

## МЕТОД СВЯЗАННЫХ ПРОЕКЦИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ

А.Н. Соломатин

**Аннотация.** Предложен метод связанных проекций, обеспечивающий визуализацию на плоскости многомерных данных в виде геометрических объектов — многоугольников и ломаных. К стандартным средствам визуализации многомерных данных добавлен еще один новый — введение неоднородности плоскости визуализации. Модель связанных проекций состоит из квадрантов одного размера, соединенных особым образом. Двумерные проекции многомерной точки, находящиеся в каждом квадранте, соединяются между собой, образуя многоугольники либо ломаные. Дан анализ существующих методов визуализации многомерных данных и приведен набор правил построения моделей связанных проекций. Исследованы некоторые количественные и алгебраические свойства введенных геометрических объектов. Перечислены основные достоинства метода и особенности его компьютерной реализации. Приведены особенности применения метода для визуализации многомерных матричных моделей при стратегическом планировании и визуализации многокритериальных альтернатив при решении задач многокритериальной оптимизации.

**Ключевые слова:** визуализация многомерных данных, метод связанных проекций, многоугольники и ломаные, стратегическое управление регионом, матричные модели, многокритериальная оптимизация.

### ВВЕДЕНИЕ

Визуализация информации представляет собой одно из основных направлений современных исследований в области информационных технологий. Под компьютерной визуализацией понимается построение визуального геометрического образа на основании абстрактных представлений об объектах (процессах).

Известно, что визуальное представление информации более подходит для качественного анализа и более соответствует особенностям человеческой психики, чем символическое (линейное). Поэтому основные достоинства компьютерной визуализации заключаются в наглядности и целостности восприятия, лаконичном описании внутренних закономерностей данных и высокой скорости их интерпретации.

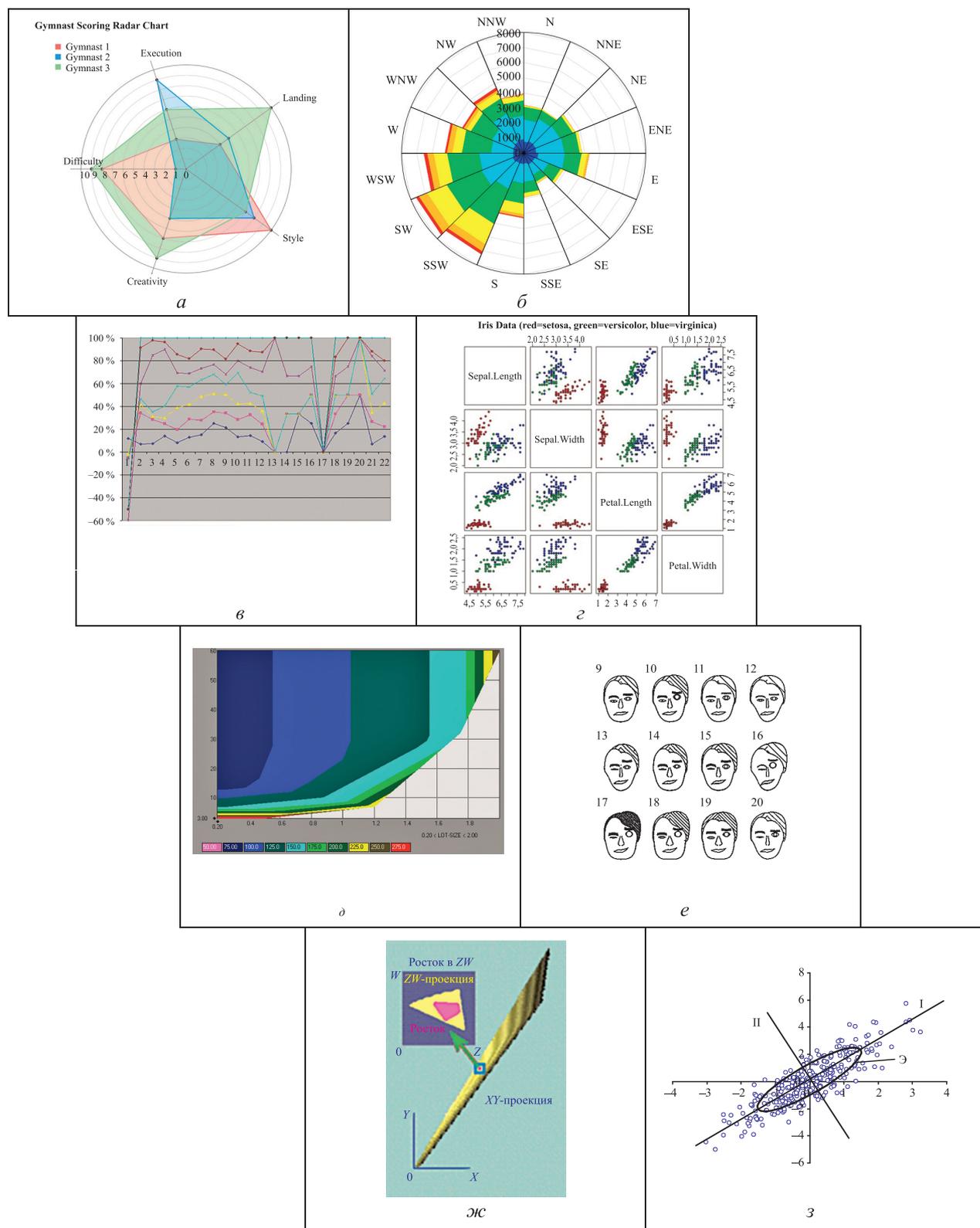
Последние годы компьютерная визуализация развивается бурными темпами, превращаясь в самостоятельную область научного знания, что связано как с прогрессом программно-аппаратных

средств машинной графики, так и с потребностями анализа огромных объемов информации.

Основы компьютерной визуализации рассматриваются в книге [1]. В работе [2] исследуются вопросы создания теории визуализации, проводится анализ компьютерных метафор и семиотический анализ визуализации в аспекте применения при проектировании визуальных систем. Формальные подходы к оценке визуальных текстов и эффективности визуализации, рассмотрение метафор визуализации как непрерывных отображений приводится в статье [3]. А в работе [4] исследуется подход к формализации визуализации на базе семиотического подхода с помощью теории категорий. Классификация методов визуализации по различным основаниям — области применения, уровням визуализации, методам представления информации и типу взаимодействия с пользователем, рассмотрена в статье [5].

