

# ПОЛЕТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ И СИЛОВАЯ ГИРОСКОПИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СЛАБО ДЕМПФИРОВАННОЙ КОНСТРУКЦИИ КРУПНОГАБАРИТНОГО СПУТНИКА<sup>1</sup>

Е.И. Сомов, С.А. Бутырин

Рассмотрены задачи полетной идентификации, синтеза управления и анализа динамики цифровой системы силовой гироскопической стабилизации крупногабаритного спутника, имеющего упругую слабо демпфированную конструкцию.

**Ключевые слова:** крупногабаритный спутник, силовая гироскопическая стабилизация, стабилизация параметров.

## ВВЕДЕНИЕ

Используя опыт исследований и проектирования [1—3] гиросиловых систем управления движением упругих космических аппаратов, в настоящей статье авторы рассматривают задачи идентификации и стабилизации крупногабаритных информационных спутников космической связи (апертура антенн до 25 м), радиолокации (апертура до 500 м) и др. Рассматриваются также алгоритмы многократной дискретной фильтрации доступных измерений и цифрового формирования управления для силовой гироскопической стабилизации КА с двумя подвижными панелями солнечных батарей, крупногабаритными антеннами и силовым гироскопическим комплексом, в котором составляющие его шесть гиродинов оснащены редукторными приводами по осям их подвеса.

### Принятые сокращения:

БИНС — бесплатформенная инерциальная навигационная система;  
ГД — гиродин;  
ИСК — инерциальная система координат;  
КА — космический аппарат;  
КМ — кинетический момент;  
СБ — солнечные батареи;  
СГК — силовой гироскопический комплекс;  
ССК — связанная система координат.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-08-01037) и Отделения ЭММПУ РАН (Программа фундаментальных исследований № 14).

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Стандартным образом вводятся инерциальная, связанная и орбитальная системы координат. Положение ССК относительно ИСК определяется кватернионом  $\Lambda$ , относительно орбитальной системы координат — вектором-столбцом  $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ , составленном из углов рыскания, крена и тангажа, а также вектором абсолютной угловой скорости  $\omega$ . Динамика существенно упругого КА с СГК представляется векторно-матричным соотношением

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I}_3 & [-\mathbf{L}\times] & \mathbf{M}_q \\ [\mathbf{L}\times] & \mathbf{J} & \mathbf{D}_q \\ \mathbf{M}_q^T & \mathbf{D}_q^T & \mathbf{A}^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^* \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^v \\ \mathbf{F}^\omega \\ \mathbf{F}^q \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $m$  — суммарная масса КА и векторы-столбцы

$$\mathbf{F}^v = -m(\omega \times \mathbf{v}) + \omega \times (\mathbf{L} \times \omega - 2\dot{\mathbf{L}}) - \mathbf{R}_w \ddot{\gamma} - \mathbf{r}_g(\gamma, \dot{\gamma}, \omega) + \mathbf{R}_c;$$

$$\mathbf{F}^\omega = -\mathbf{L} \times (\omega \times \mathbf{v}) - \mathbf{A}_H(\beta) \dot{\beta} - \omega \times \mathbf{G} - \mathbf{J}_w \ddot{\gamma} - \mathbf{m}_g(\gamma, \dot{\gamma}, \omega) + \mathbf{M}_O; \quad \dot{\beta} = \mathbf{u}^g;$$

$$\mathbf{F}^q = -\mathbf{A}^q(\mathbf{V}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_q \mathbf{q}) - \mathbf{M}_q^T (\omega \times \mathbf{v}) - \mathbf{P}_w^T \ddot{\gamma}.$$

Здесь  $\mathbf{v}^*$  — локальная производная вариации вектора скорости поступательного движения центра масс КА; при обозначениях  $[\cdot]$  — строка,  $\{\cdot\}$  — столбец,  $[\mathbf{a}\times]$  — кососимметричная  $(3 \times 3)$ -матрица на основе вектора  $\mathbf{a}$ , имеем  $\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_p, \mathbf{q}_a\}$ ,  $\mathbf{q}_p = \{\mathbf{q}_{1p}, \mathbf{q}_{2p}\}$  и  $\mathbf{q}_a$  — векторы-столбцы упругих перемещений па-

