



# ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО: ВЫБОР СТРАТЕГИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ДРУГИЕ ВОПРОСЫ<sup>1</sup>

А.С. Шведов

**Аннотация.** Работающие в условиях рыночной экономики фирмы не могут не рассматривать задачу увеличения доходов. Когда крупные фирмы своими действиями влияют на цены, за этой задачей стоит совсем не простая математика – игровые модели олигополии. В обзоре в большей степени рассматривается конкуренция по Курно, чем конкуренция по Бертрону. Обсуждаются вопросы существования, единственности, устойчивости равновесия Курно. Также рассматриваются: вопросы вступления новых фирм на рынок; барьеры, которые могут для этого ставиться; влияние такого вступления на материальное благосостояние общества, на совокупный излишек, излишек потребителя. Затрагиваются проблемы сговора между фирмами. Дается обзор публикаций, в которых сравниваются цены на товары, прибыли фирм, материальное благосостояние общества при конкуренции по Курно и при конкуренции по Бертрону. Значительное внимание уделяется тем проблемам, с которыми сталкиваются фирмы из-за незнания некоторых текущих или будущих условий рынка, имеющейся неопределенности. Рассматриваются вопросы обмена информацией между фирмами. Один из подходов к снижению предельных затрат – покупка лицензий; равновесия Курно при продаже лицензий также приведены в обзоре. Представлены методы расчетов для равновесий Курно (для случая, когда каждая фирма производит несколько товаров) и публикации, в которых равновесия Курно используются при решении конкретных прикладных задач.

**Ключевые слова:** равновесие Курно, социальная эффективность, равновесие Бертрона, обмен информацией, неопределенность, лицензирование, формирование картелей, задача дополненности.

## ВВЕДЕНИЕ

Цены на товары, когда в отрасли работают крупные фирмы, определяются не только спросом и затратами на производство, но и стратегиями производителей. Теория олигополии играет важную роль при выработке фирмами своих стратегий. В соответствии с классификацией, приведенной в книге [1], взаимодействия, возникающие в отрасли с небольшим числом фирм, могут быть либо конкуренцией, когда фирмы определяют объемы выпускаемой продукции, либо конкуренцией, когда фирмы определяют цены на свою продукцию, либо сговором. Если все фирмы одновременно принимают решения, какой объем продукции выпустить, пытаясь предвидеть, какими будут выпуски других фирм, такое взаимодействие называется конкуренцией по Курно. Если все фирмы од-

новременно принимают решения, какую цену установить на свою продукцию, пытаясь предвидеть, какие цены установят другие фирмы, такое взаимодействие называется конкуренцией по Бертрону. Также конкуренция по Курно и конкуренция по Бертрону рассматриваются в книге [2] (под названиями «олигополия Курно» и «олигополия Бертрона» соответственно). Подходы, основанные на конкуренции по Курно, могут быть предпочтительными в тех случаях, когда объемы выпускаемой продукции должны быть определены задолго до того времени, когда произойдет выпуск. Обмен информацией между фирмами, например, о затратах и рыночном спросе (или отсутствие такого обмена информацией) имеет существенное значение. В работе [3] указывается, что элементами стратегий фирм, кроме объемов выпускаемой продукции и цен, могут быть, например, расходы на рекламу и R&D; это делает используемую модель алгебраически более сложной, но не меняет ее полностью. Математическое моделирование не одновременно принятия фирмами решений, разумеется, также

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда экономических исследований академика Н.П. Федоренко. Проект № 2022-139.

представляет интерес, но такие модели в настоящем обзоре не рассматриваются.