Во многих областях науки и техники одними из наиболее часто рассматриваемых объектов исследования являются многомерные данные — различ-

Рисунок к статье Соломатина А.Н.  
**«МЕТОД СВЯЗАННЫХ ПРОЕКЦИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ  
 МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ»** (с. 41–51)



**Рис. 1. Методы визуализации многомерных данных:** *a* – радарные (лепестковые, сетчатые диаграммы); *б* – звездные диаграммы; *в* – профили; *г* – матричные графики; *д* – карты решений; *е* – лица Чернова; *ж* – проекции без потерь (метод ростка); *з* – методы понижения размерности

ные объекты или процессы, характеризующиеся вектором значений своих свойств (всюду далее — многомерные объекты). Основная проблема их визуализации связана с ограниченностью человеческого зрения, которое не может воспринимать структуры размерностью более трех. Обзоры существующих методов визуализации многомерных данных приводятся в работах [6, 7], в первую очередь, с точки зрения визуализации многокритериальных альтернатив при многокритериальной оптимизации, а также в работе [8]. Популярная книга [9] является настоящим пособием по визуальным коммуникациям, прежде всего, в бизнесе, где описывается множество различных диаграмм, способы их выбора, построения и применения.

Существуют два основных направления визуализации многомерных данных — уменьшение размерности данных и визуализация данных с помощью различных графических метафор, включая такие средства, как положение на плоскости, цвет и его интенсивность, форма, размер и узор (способ закрашки) [5].

В работе [10] был предложен метод связанных проекций (МСП), обеспечивающий планарную визуализацию многомерных данных в виде различных геометрических объектов — многоугольников и ломаных. Новизна метода состоит в том, что к стандартным средствам визуализации многомерных данных добавляется еще один новый — введение неоднородности плоскости визуализации. Некоторые аспекты применения МСП при решении задач стратегического планирования приводятся в работах [11, 12], а при решении задач многокритериальной оптимизации — в работах [12, 13].

## 1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

В настоящее время обычно применяются следующие методы планарной визуализации многомерных данных [6, 7].

*Радарные* (лепестковые, сетчатые) диаграммы (рис. 1, а, см. третью страницу обложки). На плоскости  $OXY$  из центра координат проводятся оси по числу измерений (параметров) объекта; значения по каждому измерению откладываются на осях и соединяются между собой отрезками прямых, в результате чего образуются многоугольники — «радары». Метод дает возможность визуализировать объекты с большим числом измерений, очень нагляден, но не позволяет анализировать значительное число объектов и сравнивать объекты по парам параметров.

*Звездные диаграммы* (рис. 1, б). Они весьма похожи на радары, но каждая ось обрывается в месте отметки соответствующего значения, причем значения параметров не соединяются в многоугольный контур. Данный метод нагляден, позволяет

визуализировать теоретически неограниченное число измерений, но всего лишь для нескольких объектов и без сравнения по парам параметров.

*Профили* (рис. 1, в). По оси  $OX$  откладываются позиции различных параметров, по вертикальным параллельным осям одинаковой длины — значения по каждому параметру; отмеченные значения соединяются отрезками прямых. В результате объект изображается в виде ломаной, похожей на линейный график. Несмотря на наглядность, простоту и теоретически неограниченную размерность, а также возможности применения для решения задач многокритериальной оптимизации, метод не позволяет сравнивать объекты по парам параметров.

*Матричные графики* (рис. 1, г). При наличии  $n$  параметров формируется симметричная матрица  $n \times n$  из пузырьковых диаграмм (двумерных проекций) для каждой пары параметров. Достоинства метода — теоретически неограниченное число объектов, значительные размерности, возможности сравнения объектов по каждой паре параметров, — нивелируются существенным недостатком — отсутствием единого визуального образа каждого объекта и трудностями визуального анализа.

*Карты решений* (рис. 1, д). Множество объектов (многокритериальных альтернатив) визуализируется в виде серии двумерных сечений этого множества, отличающихся значениями некоторого третьего критерия (отображаются различными цветами). Метод ориентирован на визуализацию границы Парето при решении задач многокритериальной оптимизации, позволяет оценить общую структуру множества альтернатив, но не обеспечивает визуализацию целостных образов объектов.

*Лица Чернова* (рис. 1, е). Параметрам объекта соответствуют различные части человеческого лица в количестве 18 или 36 (при введении асимметрии лица), а возможным значениям по каждому параметру — их вариации (например, рот маленький, средний, большой). Достоинства метода — большая наглядность и размерность, недостатки — трудность сравнения различных объектов, ограниченное число значений каждого параметра.

*Проекции без потерь (метод ростка)* (рис. 1, ж). Метод основан на разделении координат четырехмерного объекта на две независимые пары координат. Вводится визуальный объект (росток точки), связанный с представлением двумерных сечений множества объектов. Метод не имеет ограничений по числу визуализируемых объектов, позволяет оценить общую структуру множества объектов, использует эффективные двумерные проекции, но имеет критические ограничения по размерности и не позволяет визуализировать целостные образы четырехмерных объектов.



Методы понижения размерности (рис. 1, з) основаны на анализе дисперсий значений параметров объектов:

- выбираются 2—3 параметра с максимальной дисперсией значений, значения остальных параметров заменяются на константы, равные средним значениям по каждому из параметров;
- суть популярного метода главных компонент состоит в переходе от исходной системы координат к новому ортогональному базису в рассматриваемом многомерном пространстве, оси которого ориентированы по направлениям максимальной дисперсии значений массива данных (вдоль эллипсоида рассеивания). Метод теоретически не имеет ограничений на число измерений, число объектов, позволяет сравнивать между собой различные объекты, анализировать целостный образ группы объектов — но путем редукции числа анализируемых параметров (измерений), что недопустимо при решении многих задач.

Сравнительный анализ существующих методов визуализации показывает их основные недостатки:

- ограничения на размерность — двумерные проекции, метод ростка, карты решений;
- редукция размерностей — метод главных компонент;
- нет целостного образа объекта — матричные диаграммы, карты решений, метод ростка;
- невозможность сравнивать значения по разным парам параметров (не используются проекции) — радары, звездные диаграммы, профили, лица Чернова;
- трудности сравнения различных объектов — лица Чернова.

Таким образом, существующие методы визуализации в целом не удовлетворяют одновременно важнейшим требованиям, таким как разумная независимость от размерности, эффективность визуализации (возможность визуализировать и сравнивать целостные образы объектов) и возможность сравнивать объекты по парам параметров.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ПРОЕКЦИЙ

В основе метода связанных проекций лежит развитие метода матричных графиков (см. рис. 1, з). На самом деле, возможности визуализации ограничиваются двумерной плоскостью, но не двумя координатными осями; таких пар осей (различных двумерных проекций) можно разметить на двумерной плоскости достаточно много, если соединить различные проекции особым образом и преобразовать однородную двумерную плоскость в неоднородную, т. е. каждый квадрант такой модели связанных проекций есть самостоятельная коор-

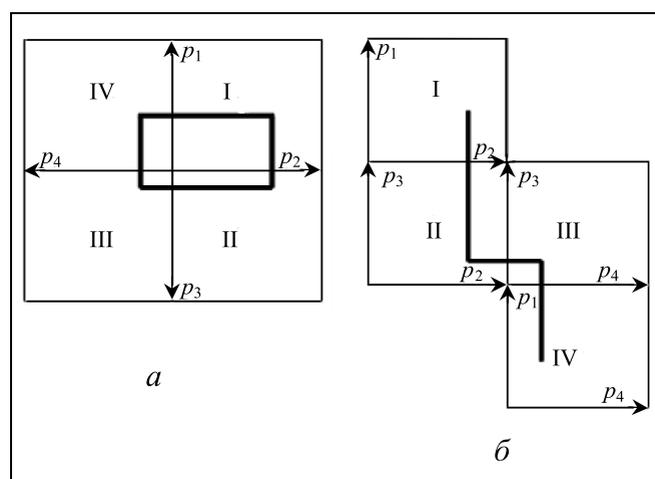


Рис. 2. Замкнутая (а) и открытая (б) модели связанных проекций

динатная плоскость со своими осями координат, соответствующая некоторой паре параметров.