нелей СБ и антенн, соответственно;  $\mathbf{M}_q \equiv \mathbf{M}_q(\gamma) = [\mathbf{A}_p(\gamma), \mathbf{A}_a]$  — матрица взаимовлияния поступательного движения КА с двумя панелями СБ и антеннами, где  $\mathbf{A}_p(\gamma) = [\mathbf{A}_{p1}(\gamma), \mathbf{A}_{p2}(\gamma)]$ ;  $\mathbf{D}_q = [\mathbf{B}_p(\gamma), \mathbf{B}_a]$  — матрица взаимовлияния вращательного движения КА с панелями СБ и антеннами, где  $\mathbf{B}_p(\gamma) = [\mathbf{B}_{p1}(\gamma), \mathbf{B}_{p2}(\gamma)]$ ;  $\mathbf{A}^q$  — диагональная матрица обобщенных масс;  $\mathbf{V}_q = \text{diag}\{(\delta^p/\pi)\Omega_{1i}^p, (\delta^p/\pi)\Omega_{2i}^p, (\delta^a/\pi)\Omega_i^a\}$  и  $\mathbf{W}_q = \text{diag}\{(\Omega_{1i}^p)^2, (\Omega_{2i}^p)^2, (\Omega_i^a)^2\}$  — нормированные матрицы конструкционного демпфирования и жесткости;  $\mathbf{R}_w, \mathbf{J}_w, \mathbf{P}_w^T$  — векторы-столбцы, отражающие инерционное влияние поворотного перемещения панелей СБ как твердых тел относительно корпуса КА;  $\mathbf{r}_g(\gamma, \dot{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$  и  $\mathbf{m}_g(\gamma, \dot{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$  — нелинейные векторные функции, отражающие гироскопическое влияние перемещений панелей СБ на угол  $\gamma$  относительно корпуса КА;  $\mathbf{K} \equiv \mathbf{K}(\gamma, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{J}(\gamma)\boldsymbol{\omega}$  — вектор кинетического момента КА как системы твердых тел;  $\mathbf{L} = \mathbf{M}_q \mathbf{q}$  — вектор статического момента КА как упругой конструкции;  $\mathbf{R}_c$  и  $\mathbf{M}_O$  — суммарный вектор внешних сил негравитационной природы, прилагаемый в центре масс  $C$ , и суммарный вектор внешних моментов относительно полюса  $O$ , соответственно; вектор-столбец  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_p, p = 1, \dots, 6\}$  составлен из углов поворота шести гиродин, вектор  $\mathbf{G} = \mathbf{K}(\gamma, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{D}_q(\gamma)\dot{\mathbf{q}}$  представляет кинетический момент упругого КА вместе с СГК, вектор  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = h_g \mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$  — суммарный кинетический момент СГК на основе шести ГД с модулем КМ  $h_g$ , матрица  $\mathbf{A}_H(\boldsymbol{\beta}) = h_g \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = h_g \partial \mathbf{h} / \partial \boldsymbol{\beta}$ , а управлением считается вектор  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^s$  скоростей поворота ГД с формированием кусочно-непрерывного гироскопического управляющего момента  $\mathbf{M}^s = -\mathbf{A}_H(\boldsymbol{\beta})\mathbf{u}^s$ , передаваемого СГК на корпус КА. При наличии трех пар ГД все внутренние сингулярные состояния СГК строго *проходимы*, здесь рациональна [4] каноническая схема *3-SPE* (система трех ножничных пар — 3 Scissored Pair Ensemble), состоящая из трех ортогонально ориентированных пар ГД. Введем обозначения проекций ортов КМ каждого ГД на оси ортогонального канонического гироскопического базиса, ориентированного по осям ССК:

$$x_1 = C_1 \equiv \cos\beta_1; \quad x_2 = C_2 \equiv \cos\beta_2; \quad y_1 = S_1 \equiv \sin\beta_1; \\ y_2 = S_2 \equiv \sin\beta_2;$$

$$x_3 = S_3 \equiv \sin\beta_3; \quad x_4 = S_4 \equiv \sin\beta_4; \quad z_3 = C_3 \equiv \cos\beta_3; \\ z_4 = C_4 \equiv \cos\beta_4;$$

$$y_5 = C_5 \equiv \cos\beta_5; \quad y_6 = C_6 \equiv \cos\beta_6; \quad z_5 = S_5 \equiv \sin\beta_5; \\ z_6 = S_6 \equiv \sin\beta_6.$$

Тогда в этом базисе вектор-столбец  $\mathbf{h}$  нормированного суммарного кинетического момента СГК и градиентная матрица  $\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta})$  представляются в виде

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + S_3 + S_4 \\ S_1 + S_2 + C_5 + C_6 \\ C_3 + C_4 + S_5 + S_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{и } \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 & -S_5 & -S_6 \\ 0 & 0 & -S_3 & -S_4 & C_5 & S_6 \end{bmatrix}.$$

Сингулярные состояния этой схемы возникают при таких угловых положениях ГД, когда матрица Грамма  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta})\mathbf{A}_h^T(\boldsymbol{\beta})$  теряет полный ранг, т. е. при  $\det(\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta})) = 0$ . Принципиальной проблемой управления СГК избыточной структуры является выбор функции распределения потребного суммарного вектора КМ СГК между гиродинами — закона настройки СГК.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается применить авторский подход к обработке сигналов в БИНС с астрономической коррекцией [5]. Такие БИНС содержат инерциальный блок в виде гироскопических измерителей приращений квазиординат углового положения КА и астрономическую систему на основе звездных датчиков с широким полем зрения, закрепленных на корпусе КА. В результате специализированной обработки и численного интегрирования кинетических уравнений по информации только о векторе дискретных приращений квазиординат, получаемого инерциальным блоком при наличии шумов, в сочетании с калибровкой (идентификацией и компенсацией дрейфа и вариации масштабного коэффициента измерения вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ ) и юстировкой (идентификацией и компенсацией погрешности взаимной угловой установки систем координат инерциального блока и астросистемы) формируются оценка  $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$  вектора  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и оценка  $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}(t)$  кватерниона  $\boldsymbol{\Lambda}(t)$  ориентации спутника в ИСК с заданным периодом измерения  $T_q$ , который выбирается кратным периоду  $T_u$  цифрового управления СГК, причем  $T_u \geq T_q$ .

