delta t)\hat{\Lambda}]^k}{k!}$ .

Описанные матрицы миграции по своей сути служат вспомогательным статистическим инструментом, позволяющим оценить, насколько вероятно негативное (реже — позитивное) изменение кредитного рейтинга заемщика и, соответственно, к каким потерям для банка это может привести.

Пожалуй, наиболее подробно матрицы миграции в задачах моделирования кредитного риска, а также иных экономических и финансовых задач моделируются с помощью марковских цепей. Этому посвящены как фундаментальные труды [7], так и исследования регулятивных органов (например, немецкого Бундесбанка [8]). Подробное исследование использования матриц миграции было проведено Национальным банком Хорватии [9]. В нем, в частности, описано применение механизма генерации выборок по Гиббсу (описание в общем виде см., например, в работе [10] для уточнения моделирования матриц миграции с помощью цепей Маркова путем оценки совместного распределения случайных величин, а также для минимизации апостериорного математического ожидания функции потерь при миграции рейтингов используется байесовская оценка решения. Наконец, отметим еще моделирование матриц миграции с помощью обобщенной линейной модели GLM [11]. Две модификации этой модели (GLMM) — маргинальная (*marginal*) и переходная (*transitional*) — определяют рейтинг как линейную функцию предыдущих состояний с различными начальными допущениями [12]. Функция, как правило, ищется методом наибольшего правдоподобия.

В российской практике матрицы миграции используются по большей части в справочных целях. Так, в довольно подробном руководстве по валидации рейтинговых систем, составленном Ассоциацией российских банков в сотрудничестве с рядом ведущих консалтинговых компаний и кредитных организаций [13], роль матриц миграций описана довольно кратко. Их анализ проводят для

выявления, насколько стабильны рейтинги отдельных клиентов, причем банк самостоятельно определяет критерии по признанию рейтингов стабильными (см. с. 26 этого руководства).

Обзор русскоязычных работ, посвященных применению матриц миграции для оценки существенности влияния изменения экономического цикла, а также вероятных ухудшений финансового положения заемщиков на показатели рейтинговых систем банков, и, как следствие, показатели их деятельности, показал результаты, аналогичные упомянутому. Так, в ряде работ выполнен общий анализ рейтинговых систем с указанием матриц миграций как аналитического инструмента, применяемого банками (см., например, работу [14]) и международными рейтинговыми агентствами [15]. В других работах говорится о применении матриц миграции для оценки изменений справедливой стоимости финансовых инструментов в целях расчета кредитного риска [16]. Наконец, матрицы миграции приводятся в рамках общего повествования о ПВР [17, 18].

Мы же, как было сказано, будем пользоваться не только матрицами миграции кредитных рейтингов, но и матрицами миграции состояний экономики. Совместим эти два инструмента для оценки вероятности изменения рейтинга заемщиков в условиях меняющейся экономической и финансовой конъюнктуры. Кроме того, рассмотрим ряд связанных прикладных задач, связанных с управленческими решениями в банке, по созданию резервов кредитными организациями, количественному ограничению профиля риска и др.

### 3. УЧЕТ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ЦИКЛА

Без ограничения общности внутри экономического цикла определим три фазы — подъем (будем отмечать индексом *E* от *expansion*), спад (*C* от *contraction*) и стабильное состояние (*N*). Трехфазный экономический цикл, пожалуй, довольно хорошо характеризует последние 20 лет ситуации в российской экономике. При необходимости число фаз может быть изменено, что потребует лишь добавления и исключения дополнительных параметров системы. Положим для определенности, что в момент времени *t* система находится в периоде экономического подъема.

Матрица

$$S(1) \equiv S(t, t + 1) = \begin{pmatrix} \vartheta & \phi & (1 - \vartheta - \phi) \\ \zeta & \delta & (1 - \zeta - \delta) \\ \varepsilon & (1 - \varepsilon - \gamma) & \gamma \end{pmatrix}$$