На рис. 2, а МСП иллюстрируется для четырехмерного пространства параметров. Пусть  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  — некоторая четырехмерная точка. Преобразуем координатную плоскость так, чтобы каждому из ее четырех квадрантов соответствовала отдельная двумерная проекция этой точки (например, для пар параметров  $(p_1, p_2)$ ,  $(p_2, p_3)$ ,  $(p_3, p_4)$ ,  $(p_4, p_1)$ ), а потом соединим точки двумерных проекций отрезками прямой (цифрами обозначен порядок обхода квадрантов). Задавая параметры в различной последовательности, можно получать различные визуальные представления точки  $p$ . Например, для последовательности  $(p_1, p_3, p_3, p_2, p_2, p_2, p_4, p_4, p_4, p_1)$  будут получены проекции  $(p_1, p_3)$ ,  $(p_3, p_2)$ ,  $(p_2, p_4)$ ,  $(p_4, p_1)$ .

Если присоединить квадрант 3 не слева, а справа от квадранта 2, то получим другую систему организации двумерных проекций и иное представление точки  $p$  — в виде ломаной (рис. 2, б). Назовем такое представление многомерных данных открытой моделью связанных проекций, а предыдущее — замкнутой моделью. Замкнутая модель может быть получена из открытой, если развернуть подобную «лестницу» и замкнуть ее в кольцо по часовой стрелке.

Модели связанных проекций можно строить различными способами, варьируя число квадрантов и способы их соединения. Перечисленные ниже правила построения позволяют обеспечить наиболее компактный и по возможности симметричный вид моделей:

- модель состоит из квадрантов, соединенных различным образом в зависимости от того, замкнутая она или открытая;

— все квадранты модели одинакового размера, что достигается нормированием значений всех параметров;

— квадранты соединяются друг с другом так, что каждая их пара имеет общую ось, соответствующую одному или двум параметрам;

— в замкнутой модели каждый четный квадрант присоединяется к предыдущему снизу или сверху, а нечетный — слева или справа, в зависимости от положения квадранта модели в том или ином квадранте координатной плоскости; в открытой модели каждый четный квадрант присоединяется к предыдущему снизу, а нечетный — справа;

— в каждом квадранте модели находится двумерная проекция многомерной точки для соответствующей пары параметров;

— визуальным представлением многомерной точки служит замкнутый многоугольник или ломаная, где стороны многоугольника (отрезки ломаной) соединяют точки двумерных проекций, находящиеся в различных квадрантах;

— в открытых моделях в каждом квадранте ориентация осей модели совпадает с ориентацией осей первого квадранта координатной плоскости  $OXY$ ; в замкнутых моделях ориентация осей квадрантов модели, находящихся в  $i$ -м,  $i = \overline{1, 4}$ , квадранте координатной плоскости  $OXY$ , совпадает с ориентацией осей этого квадранта координатной плоскости.

### 3. СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ СВЯЗАННЫХ ПРОЕКЦИЙ

#### 3.1. Основные определения

Приведем основные определения для МСП. Пусть  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  — некоторый многомерный объект размерностью  $n$ .

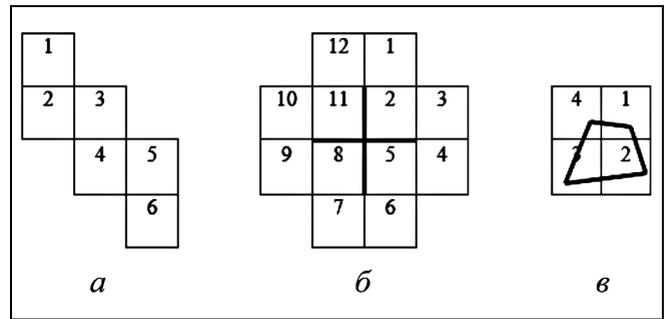
**Определение 1.** Квадрантом модели связанных проекций, образованным параметрами с номерами  $i$  и  $j$ , где  $i, j \in I, I = \{1, 2, \dots, n\}$ , назовем ограниченную часть плоскости  $OXY$ , где сформирована локальная система координат с осями для параметров с номерами  $i$  и  $j$ .

**Определение 2.** Двумерной проекцией объекта  $x$  для квадранта, образованного параметрами с номерами  $i$  и  $j$ , назовем точку с координатами  $(x^i, x^j)$  в данном квадранте.

**Определение 3.** Два квадранта называются связанными, если они имеют общую сторону (координатную ось).

**Определение 4.** Общая координатная ось двух связанных квадрантов называется запрещенной, если ее не могут пересекать стороны многоугольников (отрезки ломаных).

**Определение 5.** Общая координатная ось двух связанных квадрантов называется неоднозначной,



**Рис. 3. Различные модели связанных проекций:** *a* — открытая модель; *b* — симметричная модель; *c* — замкнутая неправильная модель; она весьма компактна и полезна для практического применения — в ее четырех квадрантах в виде четырехугольника отображается объект восьмимерного пространства (все оси модели неоднозначные)

если различным ее сторонам соответствуют различные параметры объекта; иначе ось называется однозначной.

**Определение 6.** Модель называется замкнутой, если ее первый и последний квадранты (в порядке построения) являются связанными, и модель имеет симметрию второго порядка относительно оси  $OY$  координатной плоскости; иначе модель называется открытой.

**Определение 7.** Модель называется правильной, если она не содержит неоднозначных осей.

**Определение 8.** Замкнутая модель называется симметричной, если комбинация ее квадрантов имеет симметрию 4-го порядка относительно центра модели.

**Определение 9.** Модель связанных проекций определяется как пятерка  $V = \langle X, n, t, s, p \rangle$ , где  $X$  — исходное множество объектов;  $n$  — размерность пространства параметров объектов (число измерений);  $t$  — тип модели (замкнутая, открытая);  $s$  — число квадрантов модели;  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ ,  $m = 2s$  — последовательность номеров параметров в порядке их использования в модели. Очевидно, что каждый  $j$ -й квадрант модели,  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ , соответствует паре параметров с номерами  $p_{2j-1}$  и  $p_{2j}$ , определяющих оси данного квадранта.

На рис. 3 изображены некоторые модели связанных проекций; цифрами отражен порядок обхода квадрантов (по часовой стрелке, сверху вниз); запрещенные оси выделены.