Классическая модель конкуренции по Курно следующая. Предполагается, что  $n$  фирм производят однородный товар, продаваемый по единой цене. Если  $L_i$  – это *производственные возможности* фирмы  $i$ , то стратегией фирмы  $i$  является выпуск товара  $q_i$ , где  $0 \leq q_i \leq L_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Предполагается также, что *затраты*  $C_i$  фирмы зависят только от выпуска  $q_i$ , а *цена* товара  $P$  зависит только от *совокупного выпуска*  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ . Тогда прибыль фирмы  $i$

$$\pi_i(q_i, Q) = P(Q)q_i - C_i(q_i). \quad (1)$$

Функция  $P(Q)$  является монотонно убывающей, а каждая из функций  $C_i(q_i)$  – монотонно возрастающей (исключение составляют модели с постоянными затратами). Функция  $P(Q)$  называется *обратной функцией спроса*, а функции  $C_i(q_i)$  – *функциями затрат*. Целью фирмы  $i$  является максимизация прибыли  $\pi_i$ . Говоря современным языком (работа Курно, как и работа Бертрана, относится к XIX в.), это задача теории некооперативных игр. Требуется найти профиль чистых стратегий  $q_1, \dots, q_n$ , который был бы равновесием Нэша. Применительно к данной задаче равновесие Нэша называется *равновесием Курно* или равновесием Курно – Нэша. Более общее понятие равновесия, включающее сговор между фирмами относительно объемов выпускаемой продукции, рассматривается, например, в работе [3]. При этом равновесие Курно оказывается одним из частных случаев этого равновесия.

Сформулированная задача привела к появлению большого числа интересных и важных математических работ. Однако целью Курно было дать описание экономических реалий, лежащих между монополией и совершенной конкуренцией, в частности, ответить на вопрос, соответствует ли увеличение числа фирм общественным интересам. Достижением ученых XIX в. является признание того, что отвечать на подобные вопросы без применения математических методов и решения оптимизационных задач невозможно. Но каков необходимый для этого уровень математической сложности? Некоторые авторы утверждают, что по запросу «равновесие Курно» поисковики выдают более 50 000 ссылок. В каких-то статьях дело ограничивается формулировкой и доказательством

математических теорем, в других делаются выводы экономического характера или рассматриваются конкретные экономические задачи. Разумеется, говорить, что какое-то звено цепочки «теоретическая математика» – «прикладная математика» – «конкретные приложения» более важное, чем другие, было бы неправильно. Разумеется, также, что при таком количестве публикаций отсутствие в обзоре упоминания о какой-то публикации не означает, что автор не считает ее важной.

Бурное развитие математической дисциплины, которую можно назвать «олигополия Курно», началось в 60-е гг. XX в. (или в конце 1950-х гг.). Во-первых, изучались вопросы существования равновесия Курно и единственности такого равновесия. Во-вторых, рассматривались динамические модели, исследовалась устойчивость равновесий Курно. Эти задачи представлены в § 1 обзора. Отметим также, что целью настоящей работы не является обзор динамических моделей конкуренции по Курно, основное внимание уделяется статическим моделям. Однако на начальном этапе создания математической дисциплины «олигополия Курно» вопросы существования, единственности и устойчивости рассматривались в тесной взаимосвязи.

Всегда ли вступление новой фирмы на рынок желательно с точки зрения интересов общества? Или может оказаться, что такое вступление приведет к уменьшению выпусков у уже работающих фирм, повышению цены на товар, будет выгодно для вступающей на рынок фирмы, но приведет к снижению материального благосостояния общества? Должны ли власти устанавливать барьеры для вступления новых фирм на рынок, и какими должны быть эти барьеры? Как эти барьеры скажутся на совокупном излишке и на излишке потребителя? Все перечисленные вопросы взаимосвязаны. Обзор соответствующих публикаций дается в § 2. В большом числе работ сравниваются конкуренция по Курно и конкуренция по Бертрану по равновесным ценам, выпускам, материальному благосостоянию общества и т. д. Эти исследования представлены в § 3. Во многом обзор направлен на применение методов теории вероятностей при изучении взаимодействия крупных фирм, в § 4 дается обзор работ, в которых изучается выбор стратегий при неопределенности и обмен информацией между фирмами. Также в этом разделе рассматриваются работы, относящиеся к продаже лицензий. В § 5 дается обзор работ по формированию картелей. В § 6 обсуждается практическое нахождение равновесий Курно и их использование при решении конкретных прикладных задач.