В наземных условиях весьма затруднительно выполнить экспериментальное определение даже низших парциальных частот  $\Omega_s = 2\pi f_s^\Omega$  ( $f_s^\Omega \approx 0,01$  Гц) упругих колебаний крупногабаритной конструкции КА в модели (1), которым соответствуют собственные частоты колебаний  $\omega_s = 2\pi f_s^\Omega \geq \Omega_s$  этой конс-



трукции в составе КА. Поэтому на этапе летно-конструкторских испытаний и далее при штатной эксплуатации КА с длительным сроком активного существования (до 15 лет) необходима идентификация инерционных и жесткостных параметров крупногабаритной конструкции спутника. Предполагается наличие дискретных сигналов БИНС с периодом  $T_q$  (кватернион  $\Lambda_s$ ,  $s \in N_0 \equiv [0, 1, 2, \dots]$ ), вектор угловой скорости  $\omega_s$ ) и дискретных измерений вектора  $\mathbf{H}_s$  кинетического момента СГК в ССК. Полученная информация эпизодически (в том числе после разгрузки СГК либо коррекции орбиты КА) используется для адаптивной настройки алгоритмов дискретной фильтрации выходных сигналов БИНС и цифрового управления СГК.

Задача состоит в разработке методов полетной идентификации низших резонансных частот и тензора инерции крупногабаритной конструкции КА, в построении законов настройки СГК, а также в синтезе алгоритмов дискретной фильтрации доступных измерений с периодом  $T_q$  и цифрового управления СГК с периодом  $T_u$ . Предполагается, что высота полета КА составляет не менее 550 км, где проявляется малое влияние внешних возмущающих моментов и медленное изменение вектора накопленного кинетического момента СГК, а также что гиросиловая система управления сбалансирована по вектору суммарного КМ — при отсутствии накопленного КМ и парковом состоянии СГК ( $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ ) равенство  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$  обеспечивается при условии  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ .

### 3. ПОЛЕТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИИ

Для крупногабаритного спутника колебательные свойства его упругой слабо демпфированной конструкции проявляются очень существенно и не позволяют увеличить позиционные коэффициенты любого линейного закона управления для повышения точности из-за очевидно возникающей потери устойчивости. Совокупность дискретных значений векторной функции  $\hat{\omega}(t_p)$  с назначаемым периодом  $T_p$  на «базисном» временном интервале  $T_b$  приводит к трехмерному массиву значений вектора угловой скорости корпуса КА по трем каналам его угловой стабилизации. Последующая обработка этого массива экспериментальных данных с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье [6] непосредственно в комплексных числах приводит к искомым оценкам  $\hat{\omega}_s$  набора низших резонансных частот  $\omega_s$  крупногабаритной конструкции КА. С помощью функции fft программной системы *Matlab* предлагаемая методика была апро-

бирована [7] на модельной задаче для геостационарного КА с крупногабаритной конструкцией, три произвольные низшие парциальные частоты которой принадлежат отрезку  $[0,01; 0,05]$  Гц. При  $T_p = T_u = 4$  с и  $T_b = 7200$  с соответствующие три резонансных частоты были идентифицированы с погрешностью 0,5 %.

### 4. ПОЛЕТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ

Идентификация тензора инерции  $\mathbf{J}$  выполняется при пассивном орбитальном движении центра масс КА ( $\mathbf{R}_c = \mathbf{0}$ ) в общем случае в два этапа с использованием указанных бортовых дискретных измерений на основе обобщенного интеграла вектора суммарного КМ механической системы «КА + СГК» в ССК, который представляется в виде

$$\mathbf{G}(t) \equiv \mathbf{K}(t) + \mathbf{H}(t) = \tilde{\Lambda}(t) \circ [\Lambda(t_0) \circ \mathbf{G}(t_0) \circ \tilde{\Lambda}(t_0) + \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) \circ \mathbf{M}_O(\tau) \circ \tilde{\Lambda}(\tau) d\tau] \circ \Lambda(t). \quad (2)$$

На первом этапе пренебрегается влиянием неизвестного внешнего возмущающего момента, зависящего от неизвестного значения тензора инерции  $\mathbf{J}$  КА, т. е. полагается  $\mathbf{M}_O(t) \equiv \mathbf{0}$ . В этом случае вектор КМ механической системы неизменен в ССК, т. е.  $\mathbf{G}^1(t) = \mathbf{G}_0^1 \equiv \mathbf{const}$ , где  $\mathbf{G}^1(t) \equiv \Lambda(t) \circ \mathbf{G}(t) \circ \hat{\Lambda}(t)$ ,  $\mathbf{G}_0^1 = \Lambda(t_0) \circ \mathbf{G}_0 \circ \hat{\Lambda}(t_0)$  и  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}(t_0) \equiv \mathbf{K}(t_0) + \mathbf{H}(t_0)$ . Вектор  $\mathbf{K}(t) = \mathbf{J}\omega(t)$  КМ корпуса КА в произвольный момент времени  $t$  зависит от неизвестного значения тензора инерции  $\mathbf{J}$ , поэтому в условиях сбалансированности системы управления по кинетическому моменту вектор накопленного КМ  $\mathbf{G}_0$  однозначно определяется только при условии  $\omega(t_0) \equiv \omega_0 = \mathbf{0}$ , в результате получается  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{H}(t_0)$ .

Для идентификации неизвестного значения тензора инерции  $\mathbf{J}$  выполняется программное пространственное угловое движение КА на некотором интервале времени  $t \in T \equiv [t_0, t_f]$  с выделением пяти сегментов длительностью  $T_a$  с гладко-сопряженными переходами между ними (для слабого возбуждения колебаний конструкции КА), на которых последовательно выполняются:

(о) стабилизация корпуса КА в ИСК с вектором угловой скорости  $\omega = \omega_0 = \mathbf{0}$ ;

(а), (b) и (с) — стабилизация движения корпуса КА в ИСК с постоянными векторами угловой скорости  $\omega = \omega_i$ ,  $i = a, b, c$ , причем направления векторов  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  и  $\omega_c$  должны быть линейно независимы;

(*f*) — стабилизация корпуса КА в ИСК с вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_f = \mathbf{0}$ .