#### 3.2. Количественные свойства моделей связанных проекций

Приведем некоторые свойства моделей связанных проекций, которые достаточно очевидны из их визуального анализа при малых значениях  $s$ . Всюду далее через  $R(x)$  будем обозначать целую часть числа  $x$ .



**Свойство 1.** При заданном  $n$  число квадрантов  $s$  в моделях связанных проекций может изменяться от  $R(n/2)$  до  $n(n-1)/2$ . ♦

Когда каждый параметр образует пару в двумерной проекции только с одним другим параметром, число квадрантов минимально, когда с каждым из  $n-1$  параметров — максимально.

**Свойство 2.** В замкнутых моделях число квадрантов четно. ♦

В замкнутых моделях число квадрантов всегда четно из-за наличия осевой симметрии.

**Свойство 3.** Замкнутая модель симметрична тогда и только тогда, когда  $s = 4 + 8l$ , где  $l$  — целое неотрицательное число. ♦

Несимметричные модели образуются при четном числе квадрантов модели в двух или всех четырех квадрантах координатной плоскости  $OXY$ .

**Свойство 4.** Замкнутая модель правильна, если она симметрична и  $s \geq n$ , открытая — если  $s \geq n$ .

**Свойство 5.** Для заданного числа квадрантов  $s$  возможна визуализация многомерных данных в диапазоне размерностей:

— от  $n_1$  — наибольшего целого числа, удовлетворяющего неравенству  $s \geq n(n-1)/2$  (каждый параметр образует пары в проекциях со всеми другими параметрами);

— до  $n_2 = 2s$ , когда каждый параметр образует пару в проекции только с одним другим параметром и модель не является правильной.

**Свойство 6.** Число появлений  $q$  каждого параметра в последовательности параметров  $p$  может меняться от одного до  $n-1$  раз. ♦

При  $q = 1$  все оси в неправильной модели неоднозначны, при  $q = n-1$  каждый параметр образует пару с каждым из других параметров.

**Свойство 7.** Число сторон многоугольников в замкнутой модели равно числу квадрантов  $s$ , число отрезков ломаной в открытой модели равно  $s-1$ . ♦

Для обеих моделей каждая  $i$ -я сторона (отрезок) соединяет двумерные проекции в квадрантах с номерами  $i$  и  $i+1$  (для замкнутой модели  $n$ -я сторона соединяет проекции в квадрантах  $n$  и  $1$ ).

**Свойство 8.** В правильной модели стороны многоугольников (отрезки ломаных) соединяются друг с другом и пересекают оси квадрантов под прямым углом.

**Свойство 9.** В неправильной модели стороны многоугольников (отрезки ломаных) в общем случае соединяются друг с другом и пересекают оси квадрантов под произвольным (необязательно прямым) углом. ♦

Условие «в общем случае» означает, что однозначные оси пересекаются под прямым углом, а

при определенных сочетаниях значений параметров в связанных квадрантах сторона многоугольника (отрезок ломаной) может пересекать неоднозначную ось под прямым углом.

**Свойство 10.** В неправильных моделях число неоднозначных осей равно  $n-s$ . ♦

Это означает, что при  $s < n$  стороны многоугольника числом  $n-s$  в замкнутой модели или  $n-s$  отрезков ломаной в открытой модели в общем случае не будут перпендикулярны неоднозначным осям.

### 3.3. Алгебраические свойства моделей связанных проекций

При визуальном анализе многомерных объектов важно иметь возможность сравнивать их между собой.

Для заданной модели связанных проекций  $V = \langle X, n, t, s, p \rangle$  поставим в соответствие каждому многомерному объекту  $x \in X$  многоугольник  $m_x = (m_x^1, m_x^2, \dots, m_x^s)$  из некоторого множества многоугольников  $M$  либо ломаную  $l_x = (l_x^1, l_x^2, \dots, l_x^{s-1})$  из некоторого множества ломаных  $L$ , где  $m_x^j$  и  $l_x^j$ , соответственно, сторона многоугольника и отрезок ломаной. Каждая  $j$ -я сторона ( $j$ -й отрезок) будет соединять две двумерные проекции точки  $x$  для пар параметров  $(p_{2j-1}, p_{2j})$  и  $(p_{2j+1}, p_{2j+2})$ .

**Утверждение.** Для заданной модели визуализации  $V = \langle X, n, t, s, p \rangle$  каждому многомерному объекту  $x \in X$  соответствует один и только один геометрический объект — многоугольник  $m_x \in M$  либо ломаная  $l_x \in L$ . ♦

На самом деле, для каждого объекта  $x \in X$  существует единственное графическое представление в множестве  $M$  либо в множестве  $L$ , поскольку тип модели, число квадрантов и сопоставленные их осям параметры фиксированы для заданной модели.

Далее только для правильных моделей определим на множестве  $M$  отношения доминирования (включения) « $\geq$ », строгого доминирования « $>$ » и несравнимости « $<>$ ».

Будем говорить, что многоугольник  $m_x \in M$  доминирует многоугольник  $m_y \in M$ ,  $m_x \geq m_y$ , если существует хотя бы одна сторона многоугольника  $1 \leq j \leq s$  такой, что данная  $j$ -я сторона  $m_y$  совпадает с частью  $j$ -й стороны  $m_x$ , т. е. контур многоугольника  $m_x$  нестрого включает контур многоугольника  $m_y$ .

При строгом доминировании многоугольником  $m_x \in M$  многоугольника  $m_y \in M$ ,  $m_x > m_y$ , контур  $m_x$  полностью включает в себя контур  $m_y$ . Многоугольники  $m_x, m_y \in M$  несравнимы,  $m_x \ll m_y$ , если стороны  $m_x$  и  $m_y$  пересекаются под прямым углом друг с другом хотя бы в одном квадранте.

Перечисленные отношения удовлетворяют следующим свойствам отношений на  $M$ : отношение доминирования — рефлексивность, антисимметричность, транзитивность; отношение строгого доминирования — асимметричность, транзитивность; отношение несравнимости — симметричность.

Аналогичные отношения и их свойства имеют место для ломаных из множества  $L$ .

Только для правильных моделей определим далее алгебраические операции над многоугольниками из множества  $M$ .

Объединением многоугольников  $m_x, m_y \in M$  является многоугольник  $m_z = m_x \cup m_y$  (возможно,  $m_z \notin M$ ) такой, что он представляет собой наименьший многоугольник, содержащий оба исходных многоугольника, т. е. доминирующий каждый из них:  $m_z \geq m_x, m_z \geq m_y$ . Многоугольник  $m_z$  является визуальным представлением многомерного объекта  $z$  (возможно,  $z \notin X$ ) такого, что  $z^i = \max(x^i, y^i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Пересечение многоугольников  $m_x, m_y \in M$  представляет собой многоугольник  $m_z = m_x \cap m_y$  (возможно,  $m_z \notin M$ ) — наибольший многоугольник, содержащийся в обоих исходных многоугольниках.

