УДК 62-50

DOI: https://doi.org/10.25728/pu.2018.6.9

СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАНЕВРОМ ОБХОДА ГРУППЫ ПОДВИЖНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ[1]

С.В. Соколов, Л.В. Сахарова, А.А. Манин

Решена задача стохастического управления маневром подвижного объекта, обеспечивающим минимальную вероятность его попадания в область действия измерительных средств группы следящих за ним подвижных пунктов сопровождения. Управление подвижным объектом осуществляется на основе апостериорных оценок как вектора его собственного состояния, так и векторов состояния группы пунктов сопровождения, полученных по показаниям измерителей, расположенных непосредственно на борту объекта. Приведен пример, иллюстрирующий эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: подвижный объект, группа пунктов сопровождения, апостериорное оценивание, стохастическое управление, вероятность существования вектора состояния.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальная для подвижных объектов (ПО), функционирующих в условиях неопределенности, задача синтеза стохастического управления, обеспечивающего минимальную вероятность пересечения границ заданной пространственной области, на сегодня решена только для случая постоянных *apriori* известных границ последней [1—3]. В то же время в ряде практически важных случаев границы запрещенной целевой области могут изменяться во времени заранее неизвестным образом: при вынужденном движении (или дрейфе) пунктов сопровождения (ПС) данного объекта — следящих или управляющих, при незапланированной смене траектории ПС (например, для навигационных спутников), при изменении целевой пространственной области уже в процессе движения ПО, при преодолении объектом подвижных зон направленных помех (отслеживающих движение объекта) и др.

Более того, при наличии нескольких ПС, функционирующих одновременно и независимо друг от друга, запрещенных областей с подвижными центрами может быть несколько, причем в общем случае эти области пересекаются.

Решение подобной задачи требует уже иных подходов, среди которых наибольшее распространение получили игровые [4, 5]. Но сложность реализации в общем случае существующих в настоящее время игровых алгоритмов в бортовых вычислителях не позволяет обеспечить их практическое применение в многоразмерных динамических объектах, приводя к необходимости разработки новых методов управления, ориентированных на конкретный характер движения ПО и его ПС, а также алгоритмов их взаимодействия. Отметим, что в игровой постановке случай одновременного и пересекающегося взаимодействия сразу нескольких независимых игроков до настоящего времени не рассматривался.

В связи с этим рассмотрим далее один из возможных путей решения подобной задачи, сделав допущения:

— управление ПО осуществляется на основе апостериорных оценок как вектора его собственного состояния X, так и векторов состояния каждого i-го, $i = 1, ..., M$, ПС Y_i, полученных по показаниям измерительного комплекса (ИК), расположенного непосредственно на борту ПО;

— каждый i-й ПС имеет свой ИК, который обеспечивает получение точной информации о параметрах состояния ПО;

— сопровождение ПО осуществляется всеми независимыми друг от друга ПС по законам, линейно зависящим как от вектора скорости параметров состояния ПО, так и от самого вектора состояния ПО (как показано далее, линейный характер указанной зависимости не оказывает принципиального влияния на методику решения задачи и используется далее лишь для наглядности процедуры формирования искомого закона управления).

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания № 1.11772.2018/11.12.

Опираясь на перечисленные допущения, вытекающие из реальных условий практического применения большинства известных комплексов сопровождения ПО, дадим постановку описанной задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть N-мерный вектор состояния X сопровождаемого ПО описывается стохастическим нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\dot{X} = f(X, t) + f_0(X, t)U(\hat{X}, \hat{Y}, t) + f_1(X, t)\xi, \quad (1)$$
$$X_0 = X(t_0),$$

где f, f_0 и f_1 — известные нелинейные векторная и матричные функции размерности, соответственно, N, $N\times N$ и $N\times L$; ξ — L-мерный белый нормированный гауссовский вектор-шум; $U(\hat{X}, \hat{Y}, t)$ — искомый N-мерный вектор управления, формируемый на основе апостериорных оценок векторов состояния ПО $\hat{X}$ и ПС $\hat{Y} = |\hat{Y}_1^T \;\; \hat{Y}_2^T \;\; ... \;\; \hat{Y}_q^T|^T$ и зависящий только от них, а N-мерный вектор состояния i-го ПС Y_i, соответственно:

$$\dot{Y}_i = \Phi_i(Y_i, t) + \alpha_i(t)\Phi_{0_i}(Y_i, t)\dot{X} + \beta_i(t)\Phi_{1_i}(Y_i, t)X + \Phi_{2_i}(Y_i, t)\zeta_i, \quad Y_i = Y_i(t_0), \quad (2)$$

где Φ_i, Φ_{0_i}, Φ_{1_i} и Φ_{2_i} — известные, определяемые физико-техническими особенностями i-го ПС нелинейные векторные и матричные функции размерности соответственно N, $P_1\times N$, $P_2\times N$, $N\times K$; α_i, β_i — известные временные матричные функции, определяющие динамику сопровождения ПО, размерности соответственно $N\times P_1$, $N\times P_2$; ζ_i — K-мерный белый нормированный гауссовский вектор-шум, $i = 1, ..., q$; при формировании вектора состояния i-го ПС в соответствии с уравнением (2) принимается допущение, что векторы $\dot{X}$, X при организации процесса сопровождения для каждого i-го ПС известны точно.

Движение i-го независимого ПС наблюдается измерительным комплексом ПО с помощью i-й группы соответствующих датчиков внешней измерительной информации, вектор выходных сигналов Z_{0_i} которых описывается в общем случае нелинейным стохастическим уравнением:

$$Z_{0_i} = H_{0_i}(Y_i, t) + W_{0_i}, \quad i = 1, ..., q, \quad (3)$$

где H_{0_i} — известная нелинейная вектор-функция размерности S_{0_i}, определяемая типом применяемых датчиков внешней информации; W_{0_i} — белый гауссовский центрированный вектор-шум размерности S_{0_i} с матрицей интенсивности D_{0_i}. Одновременно ИК подвижного объекта позволяет наблюдать параметры собственного движения с помощью, например, автономных измерителей, описываемых нелинейным уравнением:

$$Z_1 = H_1(X, t) + W_1, \quad (4)$$

где Z_1 — вектор выходных сигналов измерителей параметров собственного движения ПО размерности S_1; H_1 — известная нелинейная вектор-функция измерения размерности S_1; W_1 — белый гауссовский центрированный вектор-шум размерности S_1 с матрицей интенсивности D_1, определяемой уровнем помехи измерения параметров состояния ПО.