Далее выполнение цифровой обработки выходных дискретных сигналов БИНС ( $\Lambda_s, \boldsymbol{\omega}_s$ ) и измерений  $\mathbf{H}_s$  вектора КМ СГК с помощью дискретных фильтров полиномиального сглаживания Савицкого — Голея дает точную оценку этих переменных в функции времени  $t \in [t_0, t_f]$ . Затем по определенному алгоритму выбираются моменты времени  $t_{i^*}$ ,  $i = o, a, b, c, f$ , для которых вычисляются оценки  $\hat{\Lambda}(t_{i^*})$ ,  $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t_{i^*})$  и  $\hat{\mathbf{H}}(t_{i^*})$ . Для индексов  $i = a, b, c$  вектор  $\mathbf{K}(t_{i^*}) = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t_{i^*})$  КМ корпуса КА с неизвестной симметричной матрицей инерции  $\mathbf{J} = \|J_{ij}\| = \|J_{ji}\|$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , представляется в виде  $\mathbf{K}(t_{i^*}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t_{i^*})) \mathbf{I}$ , где вектор-столбец  $\mathbf{I} = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\} \equiv \{J_{11}, J_{22}, J_{33}, J_{12}, J_{23}, J_{13}\}$  и прямоугольная  $3 \times 6$ -матрица  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t_{i^*}))$  имеет очевидную структуру, и вычисляется оценка  $\mathbf{G}^1(t_{o^*}) = \Lambda(t_{o^*}) \circ \hat{\mathbf{H}}(t_{o^*}) \circ \hat{\Lambda}(t_{o^*})$  значения вектора накопленного КМ в ИСК при условии  $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t_{o^*}) = \mathbf{0}$ . С этой целью составляется система уравнений

$$\mathbf{Q}(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t_{i^*})) \mathbf{I} = -\hat{\mathbf{H}}(t_{i^*}) + \hat{\Lambda}(t_{i^*}) \circ \mathbf{G}^1(t_{o^*}) \circ \hat{\Lambda}(t_{i^*}),$$

$$i = a, b, c,$$

относительно компонентов вектора-столбца  $\mathbf{I}$ . Эта система численно разрешается по методу наименьших квадратов с получением оценки  $\hat{\mathbf{I}}$  и, следовательно, искомой оценки  $\hat{\mathbf{J}}$  тензора инерции. Наконец, на основе сопоставления оценок  $\hat{\mathbf{G}}^1(t_{o^*})$  и  $\hat{\mathbf{G}}^1(t_{f^*})$  вектора накопленного КМ в ИСК при оценках  $\hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\Lambda}, \hat{\mathbf{H}}$  и  $\hat{\mathbf{J}}$  для моментов времени  $t_{o^*}$  и  $t_{f^*}$  определяется необходимость выполнения второго этапа идентификации тензора инерции.

На *втором этапе* учитывается влияние малого неизвестного внешнего возмущающего момента, зависящего от неизвестного значения тензора инерции  $\mathbf{J}$ . При этом вектор  $\mathbf{G}^1(t) \equiv \Lambda(t) \circ \mathbf{G}(t) \circ \tilde{\Lambda}(t)$  изменяется в ИСК в соответствии с векторным уравнением  $d\mathbf{G}^1(t)/dt = \mathbf{M}_O^1(t) \equiv \Lambda(t) \circ \mathbf{M}_O(t) \circ \tilde{\Lambda}(t)$ , где неизвестный вектор внешнего возмущающего момента  $\mathbf{M}_O^1(t)$  в ИСК принимается кусочно-постоянным, т. е. в дополнение к обобщенному векторному интегралу для вектора КМ механической системы расширяется математическая модель с

помощью векторного уравнения  $d\mathbf{M}_O^1(t)/dt = \mathbf{0} \forall t \in T_m \equiv [t_k, t_{k+1}) \subset T$ . При измерениях  $\boldsymbol{\omega}_s, \Lambda_s$  и  $\mathbf{H}_s$ , фильтрации этих измерений по методу Савицкого — Голея и последующем вычислении значений  $\mathbf{G}^1(t_k)$  строится дискретный идентификатор

Луенбергера для получения оценки  $\hat{\mathbf{M}}_O^1(t) = \text{const} \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ . Задача решается путем итераций с применением полной формы представления обобщенного интеграла (2) для вектора суммарного КМ механической системы «КА + СГК», а за начальное значение искомого тензора инерции принимается оценка  $\hat{\mathbf{J}}$ , полученная на первом этапе идентификации.

Разработанная методика полетной идентификации тензора инерции КА была апробирована на основе компьютерной имитации при следующих параметрах: длительности временных интервалов  $T = 360$  с,  $T_q = 0,25$  с,  $T_a = 30$  с,  $T_m = 4$  с; векторы угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_a, \boldsymbol{\omega}_b$  и  $\boldsymbol{\omega}_c$  с модулем  $0,5$  град/с расположены равномерно на поверхности кругового конуса с углом полураствора  $10^\circ$ ; погрешности БИНС и ошибки измерения вектора кинетического момента СГК соответствуют технически реализуемым в настоящее время. В результате численных расчетов было установлено, что любой компонент тензора инерции восстанавливается: с погрешностью  $0,05\%$  при отсутствии накопленного КМ и внешнего возмущающего момента, с погрешностью  $\sim 0,1\%$  при отсутствии внешнего возмущающего момента и с погрешностью  $\sim 0,5\%$  при наличии малого внешнего возмущающего момента, причем такая точность достигается за 25 итераций.

