

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

А. В. Сороквашин\*, А. И. Игнатов\*\*

\*\*\*МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва

\*✉ sorokvashinav@student.bmstu.ru, \*\*✉ ignatov@bmstu.ru

**Аннотация.** Осуществляется развитие корневого метода анализа динамических систем с характеристическим уравнением четвертой степени на основе пространственного аналога диаграммы Вышнеградского. Такой подход позволяет наглядно определять не только устойчивость системы, но и ключевые показатели качества переходных процессов без непосредственного вычисления корней. Предложен подход, использующий параметризацию сложных поверхностей, для построения трехмерной диаграммы расположения корней характеристического уравнения четвертой степени. На этой диаграмме произведено разделение решений на устойчивые и неустойчивые с помощью границы устойчивости. Для классификации характера корней используется поверхность нулевого дискриминанта, а также поверхность для анализа взаимного расположения корней относительно мнимой оси. Приведена методика вывода параметрически заданных поверхностей (границ). Получены выражения (в том числе параметрические) семейств поверхностей равной степени устойчивости, равной колебательности, равных наибольших значений модуля вещественной части корня. Результаты исследования могут найти практическое применение в качестве удобного инструмента для проектирования систем автоматического управления. Построенные в среде MATLAB трехмерные диаграммы позволяют визуально определять области параметров, одновременно обеспечивающие желаемые характер переходного процесса, быстродействие и колебательность.

**Ключевые слова:** диаграмма Вышнеградского, система четвертого порядка, характеристическое уравнение, устойчивость, дискриминант, расположение корней, параметризация, колебательность.

### ВВЕДЕНИЕ

Разработка систем автоматического управления неизменно связана с решением задачи обеспечения требуемого качества переходных процессов. Важнейшим свойством системы является устойчивость, а такие показатели, как время регулирования, колебательность, перерегулирование, являются ключевыми критериями, определяющими качество системы. Исследование переходных процессов на основе линеаризации дифференциальных уравнений позволило сформулировать требования к динамическим свойствам системы через наложение условий на корни соответствующих характеристических уравнений. Устойчивость и перечисленные показатели качества связаны с расположением корней характеристического уравнения на

комплексной плоскости, что составляет основу корневых методов оценки качества. Этот подход применяется и исследуется, например, в работах [1, 2].

Для ограничения области расположения корней (рис. 1) обычно используются понятия степени устойчивости  $\eta$ , колебательности  $\mu$  и абсолютного значения  $\xi$  вещественной части наиболее удаленного от мнимой оси корня [3].

Степень устойчивости  $\eta$  определяется как абсолютная величина вещественной части ближайшего к мнимой оси корня характеристического уравнения. Этот параметр связан с быстродействием системы:

$$T_{\text{пер}} \approx \frac{1}{\eta} \ln \left( \frac{1}{\Delta} \right),$$

где  $T_{\text{рег}}$  – время переходного процесса, а  $\Delta$  – допустимое относительное отклонение регулируемой величины. Таким образом, увеличение степени устойчивости ведет к сокращению времени переходного процесса.

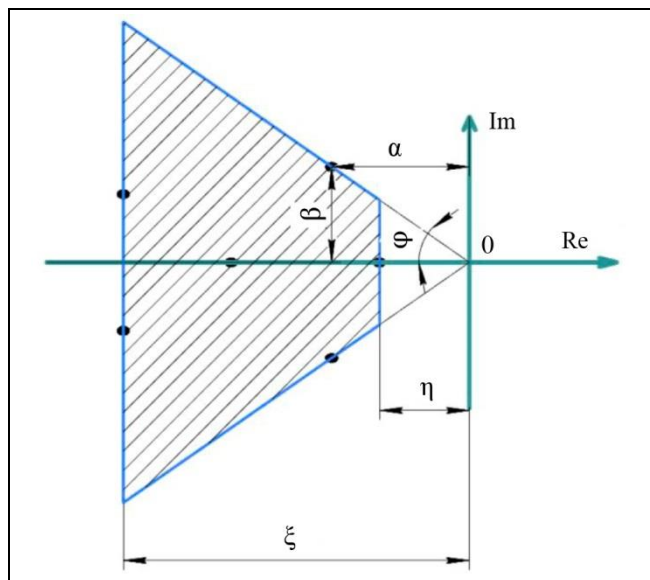


Рис. 1. Ограничение области расположения корней

Колебательностью системы  $\mu$  называют тангенс угла, образованного отрицательной вещественной полуосью и лучом из начала координат к корню, у которого отношение мнимой части к действительной максимально:

$$\mu = \operatorname{tg} \phi = \max \left( \frac{\beta}{\alpha} \right),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – значения действительной и мнимой части корней соответственно. Колебательность связана с логарифмическим декрементом затухания:

$$d = \frac{2\pi}{\mu},$$

т. е. колебательность  $\mu$  пропорциональна числу колебаний  $1/d$ , по истечении которых амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Из теории автоматического управления известна следующая взаимосвязь между перерегулированием и колебательностью:

$$\sigma_{\max} = e^{-\frac{\pi}{\mu}}.$$

Системы четвертого порядка не могут содержать регуляторов высоких порядков, а регуляторы низких порядков описываются небольшим набором параметров. К использованию регуляторов низкого порядка стремятся в первую очередь из-за простоты настройки, однако результаты работы [4]

показывают, что зачастую можно получить лучшие показатели качества, используя довольно простые регуляторы и менее сложные алгоритмы их синтеза.

В вопросах синтеза и анализа динамических систем выгодно выделяются графические методы. Их важным преимуществом является возможность исследования ближайшей окрестности выбранной точки. Это позволяет судить о системе в случае наличия отклонений реальных значений параметров от заданных, а также оставляет инженеру свободу выбора параметров системы в рамках допустимой области. Конечно, малые изменения параметров системы иногда могут существенным образом сказываться на ее работоспособности, однако графические методы обычно позволяют это парировать. Здесь стоит упомянуть классический метод  $D$ -разбиения, который (часто в модифицированном виде) до сих пор активно применяется на практике [4, 5]. В частности, в работе [5], чтобы обеспечить стабилизацию системы с интервальной неопределенностью параметров, применяют теорему Харитонова, которая позволяет установить устойчивость такой системы по устойчивости конечного набора характеристических полиномов. Также в статье [5] область допустимых решений ограничивают в том числе и по величинам допустимых колебательности и степени устойчивости; отмечается, что полиномы Харитонова применимы к обеспечению требуемых значений этих параметров при наличии интервальной неопределенности.

Для систем третьего порядка классическим и наглядным инструментом анализа служит диаграмма Вышнеградского. Данный подход позволяет исследовать динамические свойства системы через анализ параметров Вышнеградского  $A$  и  $B$  нормированного характеристического уравнения вида

$$x^3 + Ax^2 + Bx + 1 = 0,$$

не прибегая к непосредственному вычислению корней. Реализация такого подхода [6] довольно проста с использованием современных инструментов (например, в среде MATLAB).

Диаграмма Вышнеградского (рис. 2) представляет собой плоскость параметров  $A$  и  $B$ , разделенную на области, соответствующие различному характеру переходных процессов. Область устойчивости ограничена осями координат и гиперболой  $AB = 1$ . Внутри нее выделяются три характерные подобласти: область  $I$ , где ближе к мнимой оси расположены комплексные корни (колебательный процесс); область  $II$ , где все корни вещественные (апериодический процесс); область  $III$ , где ближе к мнимой оси находится вещественный корень (монотонный процесс).