## 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЙ КУРНО

Оставив пока в стороне вопрос о существовании и единственности равновесий Курно, начнем с работы [4], в которой изучается устойчивость этих равновесий. В этой работе рассматривается модель с дискретным временем, на каждом временном шаге путем определения объема выпускаемой продукции каждой фирмой решается задача максимизации прибыли при известной всем фирмам линейной обратной функции спроса  $P(Q)$ . Каждая фирма исходит из предположения, что выпуски других фирм останутся неизменными. Исследуется устойчивость получающейся системы разностных уравнений. Оказывается, что решение устойчиво только при числе фирм, равном 2-м; при числе фирм, большем 3-х, решение неустойчиво.

Следует отметить, что к этому времени существовала значительная литература по исследованию устойчивости равновесий Вальраса, и было хорошо известно, что вывод об устойчивости или неустойчивости решения зависит от используемого в модели процесса регулировки; (см., например, работу [5, с. 643]). Категоричность и несомненная практическая применимость выводов работы [4], а также то, что процесс регулировки в этой работе выбирается произвольно, повлекли за собой дальнейшие исследования устойчивости равновесий Курно. В работе [6] рассмотрен более широкий класс процессов регулировки, показано, что равновесие Курно может быть устойчивым при любом числе фирм.

В работе [7] рассматриваются модели с непрерывным временем, с различными функциями затрат у фирм и с нелинейной обратной функцией спроса. Для доказательства устойчивости равновесий Курно используются функции Ляпунова. В работе [8] объединяются подходы из работ [7] и [5], формулируются общие условия для процессов регулировки, при которых равновесия Курно устойчивы. В работе [9] ослабляется предположение, что все фирмы производят однородный товар, но каждая фирма производит только один товар (такие модели называются моделями с различными товарами, в отличие от моделей, где каждая фирма производит несколько товаров). При условии, что «связь между товарами достаточно слабая», доказывается, что равновесие Курно устойчиво. Результаты об устойчивости из работы [7] дополняются в работе [10]; для анализа в этой работе используются предположительные вариации. (Подробнее о предположительных вариациях см.,

например, работу [11].) Обзор дальнейших результатов, относящихся к устойчивости равновесий Курно, можно найти в работах [12–14].

Задача существования равновесий Курно (в случае фирм, производящих однородный товар) рассматривается в работе [15]. Функции  $P(Q)$  и  $C_i(q_i)$  непрерывные, но дифференцируемость этих функций не требуется, функция  $\pi_i(q_i, Q)$  как функция аргумента  $q_i$  предполагается вогнутой. При этих условиях доказывается существование равновесия Курно. Даются ссылки на предшествующие работы, в которых содержатся частные случаи доказанной теоремы. Теорема о единственности равновесия Курно доказывается в работе [16]. Следует отметить также работу [17] о вогнутых некооперативных играх, результаты которой могут быть использованы для доказательства существования и единственности равновесий Курно, но в качестве примера олигополия Курно в данной работе не рассматривается. И в работе [15], и в работе [17] для доказательства существования равновесий используется теорема Какутани о неподвижной точке. Более простое доказательство существования и единственности равновесий Курно при дифференцируемых функциях  $P(Q)$  и  $C_i(q_i)$  дается в работе [18]. В книге [19, с. 4, 5] приводятся контрпримеры, показывающие, что равновесие Курно может не существовать и может существовать, но быть не единственным. Задачи существования, единственности и устойчивости равновесий Курно могут быть рассмотрены и применительно к фирмам, производящим несколько товаров (см., например, работу [20]). Эти вопросы также освещены в книге [19]. В работе [21] доказывается существование равновесий Курно для случая бивогнутых обратных функций спроса.

В ряде работ изучение рассматриваемых экономических процессов пошло по пути увеличения сложности используемого математического инструментария. В работе [22] под обратной функцией спроса понимается многозначное отображение. В работе [23] целью названо создание единого подхода к понятиям равновесия Вальраса и равновесия Курно. Изначально понятие экономики вводится таким образом, как это принято при изучении равновесий Вальраса с производством. Производство Курно определяется затем как некоторая вероятностная мера, а под равновесием Курно понимается равновесие не в чистых, а в смешанных стратегиях. Для изучения олигополии Курно применяется и другой математический инструментарий; так, в работе [24] в рамках моделей с дискретным временем для сравнения равновесия

Вальраса и равновесия Курно используется теория аттракторов.