Операции объединения и пересечения коммутативны, ассоциативны, дистрибутивны, причем относительно каждой из них объекты из множества  $M$  обладают единичным элементом.

Единичным элементом относительно операции объединения является многоугольник  $m^- = \bigcap_{m \in M} m$ , представляющий собой пересечение всех многоугольников из множества  $M$  и являющийся визуальным представлением объекта  $x_{\min}$  (возможно,  $x_{\min} \notin X$ ) такого, что  $x_{\min}^i = \min_{x \in X} x^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Единичным элементом относительно операции пересечения является многоугольник  $m^+ = \bigcup_{m \in M} m$  — объединение всех многоугольников из множества  $M$ .

Поскольку относительно операций объединения и пересечения элементы множества  $M$  не обладают обратными элементами, то алгебры  $(M, \cup)$ ,  $(M, \cap)$  являются абелевыми полугруппами. Так же можно определить операции объединения и пересечения для ломаных из множества  $L$ , обладающие аналогичными свойствами.

## 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СВЯЗАННЫХ ПРОЕКЦИЙ

### 4.1. Общая информация

Различные модели связанных проекций — замкнутые и открытые, правильные и неправильные, имеют свои преимущества и недостатки. Поэтому конкретный тип модели выбирается в зависимости от специфики решаемой задачи, ее размерности, важности каждого анализируемого параметра и др.

Так, для замкнутых моделей характерны наглядность и компактность, а для открытых — теоретически неограниченная размерность и простота построения. Правильные модели эффективно отображают такие свойства многокритериальных альтернатив, как доминирование, принадлежность множеству Парето и др., неправильные модели более компактны и могут строиться для большего числа параметров при заданном числе квадрантов.

К недостаткам замкнутых моделей относятся сложность построения и определенные ограничения по размерности, открытых моделей — недостаточная компактность и наглядность; неправильные модели не могут быть применены для решения задач многокритериальной оптимизации. Наконец, как многоугольники, так и ломаные достаточно громоздки, что ограничивает число визуализируемых объектов.

Преимущества МСП как метода визуализации многомерных объектов в том, что можно:

- визуализировать многомерные объекты достаточно большой размерности;
- анализировать многомерные объекты как целостные геометрические объекты (многоугольники или ломаные), имеющие регулярные свойства (отношения доминирования, метрические свойства и др.);
- анализировать многомерные объекты для разных пар параметров, пользуясь двумерными проекциями.

Минимальные ограничения для применения МСП:

- для всех параметров многомерных объектов (всех шкал измерений) выполняются аксиомы упорядоченности, т. е. это могут быть любые шкалы, кроме номинальных;
- значения каждого параметра положительны и ориентированы на максимизацию.

Поэтому МСП может применяться для визуализации самых различных многомерных объектов, например, в математике, физике, технических науках, социологии, психологии, при решении задач стратегического планирования, многокритериальной оптимизации и др.

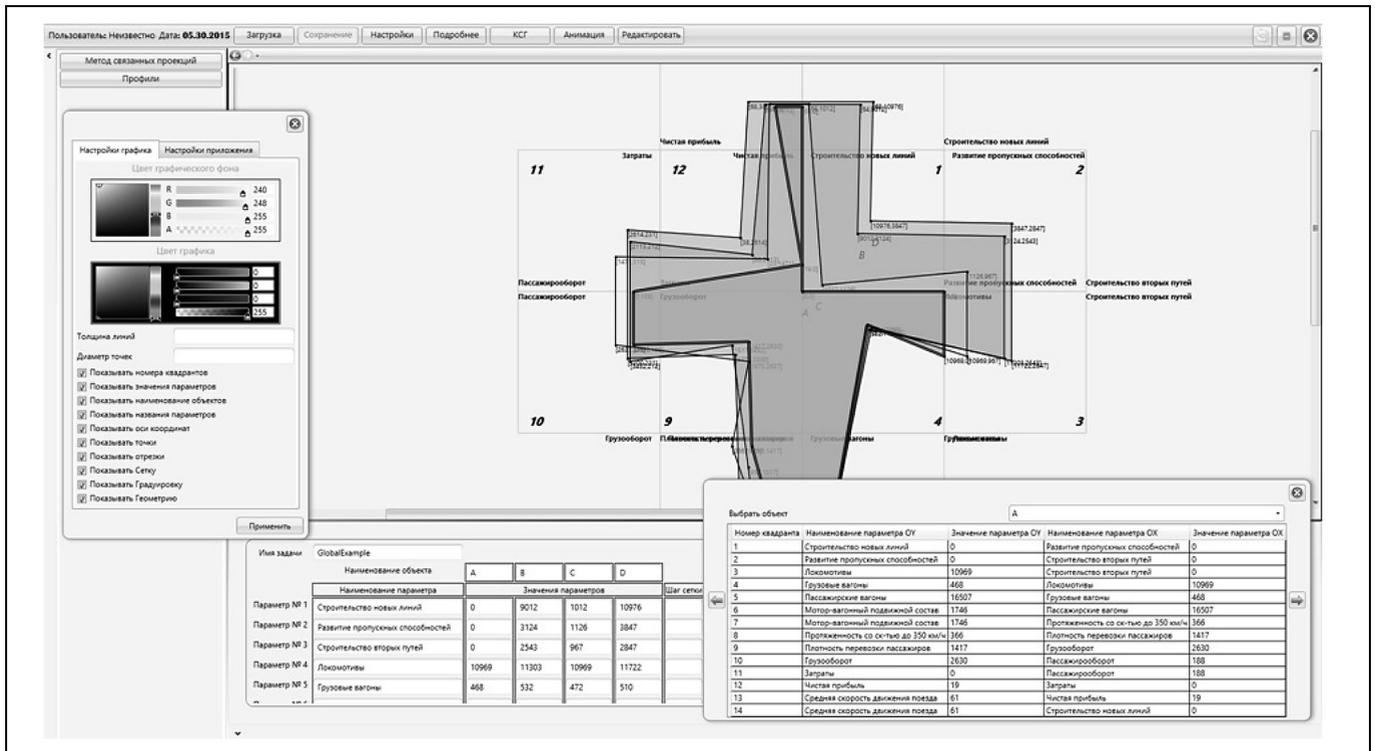


Рис. 4. Скриншот системы визуализации

Для эффективной программной реализации МСП необходим ряд возможностей диалогового интерфейса:

- задавать и изменять модель визуализации, включая число квадрантов, состав и последовательность пар параметров в модели;
- вводить параметры объектов в табличной форме;
- изменять масштаб и цветовые решения визуализации;
- листать объекты при визуализации, показывая их целиком или только их вершины;
- задавать параметры управления процессом визуализации, например, показывать идеальную точку и множество Парето для многокритериальных альтернатив;
- отражать динамику развития многомерных объектов (используя траекторию, анимацию).

На рис. 4 приведен скриншот системы визуализации для МСП (правильная замкнутая модель, 4 объекта, 12 параметров).