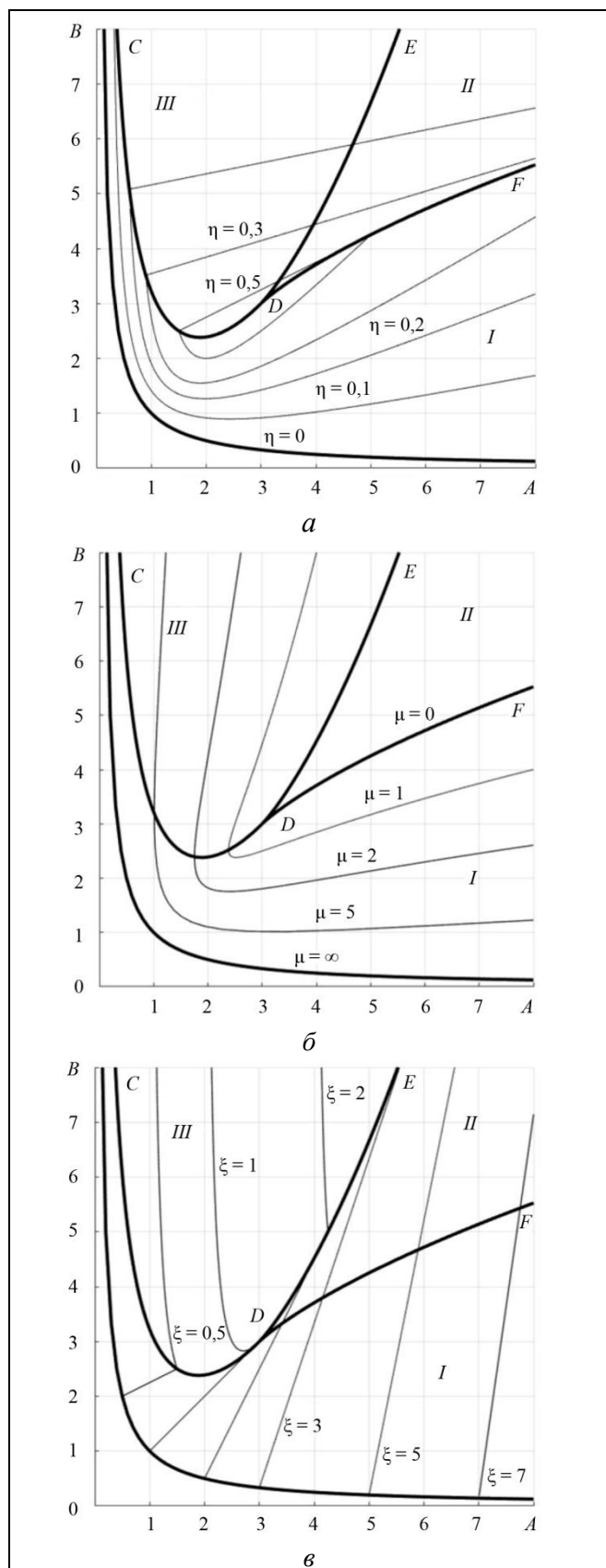


Рис. 2. Диаграмма Вышнеградского с дополнительными линиями: а – линии равной степени устойчивости; б – линии равных наибольших значений модуля вещественной части корня; в – линии равной колебательности

Для перехода от анализа к синтезу систем, удовлетворяющих заданным требованиям по быстродействию и колебательности, диаграмму Вышнеградского дополняют сетками линий равных  $\eta$ ,  $\mu$  и  $\xi$ . На практике область допустимых параметров системы сужается до пересечения зон, ограниченных линией требуемой степени устойчивости и линией допустимой колебательности, что позволяет выбирать параметры регулятора, одновременно обеспечивающие желаемое быстродействие и характер затухания. Примером такого подхода служит работа [7].

Наиболее удачное идейное продолжение диаграммы Вышнеградского описано в монографии [8], где авторы используют параметры, отличные от параметров Вышнеградского. Выбор альтернативных параметров позволил составить некоторые точные и приближенные алгебраические условия получения желаемых значений параметров качества системы. Также авторы обобщают свой оригинальный подход на системы любого порядка. Предлагаемые авторами графические зависимости (номограммы) для определения ряда показателей качества переходного процесса (времени нарастания, перерегулирования, колебательности, полосы пропускания и частоты среза) систем четвертого порядка и выше построены в основном численными методами и с использованием аппроксимаций, что затрудняет первичное получение номограмм по сравнению с подходами, где используются лишь аналитические зависимости. Предлагаются как трехмерная объединенная номограмма качества в виде серии двумерных сечений, так и двумерная универсальная номограмма качества. Применение ряда двумерных номограмм непосредственно из монографии кажется не очень удобным в современных условиях, хотя идея «оцифровать» их выглядит весьма перспективной.

Целью настоящей работы является развитие подхода Вышнеградского и построение его прямого аналога для систем четвертого порядка, что представляет значительный практический интерес для проектирования более сложных динамических систем. Следует отметить, что до сих пор изучаются и систематизируются методы решения [9] и анализа систем четвертого порядка. Например, в статье [10] подробно рассматривается классификация уравнений четвертой степени в зависимости от числа и кратности их действительных корней. Работа [11] в целом посвящена особенностям уравнений с кратными корнями, хотя некоторые из выводов могут быть распространены на уравнения четвертой степени без кратных корней. Широко применяются для систем четвертого порядка и



матричные методы, например, техника линейных матричных неравенств [12], позволяющая вычислить параметры системы, обеспечивающие расположение корней строго в заданной области комплексной плоскости. Формула Аккермана, а также ее обобщения [13] и упрощения [14] позволяют получить заранее заданное расположение корней. В качестве таких наиболее удачных расположений корней часто используют стандартные полиномы [15] (полиномы Ньютона, Баттерворта, Бесселя и др.), хотя не всегда возможно получение характеристического уравнения в виде стандартного полинома при учете всех требований к системе и ограничений, наложенных на коэффициенты.

Некоторые попытки переосмысления диаграммы Вышнеградского, включая расширение до четвертого порядка, были предприняты в работах [16] и [17]. В статье [17], в частности, строится и исследуется поверхность нулевого дискриминанта. Эта поверхность, а также характер корней в областях, разделяемых ей, рассматривается в работах [18] и [19]. Статья [20] посвящена непосредственно дискриминантам и их связи с кратностью корней. Глубокое исследование корней уравнения четвертой степени с построением ряда диаграмм предпринято в работе [21].

В качестве основного допущения в настоящей работе принято то, что система описывается линейной стационарной моделью, динамические свойства которой полностью определяются расположением корней соответствующего характеристического уравнения четвертой степени. Также предполагается, что требования к качеству переходного процесса (время регулирования, перерегулирование) могут быть описаны через ограничения на расположение корней на комплексной плоскости с использованием параметров  $\eta$ ,  $\mu$  и  $\xi$ . Также следует отметить, что в рамках данной работы практически не рассматриваются случаи, соответствующие наличию кратных корней характеристического уравнения.

Построение и верификацию полученных в ходе работы поверхностей будем проводить в среде MATLAB. Работа с алгебраическими выражениями в силу их громоздкости проводится с использованием библиотеки SymPy [22] для языка Python.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим характеристическое уравнение системы четвертого порядка:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) приводится к нормированному виду путем преобразования:

$$\lambda = x \cdot \Omega_0 = x \cdot \sqrt[4]{\frac{a_4}{a_0}};$$

$$A = \frac{a_1}{\sqrt[4]{a_4 a_0^3}}; B = \frac{a_2}{\sqrt[4]{a_4^2 a_0^2}}; C = \frac{a_3}{\sqrt[4]{a_4^3 a_0}}.$$

Используемое масштабирование переменной обеспечивает единичный среднегеометрический корень  $\Omega_0$ . Полученное нормированное уравнение имеет вид

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 1 = 0. \quad (2)$$

В работе [17] формулируется критерий устойчивости Гурвица в пространстве параметров  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$A > 0; B > 0; C > 0; C(AB - C) - A^2 > 0, \quad (3)$$

а дискриминант уравнения (2) выражается следующим образом:

$$D(A, B, C) = 256 - 192AC - 128B^2 +$$

$$+ 144BC^2 - 27C^4 + 144A^2B - 6A^2C^2 -$$

$$- 80AB^2C + 18ABC^3 + 16B^4 - 4B^3C^2 -$$

$$- 27A^4 + 18A^3BC - 4A^3C^3 - 4A^2B^3 + A^2B^2C^2. \quad (4)$$

Следует отметить, что поверхность нулевого дискриминанта не только разделяет случаи с различным характером расположения корней, но и (по определению) указывает на наличие кратных корней. Поскольку в реальных задачах наличие в системе кратных корней обычно нежелательно, попадание на поверхность нулевого дискриминанта может служить сигналом о необходимости изменения параметров системы.