Очевидно, что использование информации, содержащейся в уравнениях (1)—(4), позволяет применять для определения текущего состояния как ПО, так и любого i-го ПС, существующий аппарат теории стохастического оценивания [6]. Для возможности его эффективного применения предварительно сделаем следующие построения. Совокупность наблюдений (3), (4) представим в виде единого (обобщенного), наблюдателя

$$Z_i = H_i(X, Y_i, t) + W_i,$$

где Z_i — вектор выходных сигналов обобщенного наблюдателя — датчиков измерительного комплекса ПО — размерности $S_i = S_1 + S_{0_i}$; H_i — известная нелинейная вектор-функция наблюдения; W_i — центрированный белый гауссовский вектор-шум с матрицей интенсивности D_i, $i = 1, ..., q$. Также объединим уравнения (1), (2) в единую систему, выразив вектор $\dot{X}$ в правой части (2) с помощью его представления (1):

$$\begin{vmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y}_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(X, t) \\ \Psi_i(X, Y_i, t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_0(X, t) \\ \Psi_{0_i}(X, Y_i, t) \end{vmatrix} U(\hat{X}, \hat{Y}, t) + \Psi_{1_i}(X, Y_i, t)\begin{vmatrix} \xi \\ \zeta_i \end{vmatrix},$$

$$\Psi_i(X, Y_i, t) = \Phi_i(Y_i, t) + \alpha_i(t)\Phi_{0_i}(Y_i, t)f(X, t) + \beta_i(t)\Phi_{1_i}(Y_i, t)X,$$

$$\Psi_{0_i}(X, Y_i, t) = \alpha_i(t)\Phi_{0_i}(Y_i, t)f_0(X, t),$$

$$\Psi_{1_i}(X, Y_i, t) = \begin{vmatrix} f_1(X, t) & \vdots & 0 \\ ... & \vdots & ... \\ \alpha_i(t)\Phi_{0_i}(Y_i, t)f_1(X, t) & \vdots & \Phi_{2_i}(Y_i, t) \end{vmatrix},$$
$$i = 1, ..., q.$$

Из всех существующих алгоритмов оценивания наибольшее практическое распространение получили алгоритмы на основе расширенного нелинейного (обобщенного) фильтра Калмана [6], что обусловлено прежде всего тем, что они позволяют осуществлять оценку динамических объектов произвольной размерности, а также тем, что принятое при его синтезе предположение о гауссовости апостериорной плотности вероятности (АПВ) вектора состояния обеспечивает максимальную точность оценивания последнего при минимуме информации о параметрах состояния (т. е. в условиях максимальной априорной неопределенности) [7]. Применяя для оценки расширенного вектора $(X, Y_i)^T$ алгоритм обобщенного фильтра Калмана [6], имеем:

$$\begin{vmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{Y}}_i \end{vmatrix} = \Phi_i + \Phi_{0_i} U + K_i(Z_i - H_i),$$

$$K_i = R_i \begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_i}{\partial \hat{X}} \vdots \dfrac{\partial H_i}{\partial \hat{Y}_i} \end{vmatrix}^T D_{W_i}^{-1},$$

$$\dot{R}_i = G_i + \left(\frac{\partial \Phi_{0_i}}{\partial(\hat{X}, \hat{Y}_i)^T} \hat{\otimes} U\right) R_i + R_i \left(\frac{\partial \Phi_{0_i}}{\partial(\hat{X}, \hat{Y}_i)^T} \hat{\otimes} U\right)^T,$$

$$i = 1, ..., q,$$

$$G_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial(\hat{X}, \hat{Y}_i)^T} R_i + R_i \frac{\partial \Phi_i^T}{\partial(\hat{X}, \hat{Y}_i)^T} + \Psi_{1_i} \Psi_{1_i}^T - K_i D_{W_i} K_i^T,$$

$$\Phi_i = \begin{vmatrix} f \\ \Psi_i \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_{0_i} \end{vmatrix} = M\left(\begin{vmatrix} X_0 \\ Y_{0_i} \end{vmatrix}\right),$$

$$R_{0_i} = M\left\{\left(\begin{vmatrix} X_0 \\ Y_{0_i} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_{0_i} \end{vmatrix}\right)\left(\begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_{0_i} \end{vmatrix}\right)^T\right\},$$

где R_i — апостериорная ковариационная матрица; $\hat{\otimes}$ — знак блочного умножения матрицы на вектор, $i = 1, ..., q$. Ввиду того, что дальнейшее решение задачи предполагает операции с вектором параметров АПВ ρ_i, преобразуем матричное уравнение для апостериорной ковариационной матрицы R_i в векторное, воспользовавшись введенной в работе [8] операцией (V) преобразования произвольной матрицы Q размерности $m \times n$ в вектор $Q^{(V)}$:

$$Q^{(V)} = |Q_{11}\ Q_{21}\ ...\ Q_{m1}\ Q_{12}\ Q_{22}\ ...\ Q_{m2}\ ...\ Q_{1n}\ ...\ Q_{mn}|^T,$$

где Q_{ij} — элементы матрицы Q, а также соответствующими правилами и операциями матричной алгебры, приведенными в Приложении 1. Окончательно имеем:

$$(\dot{\hat{X}}, \dot{\hat{Y}}_i, \dot{R}_i^{(V)})^T = \begin{vmatrix} \Phi_i + K_i(Z_i - H_i) \\ ... \\ G_i^{(V)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_{0_i} \\ G_{0_i} \end{vmatrix} U =$$

$$= B_i + B_{0_i} U, \quad i = 1, ..., q, \tag{5}$$

где $G_{0_i} = (R_i \otimes E)\left[\dfrac{\partial \Phi_{0_i}}{\partial(\hat{X}, \hat{Y}_i)^T}\right]^* + (E \otimes R_i)\left[\dfrac{\partial \Phi_{0_i}}{\partial(\hat{X}, \hat{Y}_i)^T}\right]^{**}$,

$i = 1, ..., q$, «*», «**» — операции с матрицами, определенные в Приложении 1; $\otimes$ — знак кронекеровского произведения; E — единичная матрица соответствующей размерности,

$$B_i = \begin{vmatrix} \Phi_i + K_i(Z_i - H_i) \\ ... \\ G_i^{(V)} \end{vmatrix}, \quad B_{0_i} = \begin{vmatrix} \Phi_{0_i} \\ G_{0_i} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, оценка расширенного вектора состояния ПО и его i-го ПС, наблюдаемого измерительным комплексом ПО, может быть описана векторным уравнением (5), представленным в виде, удобном для последующего решения исследуемой задачи.