#### 4.2. Применение метода связанных проекций в стратегическом планировании

В стратегическом планировании широко применяются матричные модели, которые являются одним из его наиболее популярных и немногих

формализованных инструментов. Положение экономического объекта (например, компании) для заданной пары параметров (например, положение на рынке, привлекательность рынка и др.) изображается в виде точки или окружности на координатной плоскости. Находятся пороговые значения варьируемых параметров и каждой клетке такой матрицы сопоставляются качественно различающиеся ситуации и стратегии. Всего известно более 30 матричных моделей, таких как  $2 \times 2$  матрица БКГ,  $3 \times 3$  матрица McKinsey,  $4 \times 5$  матрица ADL/LC и т. д. [14].

Число параметров может быть достаточно велико, и для каждой их пары может быть построена матричная модель, отражающая свою грань исследования компании. К таким параметрам относятся конкурентная позиция, привлекательность рынка, жизненный цикл отрасли, новизна товара, а также темпы роста продаж, рентабельность, стоимостные показатели, уровень возможностей и угроз и др.

Матричные модели фактически реализуют метод двумерных проекций визуализации точек многомерных пространств (так называемые пузырьковые диаграммы), поэтому в силу ограничений этого метода на практике обычно применяется только небольшое число матричных моделей (для пар наиболее информативных параметров). Дру-

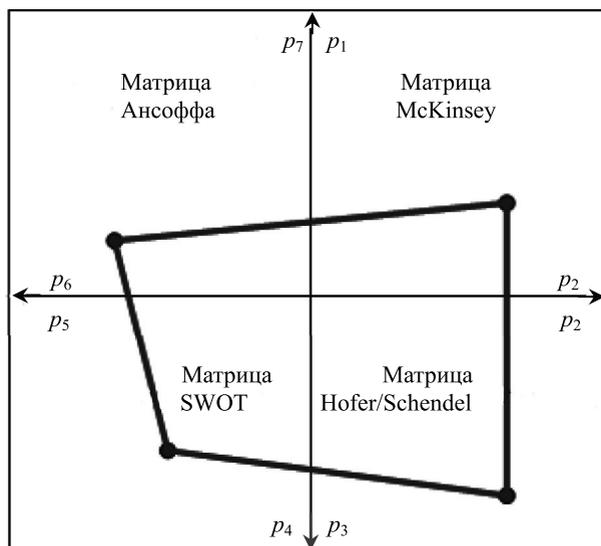


Рис. 5. Пример многомерной матричной модели

гие недостатки таких моделей — отсутствие целостного образа анализируемой компании и трудности сравнения между собой различных компаний, поскольку компании, идентичные по двум параметрам, могут полностью различаться по остальным.

Метод связанных проекций позволяет эффективно отображать самые различные многомерные экономические объекты — компании, регионы, населенные пункты, отрасли в виде многомерных матричных моделей [11, 12]. Применение замкнутых неправильных моделей связанных проекций позволяет, в частности, визуализировать восьмимерные экономические объекты, отображая одновременно четыре матричные модели. При этом каждая из четырех двумерных проекций может также характеризоваться своим размером и цветом, что позволяет визуализировать в виде целостного образа объекты размерностью 16.

На рис. 5 приведен пример достаточно успешной компании, выводящей при среднем уровне рыночных угроз новый продукт на существующий рынок, находящийся в состоянии спада. Параметры многомерной матрицы:  $p_1$  — привлекательность рынка,  $p_2$  — положение на рынке (конкурентная позиция),  $p_3$  — стадия развития рынка,  $p_4$  — сила-слабость отрасли,  $p_5$  — возможности-угрозы для отрасли,  $p_6$  — новизна продукта,  $p_7$  — новизна рынка. Эта многомерная матричная модель объединяет сразу несколько популярных моделей: McKinsey, Hofer/Schendel, SWOT, модель Ансоффа [14] и дает достаточно полную характеристику компании.

Многомерные матрицы предоставляют следующие преимущества:

- вместо того чтобы анализировать экономические объекты с помощью набора различных матричных моделей, появляется возможность анализировать целостные образы этих объектов в виде многоугольников либо ломаных на единой многомерной матрице;

- установление соответствия между различными типами визуальных образов многоугольников или ломаных (размер, форма, положение относительно координатных осей) и характеристиками экономических объектов позволяет быстро делать необходимые выводы по одному внешнему виду визуального образа;

- появляется возможность легко вводить и анализировать собственные многомерные матричные модели, комбинируя их компоненты различным образом.

Кроме того, метод связанных проекций может быть применен в стратегическом планировании (корпоративном или региональном) для:

- визуализации конкурентов компании в виде многомерной карты стратегических групп конкурентов (по аналогии с многомерными матричными моделями) [14];

- визуализации портфеля компании, отражающего состав и взаимное положение входящих в компанию относительно самостоятельных бизнес-единиц;

- визуализации стратегий развития компании, региона, отрасли [11, 12], которые также являются точками многомерного пространства параметров;

- отображения и анализа многомерных стратегических альтернатив.

### 4.3. Применение метода связанных проекций при принятии решений

Метод связанных проекций может быть применен для решения задач многокритериальной оптимизации [12, 13], поскольку любая многокритериальная альтернатива является многомерным объектом — точкой многомерного критериального пространства.

Установление для каждой заданной модели связанных проекций взаимно однозначного соответствия между многокритериальными альтернативами из  $X$  и геометрическими объектами из множеств  $M$  и  $L$  позволяет интерпретировать в терминах этих объектов ряд понятий многокритериальной оптимизации (см. таблицу).

Такая интерпретация возможна лишь для правильных моделей связанных проекций; для неправильных моделей принятие решений на основании внешнего вида геометрических объектов не всегда

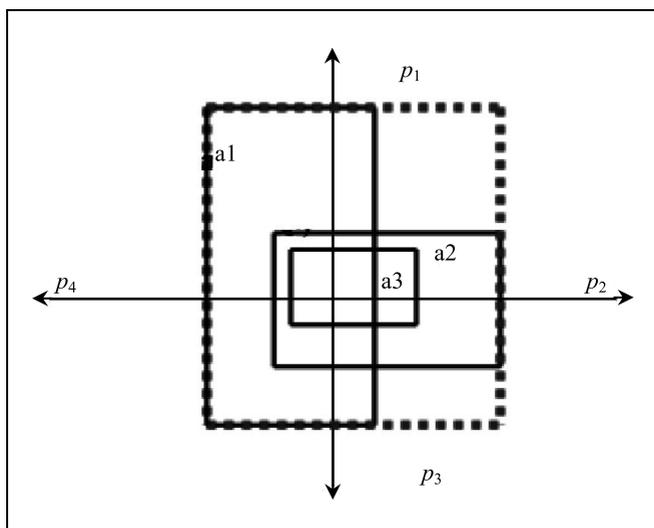


Рис. 6. Пример визуализации многокритериальных альтернатив

возможно: в неправильных моделях могут пересекаться многоугольники (ломаные), соответствующие не только несравнимым альтернативам (в том числе паретовским), но и связанные отношением доминирования или строгого доминирования.