## 5. ЯВНЫЙ ВЕКТОРНЫЙ ЗАКОН НАСТРОЙКИ СИЛОВОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

Наиболее рациональными [4] являются явные законы настройки СГК, когда все характеристики движения каждого ГД получаются по аналитическим соотношениям. Вводятся обозначения

$$x_{12} = x_1 + x_2, \quad x_{34} = x_3 + x_4, \quad y_{12} = y_1 + y_2,$$

$$y_{56} = y_5 + y_6, \quad z_{34} = z_3 + z_4, \quad z_{56} = z_5 + z_6,$$

$$\tilde{x}_{12} = \frac{x_{12}}{\sqrt{4 - y_{12}^2}}, \quad \tilde{x}_{34} = \frac{x_{34}}{\sqrt{4 - z_{34}^2}}, \quad \tilde{y}_{12} = \frac{y_{12}}{\sqrt{4 - x_{12}^2}},$$

$$\tilde{y}_{56} = \frac{y_{56}}{\sqrt{4 - z_{56}^2}}, \quad \tilde{z}_{34} = \frac{z_{34}}{\sqrt{4 - x_{34}^2}}, \quad \tilde{z}_{56} = \frac{z_{56}}{\sqrt{4 - y_{56}^2}}$$



и компоненты явного векторного закона настройки  $\mathbf{f}_p(\boldsymbol{\beta}) = \{f_{p1}, f_{p2}, f_{p3}\} \equiv \mathbf{0}$  SGK схемы 3-SPE принимаются в виде [8]

$$\begin{aligned} f_{px}(\boldsymbol{\beta}) &= f_{p1}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{34} + \rho(\tilde{x}_{12}\tilde{x}_{34} - 1), \\ f_{py}(\boldsymbol{\beta}) &= f_{p2}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \tilde{y}_{56} - \tilde{y}_{12} + \rho(\tilde{y}_{56}\tilde{y}_{12} - 1), \\ f_{pz}(\boldsymbol{\beta}) &= f_{p3}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \tilde{z}_{34} - \tilde{z}_{56} + \rho(\tilde{z}_{34}\tilde{z}_{56} - 1), \end{aligned} \quad (3)$$

где постоянный параметр  $\rho$  удовлетворяет условию  $0 < \rho < 1$ . Данный закон настройки обеспечивает отсутствие сингулярных состояний SGK для всех внутренних точек области вариации вектора его суммарного КМ. Для представления условий однозначной разрешимости уравнения  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}(t)) = \mathbf{h}(t)$ , где  $\mathbf{h}(t) = \{\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)\}$  — известная векторная функция, относительно синусов и косинусов углов  $\beta_p(t)$  всех гиродинов, вводятся обозначения

$$\begin{aligned} p_{12} &= \sqrt{4 - (x_{12})^2}, \quad q_{12} = \sqrt{4 - (y_{12})^2}, \quad p_{34} = \sqrt{4 - (z_{34})^2}, \\ q_{34} &= \sqrt{4 - (x_{34})^2}, \quad p_{56} = \sqrt{4 - (y_{56})^2}, \quad q_{56} = \sqrt{4 - (z_{56})^2}, \\ x_{12} &= (\mathbf{x} + \Delta_x)/2, \quad x_{34} = (\mathbf{x} - \Delta_x)/2, \quad x_{56} = (\mathbf{y} + \Delta_y)/2, \\ y_{12} &= (\mathbf{y} - \Delta_y)/2, \quad z_{34} = (\mathbf{z} + \Delta_z)/2, \quad z_{56} = (\mathbf{z} - \Delta_z)/2, \\ d_x &= q_{12} + p_{34}, \quad d_y = q_{56} + p_{12}, \quad d_z = q_{34} + p_{56}. \end{aligned}$$

Условия разрешимости векторного уравнения  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}(t)) = \mathbf{h}(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta_x &= d_x \{1 - [1 - 4\rho((q_{12} - p_{34})(\mathbf{x}/2) + \\ &\quad + \rho(q_{12}p_{34} - (\mathbf{x}/2)^2))/d_x^2]^{1/2}\}/\rho; \\ \Delta_y &= d_y \{1 - [1 - 4\rho((q_{56} - p_{12})(\mathbf{y}/2) + \\ &\quad + \rho(q_{56}p_{12} - (\mathbf{y}/2)^2))/d_y^2]^{1/2}\}/\rho; \\ \Delta_z &= d_z \{1 - [1 - 4\rho((q_{34} - p_{56})(\mathbf{z}/2) + \\ &\quad + \rho(q_{34}p_{56} - (\mathbf{z}/2)^2))/d_z^2]^{1/2}\}/\rho, \end{aligned}$$

и при введении вектора-столбца  $\Delta(t) = \{\Delta_x(t), \Delta_y(t), \Delta_z(t)\}$  очевидным образом преобразуются к нелинейному векторному уравнению  $\Delta(t) = \Phi(\mathbf{h}(t), \Delta(t))$ . Получить аналитическое решение этого уравнения весьма затруднительно, но его численное решение достигается практически мгновенно по методу простой итерации — при рациональном выборе начальной точки итерационного цикла достаточно лишь 1-2 итерации для получения результата с приемлемой точностью. Далее после введения обозначений

$$\begin{aligned} a_1 &= (\mathbf{x} + \Delta_x)/2; \quad b_1 = (\mathbf{y} - \Delta_y)/2; \quad c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}; \\ d_1 &= \sqrt{4 - c_1^2}/c_1; \quad a_2 = (\mathbf{z} + \Delta_z)/2; \quad b_2 = (\mathbf{x} - \Delta_x)/2; \\ c_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2}; \quad d_2 = \sqrt{4 - c_2^2}/c_2; \quad a_3 = (\mathbf{y} + \Delta_y)/2; \\ b_3 &= (\mathbf{z} - \Delta_z)/2; \quad c_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}; \quad d_3 = \sqrt{4 - c_3^2}/c_3 \end{aligned}$$