Для случая двух действительных и пары комплексно сопряженных корней следует разделить случаи разного взаимного расположения корней относительно мнимой оси. На диаграмме Вышнеградского для решения схожей задачи служит линия  $CD$ . Для уравнения четвертой степени будем обозначать соответствующую поверхность  $G(A, B, C) = 0$ . Далее будем называть состоящую из поверхностей границы устойчивости  $D(A, B, C) = 0$  и  $G(A, B, C) = 0$  пространственную диаграмму V-4 (Vysnegradsky-4).

В работе [3] предлагается использовать смещенное уравнение для построения линий равной степени устойчивости. Вводя уравнение, смещенное относительно (2) вправо на величину степени устойчивости  $\eta$ , с использованием критерия Гурвица можно получить уравнения линий равной

степени устойчивости. Смещение уравнения (2) вправо на величину абсолютного значения  $\xi$  вещественной части наиболее удаленного от мнимой оси корня с последующим отражением относительно мнимой оси позволяет аналогично получить линии равных  $\xi$ . Ввод смещенного уравнения также удобен для вывода в параметрическом виде уравнений кривых, разделяющих диаграмму Вышнеградского на характерные области. Используя соотношения, вытекающие из теоремы Виета для нормированного уравнения (2) при наличии пары комплексных корней, получают линии равной колебательности.

Запишем смещенное уравнение, полученное путем замены  $x = z - \eta$ :

$$z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4 = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -4\eta + A; \quad A_2 = 6\eta^2 - 3A\eta + B; \\ A_3 &= -4\eta^3 + 3A\eta^2 - B\eta + C; \\ A_4 &= \eta^4 - A\eta^3 + B\eta^2 - C\eta + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ $D(A, B, C) = 0$

Применимость на практике громоздкого выражения (4) ставится под вопрос, поэтому рассмотрим альтернативный подход к записи этого выражения. Поверхность нулевого дискриминанта  $D(A, B, C) = 0$  соответствует наличию кратных корней уравнения (2). Смещение уравнения не меняет взаимного расположения корней, поэтому  $D(A, B, C) = 0$  и при наличии кратных корней уравнения (5). Нетрудно заметить, что случай  $A_3 = 0$  и  $A_4 = 0$  соответствует двукратному нулевому корню в уравнении (5):

$$z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 = z^2(z^2 + A_1 z + A_2) = 0.$$

Выпишем систему условий  $A_3 = 0$  и  $A_4 = 0$  в терминах  $A, B, C, \eta$ :

$$\begin{cases} -4\eta^3 + 3A\eta^2 - B\eta + C = 0, \\ \eta^4 - A\eta^3 + B\eta^2 - C\eta + 1 = 0. \end{cases}$$

Элементарными преобразованиями система может быть приведена к следующей форме:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \left( \frac{B}{\eta} + 3\eta - \frac{1}{\eta^3} \right), \\ C = \frac{1}{2} \left( B\eta + \frac{3}{\eta} - \eta^3 \right). \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) фактически является параметрической формой задания поверхности  $D(A, B, C) = 0$ , причем координата  $B$  сама является параметром. Такой формат задания поверхности чрезвычайно удобен для построения сечений плоскостями уровня  $B = \text{const}$ .

Следует отметить, что поверхность  $D(A, B, C) = 0$  обладает симметрией относительно плоскости  $A = C$ . В уравнениях (6) эта симметрия выражается в виде  $A(B, \eta) = C(B, \frac{1}{\eta})$ . Симметрия

поверхности может быть использована для упрощения построения: можно построить часть поверхности для значений  $\eta \in [1; \eta_{\max}]$ , а затем зеркально отразить ее относительно плоскости  $A = C$ .

Система (7) может быть преобразована и другими способами, что удобно для построения сечений другими плоскостями, например

$$\begin{cases} B = -3\eta^2 + 2A\eta + \frac{1}{\eta^2}, \\ C = -2\eta^3 + A\eta^2 + \frac{2}{\eta}. \end{cases} \quad (8)$$

Можно заметить, что при  $\eta = \text{const}$  решением систем (7) и (8) будут являться прямые линии (как пересечение двух плоскостей). Другими словами, поверхность нулевого дискриминанта образована пространственным движением прямой.

## 3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ $G(A, B, C) = 0$

Обозначим корни уравнения (2):

$$x_1 = \alpha + i\beta; \quad x_2 = \alpha - i\beta; \quad x_3 = \gamma; \quad x_4 = \delta.$$

Запишем уравнение четвертой степени через его корни, учитывая, что  $\alpha = \delta$  и два корня – комплексно-сопряженные:

$$((x - \alpha)^2 + \beta^2)(x - \alpha)(x - \gamma) = 0.$$

Раскрыв скобки и собрав коэффициенты при степенях  $x$ , сопоставим коэффициенты полученного выражения с уравнением (2) и получим нелинейную систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} A = -3\alpha - \gamma, \\ B = 3\alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha\gamma, \\ C = -\alpha^3 - 3\alpha^2\gamma - \alpha\beta^2 - \gamma\beta^2, \\ 1 = \alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2). \end{cases} \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что используя последнее уравнение системы (9), можно уменьшить число переменных:

$$\begin{cases} A = -3\alpha - \gamma, \\ B = 2\alpha^2 + 3\alpha\gamma + \frac{1}{\alpha\gamma}, \\ C = -\frac{\alpha + \gamma}{\alpha\gamma} - 2\alpha^2\gamma. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) является одним из вариантов параметрического задания поверхности  $G(A, B, C) = 0$ . Построение поверхности с использованием системы (10) в среде MATLAB требует довольно тонкой настройки для получения качественного результата. Первое уравнение системы может быть использовано для избавления от переменной  $\alpha$  или  $\gamma$ . Следует попробовать также иной подход к параметризации. Покажем, что случай  $A_1A_2 - A_3 = 0$  и  $A_4 = 0$  соответствует наличию нулевого и пары чисто мнимых корней смещенного уравнения (5):

$$\begin{aligned} z^4 + A_1z^3 + A_2z^2 + A_1A_2z &= z(z^3 + A_1z^2 + A_2z + A_1A_2) = \\ &= z(z(z^2 + A_2) + A_1(z^2 + A_2)) = z((z^2 + A_2)(z + A_1)); \\ z_1 &= 0; \quad z_{2,3} = \pm i\sqrt{A_2}; \quad z_4 = -A_1. \end{aligned}$$

Поскольку уравнение (5) смещено относительно (2), выполнение условий  $A_1A_2 - A_3 = 0$  и  $A_4 = 0$  соответствует границе различных взаимных расположений корней  $G(A, B, C) = 0$ . Эти условия могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} -20\eta^3 + 15A\eta^2 - (3A^2 - 2B)\eta + AB - C = 0, \\ \eta^4 - A\eta^3 + B\eta^2 - C\eta + 1 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Элементарными преобразованиями система (11) может быть приведена к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} B = -7\eta^2 + 3A\eta - \frac{1}{3\eta^2 - A\eta}, \\ C = -6\eta^3 + 2A\eta^2 + \frac{2\eta - A}{3\eta^2 - A\eta}. \end{cases} \quad (12)$$

Наличие в первом уравнении системы (11) как первой, так и второй степени коэффициента  $A$ , делает затруднительными для записи и малоприспособными для использования другие формы системы, использующие только один независимый параметр  $\eta$ . Применение системы (12) для построения поверхности затруднено для случаев, когда знаменатель стремится к нулю (при  $A \approx 3\eta$ ). Построим рассмотренные поверхности пространственной диаграммы V-4, а также ее сечение поверхностью уровня  $A = \text{const}$  (рис. 3).