На рис. 6 приведен пример визуализации многокритериальных альтернатив в четырехмерном пространстве для критериев  $p_1, p_2, p_3$  и  $p_4$ . Альтер-

натива  $a_2$  доминирует альтернативу  $a_3$ , альтернативы  $a_1$  и  $a_2$  принадлежат множеству Парето, идеальная точка выделена пунктиром.

Установленное соответствие между визуальными характеристиками геометрических объектов и характеристиками альтернатив дает возможность принимать решения о выборе альтернатив на основании внешнего вида этих объектов. Так, для замкнутой модели:

- чем больше «размер» (площадь) многоугольника, тем выше качество альтернативы, тем ближе она к идеальной точке;
- чем «симметричнее» многоугольник (по форме и положению относительно начала координат), тем более «сбалансирована» альтернатива по различным критериям;
- взаимное положение многоугольников отражает такие свойства альтернатив, как доминирование, принадлежность множеству Парето, близость к идеальной точке и др.

Поэтому эксперт может принимать решения о выборе альтернатив, основываясь на двух основных неформализованных критериях оценки: «размере» и «симметричности» альтернатив, что позволяет свести многокритериальную задачу к двухкритериальной.

Пусть  $x \in X$  — произвольная альтернатива,  $E^+$  — идеальная точка,  $E^-$  — «антиидеальная» точка для

**Графическая интерпретация понятий многокритериальной оптимизации (МКО)**

Понятия МКО	Интерпретация для замкнутой модели
<i>Доминирование.</i> Альтернатива $x$ доминирует альтернативу $y, x \geq y, x, y \in X$ , если $x^i \geq y^i$ для любого $i = \overline{1, n}$	Многоугольник $m_x$ включает многоугольник $m_y$ , причем стороны многоугольников могут частично совпадать, т. е. $m_x \geq m_y, m_x, m_y \in M$
<i>Строгое доминирование.</i> Альтернатива $x$ строго доминирует альтернативу $y, x > y, x, y \in X$ , если $x^i > y^i$ для любого $i = \overline{1, n}$	Многоугольник $m_x$ полностью включает в себя многоугольник $m_y$ , т. е. $m_x > m_y, m_x, m_y \in M$
<i>Несравнимость.</i> Альтернативы $x$ и $y$ несравнимы, $x \langle \rangle y, x, y \in X$ , если существуют $i, j = \overline{1, n}$ такие, что $x^i > y^i$ , но $x^j < y^j$	Стороны многоугольников $m_x$ и $m_y$ пересекаются под прямым углом в некоторых квадрантах, т. е. $m_x \langle \rangle m_y, m_x, m_y \in M$
<i>Оптимальность по Парето.</i> Альтернатива $x^* \in X$ оптимальна по Парето, если не существует альтернативы $x \in X$ такой, что $x \geq x^*$ ; для любых оптимальных по Парето альтернатив $x^*, y^* \in X$ справедливо $x^* \langle \rangle y^*$	Многоугольник $m^* \in M$ , для которого не существует многоугольника $m \in M$ такого, что $m \geq m^*$
<i>5. Идеальная точка.</i> Альтернатива $x^*$ является идеальной точкой для $X$ , если $x^* \geq x$ для любого $x \in X$	Многоугольник $m^*$ , включающий в себя все остальные многоугольники из множества $M$ , является объединением всех многоугольников из множества $M$ , т. е. $m^* = \bigcup_{m \in M} m$ , $m^* \geq m$ для любого $m \in M$

$x$  и  $E_i(x)$  — значение  $i$ -го критерия альтернативы  $x$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Выполним нормирование значений:

$$E_i^*(x) = (E_i(x) - E_i^-) / (E_i^+ - E_i^-).$$

Сопоставим альтернативе  $x$  альтернативу  $y$  в двухкритериальном пространстве, где

$$E_1(y) = \sum_{i=1}^n E_i^*(x) / m, E_2(y) = \\ = \left( \sum_{i=1}^n [E_i^*(x) - E_1(y)]^2 \right) / n.$$

Здесь «размер» альтернативы  $y$  характеризуется значением среднего для значений нормированных критериев (математическим ожиданием)  $E_1(y)$ , а «симметричность» альтернативы — степенью разброса значений (дисперсией)  $E_2(y)$ . Такие альтернативы легко визуализируются с помощью стандартных двумерных проекций (пузырьковых диаграмм).

Применение МСП для визуализации многокритериальных альтернатив предоставляет ряд следующих преимуществ:

— позволяет делать выводы о строении и специфике исходного множества альтернатив на интуитивном уровне;

— позволяет детально анализировать каждую многокритериальную альтернативу как целостный визуальный объект;

— обеспечивает окончательный выбор наилучшей альтернативы для реализации по неформализованным критериям оценки на основе анализа как внешнего вида соответствующих геометрических объектов, так и их взаимного положения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новизна метода связанных проекций состоит в том, что был предложен новый способ визуализации многомерных данных — введение неоднородности плоскости визуализации, что позволяет анализировать набор двумерных проекций для различных пар параметров многомерного объекта как некоторый целостный образ — многоугольник или ломаную. Значимость метода состоит в том, что он обеспечивает выполнение сразу несколько важных требований к визуализации многомерных объектов, таких как достаточно большая размерность, возможность визуализировать и сравнивать целостные образы объектов, возможность позиционировать эти объекты для различных пар параметров, что важно, в частности, при решении задач стратегического планирования.