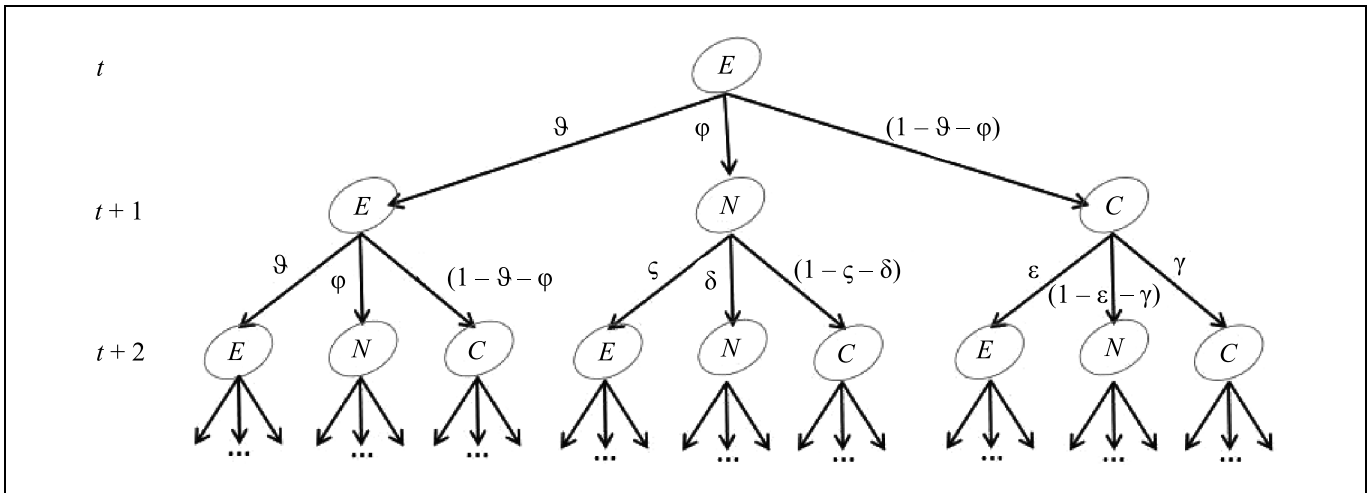


Рис. 2. Дерево трехфазного экономического цикла с условием периода экономического роста в момент времени  $t$

характеризует трехфазный цикл, где  $\theta$  — вероятность того, что в момент времени  $t + 1$  экономический рост сохранится (мы предположили, что в момент времени  $t$  наблюдается экономический подъем),  $\phi$  — вероятность того, что в момент времени  $t + 1$  экономический рост сменится стабильным периодом,  $(1 - \theta - \phi)$  — вероятность того, что в момент времени  $t + 1$  наступит экономический спад,  $\zeta$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  и  $\gamma$  — аналогичные величины из предположения, что в момент времени  $t$  система находилась в ином периоде экономического цикла.

Указанные вероятности служат внешними параметрами для нашей модели и могут быть получены с помощью описанного ранее алгоритма для марковских цепей с непрерывным временем для соответствующей матрицы миграций  $\Lambda_S$ . Скажем, интенсивность перехода  $\hat{\lambda}_{EC}$  может быть вычислена как отношение числа переходов от экономического подъема к экономическому спаду за рассматриваемый период к общей длительности фаз экономического подъема за этот период. Аналогично могут быть получены интенсивности остальных переходов [19].

В условиях каждой рассматриваемой фазы рейтинги заемщиков изменяются по-разному. Обозначим через  $Q_E$ ,  $Q_N$  и  $Q_C$  матрицы миграций для фаз экономического цикла. Эти матрицы могут быть построены на основе наблюдений миграций внутри рейтинговой шкалы в соответствующие периоды экономического цикла.

Смешанный процесс, учитывающий как изменения в экономике, так и непосредственные миг-

рации рейтингов, можно представить одноперiodической матрицей перехода

$$M(1) \equiv M(t, t + 1) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta Q_E & \phi Q_N & (1 - \theta - \phi) Q_C \\ \zeta Q_E & \delta Q_N & (1 - \zeta - \delta) Q_C \\ \epsilon Q_E & (1 - \epsilon - \gamma) Q_N & \gamma Q_C \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы  $M$  являются неотрицательными матрицами, суммы элементов каждой строки которых равны 1.