В работе [25] рассматриваются фирмы, производящие однородный товар, но имеющие разные функции затрат. Исследуется существование равновесий Курно. Основное внимание уделяется вопросу, насколько можно ослабить условия, накладываемые на обратную функцию спроса и функции затрат, принятые в предыдущих работах ([15, 18] и др.), чтобы теорема о существовании равновесий Курно оставалась верной. Результаты этой работы частично пересекаются с результатами, полученными независимо в работе [26]. К этому же направлению относится работа [27]. Обзор ряда последующих публикаций можно найти в работе [28]. Отметим, что в ней обратная функция спроса имеет вид  $P(Q) = a - bQ^\beta$ , при этом  $\beta$  может быть как положительным, так и отрицательным числом; исследуются вопросы существования, единственности и устойчивости равновесий Курно. В работе [29] изучается, каким образом неприятие риска влияет на стратегии фирм.

Во многих работах классическая модель конкуренции по Курно развивается применительно к тем или к другим экономическим проблемам. В работе [30] изучается добыча нефти и рассматривается задача максимизации прибыли фирм за длительный период времени с учетом дисконтирования. В работе [31] исследуется модель, в которой фирмы решают, какой труд (как фактор производства) использовать; выпуски продукции определяются используемым трудом. В работе [32] авторы называют смешанной такую олигополию, где существует одна фирма, принадлежащая государству, и несколько частных фирм. Фирма, принадлежащая государству, стремится максимизировать материальное благосостояние общества, частные фирмы максимизируют прибыль (все фирмы производят однородный товар). Формулируются условия, при которых для такой смешанной олигополии существует и единственно равновесие Курно. Влияние налогов на равновесные выпуски в олигополии Курно обсуждается в работах [33, 34]. В работе [35] доказывается существование равновесия Курно для случая, когда устанавливаются фиксированные верхние уровни цен. В работе [36] в рамках конкуренции по Курно используются модели со случайной выработкой, когда выпуск каждой фирмы  $q_i = \xi_i \bar{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $\bar{q}_i$  – намеченный выпуск,  $\xi_i$  – случайная величина. Рассматриваются совокупный выпуск, излишек потребителя, вступление новых фирм на рынок.

Коррелированное равновесие (по определению это некоторая вероятностная мера) представляет

собой обобщение равновесия Нэша в чистых стратегиях. В работах [37, 38] приводятся условия, при которых справедлив следующий результат. Если существует единственное равновесие Курно, то оно является и единственным коррелированным равновесием.

В ряде работ для изучения конкуренции по Курно применяются методы теории рефлексивных игр [39]. В работе [40] исследуются условия, при которых, когда каждая фирма дает наилучший ответ с точки зрения максимизации своей прибыли на объемы выпуска других фирм, это приводит к сходимости к равновесию Курно. Сходимость к равновесию Курно, когда одна из фирм является лидером, а другие – последователями, рассматривается в работе [41]. Примеры неединственности равновесий Курно даются в работе [42]. Вопросы эффективности для статических и динамических игр при различных способах организации взаимодействия фирм изучаются в работе [43].

## 2. ВСТУПЛЕНИЕ НОВЫХ ФИРМ НА РЫНОК И ВОПРОСЫ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Пусть обратная функция спроса имеет вид  $P(Q) = a - bQ$ , где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ; функции затрат имеют вид  $C_i(q_i) = c_i q_i$ , где  $c_i \geq 0$ ; производственные возможности каждой фирмы не ограничены. Величины  $c_i$ , играющие ключевую роль в последующем анализе, называются *предельными затратами* или затратами на производство единицы продукции. Тогда в соответствии с формулой (1)

$$\pi_i(q_1, \dots, q_n) = \left( a - b \sum_{j=1}^n q_j \right) q_i - c_i q_i$$

и

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_n) = a - 2bq_i - b \sum_{j \neq i} q_j - c_i.$$

Профиль стратегий  $q_1^*, \dots, q_n^*$  является равновесием Нэша, если

$$\begin{aligned} \pi_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i^*, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) &= \\ &= \max_{q_i} \pi_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) \end{aligned}$$

при всех  $i = 1, \dots, n$ . Необходимое условие максимума – равенство нулю частных производных, т. е.