В качестве дальнейших перспектив развития метода связанных проекций можно отметить более глубокое исследование количественных и алгебраических свойств геометрических объектов, изучение особенностей визуализации других видов многомерных объектов (помимо рассмотренных стратегических позиций и многокритериальных альтернатив), развитие метода для визуализации недетерминированных многомерных данных — стохастических, нечетких и интервальных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Mazza, R.* Introduction to Information Visualization. — London: Springer-Verlag Ltd, 2009. — 149 p.
2. *Авербух В.Л.* Семиотический подход к формированию теории компьютерной визуализации // Научная визуализация. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 1–25. [*Averbukh, V.L.* Semioticheskii podkhod k formirovaniyu teorii komp'yuternoi vizualizatsii // Nauchnaya vizualizatsiya. — 2013. — Т. 5, No. 1. — S. 1–25. (In Russian)]
3. *Manakov, D.V., Averbukh, V.L., Vasev, P.A.* Visual Text as Truth Subset of the Universal Space // Scientific Visualization. — 2016. — Vol. 8, No. 4. — P. 38–49.
4. *Vickers, P., Faith, J., Rossiter, N.* Understanding Visualization: a Formal Approach Using Category Theory and Semiotics // IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics. — 2013. — Vol. 19, No. 6. — P. 1048–1061.
5. *Пескова О.В.* О визуализации информации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». — 2012. — № 9. — С. 158–173. [*Peskova, O.V.* O vizualizatsii informatsii // Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. «Priborostroenie». — 2012. — No. 9. — S. 158–173. (In Russian)]
6. *Лотов А.В., Пospelova И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 197 с. [*Lotov, A.V., Pospelova, I.I.* Mnogokriterial'nye zadachi prinyatiya reshenii. — Moscow: MAKS Press, 2008. — 197 s. (In Russian)]
7. *Nelyubin, A.P., Galkin, T.P., Galaev, A.A., etc.* Usage of Visualization in the Solution of Multicriteria Choice Problems // Scientific Visualization. — 2017. — Vol. 9, No. 5. — P. 59–70.
8. *Клышинский Э.С., Рысаков С.В., Шухов А.И.* Обзор методов визуализации многомерных данных // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. — 2014. — Вып. 17. — С. 519–530. [*Klyshinskii, E.S., Rysakov, S.V., Shikhov, A.I.* Obzor metodov vizualizatsii mnogomernykh dannykh // Novye informatsionnye tekhnologii v avtomatizirovannykh sistemakh. — 2014. — Вып. 17. — S. 519–530. (In Russian)]
9. *Желязны Д.* Говори на языке диаграмм: Пособие по визуальным коммуникациям / Пер. с англ. — М.: Манн, Иванов и Фербер, 2012. — 304 с. [*Zhelyazny, D.* Govori na yazyke diagramm: Posobie po vizual'nym kommunikatsiyam / Per. s angl. — Moscow: Mann, Ivanov i Ferber, 2012. — 304 s. (In Russian)]
10. *Соломатин А.Н.* Генерация, визуализация и выбор многокритериальных альтернатив. — М.: ВЦ РАН, 2005. — 44 с. [*Solomatina, A.N.* Generatsiya, vizualizatsiya i vybor mnogokriterial'nykh alternativ. — Moscow: VTs RAN, 2005. — 44 s. (In Russian)]
11. *Соломатин А.Н.* Многомерные модели стратегического управления развитием крупномасштабных систем // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2007): Труды Первой междунар. конф. (1–3 окт. 2007 г., Москва). — М.: ИПУ РАН, 2007. — С. 37–46. [*Solomatina, A.N.* Mnogomernye modeli strategicheskogo upravleniya razvitiem krupnomasshtabnykh sistem // Upravlenie razvitiem krupno-



- mashtabnykh sistem (MLSD'2007): Trudy Pervoi mezhdunar. konf. (1—3 okt. 2007 g., Moskva). — M.: IPU RAN, 2007. — S. 37—46. (In Russian)]
12. *Solomatin, A.N.* Visualization of multidimensional data: method of connected projections // Eleventh International Conference «Management of Large-Scale System Development» (MLSD) / Moscow (October 2018). — IEEE Conf. Publications, IEEE Xplore Digital Library. — URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8551769>.
13. *Соломатин А.Н.* Визуализация многокритериальных альтернатив при принятии решений // Тр. II междунар. конф. «Системный анализ и информационные технологии» САИТ—2007 (10—14 сент. 2007, г., Обнинск). — Т. 1. — М.: ЛКИ, 2007. — С. 228—231. [*Solomatin, A.N.* Vizualizatsiya mnogokriterial'nykh al'ternativ pri prinyatii reshenii // Тр. II mezhdunar. konf. «Sistemnyi analiz i informatsionnye tekhnologii» SAIT—2007 (10—14 Sent. 2007, g., Obninsk). — Т. 1. — М.: ЛКИ, 2007. — С. 228—231. (In Russian)]
14. *Зуб А.Т.* Системный стратегический менеджмент: теория и практика. — М.: Генезис, 2001. — 751 с. [*Zub, A.T.* Sistemnyi strategicheskii menedzhment: teoriya i praktika. — М.: Genezis, 2001. — 751 s. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Д. Цвиркуном.*
- Поступила в редакцию 28.06.2019, после доработки 21.08.2019. Принята к публикации 24.09.2019.*
- Соломатин Александр Николаевич** — канд. физ.-мат. наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва.  
✉ [a.n.solomatin@bk.ru](mailto:a.n.solomatin@bk.ru).

## METHOD OF CONNECTED PROJECTIONS AND ITS USE FOR VISUALIZATION OF MULTIDIMENSIONAL DATA

A.N. Solomatin

Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ [a.n.solomatin@bk.ru](mailto:a.n.solomatin@bk.ru)

**Abstract.** The method of the connected projections is suggested providing the visualization on the plane of the multidimensional data in the form of geometric objects — polygons and broken lines. One more new tool is added to standard means of multidimensional data visualization — the introduction of the visualization plane heterogeneity. The model of the connected projections consists of the quadrants of the same size that are connected in a special way. The located in each quadrant two-dimensional projections of a multidimensional point are connected, forming polygons or broken lines. The analysis of the existing methods of multidimensional data visualization is given and the set of rules for the construction of models of the connected projections is provided. Some quantitative and algebraic properties of the introduced geometric objects are investigated. The main advantages of the method and the features of its computer implementation are listed. The peculiarities are given of using the method for the visualization of multidimensional matrix models in solving the problems of strategic planning and for the visualization of multicriteria alternatives in solving the problems of multicriteria optimization.

**Keywords:** multidimensional data visualization, method of connected projections, polygons and broken lines, strategic region management, matrix models, multicriteria optimization.



*Новая книга*

**Сидельников Ю.В. Экспертное прогнозирование (Expert prognosycation).** — М.: Доброе слово, 2018. — 248 с. (Параллельный текст на русском и английском языках). — ISBN: 978-5-89796-632-X

Рассмотрен ряд базовых проблемных вопросов математической идентификации организационных структур, институцированных обособлений мезо- и микроуровня, характерных и типизированных для современного авиационно-промышленного комплекса Российской Федерации. Цель монографии состоит в содействии взаимопониманию англоязычных и русскоговорящих исследователей прогностики, повышению уровня качества прогнозов. Выявлены и систематизированы недостатки и трудности субъектов, участвующих в экспертном прогнозировании, их заблуждения. Разработан системный анализ технологии экспертного прогнозирования и предложен метод двухуровневого сценария. Определены подходы к определению меры уверенности эксперта в своей оценке. Приведены аналитические обзоры экспертных оценок первого и второго рода и обзор подходов к систематизации методов прогнозирования. Введены определения некоторых видов экспертных оценок. Рассмотрены состояние и тенденции развития экспертизы, а также динамика занятости в РФ и факторов, ее определяющих. Апробирован метод двухуровневого сценария при разработке прогноза безработицы в РФ.

Результаты работы могут быть полезны специалистам, занимающимся проблемами теории и практики экспертной прогностики, а также студентам соответствующих специальностей.

*Рецензенты: д-р экон. наук А.И. Агеев, д-р техн. наук В.Н. Бурков; научный консультант-редактор: Т.В. Подиновская; веб-разработчик Бизнес-школа Уорвик, Великобритания.*