Рассмотрим произвольного заемщика с рейтингом  $i$  в момент времени  $t$  в условиях экономического подъема. Вероятность того, что рейтинг этого заемщика в момент времени  $t + 1$  будет понижен до  $j$  в условиях, что экономический подъем сменится стабильным периодом, согласно матрице  $M$ , есть  $\phi q_{ijN}$ . Для того чтобы определить это, обратим внимание на матрицу  $M_2 = \phi Q_N$ , являющуюся матрицей перехода при смене экономического роста на стабильный период, и найдем в ней искомым элемент, задающий вероятность изменения рейтинга с  $i$  на  $j$ .

Дерево трехфазного экономического цикла представлено на рис. 2. Оно построено из предположения, что в текущий момент времени период экономического подъема. Отсюда легко можно найти, например, матрицу  $Q_E(1) \equiv Q_E(t, t + 1)$ . Для этого нужно найти комбинацию вероятностей перехода фаз экономического цикла и самих воз-



можных переходов  $E(t) \rightarrow E(t+1)$ ,  $E(t) \rightarrow N(t+1)$  и  $E(t) \rightarrow C(t+1)$ :

$$\begin{aligned} Q_E(1) &\equiv X \equiv M_1 + M_2 + M_3 = \\ &= \vartheta Q_E + \varphi Q_N + (1 - \vartheta - \varphi) Q_C \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} Q_N(1) &\equiv Y \equiv M_4 + M_5 + M_6 = \\ &= \zeta Q_E + \delta Q_N + (1 - \zeta - \delta) Q_C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_C(1) &\equiv Z \equiv M_7 + M_8 + M_9 = \\ &= \varepsilon Q_E + (1 - \varepsilon - \gamma) Q_N + \gamma Q_C \end{aligned}$$

Обозначим  $L = (X \ Y \ Z)$  и  $F = (M_1 \ M_2 \ M_3)$ .

Для нахождения матрицы миграций за два периода применяем тот же прием:

$$\begin{aligned} Q_E(2) &= M_1 Q_E(1) + M_2 Q_N(1) + M_3 Q_C(1) = \\ &= M_1 X + M_2 Y + M_3 Z = FL^T. \end{aligned}$$

Очевидно, что согласно нашей модели экономика в момент времени  $n$  будет иметь  $3^n$  путей развития. Кроме того, можно показать, что матрица миграций за период времени длиной  $n \geq 2$  определяется выражением  $Q_E(n) \equiv FM^{n-2}L^T$ .

Аналогично определим и матрицы  $Q_N(n)$  и  $Q_C(n)$ , положив  $F = (M_4 \ M_5 \ M_6)$  и  $F = (M_7 \ M_8 \ M_9)$  соответственно.

Итак, мы построили трехфазную модель, сочетающую в себе возможность оценки вероятности изменения рейтинга с течением времени с учетом предполагаемой ситуации в экономике.

#### 4. ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ РАЗМЕРА ДОСОЗДАВАЕМОГО РЕЗЕРВА

Применим описанный подход учета влияния изменения экономического цикла во времени к решению вопросов управления капиталом кредитной организации.

Примем что, рейтинговая система состоит из  $n$  различных рейтинговых оценок, т. е.  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество рейтинговых оценок, где 1 — наивысший рейтинг, а  $n$  — дефолт.

Каждой рейтинговой оценке  $k \in S$  соответствует число  $\alpha_k$ , которое мы назовем нормой резервирования. Оно определяет относительный размер (в процентах) резерва, который должен быть сформирован по ссуде заемщика с рейтингом  $k$  согласно свойствам рейтинговой системы кредитной организации, т. е. это внутренний параметр системы.

Обозначим через  $\{L_m\}_{m \in N}$  множество ссуд, составляющих кредитный портфель банка. Рассмотрим

произвольную ссуду из портфеля  $L_m$ . Пусть в момент времени  $t$  она была отнесена к рейтингу  $i$ , а затем в момент времени  $t+1$  реклассифицирована в рейтинг  $j$ .

Тогда по ссуде  $L_m$  размер резерва, который необходимо доформировать вследствие реклассификации, составит:

$$R_{m_{ij}} = L_m(\alpha_j - \alpha_i).$$

В случае если  $\alpha_j < \alpha_i$ , значение  $R_{m_{ij}} < 0$ , т. е. резерв нужно восстановить, поскольку рейтинг заемщика улучшился.

Определим, как и ранее, матрицу миграций  $Q(\Delta t)$ .