Формируемая в процессе движения ПО текущая оценка навигационных параметров как ПО, так и ПС, позволяет сформулировать задачу поиска управления ПО $U(\hat{X}, \hat{Y}, t)$ как задачу синтеза управляющего вектора U, обеспечивающего минимальную апостериорную вероятность существования вектора состояния ПО X в области, ограниченной размерами сферы общего действия средств наблюдения всех ПС. В свою очередь, апостериорная вероятность P нахождения вектора X в сфере пересечения областей наблюдения всех ПС определяется известной формулой вероятности q совместных независимых событий:

$$P = \sum_{i=1}^{q} P_i - \sum_{i<j} P_i P_j \pm ... (-1)^{K-1} \sum_{i_1 < ... < i_K} P_{i_1} P_{i_2} ... P_{i_K} \pm ...$$

$$\pm ... (-1)^{q-1} P_1 ... P_q,$$

где P_i — апостериорная вероятность нахождения случайного вектора X в области наблюдения i-го ПС, векторные размеры которой известны *apriori* и неизменны на всем интервале времени движения ПО: $[D_{i\min}, D_{i\max}]$ = const, а параметры движения центра описываются вектором $\hat{Y}_i$. В силу сделанного выше предположения о гауссовском характере АПВ ρ_i вектора состояния X ПО:

$$\rho_i = \rho(X, \hat{X}_i, R_{iN}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det R_{iN}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X - \hat{X}_i)^T R_{iN}^{-1}(X - \hat{X}_i)\right\},$$

$$R_{iN} = \begin{vmatrix} R_{i11} & R_{i12} & \dots & R_{i1N} \\ R_{i21} & R_{i22} & \dots & R_{i2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{iN1} & R_{i2N} & \dots & R_{iNN} \end{vmatrix},$$

где R_{ikj} — kj-й элемент матрицы R_i, выражение для P_i в данном случае имеет вид:

$$P_i = P_i(\hat{X}_i, \hat{Y}_i, R_{iN}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det R_{iN}}} \times$$

$$\times \int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X - \hat{X}_i)^T R_{iN}^{-1}(X - \hat{X}_i)\right\} dX =$$

$$= \int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}} \rho(X, \hat{X}_i, R_{iN}) dX.$$

При окончательном формировании минимизируемого функционала учтем, что в силу ограниченных энергетических возможностей ПО при синтезе управления неизбежно введение ограничения на модуль вектора управления U, которое при формировании управления на текущем временном интервале может быть, например, задано в виде условия минимума величины $\int\limits_{t_0}^{t} U^T U dt$ [7, 9]. Тогда минимизируемый функционал J, отвечающий условиям поставленной проблемы, можно записать как

$$J = \sum_{i=1}^{q} \int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}} \rho(X, \hat{X}_i, R_{iN}) dX -$$

$$- \sum_{i<j} \int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}} \rho(X, \hat{X}_i, R_{iN}) dX \int\limits_{\hat{Y}_j - D_{j\min}}^{\hat{Y}_j + D_{j\max}} \rho(X, \hat{X}_j, R_{jN}) dX \underset{\dots}{+}$$

$$\underset{\dots}{+} (-1)^{q-1} \int\limits_{\hat{Y}_1 - D_{1\min}}^{\hat{Y}_1 + D_{1\max}} \rho(X, \hat{X}_1, R_{1N}) dX \dots$$

$$\dots \int\limits_{\hat{Y}_q - D_{q\min}}^{\hat{Y}_q + D_{q\max}} \rho(X, \hat{X}_q, R_{qN}) dX + \mu \int\limits_{t_0}^{t} U^T U dt, \qquad (6)$$

где μ = const — нормировочный множитель, обеспечивающий единую физическую размерность и масштабирование всех составляющих функционала (6).

Исходя из изложенного, задачу синтеза управления ПО (1) сформулируем как задачу поиска вектора U, обеспечивающего минимум функционала J (6) при условии, что векторы параметров $\hat{X}_i$, $\hat{Y}_i$, $R_i^{(V)}$, определяющие функционал (6), описываются системой q уравнений вида (5).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи воспользуемся известным фактом, что при неотрицательно определенной критериальной функции (как в рассматриваемом случае) для обеспечения ее минимального значения в каждый момент времени достаточно, чтобы производная ее по времени, взятая с обратным знаком, имела максимум [7, 9].

Для исследуемого функционала (6) предварительно имеем:

$$\dot{J} = \dot{P} + \mu U^T U = \sum_{i=1}^{q} \dot{P}_i - \sum_{i<j} (\dot{P}_i P_j + P_i \dot{P}_j) \underset{\dots}{+}$$

$$\underset{\dots}{+} (-1)^{q-1} (\dot{P}_1 P_2 \dots Pq + P_1 \dot{P}_2 \dots P_q \underset{\dots}{+} P_1 P_2 \dots \dot{P}_q) +$$

$$+ \mu U^T U = \sum_{i=1}^{q} \dot{P}_i \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{q} P_j + \sum_{\substack{j<K \\ j, K \ne i}} P_j P_K \underset{\dots}{+} \right.$$

$$\left. \underset{\dots}{+} (-1)^{q-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{q} P_j \right) + \mu U^T U = \sum_{i=1}^{q} \dot{P}_i L_i + \mu U^T U,$$

где $L_i = L_i(P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_q) = L_i(\hat{X}_K, \hat{Y}_K, R_K; K = 1, \dots, q; K \ne i)$.

Раскроем далее выражение для функции $\dot{P}_i$, $i = 1, \dots, q$. Учитывая зависимость от времени вектора $\hat{Y}_i(t)$, приведенное выше явное выражение для P_i, а также что $[D_{i\min}, D_{i\max}]$ = const, по формуле обобщенного дифференцирования по параметру (формуле Лейбница) имеем:

$$\dot{P}_i = \int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}} \frac{d\rho(X, \hat{X}_i, R_{iN})}{dt} dX +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial(\hat{Y}_i + D_{i\max})} \int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}} \rho(X, \hat{X}_i, R_{iN}) dX \cdot \dot{\hat{Y}}_i -$$

$$- \frac{\partial}{\partial(\hat{Y}_i - D_{i\min})} \int\limits_{\hat{Y}_i + D_{i\max}}^{\hat{Y}_i - D_{i\min}} \rho(X, \hat{X}_i, R_{iN}) dX \cdot \dot{\hat{Y}}_i.$$

Обозначая далее вектор-строки как

$$\frac{\partial}{\partial(\hat{Y}_i + D_{i\max})}\int\limits_{\hat{Y}_{1_i}-D_{i\min_1}}^{\hat{Y}_{1_i}+D_{i\max_1}}\int\limits_{\hat{Y}_{2_i}-D_{i\min_2}}^{\hat{Y}_{2_i}+D_{i\max_2}}\dots\int\limits_{\hat{Y}_{N_i}-D_{i\min_N}}^{\hat{Y}_{N_i}+D_{i\max_N}}\rho(x_1, x_2, \dots, x_N, \hat{X}_i, R_{iN})dx_1dx_2\dots dx_N =$$

$$= \left|\int\limits_{\hat{Y}_{2_i}-D_{i\min_2}}^{\hat{Y}_{2_i}+D_{i\max_2}}\dots\int\limits_{\hat{Y}_{N_i}-D_{i\min_N}}^{\hat{Y}_{N_i}+D_{i\max_N}}\rho(\hat{Y}_{1_i} + D_{i\max_1}, x_2, \dots, x_N, \hat{X}_i, R_{iN})dx_2\dots dx_N \;\vdots\right.$$