#### 4. ПОВЕРХНОСТИ РАВНОЙ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ

На диаграмме (см. рис. 3) есть две области, где ближайшими к мнимой оси являются два комплексно-сопряженных корня. Для этих областей смещенное уравнение (5) достигает колебательной границы устойчивости, т. е. имеет два корня

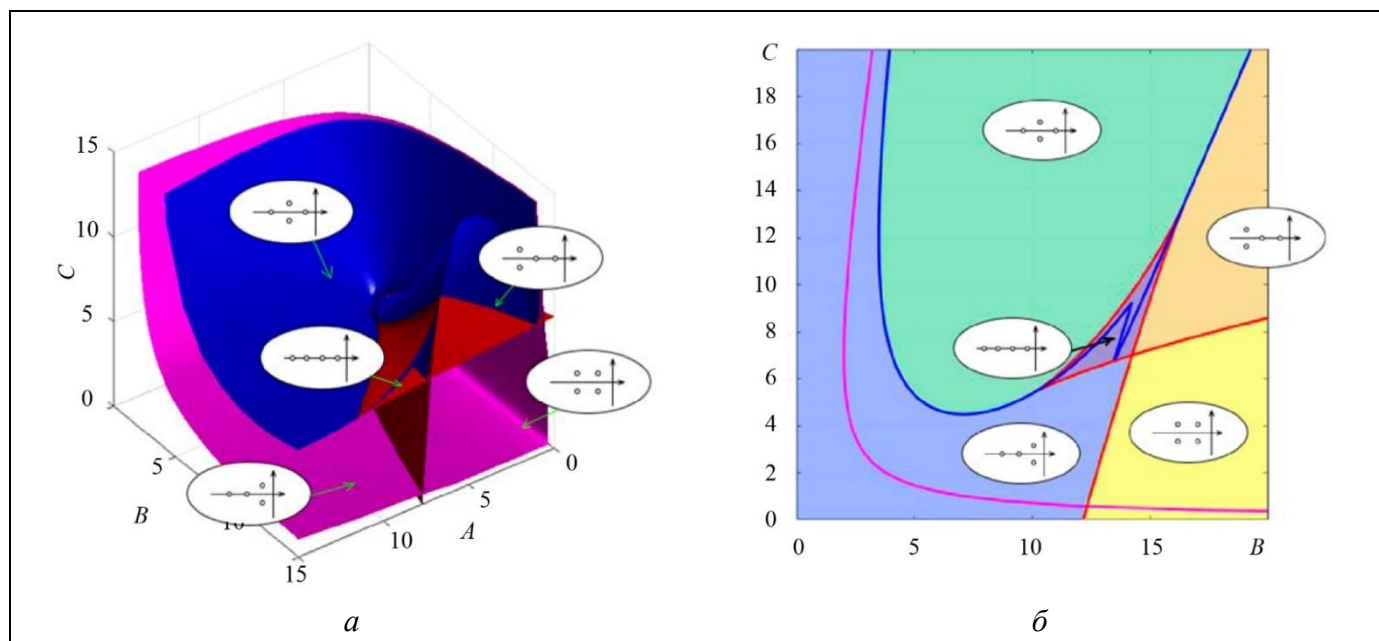


Рис. 3. Диаграмма V-4 с указанием характерных расположений корней: а – трехмерная диаграмма, построенная с использованием формул (3), (7) и (10); б – сечение при  $A = 7$ , построенное с помощью формул (3), (8) и (12). Граница устойчивости – сиреневым,  $D(A, B, C) = 0$  – красным,  $G(A, B, C) = 0$  – синим

в левой полуплоскости и пару чисто мнимых корней. В соответствии с критерием Гурвица эта граница будет достигаться при выполнении условий

$$\begin{aligned} A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_4 - A_3^2 &= 0, \\ A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, A_4 > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Запишем равенство из выражения (13) в обозначениях  $A, B, C, \eta$ :

$$\begin{aligned} 64\eta^6 - 96A\eta^5 + 16(3A^2 + 2B)\eta^4 - \\ - 8A(A^2 + 4B)\eta^3 + 4(2A^2B + AC + B^2 - 4)\eta^2 - \\ - 2A(AC + B - 4)\eta + ABC - A^2 - C^2 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В оставшихся трех областях диаграммы V-4 ближайший к мнимой оси корень уравнения (5) действительный, что соответствует апериодической границе устойчивости смещенного уравнения. Эта граница достигается при

$$\begin{aligned} A_4 = 0, A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, \\ A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_4 - A_3^2 > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом равенства из выражения (15) последнее неравенство можно переписать в виде:

$$A_1 A_2 - A_3 > 0,$$

или в параметрах  $A, B, C, \eta$ :

$$-20\eta^3 + 15A\eta^2 - (3A^2 + 2B)\eta + AB - C > 0.$$

Первое условие (равенство) апериодической границы устойчивости смещенного уравнения в параметрах  $A, B, C, \eta$ :

$$C = \eta^3 - A\eta^2 + B\eta + \frac{1}{\eta}. \quad (16)$$

При  $\eta = \text{const}$  уравнение (16) задает плоскость.

Для построения поверхностей равной степени устойчивости (рис. 4) требуется вывести поверхности, задаваемые равенствами (14), (16) для интересующих значений  $\eta$  и ограниченные неравенствами из выражений (13), (15) соответственно.

Неявное задание поверхности (14) может быть неудобно для построения. Перейдем к ее параметрическому заданию с помощью замены

$$k = \frac{A_3}{A_1}.$$

Выражение (12) примет вид:

$$kA_1^2 A_2 - A_1^2 A_4 - k^2 A_1^2 = A_1^2 (kA_2 - A_4 - k^2) = 0.$$

В рассматриваемой области  $A_1 > 0$ . Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} A_3 - kA_1 = 0, \\ kA_2 - A_4 - k^2 = 0. \end{cases}$$

Преобразуя эту систему, получим:

$$\begin{cases} B = \frac{-3\eta^4 + 2A\eta^3 - 2k\eta^2 + 2Ak\eta + k^2 + 1}{\eta^2 + k}, \\ C = \frac{-2\eta^5 + A\eta^4 - 4k\eta^3 + 2Ak\eta^2 - 2(k^2 - 1)\eta + Ak^2}{\eta^2 + k}. \end{cases} \quad (17)$$