значения синусов и косинусов углов  $\beta_p(t)$  всех шести ГД вычисляются по явным соотношениям:

1-я пара (ГД1 и ГД2):

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_1 - d_1 b_1)/2; \quad y_1 = (b_1 + d_1 a_1)/2; \\ x_2 &= (a_1 + d_1 b_1)/2; \quad y_2 = (b_1 - d_1 a_1)/2; \end{aligned}$$

2-я пара (ГД3 и ГД4):

$$\begin{aligned} x_3 &= (b_2 + d_2 a_2)/2; \quad z_3 = (a_2 - d_2 b_2)/2; \\ x_4 &= (b_2 - d_2 a_2)/2; \quad z_4 = (a_2 + d_2 b_2)/2; \end{aligned}$$

3-я пара (ГД5 и ГД6):

$$\begin{aligned} y_5 &= (a_3 - d_3 b_3)/2; \quad z_5 = (b_3 + d_3 a_3)/2; \\ y_6 &= (a_3 + d_3 b_3)/2; \quad z_6 = (b_3 - d_3 a_3)/2. \end{aligned}$$

## 6. ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ГИРОДИНАМИ

Алгоритмы управления ГД в составе SGK приводятся в нормировке к постоянной величине  $h_g$  собственного КМ каждого из шести гиродинов. Управляющий гироскопический момент SGK  $\mathbf{M}^g = -\mathbf{A}_H(\boldsymbol{\beta})\mathbf{u}^g$  представляется в виде  $\mathbf{M}^g = -h_g \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta})\mathbf{u}^g = h_g \mathbf{m}^g$ , где  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^g$  и вектор-столбец  $\mathbf{m}^g = -\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta})\mathbf{u}^g = -\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}$  соответствует нормированному моменту SGK. Пусть состояние SGK (вектор-столбец  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^6$ ) известно и задан вектор-столбец  $\mathbf{m}^g \in \mathbf{R}^3$  требуемого нормированного момента SGK. Тогда при явном законе настройки  $\mathbf{f}_p(\boldsymbol{\beta}) = \{f_{p1}, f_{p2}, f_{p3}\} \equiv \mathbf{0}$  SGK (2) возможно абсолютно точное и однозначное определение вектора-столбца  $\mathbf{u}^g = \dot{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbf{R}^6$  командных скоростей прецессии каждого из шести гиродинов в составе SGK на основе шести скалярных уравнений, представленных в виде  $\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{m}^g$ ;  $\langle \dot{\boldsymbol{\beta}}, \partial f_{ps}(\boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\beta} \rangle = 0$ ,  $s = 1, 2, 3$ . Аналитическое решение уравнений дается соотношением  $\mathbf{u}^g(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{m}^g) = \dot{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\beta})\{-\mathbf{m}^g, \mathbf{0}\}$ ;  $\tilde{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\beta}) = (\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\beta}))^{-1}$ , где основная задача состоит в аналитическом обращении матрицы

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) \\ \partial f_{p1}(\boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\beta} \\ \partial f_{p2}(\boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\beta} \\ \partial f_{p3}(\boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & z_3 & z_4 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & -z_5 & -z_6 \\ 0 & 0 & -x_3 & -x_4 & y_5 & y_6 \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{51} & \tilde{a}_{52} & 0 & 0 & \tilde{a}_{55} & \tilde{a}_{56} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{63} & \tilde{a}_{64} & \tilde{a}_{65} & \tilde{a}_{66} \end{bmatrix}$$

с учетом тождеств  $x_1^2 + y_1^2 \equiv 1$ ,  $x_2^2 + y_2^2 \equiv 1$ ,  $x_3^2 + z_3^2 \equiv 1$ ,  $x_4^2 + z_4^2 \equiv 1$ ,  $y_5^2 + z_5^2 \equiv 1$ ,  $y_6^2 + z_6^2 \equiv 1$ .



При обозначениях

$$\begin{aligned} s_{12} &= q_{12} - \rho x_{12}, & s_{34} &= q_{34} - \rho z_{34}, & s_{56} &= q_{56} - \rho y_{56}, \\ v_{12} &= p_{12} + \rho y_{12}, & v_{34} &= p_{34} + \rho x_{34}, & v_{56} &= p_{56} + \rho z_{56}, \\ r_{12} &= 1 + y_1 y_2 + x_1 x_2, & r_{34} &= 1 + z_3 z_4 + x_3 x_4, \\ & & r_{56} &= 1 + z_5 z_6 + y_5 y_6 \end{aligned}$$