$$\vdots\int\limits_{\hat{Y}_{1_i}-D_{i\min_1}}^{\hat{Y}_{1_i}+D_{i\max_1}}\int\limits_{\hat{Y}_{3_i}-D_{i\min_3}}^{\hat{Y}_{3_i}+D_{i\max_3}}\dots\int\limits_{\hat{Y}_{N_i}-D_{i\min_N}}^{\hat{Y}_{N_i}+D_{i\max_N}}\rho(x_1, \hat{Y}_{2_i} + D_{i\max_2}, x_3, \dots, x_N, \hat{X}_i, R_{iN})dx_1dx_3\dots dx_N\;\vdots$$

$$\left.\dots\;\vdots\int\limits_{\hat{Y}_{1_i}-D_{i\min_1}}^{\hat{Y}_{1_i}+D_{i\max_1}}\int\limits_{\hat{Y}_{2_i}-D_{i\min_2}}^{\hat{Y}_{2_i}+D_{i\max_2}}\dots\int\limits_{\hat{Y}_{N-1_i}-D_{i\min_{N-1}}}^{\hat{Y}_{N-1_i}+D_{i\max_{N-1}}}\rho(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, \hat{Y}_{N_i} + D_{i\max_N}, \hat{X}_i, R_{iN})dx_1dx_2\dots dx_{N-1}\right| =$$

$$= \bar{\rho}(\hat{Y}_i + D_{i\max}, \hat{X}_i, R_{iN}),$$

$$\frac{\partial}{\partial(\hat{Y}_i - D_{i\min})}\int\limits_{\hat{Y}_{1_i}+D_{i\max_1}}^{\hat{Y}_{1_i}-D_{i\min_1}}\int\limits_{\hat{Y}_{2_i}+D_{i\max_2}}^{\hat{Y}_{2_i}-D_{i\min_2}}\dots\int\limits_{\hat{Y}_{N_i}+D_{i\max_N}}^{\hat{Y}_{N_i}-D_{i\min_N}}\rho(x_1, x_2, \dots, x_N, \hat{X}_i, R_{iN})dx_1dx_2\dots dx_N = \bar{\rho}(\hat{Y}_i - D_{i\min}, \hat{X}_i, R_{iN}),$$

а также учитывая, что $\frac{d}{dt}\rho(X, \hat{X}_i, R_{iN}) = \left|\frac{\partial\rho}{\partial\hat{X}_i} \;\vdots\; \frac{\partial\rho}{\partial R_{iN}^{(V)}}\right| \cdot \left|\begin{matrix}\dot{\hat{X}}_i \\ \dot{R}_{iN}^{(V)}\end{matrix}\right|$, где $R_{iN}^{(V)} = E_x R_i^{(V)}$, E_x — бинарная матрица размерности $N^2 \times 4N^2$ (структура матрицы E_x, выражения $\frac{\partial\rho}{\partial\hat{X}}$ и $\frac{\partial\rho}{\partial R_N^{(V)}}$ приведены в Приложении 2), выражение для функции $\dot{P}_i$ представим далее в виде:

$$\dot{P}_i = \int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}}\left|\frac{\partial\rho}{\partial\hat{X}_i} \;\vdots\; \frac{\partial\rho}{\partial R_{iN}^{(V)}}\right| dX \left|\begin{matrix}\dot{\hat{X}}_i \\ E_x\dot{R}_i^{(V)}\end{matrix}\right| + [\bar{\rho}(\hat{Y}_i + D_{i\max}, \hat{X}_i, R_{iN}) - \bar{\rho}(\hat{Y}_i - D_{i\min}, \hat{X}_i, R_{iN})]\dot{\hat{Y}}_i = \left|\int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}}\frac{\partial\rho}{\partial\hat{X}_i}dX \;\vdots\right.$$

$$\left.\vdots\;\bar{\rho}(\hat{Y}_i + D_{i\max}, \hat{X}_i, R_{iN}) - \bar{\rho}(\hat{Y}_i - D_{i\min}, \hat{X}_i, R_{iN}) \;\vdots\; \int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}}\frac{\partial\rho}{\partial R_{iN}^{(V)}}dX\right| \left|\begin{matrix}E_{2N} & 0 \\ 0 & E_x\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}\dot{\hat{X}}_i \\ \dot{\hat{Y}}_i \\ \dot{R}_i^{(V)}\end{matrix}\right| = A_i\left|\begin{matrix}\dot{\hat{X}}_i \\ \dot{\hat{Y}}_i \\ \dot{R}_i^{(V)}\end{matrix}\right|,$$

где E_{2N} — единичная матрица размерности $2N$,

$$A_i = \left|\int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}}\frac{\partial\rho}{\partial\hat{X}_i}dX \;\vdots\; \bar{\rho}(\hat{Y}_i + D_{i\max}, \hat{X}_i, R_{iN}) - \bar{\rho}(\hat{Y}_i - D_{i\min}, \hat{X}_i, R_{iN}) \;\vdots\; \int\limits_{\hat{Y}_i - D_{i\min}}^{\hat{Y}_i + D_{i\max}}\frac{\partial\rho}{\partial R_{iN}^{(V)}}dX\right| \left|\begin{matrix}E_{2N} & 0 \\ 0 & E_x\end{matrix}\right|.$$

Окончательно с учетом вида правой части уравнения (5):

$$\dot{P}_i = A_iB_i + A_iB_{0i}U.$$

Возвращаясь к приведенному выше выражению для функционала $\dot{J}$, получаем:

$$\dot{J} = \sum_{i=1}^{q} L_i(A_iB_i + A_iB_{0i}U) + \mu U^TU = \sum_{i=1}^{q} L_iA_iB_i +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{q} L_iA_iB_{0i}\right)U + \mu U^TU = A_* + AU + \mu U^TU,$$

$$A_* = A_*(\hat{X}, \hat{Y}, R^{(V)}) = \sum_{i=1}^{q} L_iA_iB_i,$$

$$A = A(\hat{X}, \hat{Y}, R^{(V)}) = \sum_{i=1}^{q} L_iA_iB_{0i},$$

$$\hat{X} = |\hat{X}_1^T\ \hat{X}_2^T\ \ldots\ \hat{X}_q^T|^T,\ \hat{Y} = |\hat{Y}_1^T\ \hat{Y}_2^T\ \ldots\ \hat{Y}_q^T|^T,$$

$$R^{(V)} = |R_1^{(V)T}\ R_2^{(V)T}\ \ldots\ R_q^{(V)T}|^T,$$

откуда искомый вектор субоптимального управления U, доставляющий $\max\limits_U(-\dot{J})$, определяется из уравнения: $-A - 2\mu U^T = 0$, т. е.

$$U_{\text{опт}} = -\frac{1}{2\mu}A^T. \qquad (7)$$

Система q уравнений, определяющих динамику расширенных векторов оценивания после подстановки выражения для $U_{\text{опт}}$ (7) в формулу (5), окончательно имеет вид:

$$(\dot{\hat{X}}_i,\ \dot{\hat{Y}}_i,\ \dot{R}_i^{(V)})^T = B_i - \frac{1}{2\mu}B_{0_i}A^T, \quad i = 1, \ldots, q. \qquad (8)$$

Таким образом, управление $U_{\text{опт}}$ (7), сформированное по показаниям измерительного комплекса ПО и решению системы уравнений оценок (8), обеспечивает принципиальное решение поставленной задачи. Для иллюстрации возможности практического применения предложенного подхода рассмотрим пример.