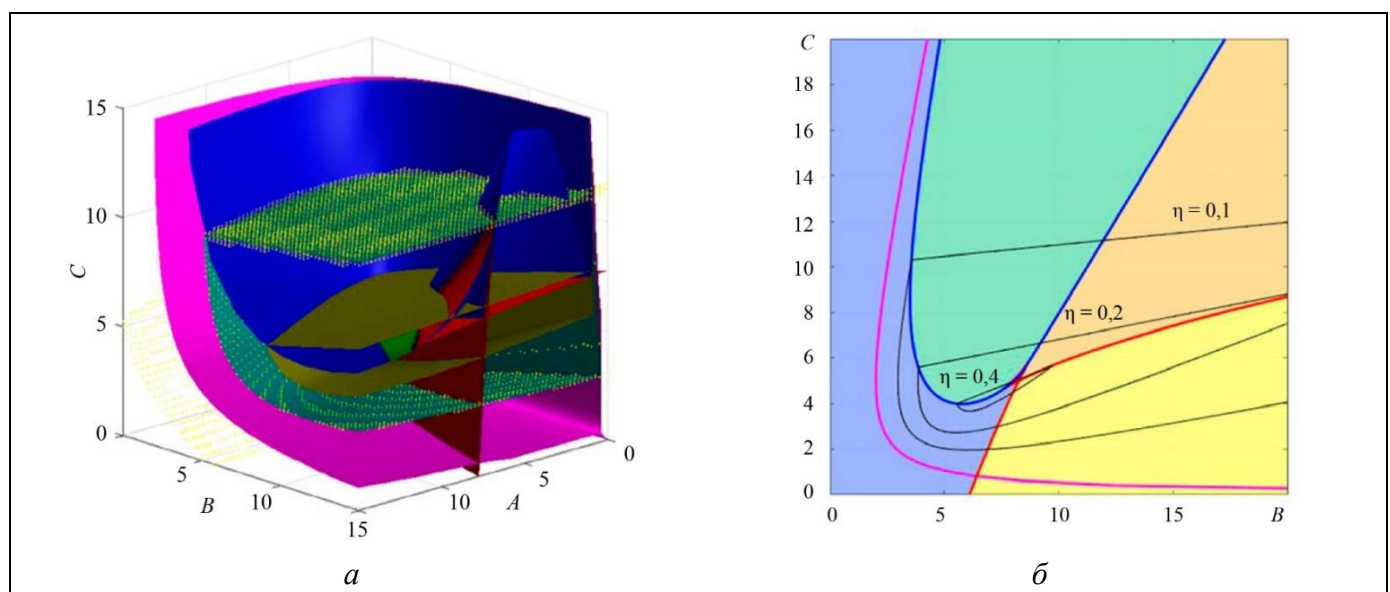


Рис. 4. Поверхности равной степени устойчивости  $\eta$ : а – на трехмерной диаграмме с верификацией; б – в сечении  $A = 5$



Система (17) является удобным способом параметрического задания семейства поверхностей. Совместное использование выражений (8), (12) и (17) хорошо подходит для построения сечений плоскостями  $A = \text{const}$ .

Стоит отметить, что при  $\eta=0$  условие (14) совпадает с условием границы устойчивости для уравнения (2). Наибольшая степень устойчивости ( $\eta=1$ ) достигается в точке  $A=4$ ,  $B=6$ ,  $C=4$ , что легко проверить подстановкой в формулы (14) и (16). Данная точка соответствует полиному Ньютона с четырехкратным действительным корнем  $\chi_{1,2,3,4} = -1$ . Можно сказать, что область действительных корней «начинается» из этой точки.

Следует помнить и то, что на диаграмме строятся поверхности равной степени устойчивости нормированного уравнения и для перехода к степени устойчивости исходного уравнения требуется домножение на среднегеометрический корень:

$$\eta_{\text{исх}} = \eta \Omega_0 = \eta \cdot \sqrt[4]{\frac{a_4}{a_0}}.$$

## 5. ПОВЕРХНОСТИ РАВНЫХ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ МОДУЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТИ КОРНЯ

Если сместить мнимую ось нормированного уравнения (2) на величину  $\xi$  наибольшего значения модуля вещественной части корня, то смещенное уравнение будет иметь вид

$$z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4 = 0, \quad (18)$$

где коэффициенты  $A_1, A_2, A_3, A_4$  определяются формулами (6), в которые вместо  $\eta$  следует подставить величину  $\xi$ . Корни уравнения (18), за исключением находящихся на мнимой оси, располагаются в правой полуплоскости. Заменяя в этом уравнении переменную  $z$  на  $-z$ , запишем уравнение

$$z^4 - A_1 z^3 + A_2 z^2 - A_3 z + A_4 = 0, \quad (19)$$

в котором корни, бывшие правыми в уравнении (18), теперь располагаются слева от мнимой оси.

Если на мнимой оси находится вещественный корень смещенного уравнения (19), а остальные корни уравнения находятся в левой полуплоскости, то имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_4 = 0, (-A_1) > 0, A_2 > 0, \\ (-A_3) > 0, -A_1 A_2 + A_3 > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В случае, когда на мнимой оси находится пара мнимых корней уравнения (19), а остальные корни лежат в левой полуплоскости, выполняется

$$\begin{aligned} A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_4 - A_3^2 &= 0, \\ (-A_1) > 0, A_2 > 0, (-A_3) > 0, A_4 > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Условия (20) и (21) задают поверхности, соответствующие равным значениям абсолютной величины  $\xi$  вещественной части наиболее удаленного от мнимой оси корня, в тех областях, где самым удаленным является действительный корень и пара комплексно-сопряженных соответственно.

Равенства, содержащиеся в выражениях (20) и (21), совпадают с уравнениями (16) и (14) соответственно. Таким образом, построение поверхностей равных наибольших значений модуля вещественной части корня (рис. 5) выполняется так же, как и построение поверхностей равной степени устойчивости, с той лишь разницей, что поверхности визуализируются в других областях.

В целях верификации полученных соотношений для поверхностей равной степени устойчивости и равных наибольших значений модуля вещественной части корня покажем на диаграммах (см. рис. 4 и 5) точки, соответствующие  $\eta = 0,1 \pm 3\%$  и  $\xi = 0,7 \pm 5\%$ . Эти точки получены путем вычисления корней уравнения четвертой степени с коэффициентами  $A, B$  и  $C$  встроеным численным методом MATLAB в каждой точке (узле) равномерной расчетной сетки и определения в этих точках наименьшей ( $\eta$ ) и наибольшей ( $\xi$ ) абсолютной величины вещественной части корней.

## 6. ПОВЕРХНОСТИ РАВНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

Колебательный режим возможен только при наличии комплексно-сопряженных корней. Запишем уравнение четвертой степени через его корни, учитывая, что два корня – комплексно-сопряженные:

$$((x - \alpha)^2 + \beta^2)(x - \gamma)(x - \delta) = 0. \quad (22)$$

Раскрыв скобки и собрав коэффициенты при степенях  $x$ , сопоставим коэффициенты полученного выражения с уравнением (2) и получим систему

$$\begin{cases} A = -2\alpha - \gamma - \delta, \\ B = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + \gamma\delta, \\ C = -(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma + \delta) - 2\alpha\gamma\delta, \\ 1 = \gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2). \end{cases}$$