получаются соотношения для всех неочевидных элементов матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(\beta)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{41} &= -v_{34} \frac{4y_1 - r_{12}y_{12}}{p_{34}(q_{12})^3}; & \tilde{a}_{42} &= -v_{34} \frac{4y_2 - r_{12}y_{12}}{p_{34}(q_{12})^3}; \\ \tilde{a}_{43} &= -s_{12} \frac{4z_3 - r_{34}z_{34}}{q_{12}(p_{34})^3}; & \tilde{a}_{44} &= -s_{12} \frac{4z_4 - r_{34}z_{34}}{q_{12}(p_{34})^3}; \\ \tilde{a}_{51} &= -s_{56} \frac{4x_1 - r_{12}x_{12}}{q_{56}(p_{12})^3}; & \tilde{a}_{52} &= -s_{56} \frac{4x_2 - r_{12}x_{12}}{q_{56}(p_{12})^3}; \\ \tilde{a}_{55} &= -v_{12} \frac{4z_5 - r_{56}z_{56}}{p_{12}(q_{56})^3}; & \tilde{a}_{56} &= -v_{12} \frac{4z_6 - r_{56}z_{56}}{p_{12}(q_{56})^3}; \\ \tilde{a}_{63} &= -v_{56} \frac{4x_3 - r_{34}x_{34}}{p_{56}(q_{34})^3}; & \tilde{a}_{64} &= -v_{56} \frac{4x_4 - r_{34}x_{34}}{p_{56}(q_{34})^3}; \\ \tilde{a}_{65} &= -s_{34} \frac{4y_5 - r_{56}y_{56}}{q_{34}(p_{56})^3}; & \tilde{a}_{66} &= -s_{34} \frac{4y_6 - r_{56}y_{56}}{q_{34}(p_{56})^3}. \end{aligned}$$

Аналитический вид матрицы  $\tilde{\mathbf{D}}(\beta)$  здесь не приводится из-за его громоздкости.

## 7. АЛГОРИТМЫ ФИЛЬТРАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

Изучение собственных свойств линейной модели механического объекта, дискретизированного с периодом управления  $T_u$ , является важным этапом синтеза цифрового закона гиросиловой стабилизации спутника. Выбор периода дискретности при формировании управления в этом случае имеет ряд особенностей, главным из которых является весьма коварное свойство транспонирования частот. Суть этого явления заключается в возникновении эффекта типа «биения», когда резонансная частота какого-либо тона упругих колебаний конструкции КА располагается в малой окрестности частот, кратных удвоенной частоте Котельникова — Шеннона, т. е. кратных круговой частоте  $\omega_{2ksh} = 2\pi/T_u$ . В такой ситуации, в полном соответствии с теорией дискретных систем с фиксированным периодом, появляется низкочастотный обертон (огibaющая «биения»), частота которого может переместиться (транспонироваться) в область частоты среза ЛАХ в каком-либо канале стабилизации. При выборе периода дискретизации учитываются также собственные фильтрующие свойства фиксатора (экстраполятора нулевого порядка) — основного элемента цифрового управле-

ния. Для рассматриваемого механического объекта в виде крупногабаритного спутника был принят период дискретности управления  $T_u = 4$  с.

Частотные свойства непрерывной и дискретной моделей КА со слабо демпфированной конструкцией наиболее просто сопоставлять в низкочастотной области, вплоть до круговой частоты  $2/T_u = 0,5$  рад/с, где круговая частота близка к абсолютной псевдочастоте  $\lambda$ ,  $\omega \cong \lambda$ . В этой частотной области ЛАХ непрерывной и дискретной моделей практически совпадают, но имеется принципиальное отличие в поведении ЛФХ дискретной модели. При расчете дискретных частотных характеристик наиболее «тонкий» вопрос состоит в эффективном расчете матричной экспоненты и интеграла от нее. Анализ свойств дискретной модели для всех расчетных положений (угла  $\gamma$ ) панелей СБ позволяет сделать принципиально важное заключение — для обеспечения устойчивости и необходимого качества системы стабилизации упругого спутника определяющими являются только 1–2 низших тона упругих колебаний панелей и антенн.

Для управления ориентацией используется измерение только углового положения корпуса КА в моменты времени  $t_s = sT_q$ ,  $s \in N_0$ , с периодом  $T_q \leq T_u$ , кратным периоду управления  $T_u$ . Дискретизация с периодом  $T_q$  непрерывного апериодического звена с передаточной функцией  $W(s) = 1/(1 + T_f s)$  и постоянной времени  $T_f$ , без фиксатора на входе для каждого канала при введении нормировки приводит к дискретной передаточной функции  $W_f(z_q) = (1 + b_1^f)/(1 + b_1^f z_q^{-1})$  с условием  $W_f(1) = 1$ , где  $b_1^f \equiv -\exp(-T_q/T_f)$ ;  $z_q \equiv \exp(sT_q)$ . Применение такой фильтрации в каждом канале соответствует алгоритму дискретной фильтрации  $\tilde{y}_{s+1} = -b_1^f \tilde{y}_s + (1 + b_1^f)\varepsilon_{s+1}$ , где  $\varepsilon_s = \phi_s^c - \phi_s$  — рассогласование дискретной команды  $\phi_s^c$  по углу ориентации КА и дискретного сигнала  $\phi_s$  измеряемого углового положения КА.

При обозначениях  $p = (1 - b)/(1 - a)$ ,  $c = p(b - a)$ , где  $a = [(2/T_u)\tau_1 - 1]/[(2/T_u)\tau_1 + 1]$  и  $b = [(2/T_u)\tau_2 - 1]/[(2/T_u)\tau_2 + 1]$  разработанный дискретный алгоритм управления в каждом канале с формированием с периодом  $T_u$  цифровой компоненты  $\tilde{m}_k$  вектора стабилизирующего ускорения принимает простой вид:  $g_{k+1} = bg_k + c\varepsilon_k$ ;  $\tilde{m}_k = k(g_k + p\varepsilon_k)$ , где координата  $g_k$  — дискретная «рабочая» переменная. В итоге в каждом канале гиросиловой стабилизации КА имеются два периода дискретизации [2], поэтому здесь встают проблемы агрегирования и анализа устойчивости ли-