ПРИМЕР

Движение центра масс (ЦМ) воздушного ПО относительно Земли в географической системе координат (СК) описывается известной системой уравнений навигации [10]:

$$\begin{vmatrix}\dot{\lambda}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{h}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}[(R+h)\cos\varphi]^{-1} & 0 & 0\\ 0 & (R+h)^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{vmatrix} = f_0(\varphi,\ h)V, \quad (9)$$

где $\lambda_0 = \lambda(t_0)$, $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, $h_0 = h(t_0)$, λ, φ и h — долгота, широта и высота ЦМ; $\begin{vmatrix}[(R+h)\cos\varphi]^{-1} & 0 & 0\\ 0 & (R+h)^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} =$ $= f_0(\varphi,\ h)$, R — радиус Земли; $V = |V_x\ V_y\ V_z|^T$, V_i, $i = x$, y, z — проекции линейной скорости ЦМ на оси его сопровождающей СК (ССК) [10], формируемые далее по показаниям ИК на основании только вектора оценок навигационных параметров ПО $|\hat{\lambda},\ \hat{\varphi},\ \hat{h}|^T$ и ПС: $V_i = V_i(\hat{\lambda},\ \hat{\varphi},\ \hat{h},\ \ldots,\ t)$. Движение ЦМ следящих за ним двух наземных ПС задается аналогичными системами навигационных уравнений в той же (географической) СК:

$$\begin{vmatrix}\dot{\lambda}_{H_i}\\ \dot{\varphi}_{H_i}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}(R\cos\varphi_{H_i})^{-1} & 0\\ 0 & R^{-1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}V_{x_i}^H\\ V_{y_i}^H\end{vmatrix} = \Phi_{0_i}(\varphi_{H_i})V_H, (10)$$

$$\lambda_{H_{oi}} = \lambda_{H_i}(t_0),\ \ \varphi_{H_{0i}} = \varphi_{H_i}(t_0),\ \ i = 1,\ 2,$$

λ_{H_i} и φ_{H_i} — долгота и широта i-го наземного ПС,

$$\begin{vmatrix}(R\cos\varphi_{H_i})^{-1} & 0\\ 0 & R^{-1}\end{vmatrix} = \Phi_{0_i}(\varphi_{H_i}), \quad V_{H_i} = |V_{x_i}^H\ \ V_{y_i}^H|^T$$

есть вектор скорости i-го ПС, формируемый на основании точной информации о движении ПО. При этом формирование вектора скорости V_{H_i} на практике осуществляется или по текущим измерениям непосредственно вектора скорости V ПО (например, с помощью радио- или оптикометрических средств ПС), или по информации от внешних средств измерения (ИСЗ, стационарных наземных измерительных пунктов и пр.) о текущих значениях долготы λ, широты φ и высоты h ЦМ и скорости их изменения ($\dot{\lambda}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{h}$).

В первом случае вектор скорости V ПО измеряется в ССК пункта сопровождения, что при формировании закона сопровождения требует учета взаимосвязи вектора скорости ПО V в ССК подвижного объекта с его значением V^* в ССК пункта сопровождения: $V^* = C(\Delta\lambda,\ \Delta\varphi,\ 0)V$, $C(\Delta\lambda,\ \Delta\varphi,\ 0)$ — матрица направляющих косинусов второго рода [10], зависящая от углов Эйлера — Крылова — углов взаимного разворота ($\Delta\lambda = \lambda - \lambda_H$; $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_H$; 0) ССК пункта сопровождения и ССК подвижного объекта. Закон изменения скорости V_{H_i} i-го ПС — закон сопровождения, в этом случае может быть записан как

$$V_{H_i} = \gamma_{0_i}(t) + \alpha_{0_i}(t)C(\Delta\lambda_i,\ \Delta\varphi_i,\ 0)V, \qquad (11)$$

где $\gamma_{0_i}(t)$ и $\alpha_{0_i}(t)$ — известные нелинейные временные векторная и матричная функции размерности, соответственно, 2 и 2×3.

Во втором случае закон сопровождения формируется, как правило, в виде:

$$V_{H_i} = \gamma_i(t) + \alpha_i(t)\begin{vmatrix}\dot\lambda\\ \dot\varphi\\ \dot h\end{vmatrix} + \beta_i(t)\begin{vmatrix}\Phi_{1_i}(\Delta\lambda_i, \Delta\varphi_i, t)\\ \Phi_{2_i}(\Delta\lambda_i, \Delta\varphi_i, t)\end{vmatrix},$$

где $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ — известные временные векторная и матричная функции размерности соответственно 2, 2×3 и 2×2; Φ_{ij}, $i, j = 1, 2$ — известные нелинейные функции, зависящие от конкретного вида ПС. Так как последнее выражение может быть представлено с учетом уравнения (9) как

$$V_{Hi} = \gamma_i(t) + \alpha_i(t)f_0(\varphi, h)V + \beta_i(t)\cdot\begin{vmatrix}\Phi_{1_i}(\lambda-\lambda_{H_i}, \varphi-\varphi_{H_i}, t)\\ \Phi_{2_i}(\lambda-\lambda_{H_i}, \varphi-\varphi_{H_i}, t)\end{vmatrix}, \tag{12}$$

имея при этом более общий вид по сравнению с законом (11), то при последующем решении задачи будем пользоваться именно им. Тогда, подставляя выражение (12) в выражение (10) и объединяя с уравнением (9), имеем расширенный вектор состояния ПО и i-го ПС, подлежащий дальнейшему апостериорному оцениванию:

$$(\dot\lambda, \dot\varphi, \dot h, \dot\lambda_{H_i}, \dot\varphi_{H_i})^T = \begin{vmatrix}0\\ \dots\\ \Phi_{0_i}\gamma_i + \Phi_{0_i}\beta_i(\Phi_{1_i}, \Phi_{2_i})^T\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}f_0\\ \Phi_{0_i}\alpha_i f_0\end{vmatrix}\cdot V(\hat\lambda, \hat\varphi, \hat h, \hat\lambda_{H_i}, \hat\varphi_{H_i}, t), \quad i = 1, 2,$$

или в принятых ранее обозначениях:

$$(\dot\lambda, \dot\varphi, \dot h, \dot\lambda_{H_i}, \dot\varphi_{H_i})^T = \begin{vmatrix}0\\ \Psi_i\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}f_0\\ \Psi_{0_i}\end{vmatrix}\cdot U, \tag{13}$$