Очевидно,  $\sum_{j=1}^n R_{m_{ij}} q_{ij} = 0$ , поскольку суммы элементов  $q_{ij}$  построчно равны нулю. В целях оценки рассмотрим только такие изменения рейтинга, при которых он ухудшается (негативный сценарий).

Для каждой ссуды  $L$  определим выборочное математическое ожидание:

$$R = \sum_{j>i} L(\alpha_j - \alpha_i) q_{ij} = L \sum_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i) q_{ij}.$$

Данное выражение задает средний размер резерва, который должен быть доформирован по ссуде  $L$  в случае ухудшения рейтинга заемщика  $m$  с рейтингом  $i$ .

Рассмотрим пару примеров практического применения концепции матриц миграции в части вопросов управления капиталом банка.

**Пример 1.** Определение размера резерва на возможные потери по ссудам к доформированию.

Вновь рассмотрим множество ссуд  $\{L_m\}_{m \in N}$ . Каждая ссуда, согласно рейтинговой системе кредитной организации, имеет какой-то рейтинг  $i_m$  в момент времени  $t$ . Тогда выборочное математическое ожидание по всему кредитному портфелю

$$R = \sum_{m \in N} \sum_{j>i} L_m(\alpha_j - \alpha_{i_m}) q_{i_m j}.$$

Это выражение задает средний размер резерва, который должен быть доформирован по всему кредитному портфелю в случае ухудшения рейтингов заемщиков.

Положим, что в рамках процесса мониторинга рисков рассматривается несколько вероятных сценариев изменения экономической ситуации. Каждому сценарию соответствует своя матрица миграций  $Q^p(\Delta t)$ , учитывающая те или иные предполагаемые события (например, что в условиях экономического спада вероятности снижения кредитного рейтинга растут, в условиях подъема — наоборот). В начальный момент времени  $t$  фактический размер сформированного резерва на воз-



можные потери по ссудам равняется  $R_t$  (по данным финансовой отчетности).

Рассмотрим ряд величин

$$R_{t+1}^p = \sum_{m \in N} \sum_{j>i} L_m (\alpha_j - \alpha_{i_m}) q_{i_m j}^p,$$

где  $q_{i_m j}^p$  — элементы матрицы  $Q^p(\Delta t)$ .

Отсюда в условиях рассматриваемых сценариев максимальный размер резерва к досозданию определится из попарного сравнения получившихся значений  $R_{t+1}^p$  и фактического значения  $R_t$ :

$$\Delta R = \max_p \{ R_{t+1}^p - R_t \}.$$

Описанная концепция вновь учитывает только негативный эффект изменения экономической ситуации, т. е. только вероятности ухудшения рейтинга. Положительный эффект (вероятности повышения рейтинга) также может быть учтен. Для этого в выражении для  $R_{t+1}^p$  будем суммировать по всем рейтингам  $j$ , т. е.

$$R_{t+1}^p = \sum_{m \in N} \sum_{j=1}^n L_m (\alpha_j - \alpha_{i_m}) q_{i_m j}^p.$$

Приведенный метод может стать полезным инструментом принятия решений при оценке структуры кредитного портфеля в разрезе рейтингов. В то же время, поскольку полученная формула неявно (через относительные значения долей резервирования  $\alpha_j$ ) характеризует рейтинговую систему банка, то неудовлетворительные результаты расчетов могут быть основанием для корректировки этой системы.

**Пример 2.** Определение ограничений на размер отдельных классов кредитных требований.

Рассмотрим теперь систему укрупненно в рамках определенного класса кредитных требований. Величина, заданная в виде  $\sum_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i) q_{ij}$ , определяет выборочное среднее процентного размера ссуды к доформированию в случае ухудшения рейтинга. Просуммируем приведенное выражение по всем  $i$ . Очевидно, при этом мы переберем все ссуды нашего кредитного портфеля, поскольку

$$L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n.$$

Таким образом, совокупный относительный размер резерва на возможные потери, который должен быть доформирован по всему портфелю, выражается как

$$R_{\%} = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} v_i (\alpha_j - \alpha_i) q_{ij},$$

где  $v_i = L_i/L$  — доля ссуд с рейтингом  $i$  в совокупном портфеле рассматриваемого типа кредитных требований.