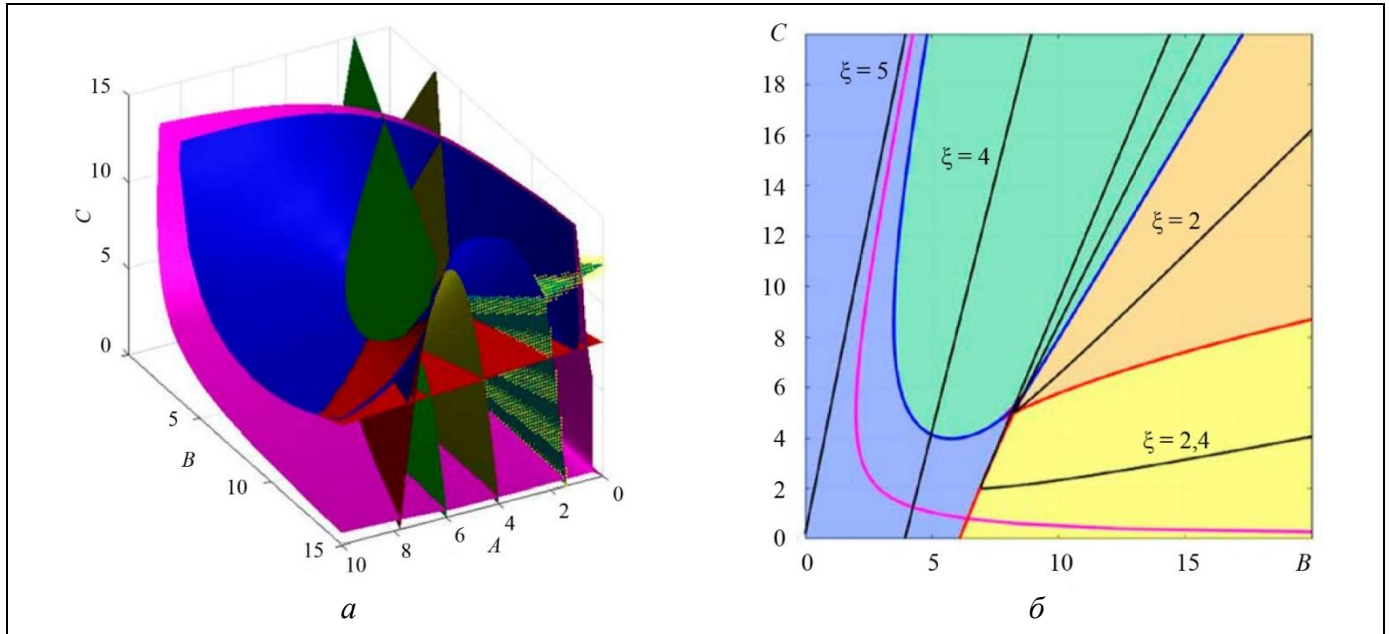


Рис. 5. Поверхности равных наибольших значений модуля  $\xi$  вещественной части корня: а – на трехмерной диаграмме с верификацией (слева направо:  $\xi = 3, \xi = 2, \xi = 0,7$ ); б – в сечении  $A = 5$

Вводя величину колебательности  $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$  для исключения переменной  $\beta$ , а также исключая переменные  $\gamma$  и  $\delta$ , можно прийти к параметрическому заданию поверхностей в виде:

$$\begin{cases} B = -2\alpha A - 3\alpha^2 + \alpha^2\mu^2 + \frac{1}{\alpha^2(1+\mu^2)}, \\ C = \alpha^2(1+\mu^2)A + 2\alpha^3(1+\mu^2) - \frac{2}{\alpha(1+\mu^2)}. \end{cases} \quad (24)$$

Стоит отметить, что при использовании вместо выражения (22) уравнения

$$((x-\alpha)^2 + \beta^2)((x-\gamma)^2 + \delta^2) = 0$$

тоже можно прийти к системе (24). Нетрудно заметить, что в отсутствие колебательности ( $\mu = 0$ ) система уравнений (22) эквивалентна системе (8), определяющей поверхность нулевого дискриминанта. Это можно установить, заменив параметр:  $\alpha \rightarrow -\eta$ . С ростом значения  $\mu$  поверхность равной колебательности приближается к границе устойчивости (рис. 6).

На рис. 6 построено несколько поверхностей равной колебательности. Также на диаграмме отмечены точки, соответствующие величинам  $\mu = 2 \pm 3\%$ . Эти точки получены путем вычисления корней уравнения четвертой степени в каждой точке (узле) равномерной расчетной сетки и определения в этих точках колебательности  $\mu$  непосредственно по корням уравнения.

При верификации обнаружено, что нужно выводить только части поверхностей по одну сторону от их самопересечения. Также форма поверхностей равной колебательности наводит на мысли о симметрии относительно плоскости  $A = C$ . Заметим, что систему (24) можно привести и к виду:

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha^2(\mu^2 - 3) - B}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^3(1+\mu^2)}, \\ C = (\alpha^3(1+\mu^2) - B\alpha)\frac{1+\mu^2}{2} - \frac{\mu^2 - 3}{2\alpha(1+\mu^2)}. \end{cases} \quad (25)$$

Обратим внимание на то, что  $A(B, \mu, \alpha) = C\left(B, \mu, \frac{1}{\alpha(1+\mu^2)}\right)$ . Это говорит о наличии симметрии поверхностей равной колебательности  $\mu = \text{const}$  относительно плоскости  $A = C$ . Наличие симметрии позволяет заключить, что линии самопересечения лежат в этой плоскости, а это значительно упрощает рассуждения. Полагая  $C = A$ , можно выразить  $A$  из второго уравнения системы (25). Подставляя полученное выражение для  $A$  в первое уравнение этой системы, получим параметрически заданные кривые самопересечения:

$$\begin{cases} A = C = -2\alpha - \frac{2}{\alpha(1+\mu^2)}, \\ B = \alpha^2(1+\mu^2) + \frac{4\alpha^2 + 1}{\alpha^2(1+\mu^2)}. \end{cases} \quad (26)$$

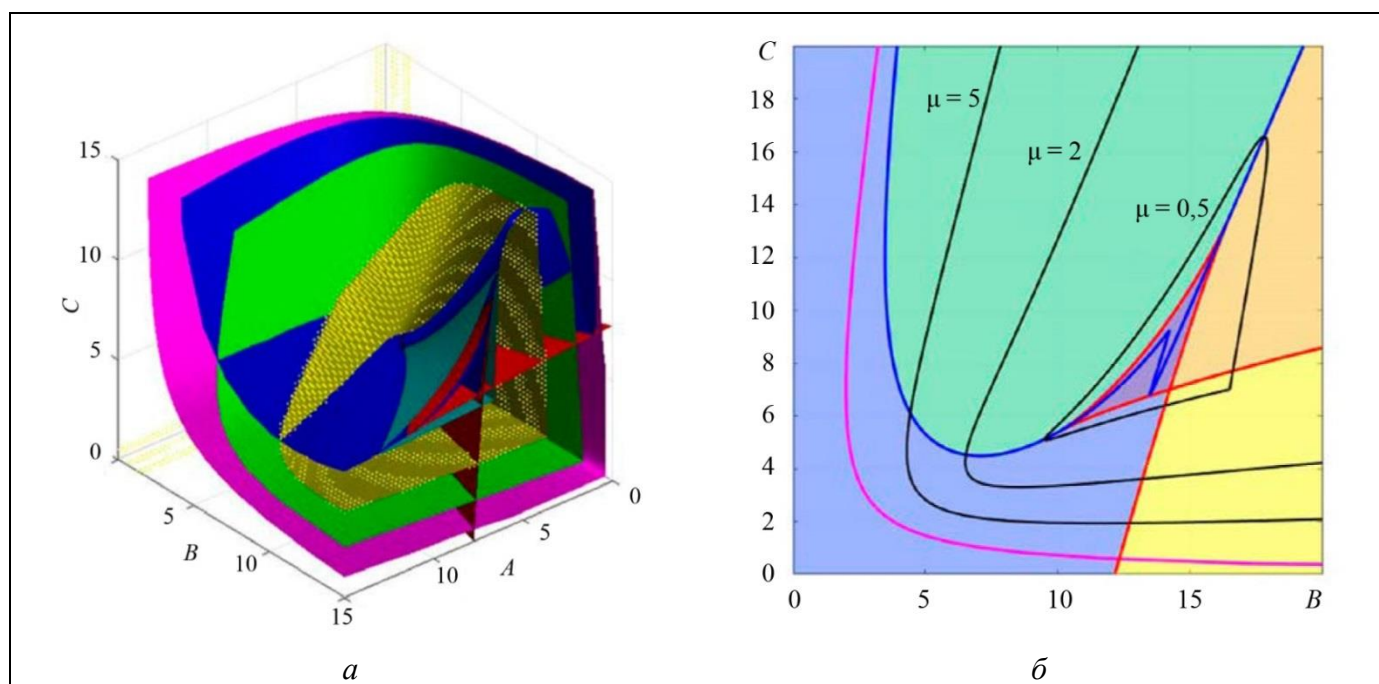


Рис. 6. Поверхности равной колебательности  $\mu$ : а – на трехмерной диаграмме с верификацией; б – в сечении  $A = 7$

Получив уравнения линий самопересечения, можно различить точки поверхностей, лежащие по разные стороны от этих линий. При построении поверхностей равной колебательности по формулам (24) значения  $A$  и  $\alpha$  задаются (варьируются). Можно рассчитывать по первому уравнению системы (26) величину  $A_{\text{line}}(\alpha, \mu)$  и выводить только те точки, которые удовлетворяют условию  $A > A_{\text{line}}$ .