где $\Psi_i = \Phi_{0_i}\gamma_i + \Phi_{0_i}\beta_i(\Phi_{1_i}, \Phi_{2_i})^T$, $\Psi_{0_i} = \Phi_{0_i}\alpha_i f_0$, $U = V$. Комплексирование на борту ПО астронавигационных, оптических, радиолокационных и других ИК позволяет осуществить наблюдение не только собственных навигационных параметров ПО, но и параметров i-го ПС [11]. В общем виде такой вектор Z_i выходных сигналов ИК может быть представлен в виде [11]:

$$Z_i = H_i(\lambda, \varphi, h, \lambda_{H_i}, \varphi_{H_i}, t) + W_i, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

H_i — известная нелинейная вектор-функция размерности не меньше 5 (как правило, существенно больше); W_i — центрированный белый гауссовский вектор-шум с матрицей интенсивностей D_{Wi}. Гауссовская оценка вектора (13) по показаниям ИК (14) имеет вид:

$$\left(\dot{\hat\lambda}, \dot{\hat\varphi}, \dot{\hat h}, \dot{\hat\lambda}_{H_i}, \dot{\hat\varphi}_{H_i}\right)^T = \begin{vmatrix}0\\ \dots\\ \Psi_i(\hat\varphi_{H_i}, \hat\lambda_{H_i}, \hat\lambda, \hat\varphi, t)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}f_0(\hat\varphi, \hat h)\\ \dots\\ \Psi_{0_i}(\hat\varphi_{H_i}, \hat\varphi, \hat h, t)\end{vmatrix} U + K_i[Z_i - H_i(\hat\lambda, \hat\lambda_{H_i}, \hat\varphi, \hat\varphi_{H_i}, \hat h, t)],$$

$$K_i = R_i\begin{vmatrix}\dfrac{\partial H_i}{\partial\hat\lambda} & \dfrac{\partial H_i}{\partial\hat\varphi} & \dfrac{\partial H_i}{\partial\hat h} & \dfrac{\partial H_i}{\partial\hat\lambda_{H_i}} & \dfrac{\partial H_i}{\partial\hat\varphi_{H_i}}\end{vmatrix}^T D_{W_i}^{-1},$$

$$\dot R_i = F_iR_i + R_iF_i^T - K_iD_{W_i}K_i^T + (F_{0_i}\,\hat\otimes\,U)R_i + R_i(F_{0_i}\,\hat\otimes\,U)^T, \quad i = 1, 2,$$

$$F_i = \begin{vmatrix} & & & & 0 & & & \\ & & & & \dots & & & \\ \Phi_{0_i}\beta_i\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_{1_i}}{\partial\hat\lambda}\\ \dfrac{\partial\Phi_{2_i}}{\partial\hat\lambda}\end{vmatrix} & \vdots & \Phi_{0_i}\beta_i\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_{1_i}}{\partial\hat\varphi}\\ \dfrac{\partial\Phi_{2_i}}{\partial\hat\varphi}\end{vmatrix} & \vdots & 0 & \vdots & \Phi_{0_i}\beta_i\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_{1_i}}{\partial\hat\lambda_{H_i}}\\ \dfrac{\partial\Phi_{2_i}}{\partial\hat\lambda_{H_i}}\end{vmatrix} & \vdots & \dfrac{\partial\Phi_{0_i}}{\partial\varphi_{H_i}}\left(\gamma_i + \beta_i\begin{vmatrix}\Phi_{1_i}\\ \Phi_{2_i}\end{vmatrix}\right) + \Phi_{0_i}\beta_i\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_{1_i}}{\partial\hat\varphi_{H_i}}\\ \dfrac{\partial\Phi_{2_i}}{\partial\hat\varphi_{H_i}}\end{vmatrix}\end{vmatrix}, \quad F_{0_i} = \begin{vmatrix}0 & \vdots & \dfrac{\partial f_0}{\partial\hat\varphi} & \vdots & \dfrac{\partial f_0}{\partial\hat h} & \vdots & & \vdots & 0\\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \dots\\ 0 & \vdots & \Phi_{0_i}\alpha_i\dfrac{\partial f_0}{\partial\hat\varphi} & \vdots & \Phi_{0_i}\alpha_i\dfrac{\partial f_0}{\partial\hat h} & \vdots & 0 & \vdots & \dfrac{\partial\Phi_{0_i}}{\partial\hat\varphi_{H_i}}\alpha_i f_0\end{vmatrix},$$

Приводя матричное уравнение для R_i к векторной форме, получаем расширенный вектор оценок:

$$\begin{vmatrix} \hat{\dot{\lambda}} \\ \hat{\dot{\varphi}} \\ \hat{\dot{h}} \\ \dots \\ \hat{\dot{\lambda}}_{H_i} \\ \hat{\dot{\varphi}}_{H_i} \\ \dots \\ \dot{R}_i^{(V)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \\ \dots & +K_i[Z_i - H_i] \\ \Psi_i & \\ \dots & \\ (F_iR_i)^{(V)} + (R_iF_i^T)^{(V)} - (K_iD_{W_i}K_i^T)^{(V)} & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_0 \\ \dots \\ \Phi_{0_i}\alpha_i f_0 \\ \dots \\ (R_i \otimes E)F_{0_i}^* + (E \otimes R_i)F_i^{**} \end{vmatrix} U.$$

При формировании минимизируемого функционала J полагаем, что зона действия средств слежения обоих ПС одинакова и определяется как $[\lambda_{H_i} - 0{,}05;\ \lambda_{H_i} + 0{,}05]$ (рад), $[\varphi_{H_i} - 0{,}035;\ \varphi_{H_i} + 0{,}035]$ (рад), $h_i = 18 \times 10^3$ м, $i = 1, 2$, тогда