Умножив полученное выражение на совокупный размер кредитного портфеля  $L$ , получим количественную оценку резерва в условиях негативного сценария:

$$R = R_{\%} L = L \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} v_i (\alpha_j - \alpha_i) q_{ij}.$$

С позиций управления рисками кредитной организации эта величина не должна превышать имеющийся запас капитала.

Определим норматив достаточности капитала, который характеризует способность банка нивелировать возможные финансовые потери за свой счет, не в ущерб своим клиентам, как  $k = K/RWA$ , где  $K$  — капитал кредитной организации,  $RWA$  — взвешенные по риску активы (сумма произведений значений кредитных требований на коэффициенты риска по ним).

Доформирование резервов по ссудам уменьшает капитал кредитной организации. Положим,  $\beta$  — минимальное значение норматива достаточности капитала, установленное системой управления рисками банка.

Тогда максимальное значение резерва  $A$ , который может быть доформирован по ссудам кредитного портфеля, определится из уравнения:

$$\beta = \frac{K-A}{RWA-A},$$

$$\text{т. е. } A = \frac{K - \beta RWA}{1 - \beta}.$$

Отсюда ограничение на размер резерва, который может быть доформирован без критического влияния на капитал кредитной организации:

$$L \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} v_i (\alpha_j - \alpha_i) q_{ij} \leq A.$$

Из данного соотношения получим следующий практический вывод. Рассматривая рейтинговую систему кредитной организации для определенного класса кредитных требований в условиях негативного сценария, мы можем указать максимальный размер совокупных кредитных требований этого класса — такой, при котором даже при негативном исходе с управленческой точки зрения не будут нарушены требования по запасу достаточности капитала банка:

$$L \leq A / \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} v_i (\alpha_j - \alpha_i) q_{ij}$$

или, с учетом выражения размера резерва через капитал и взвешенные по риску активы,

$$L \leq (K - \beta RWA) / (1 - \beta) \sum_{j>i} v_i (\alpha_j - \alpha_i) q_{ij}.$$

Полученная формула, с одной стороны, позволяет оценить оптимальный размер кредитных требований, т. е. она может найти свое применение в мониторинге рисков, с другой стороны, неудовлетворительные результаты расчетов (например, неправдоподобно низкое значение  $L$ ) могут стать причиной, как и в ранее рассмотренной задаче, корректировки рейтинговых систем.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для учета эффекта влияния экономического цикла на рейтинговые системы кредитных организаций могут быть полезны матрицы миграций,

построенные на основе концепции марковских цепей. В совокупности они представляют собой полезный статистический инструмент для решения широкого круга задач в рамках оценки кредитного риска. Построение такой матрицы требует определенных усилий в части поиска релевантной статистики на рассматриваемом горизонте времени, однако цель оправдывает средства, поскольку учет изменений в экономике представляет собой одну из самых существенных трудностей в процессе создания рейтинговых систем в рамках подхода внутренних рейтингов.