Также можно отметить, что любая поверхность колебательности  $\mu$ , как и поверхность нулевого дискриминанта, образована пространственным движением прямой. Стоит добавить, что симметрия поверхностей равной колебательности может быть использована для упрощения построения по формулам (25): можно строить только часть поверхности для значений  $\alpha \in [\alpha_{\min}; -1]$ , а затем зеркально отражать ее относительно плоскости  $A = C$ .

Также построим (рис. 7) поверхности равной колебательности в параметрах, предлагаемых в монографии [8]:

$$\delta_1 = \frac{a_3^2}{a_2 a_4} = \frac{C^2}{B}; \quad \delta_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} = \frac{B^2}{AC}; \quad \delta_3 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} = \frac{A^2}{B}.$$

Нетрудно заметить, что эти поверхности легко аппроксимируются плоскостями уровня, что привело к формулированию в работе [8] достаточных и необходимых условий получения требуемой колебательности.

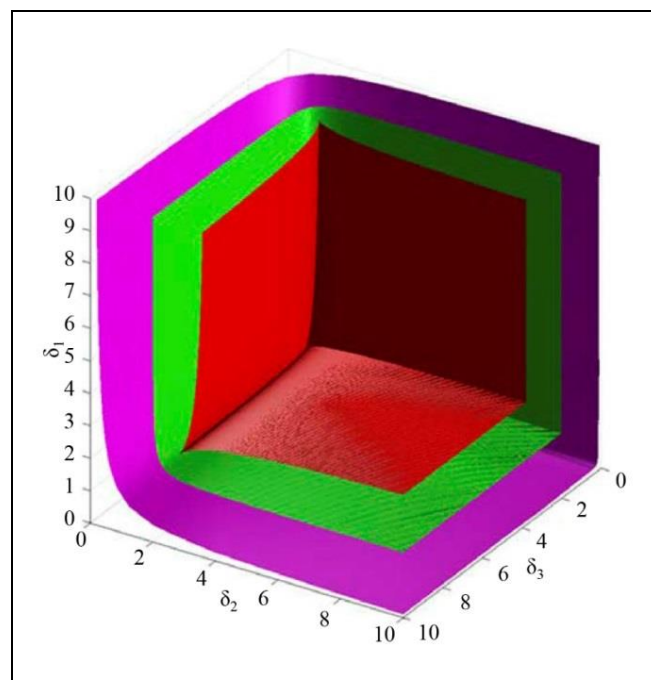


Рис. 7. Поверхности равной колебательности  $\mu$  в параметрах  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  (граница устойчивости ( $\mu = \infty$ ) – сиреневым,  $\mu = 0$  – красным,  $\mu = 1$  – зеленым)

На рис. 8 показаны точки, соответствующие стандартным полиномам Ньютона, Бесселя и Баттерворта. Нетрудно заметить, что последние две лежат в области, соответствующей устойчивым колебательным процессам, на достаточном удалении от границы устойчивости.

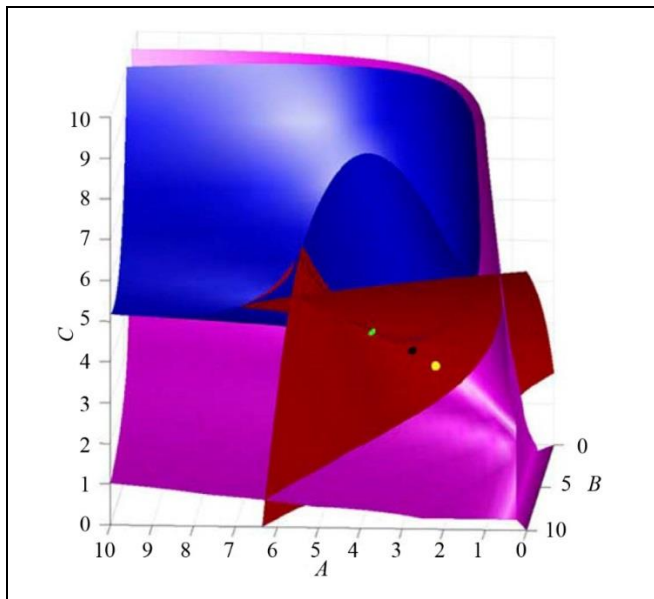


Рис. 8. Диаграмма V-4 с точками, соответствующими стандартным полиномам: Ньютона (зеленым), Бесселя (черным) и Баттерворта (желтым)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан полный аналог диаграммы Вышнеградского для характеристических уравнений четвертой степени, реализованный в виде трехмерной диаграммы в пространстве параметров  $A$ ,  $B$  и  $C$ , которые представляют собой коэффициенты нормированного уравнения (2). На диаграмме выделены основные разделяющие поверхности: граница устойчивости, поверхность нулевого дискриминанта и граница различных взаимных расположений корней, позволяющая определить доминирующий тип корней. Получены параметрические выражения для семейств поверхностей, соответствующих заданным требованиям к качеству системы: равной степени устойчивости (быстродействию), равной колебательности (перерегулированию) и равных значений модуля вещественной части наиболее удаленного от мнимой оси корня. Дополнительным преимуществом является параметрическая форма заданных поверхностей, что упрощает их вычисление и отображение по сравнению с неявными формами. Также все полученные поверхности могут быть заданы либо явно, либо удобным для построения сечений способом. На основе таких сечений можно создать удобный графический интерфейс выбора нормированных коэффициентов с возможностью просмотра переходного процесса, как, например, сделано в работе [4]. Проведена верификация всех поверхностей и приведен пример их визуализации в среде MATLAB.

Разработанная диаграмма является средством предварительного проектирования. Ее применение также представляется целесообразным при создании самого объекта управления. В дальнейшем выбор коэффициентов по диаграмме может производиться с учетом некоторых наложенных ограничений. Так, например, если коэффициенты исходного характеристического уравнения фактически зависят от двух параметров, то на трехмерной диаграмме можно построить поверхность, вдоль которой и следует выбирать коэффициенты. На диаграмму могут быть нанесены точки, соответствующие полиномам Харитонова, если требуется исследовать робастную устойчивость системы или оценить разброс ее показателей качества. Наиболее разумным представляется применение диаграммы совместно с ПО, осуществляющим численное моделирование переходных процессов. Такой программный комплекс может быть легко реализован, например, на основе MATLAB.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Nesenchuk, A.A., Opeiko, O.F. Synthesis of a Boiler Steam Pressure Robust Control System Using the Interval Systems Family Extended Root Locus // DEStech Transactions on Engineering and Technology Research. – 2018. – No. 13. – P. 434–439.
2. Patil, M.D., Vyawahare, V.A., Bhole, M.K. A New and Simple Method to Construct Root Locus of General Fractional-Order Systems // ISA Transactions. – 2014. – Vol. 53, no. 2. – P. 380–390.
3. Воронов А.А., Титов В.К., Новогранов Б.Н. Основы теории автоматического регулирования и управления / – М.: Высшая школа, 1977. – 519 с. [Voronov, A.A., Titov, V.K., Novogranov, B.N. Osnovy teorii avtomaticheskogo regulirovaniya i upravleniya. – Moscow: Vysshaya shkola, 1977. – 519 s. (In Russian)]
4. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию  $H_\infty$  и по критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 3. – С. 119–130. [Kiselev, O.N., Polyak, B.T. Design of Low-Order Controllers by the  $H_\infty$  and Maximal-Robustness Performance Indices // Autom. Remote Control. – 1999. – Vol. 60, no. 3. – P. 393–402.]
5. Щербakov П.С. Построение регуляторов заданной структуры при соблюдении инженерных требований // Проблемы управления. – 2009. – № 5. – С. 9–17. [Shcherbakov, P.S. Fixed Order Controller Design Subject to Engineering Specifications // Automation and Remote Control. – 2010. – Vol. 71, no. 6. – P. 1217–1229.]
6. Нестеров А.В., Нестеров С.В. Диаграмма Вышнеградского в системе компьютерной математики MATLAB // Научные труды КубГТУ. – 2016. – № 13. – С. 88–99. [Nesterov, A.V., Nesterov, S.V. Vyshnegradsky's Diagram in MATLAB System // Scientific Works of the Kuban State Technological University. – 2016. – No. 13. – P. 88–99. (In Russian)]