$$J = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det R_{13}}} \int\limits_{\lambda_{H_1}-0{,}05}^{\lambda_{H_1}+0{,}05} \int\limits_{\varphi_{H_1}-0{,}035}^{\varphi_{H_1}+0{,}035} \int\limits_{0}^{18\cdot 10^3} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}\lambda\\ \varphi\\ h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\hat{\lambda}_1\\ \hat{\varphi}_1\\ \hat{h}_1\end{vmatrix}\right)^T R_{13}^{-1}\left(\begin{vmatrix}\lambda\\ \varphi\\ h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\hat{\lambda}_1\\ \hat{\varphi}_1\\ \hat{h}_1\end{vmatrix}\right)\right\} d\lambda d\varphi dh +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det R_{23}}} \int\limits_{\lambda_{H_2}-0{,}05}^{\lambda_{H_2}+0{,}05} \int\limits_{\varphi_{H_2}-0{,}035}^{\varphi_{H_2}+0{,}035} \int\limits_{0}^{18\cdot 10^3} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}\lambda\\ \varphi\\ h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\hat{\lambda}_2\\ \hat{\varphi}_2\\ \hat{h}_2\end{vmatrix}\right)^T R_{23}^{-1}\left(\begin{vmatrix}\lambda\\ \varphi\\ h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\hat{\lambda}_2\\ \hat{\varphi}_2\\ \hat{h}_2\end{vmatrix}\right)\right\} d\lambda d\varphi dh -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det R_{13}}} \int\limits_{\lambda_{H_1}-0{,}05}^{\lambda_{H_1}+0{,}05} \int\limits_{\varphi_{H_1}-0{,}035}^{\varphi_{H_1}+0{,}035} \int\limits_{0}^{18\cdot 10^3} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}\lambda\\ \varphi\\ h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\hat{\lambda}_1\\ \hat{\varphi}_1\\ \hat{h}_1\end{vmatrix}\right)^T R_{13}^{-1}\left(\begin{vmatrix}\lambda\\ \varphi\\ h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\hat{\lambda}_1\\ \hat{\varphi}_1\\ \hat{h}_1\end{vmatrix}\right)\right\} d\lambda d\varphi dh \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det R_{23}}} \int\limits_{\lambda_{H_2}-0{,}05}^{\lambda_{H_2}+0{,}05} \int\limits_{\varphi_{H_2}-0{,}035}^{\varphi_{H_2}+0{,}035} \int\limits_{0}^{18\cdot 10^3} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}\lambda\\ \varphi\\ h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\hat{\lambda}_2\\ \hat{\varphi}_2\\ \hat{h}_2\end{vmatrix}\right)^T R_{23}^{-1}\left(\begin{vmatrix}\lambda\\ \varphi\\ h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\hat{\lambda}_2\\ \hat{\varphi}_2\\ \hat{h}_2\end{vmatrix}\right)\right\} d\lambda d\varphi dh + \mu \int\limits_{t_0}^{t} U^T U dt.$$

Согласно найденному выше закону управления (7), уравнения оценки (8), необходимой для его реализации, имеют вид:

$$\begin{vmatrix} \hat{\dot{\lambda}} \\ \hat{\dot{\varphi}} \\ \hat{\dot{h}} \\ \dots \\ \hat{\dot{\lambda}}_{H_i} \\ \hat{\dot{\varphi}}_{H_i} \\ \dots \\ \dot{R}_i^{(V)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \\ \dots & +K_i[Z_i - H_i] \\ \Psi_i & \\ \dots & \\ (F_iR_i)^{(V)} + (R_iF_i^T)^{(V)} - (K_iD_{W_i}K_i^T)^{(V)} & \end{vmatrix} - \frac{1}{2\mu}\begin{vmatrix} f_0 \\ \dots \\ \Phi_{0_i}\alpha_i f_0 \\ \dots \\ (R_i \otimes E)F_{0_i}^* + (E \otimes R_i)F_i^{**} \end{vmatrix} \cdot A^T, \quad i = 1,\ 2,$$

где структура матрицы A для N-мерного случая (здесь $N = 3$) приведена выше при выводе выражения (7).

Для оценки эффективности синтезированного закона управления (7) в рассматриваемом случае было проведено численное моделирование движений ПО и ПС на временном интервале $[t_0, t_к] = [0; 1000]$ (с) при начальных значениях векторов состояния и параметрах законов движения:

$$\lambda_{H_{0_1}} = 0{,}8 \text{ рад}, \quad \varphi_{H_{0_1}} = 0{,}75 \text{ рад}, \quad \lambda_{H_{0_2}} = 0{,}6 \text{ рад}, \quad \varphi_{H_{0_2}} = 0{,}6 \text{ рад}, \quad \gamma_i = 0,$$

$$\alpha_i(t) = \begin{vmatrix} a_i\left(2 - \sqrt{\dfrac{t}{t_к}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & a_i\left(4 - \sqrt{\dfrac{t}{t_к}}\right) & 0 \end{vmatrix}, \quad a_1 = 6{,}73; \quad a_2 = 6{,}5;$$

$$\beta_i(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2{,}2 \end{vmatrix},\ \Phi_{1_i} = \lambda - \lambda_{H_i},\ \lambda_0 = 0{,}7\ \text{рад},$$

$\varphi_0 = 0{,}68$ рад, $\Phi_{2_i} = \varphi - \varphi_{H_i}$, $h_0 = 10 \cdot 10^3$ м, $h \le 15 \cdot 10^3$ м,

$$H_i = \begin{vmatrix} 0{,}8 & & & & \\ & 0{,}5 & & 0 & \\ & & 1{,}2 & & \\ & 0 & & 0{,}7 & \\ & & & & 0{,}7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda \\ \varphi \\ h \\ \lambda_{H_i} \\ \varphi_{H_i} \end{vmatrix},$$

$$D_W = \begin{vmatrix} 4 \cdot 10^{-4} & & & & \\ & 7 \cdot 10^{-4} & & 0 & \\ & & 0{,}5 & & \\ & 0 & & 8 \cdot 10^{-4} & \\ & & & & 8 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix},\ i = 1,\ 2,$$

начальные значения вектора оценок выбирались равными их истинным значениям. В результате моделирования было установлено, что при отсутствии управления ПО наблюдается монотонное сближение значений навигационных параметров ПО и каждого из ПС: по окончании процесса движения отклонения параметров составили — по долготе $\Delta\lambda = \max(|\lambda - \lambda_{H_i}|) - 11\ \%$ от первоначального отклонения, по широте $\Delta\varphi = \max(|\varphi - \varphi_{H_i}|) - 16\ \%$. При наличии управления ПО сближения навигационных параметров не наблюдалось на всем интервале моделирования, по окончании движения отклонения параметров превысили первоначальные соответственно: $\min(\Delta\lambda_i)$ — в 2,7 раз, $\min(\Delta\varphi_i)$ — в 3,5 раза. Вычисленное с помощью метода Симпсона 4-го порядка в момент $t_к$ значение вероятности существования вектора состояния ПО в области действия средств слежения ПС при отсутствии управления превысило при этом значение аналогичной вероятности при наличии управления ~ в 4,95 раза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные результаты позволяют сделать вывод о возможности эффективного практического применения разработанного подхода как в существующих, так и в перспективных системах управления подвижных объектов, ориентированных на преодоление подвижных пространственных областей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Для возможности решения задач анализа матричных уравнений и использования их в процедуре синтеза оптимального управления необходимо дальнейшее расширение поля операций матричной алгебры.

С этой целью рассмотрим следующие операции и определения.