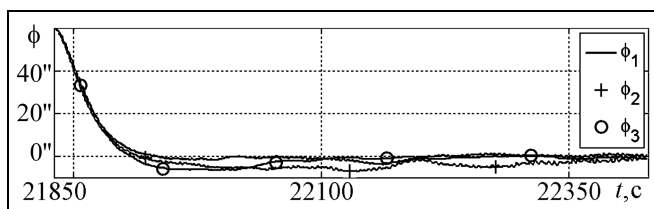


Рис. 1. Переходные процессы по углам ориентации

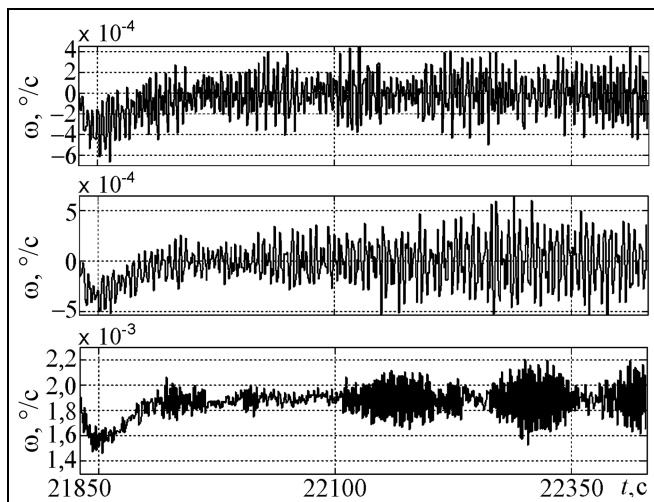


Рис. 2. Переходные процессы по угловым скоростям

нейной непрерывно-дискретной системы многократного типа, в общем случае с физическим временным запаздыванием. Решение этих проблем получено в работе [2], и поэтому здесь не приводится. Далее с помощью функции  $\mathbf{f}_p(\beta) = \mathbf{0}$  распределение кинетического момента СКГ между шестью гиродинами вектор потребного управляющего момента СКГ  $\mathbf{M}_k^g = \mathbf{J}(\gamma_k) \tilde{\mathbf{m}}_k$  «пересчитывается» в вектор цифровых команд по скорости углового перемещения ГД  $\mathbf{u}_k^g = \dot{\beta}_k$ .

При декрементах колебаний  $\delta^p = \delta^a = 0,002$  конструкции крупногабаритного КА выполнен анализ эффективности дискретных фильтров с периодом квантования  $T_q = 1$  с, постоянной времени  $T_f = 1,5$  с и алгоритмов цифрового управления СКГ с периодом дискретности  $T_u = 4$  с. Некоторые полученные численные результаты представлены на рис. 1 и 2.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко рассмотрены актуальные задачи синтеза и анализа цифровой системы силовой гироскопической стабилизации движения крупногабаритного спутника, имеющего упругую слабо демпфи-

рованную конструкцию. Представлены разработанные методы полетной идентификации низших резонансных частот конструкции и тензора инерции спутника, построения законов настройки СКГ кратной схемы на основе шести гиродинов, а также методы синтеза алгоритмов дискретной фильтрации доступных измерений и цифрового управления СКГ, апробированные посредством компьютерной имитации.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Сомов Е.И. Динамика многократной цифровой системы пространственной гиросиловой стабилизации упругого космического аппарата // Динамика управляемых космических объектов. — Новосибирск: Наука, 1992. — С. 47—76.
2. Сомов Е.И. Робастная стабилизация упругих космических аппаратов при неполном дискретном измерении и запаздывании в управлении // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 2. — С. 124—143.
3. Somov Ye.I., Butyrin S.A., Somov S.Ye. Spacecraft guidance and robust attitude control with precise pointing the flexible antennas // Proc. of 18th IEEE Intern. Conf. on Control Applications. Part of 3rd IEEE Multi-conference on Systems and Control. — Saint Petersburg, 2009. — P. 1057—1062.
4. Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сорокин А.В., Платонов В.Н. Управление силовыми гироскопическими космическими аппаратами // Тр. X Санкт-Петербургской Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам / ЦНИИ «Электроприбор». — СПб., 2003. — С. 278—294.
5. Сомов Е.И., Бутырин С.А. Цифровая обработка сигналов, калибровка и юстировка бесплатформенной инерциальной системы для определения ориентации маневрирующего космического аппарата // Материалы XVII Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам / ЦНИИ «Электроприбор». — СПб., 2010. — С. 75—77.
6. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. — СПб.: Питер, 2002. — 608 с.
7. Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сомов С.Е. Полетная идентификация низших резонансных частот крупногабаритной космической конструкции по сигналам бесплатформенной астроинерциальной навигационной системы // Материалы 4-й Всероссийской мультikonференции по проблемам управления. — Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. — Т. 2. — С. 406—408.
8. Somov Ye.I., Butyrin S.A., Somov S.Ye. Guidance and robust gyromoment precise attitude control of agile observation spacecraft // Proc. of 17th IFAC World Congress. Seoul. — 2008. — P. 3422—3427. — URL: <http://www.ifac-papersonline.net/Defaulted/36298.html>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

**Евгений Иванович Сомов** — канд. техн. наук, нач. отдела «Наведение, навигация и управление движением»,  
✉ e\_somov@mail.ru,

**Сергей Анфимович Бутырин** — канд. техн. наук, нач. лаборатории «Моделирование систем управления»,  
✉ butyrinsa@mail.ru,

НИИ проблем надежности механических систем, Самарский государственный технический университет,  
☎ (846) 278-44-88.