7. Сырчина, А.С., Кулешов А.В. Оптимизация методики синтеза регулятора индикаторного гиросtabilизатора с использованием критерия Вышнеградского // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – Вып. 10. – С. 96–109. [Syrchina, A.S., Kuleshov, A.V. Optimization of the Synthesis Method of the Indicator Gyrostabilizer Controller Using the Vyshnegradskii Criterion // Izvestiya Tula State University. Technical Sciences – 2023. – Iss. 10. – P. 96–109. (In Russian)]
8. Петров Б.Н., Соколов Н.И., Липатов А.В. и др. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами: Инженерные методы анализа и синтеза. – М.: Машиностроение, 1986. – 253 с. [Petrov, B.N., Sokolov, N.I., Lipatov, A.V., et al. Sistemy avtomaticheskogo upravleniya ob"ektami s peremennymi parametrami: Inzhenernye metody analiza i sinteza. – Moscow: Mashinostroenie, 1986. – 253 p. (In Russian).]
9. Baydoun, I. Analytical Formula for the Roots of the General Complex Quartic Polynomial // hal-04693785. – 2024. – URL: <https://hal.science/hal-04693785v1> (дата обращения 10.11.2025). [Accessed November 10, 2025.]
10. Prodanov, E.M. Classification of the Real Roots of the Quartic Equation and Their Pythagorean Tunes // International Journal of Applied and Computational Mathematics. – 2021. – Vol. 7, iss. 4. – Art. no. 218.
11. Chávez-Pichardo, M., Martínez-Cruz, M.A., Trejo-Martínez, A., et al. A Complete Review of the General Quartic Equation with Real Coefficients and Multiple Roots // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, iss. 14. – Art. no. 2377.
12. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 560 с. [Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S. Control of Linear Systems Subjected to Exogenous Disturbances: An LMI Approach. – Moscow: LENAND, 2014. – 260 s. (In Russian)]
13. Воробьева Е.А., Zubov Н.Е., Микрин Е.А. и др. Синтез стабилизирующего управления космическим аппаратом на основе обобщенной формулы Аккерманна // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 1. – С. 96–106. [Zubov, N.E., Vorob'eva, E.A., Mikrin, E.A., et al. Synthesis of Stabilizing Spacecraft Control Based on Generalized Ackermann's Formula // J. Comput. Syst. Sci. Int. – 2011. – Vol. 50, no. 1. – P. 93–103.]
14. Латин А.В., Zubov Н.Е. Упрощение формул для модального управления по выходу линейными стационарными системами четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами при неравных индексах управляемости и наблюдаемости // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2025. – № 3. – С. 1–11. [Lapin, A.V., Zubov, N.E. Simplifying the Formulas of Static Output Pole Placement for Fourth-Order Linear Time-Invariant Control Systems with Two Inputs and Two Outputs at Unequal Controllability and Observability Indices // Differential Equations and Control Processes. – 2025. – No. 3. – P. 1–11.]
15. Мошиц Г., Хорн П. Проектирование активных фильтров / пер. с англ. М.Н. Микишева, И.Н. Теплюка; под ред. И.Н. Теплюка. – М.: Мир, 1984. – 320 с. [Moschytz, G.S., Horn, P. Active Filter Design Handbook: For Use with Programmable Pocket Calculators and Minicomputers. – Chichester: John Wiley & Sons, 1981. – 316 p.]
16. Вороной В.В. Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Новосибирск, 2013. – 23 с. [Voronoi, V.V. Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regul'yatorov ponizhennogo poryadka: avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk. – Novosibirsk, 2013. – 23 s. (In Russian)]
17. Сороквашин А.В., Кедровских Г.А., Татарникова А.С. Построение областей расположения корней многочленов четвертого порядка с действительными коэффициентами // Политехнический молодежный журнал. – 2025. – № 1 (96). – С. 1–17. [Sorokvashin, A.V., Kedrovskih, G.A., Tatarinova, A.S. Constructing a Position Domain of the Fourth Order Polynomials with the Active Coefficient Roots // Politechnical Student Journal of BMSTU. – 2025. – No. 1 (96). – P. 1–17. (In Russian)]
18. Васильев В.А. Геометрия дискриминанта. – М.: МЦНМО, 2017. – 16 с. [Vasil'ev, V.A. Geometriya diskriminanta. – M.: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2017. – 16 s. (In Russian)]
19. Rees, E.L. Graphical Discussion of the Roots of a Quartic Equation // The American Mathematical Monthly. – 1922. – Vol. 29, no. 2. – P. 51–55.
20. Hong, H., Yang, J. Parametric “Non-nested” Discriminants for Multiplicities of Univariate Polynomials // Science China Mathematics. – 2024. – Vol. 67. – P. 1911–1932.
21. Мирер С.А., Прилепский И.В. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2008. – 28 с. [Mirer, S.A. and Prilepskii, I.V. Optimal Parameters of a Gravitational Satellite-Stabilizer System // Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics. – 2008. – No. 048. – 28 s. (In Russian)]
22. SymPy. – URL: <https://www.sympy.org/> (дата обращения: 10.11.2025). [Accessed: November 10, 2025.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии  
М. В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 29.12.2025,  
после доработки 26.03.2026.  
Принята к публикации 09.04.2026.

**Сороквашин Александр Владимирович** – студент, МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва,  
✉ [sorokvashinav@student.bmstu.ru](mailto:sorokvashinav@student.bmstu.ru),  
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0006-8979-0791>

**Игнатов Александр Иванович** – д-р техн. наук, МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва,  
✉ [ignatov@bmstu.ru](mailto:ignatov@bmstu.ru),  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6556-4585>

© 2026 г. Сороквашин А. В., Игнатов А. И.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons  
«Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная

## PARAMETRIC ANALYSIS OF ROOT LOCATION FOR A FOURTH-ORDER CHARACTERISTIC EQUATION

A. V. Sorokvashin\* and A. I. Ignatov\*\*

\*\*\* Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*✉ sorokvashinav@student.bmstu.ru, \*\*✉ ignatov@bmstu.ru

**Abstract.** This paper develops a root-based method for analyzing dynamic systems with fourth-order characteristic equations based on a spatial analog of the Vyshnegradsky diagram. Such an approach allows visualizing system stability and, moreover, determining key performance indices of transients without directly computing the roots. Within the proposed methodology, a parametrization of complex surfaces is employed to construct a three-dimensional (3D) root location diagram for a fourth-order characteristic equation. On this diagram, the solutions are divided into stable and unstable ones by the stability boundary. The surface of zero discriminant is used to classify the roots into real and complex. An additional surface defines the boundary of different root locations relative to the imaginary axis. A method for deriving these parametrically defined surfaces is presented. Parametric expressions are obtained for families of surfaces corresponding to particular system performance requirements (level surfaces for the stability degree, the oscillatory index, and the maximum absolute value among the real parts of all roots). The research results can be conveniently applied in practice to design automatic control systems. The 3D diagrams constructed in MATLAB visualize the parameter regions simultaneously ensuring the desired values of transient characteristics, the response speed, and the oscillatory index.

**Keywords:** Vyshnegradsky stability diagram, fourth-order system, characteristic equation, stability, discriminant, root location, parametrization, oscillation.