Базовая операция — правило формирования вектора $Q^{(V)}$ из элементов Q_{ij} некоторой матрицы Q размерности $m \times n$ [6]:

$$Q^{(V)} = |Q_{11} Q_{21} \dots Q_{m1} Q_{12} Q_{22} \dots Q_{m2} \dots Q_{1n} Q_{2n} \dots Q_{mn}|^T.$$

Операции над матрицами

Определение вновь введенных операций:

- операция $[Q^{(V)}]^{(\wedge)} = Q$;
- преобразование «*» блочной матрицы $B = |B_1 \vdots B_2 \vdots \dots \vdots B_n|$ в блочную матрицу

$$\begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{vmatrix} \Rightarrow B^*;$$

- преобразование «**» матрицы B^T в матрицу

$$\begin{vmatrix} [(B^T_{(1)})^{(\wedge)}]^T \\ [(B^T_{(2)})^{(\wedge)}]^T \\ \vdots \\ [(B^T_{(n)})^{(\wedge)}]^T \end{vmatrix} \Rightarrow B^{**},$$

где $B^T_{(i)}$ — i-й столбец B^T.

Алгебраические соотношения

- $(ASC)^{(V)} = (C^T \otimes A)S^{(V)}$, $\otimes$ — символ кронекеровского произведения, A, S, C — обыкновенные матрицы;
- $(Sh)^{(V)} = S^* h$;
- $(h^T S^T)^{(V)} = S^{**} h$;
- $S(E \otimes h^T) = S \otimes h^T$, $S(h^T \otimes E) = h^T \otimes S$, E — единичная матрица.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Структура матрицы E_x:

$$E_x = \left.\begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} E^{(1)}_{N0} & & & & \\ & E^{(2)}_{N0} & 0 & & \\ & & E^{(3)}_{N0} & & \end{matrix}}^{2N^2} & \overbrace{\begin{matrix} \\ \\ 0 \end{matrix}}^{2N^2} \\ \begin{matrix} 0 & & \ddots & \\ & & & E^{(N)}_{N0} \end{matrix} & \end{vmatrix}\right\} N^2,$$

где $E^{(i)}_{N0} = |E_N \vdots 0_N|$, E_N — единичная матрица размерности N; 0_N — нулевая матрица размерности N.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \hat{X}} = \left[\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det R_N}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (X - \hat{X})^T R_N^{-1} (X - \hat{X}) \right\} \times \right.$$
$$\left. \times\ (X - \hat{X})^T R_N^{-1} \right],$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial R_N^{(V)}} = \left[\frac{1}{2\sqrt{(2\pi)^N \det R_N}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\hat{X})^T R_N^{-1}(X-\hat{X})\right\} \times\right.$$

$$\left.\times \left[(X-\hat{X})^T (R_N^{-1} E_* \hat{\otimes} R_N^{-1})(X-\hat{X}) - \frac{1}{\det R_N}\{R_A^{(V)}\}^T\right]\right],$$

где обозначения: $E_* = |E_1 \otimes E_N \vdots E_2 \otimes E_N \vdots \dots \vdots E_m \otimes E_N|$, E_i — i-я строка матрицы E_N, E_N — единичная матрица размерности N; $\otimes$ — символ кронекеровского произведения матриц; $\hat{\otimes}$ — символ блочного умножения матриц; R_A — матрица алгебраических дополнений матрицы R.

При выводе приведенных выражений были применены правила многомерного анализа линейных систем, полученные ранее в работах [7, 8]:

- $\dfrac{\partial[\det Q]}{\partial Q^{(V)}} = \{Q_A^{(V)}\}^T$, Q — некоторая произвольная неособенная матрица размерности $m \times m$;
- $\dfrac{\partial Q^{-1}}{\partial s} = -Q^{-1}\dfrac{\partial Q}{\partial s} \hat{\otimes} Q^{-1}$, s — некоторый вектор;
- $\dfrac{\partial Q}{\partial Q^{(v)}} = |E_1 \otimes E \vdots E_2 \otimes E \vdots \dots \vdots E_m \otimes E| = E_*$, E_i — i-я строка единичной матрицы E.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алехин Д.В., Якименко О.А.* Синтез алгоритма оптимизации траектории полета по маршруту прямым вариационным методом // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1999. — № 4. — С. 43—51.
2. *Соколов С.В., Щербань И.В.* Локально-оптимальное управление спуском космического аппарата // Космические исследования. — 2000. — Т. 38, № 4. — С. 432—436.
3. *Маслов Е.П., Абрамянц Т.Г., Рудько И.М., Яхно В.П.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей при малых отношениях сигнал/помеха // Информационно-управляющие системы. — 2011. — № 2. — С. 2—7.
4. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Физматлит, 1974. — 458 с.
5. *Сысоев Л.П.* Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Проблемы управления. — 2010. — № 5. — С. 73—79.
6. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 2004. — 608 с.
7. *Соколов С.В., Ковалев С.М., Кучеренко П.А., Смирнов Ю.А.* Методы идентификации нечетких и стохастических систем. — М.: Физматлит, 2018. — 471 с.
8. *Чернов А.А., Ястребов В.Д.* Метод оценки возмущений в алгоритмах решения навигационных задач // Космические исследования. — 1984. — Т. 22, № 3. — С. 372—381.
9. *Казаков И.Е.* Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
10. *Соколов С.В., Погорелов В.А.* Стохастическая оценка, управление и идентификация в высокоточных навигационных системах. — М.: Физматлит, 2016. — 264 с.
11. *Боднер В.А.* Приборы первичной информации. — М.: Машиностроение,1981. — 344 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Соколов Сергей Викторович — д-р техн. наук, профессор,
Ростовский государственный экономический университет,
✉ s.v.s.888@yandex.ru,

Сахарова Людмила Викторовна — д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ростовский государственный экономический университет,
✉ L_Sakharova@mail.ru,

Манин Александр Анатольевич — канд. техн. наук,
вед. науч. сотрудник, доцент,
Московский технический университет связи и информатики,
✉ manin1@rambler.ru.

Читайте в ближайших номерах

- ✓ **Алескеров Ф.Т., Тверской Д.Н.** Моделирование влияния внешней среды на возникновение специализации в абстрактных системах
- ✓ **Глущенко А.И.** Адаптивный нейросетевой настройщик ПИД-регулятора для управления нагревательными печами
- ✓ **Дорри М.Х., Рощин А.А., Середа Л.А.** Визуализация движения подводного аппарата по траектории
- ✓ **Кузнецов Д.С., Котеленко С.А., Пятецкий В.Е.** Идентификация операционной модели управления производственным комплексом
- ✓ **Мелехин В.Б., Хачумов В.М.** Многоуровневая модель ситуационного управления сложными технологическими процессами
- ✓ **Сидельников Ю.В., Ряпухин А.В.** Повышение эффективности совещаний в малых группах. Ч. 2. Нестандартные подходы к проблеме
- ✓ **Суховеров В.С.** Система автоматической обработки тематически ориентированных текстов с терминологическим словарем в формате регулярных выражений
- ✓ **Трошин Д.В.** Методический подход к моделированию рационального сценария обеспечения экономической безопасности России в долгосрочной перспективе
- ✓ **Угольницкий Г.А.** Методология и прикладные задачи управления устойчивым развитием активных систем
- ✓ **Шевыренков М.Ю.** Оценка влияния активных прогнозов на рынки энергоносителей на примере европейского рынка газа