Построена модель трехфазного экономического цикла, которая при желании может быть сокращена или расширена в зависимости от приоритетов детализации. В то же время с помощью матриц миграции может быть решен и ряд практических управленческих задач, две из них рассмотрены в настоящей статье. Задачи, связанные с оценкой допустимых размеров кредитного портфеля, а также принимаемых рисков в терминах размера досоздаваемого резерва составляют существенную долю функционала систем управления рисками кредитных организаций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Figlewski S.* Estimating the Implied Risk Neutral Density for the U.S. Market Portfolio. — Oxford: Oxford University Press, 2008. — 43 p.
2. *Varotto S.* Stress Testing Credit Risk: The Great Depression Scenario. — URL: [https://www.bundesbank.de/Redaktion/EN/Downloads/Bundesbank/Research\\_Centre/Conferences/2011/2011\\_10\\_19\\_eltville\\_11\\_varotto\\_paper.pdf?\\_\\_blob=publicationFile](https://www.bundesbank.de/Redaktion/EN/Downloads/Bundesbank/Research_Centre/Conferences/2011/2011_10_19_eltville_11_varotto_paper.pdf?__blob=publicationFile) (дата обращения 4.05.2016).
3. *Gaffney E., Kelly R., McCann F.* A Transitions-Based Framework for Estimating Expected Credit Losses. — URL: <https://www.centralbank.ie/publications/Documents/16RT14.pdf> (дата обращения 4.05.2016).
4. *Aalen O., Johansen S.* An Empirical Transition Matrix for Nonhomogeneous Markov Chains Based on Censored Observations // *Scandinavian Journal of Statistics.* — 1978. — Vol. 5. — P. 141–150.
5. *Gavalas D., Syriopoulos T.* Bank Credit Risk Management and Rating Migration Analysis on the Business Cycle // *International Journal of Financial Studies.* — 2014. — Vol. 2. — P. 122–143.
6. *Grzybowska U., Karwański M.* Application of migration matrices to risk evaluation and their effect on portfolio value // *Quantitative Methods in Economics.* — 2013. — Vol. XIV, N 1. — P. 127–136.
7. *Trueck S., Rachev S.* Ratings Based Modeling of Credit Risk. — Academic Press, 2009. — 280 p.
8. *Krüger U., Stötzel M., Trück S.* Time Series Properties of a Rating System Based on Financial Ratios // *Deutsche Bundesbank Discussion Paper.* — 2005. — N 14. — 50 p.
9. *Kunovac D.* Estimation Credit Migration Matrices with Aggregate Data — Bayesian Approach / Working Papers W-30. — Zagreb: Croatian National Bank, 2011. — 36 p.
10. *Rodriguez-Yam G., Davis R., Scharf L.* Efficient Gibbs Sampling of Truncated Multivariate Normal with Application to Constrained Linear Regression. — URL: <http://www.stat.columbia.edu/~rdavis/papers/CLR.pdf> (дата обращения 25.05.2016).
11. *Agresti A.* Categorical Data Analysis / Wiley Series in Probability and Statistics. — New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2002. — 30 p.
12. *Grzybowska U., Karwański M., Orłowski A.* Examples of Migration Matrices Models and their Performance in Credit Risk Analysis // *Acta Physica Polonica.* — 2012. — Vol. 121. — P. 40–46.
13. *Валидация.* Комитет АРБ по стандартам Базель II и управлению рисками. — URL: [http://arb.ru/b2b/docs/validatsiya\\_komitet\\_arb\\_po\\_standartam\\_bazel\\_ii\\_upravleniyu\\_riskami-9752430/](http://arb.ru/b2b/docs/validatsiya_komitet_arb_po_standartam_bazel_ii_upravleniyu_riskami-9752430/) (дата обращения 4.05.2016).
14. *Василюк А., Карминский А., Сосюрко В.* Система моделей рейтингов банков в интересах IRB-подхода: сравнительный и динамический анализ. — М: ВШЭ, 2011. — 68 с.
15. *Карминский А., Пересецкий А., Головань С.* и др. Модели рейтингов международных агентств / Препринт # WP2007/70R. — М.: Российская экономическая школа, 2007. — 59 с.
16. *Фантаццини Д.* Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском. Часть 4: Управление кредитным риском // *Прикладная эконометрика.* — 2009. — № 1 (13). — С. 105–137.
17. *Жариков В.В.* Управление кредитными рисками. — Тамбов: Тамбовский гос. техн. ун-т, 2009. — 244 с.
18. *Жевага А.А., Моргунов А.В.* Использование сводных макроэкономических индикаторов для калибровки внутренних рейтинговых моделей в банках // *Деньги и кредит.* — 2015. — № 8. — С. 39–46.
19. *Fei F., Fuertes A.-M., Kalotychou E.* Credit Rating Migration Risk and Business Cycles // *Journal of Business Finance & Accounting.* — 2011. — Vol. 39. — P. 229–263.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Стежкин Александр Александрович — аспирант, Московский физико-технический институт (гос. ун-т), г. Долгопрудный, ✉ [stalex@phystech.edu](mailto:stalex@phystech.edu).

## Читайте в ближайших номерах

- ✓ Белов М.В. Модель управления человеческим капиталом фирмы
- ✓ Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Проблемы комплексирования и декомпозиции механизмов управления организационно-техническими системами
- ✓ Кирич Ю.П., Кириянов В.В. Робастное управление технологическими процессами производства губчатого титана
- ✓ Микрин Е.А., Сомов С.К. Оптимальное оперативное резервирование информации в системах обработки данных на базе вычислительных сетей
- ✓ Потехин А.И. Логическая модель железнодорожной станции