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i^*, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) = 0$$

или

$$bq_i^* = a - c_i - b \sum_{j=1}^n q_j^*, \quad i = 1, \dots, n.$$



Сложение последних  $n$  уравнений дает

$$Q^* = \frac{n}{b(n+1)}(a - \bar{c}), \quad (2)$$

где  $\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$  – средние предельные затраты.

Предполагается, что  $a > \bar{c}$ . Тогда

$$P(Q^*) = a - \frac{n}{n+1}(a - \bar{c}). \quad (3)$$

Расчет  $q_i^*$  и  $\pi_i(q_1^*, \dots, q_n^*)$  не представляет труда:

$$q_i^* = \frac{1}{b(n+1)}(a - \bar{c} + (n+1)(\bar{c} - c_i)), \quad (4)$$

$$\pi_i(q_1^*, \dots, q_n^*) = \frac{1}{b(n+1)^2}(a - \bar{c} + (n+1)(\bar{c} - c_i))^2. \quad (5)$$

Найденная точка  $q_i^*$  является точкой максимума функции прибыли  $\pi_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*)$ , поскольку функция  $\pi_i$  как функция аргумента  $q_i$  вогнутая. В случае  $c_i > \bar{c}$  может возникнуть проблема отрицательных, точнее, нулевых выпусков  $q_i^*$ . Данной проблеме уделяется значительное внимание в § 6. Но здесь мы не останавливаемся на этом, считая выполненным условие  $c_i < \bar{c} + (a - \bar{c}) / (n+1)$  при всех  $i$ . Отметим, что доля выпуска фирмы  $i$  от совокупного выпуска также легко рассчитывается:

$$\frac{q_i^*}{Q^*} = \frac{1}{n} \frac{a - c_i}{a - \bar{c}} + \frac{\bar{c} - c_i}{a - \bar{c}}.$$

Формулы (4) и (5) показывают, что при достаточно больших  $n$  разность  $\bar{c} - c_i$  может играть большую роль, чем разность  $a - \bar{c}$ . Для фирмы задача уменьшения предельных затрат  $c_i$  относится к числу наиболее важных.

Выводы Курно состояли в том, что при увеличении числа фирм увеличивается совокупный выпуск и уменьшается цена товара. В случае линейной модели, как это следует из формул (2) и (3), эти выводы верны. В работе [44] исследуется нелинейная модель и формулируются условия, при которых выводы Курно остаются верными.

Из формулы (3) следует, что

$$P(Q^*) - \bar{c} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

т. е. олигополия переходит в совершенную конкуренцию при неограниченном увеличении числа фирм. Олигополия (при выпуске фирмами однородного товара) называется квазиконкуренцией, если при увеличении числа фирм совокупный выпуск увеличивается и цена товара уменьшается. В

работе [45] при одинаковых функциях затрат для всех фирм показано, что одной квазиконкуренции не достаточно для того, чтобы олигополия переходила в совершенную конкуренцию при неограниченном увеличении числа фирм. В работе [46] исследуется случай различных функций затрат у фирм; в частности, показано, что при выполнении условий, при которых в работе [16] доказана единственность равновесия Курно, олигополия является квазиконкуренцией.

Исследование зависимости цены товара и доли продукции, производимой одной фирмой, от числа фирм продолжается в работе [47]. В работе [48] также изучается переход конкуренции по Курно в совершенную конкуренцию при увеличении числа фирм, исследуется устойчивость равновесия Курно. Показано, что система устойчива, если вместе с увеличением числа фирм уменьшаются их производственные возможности. В работе [49] те же вопросы рассматриваются при наличии сговора между фирмами; для анализа, как и в работе [10], используются предположительные вариации. В работе [50] автор дает строгое математическое доказательство того, что он называет «народной теоремой»: если фирмы малы по отношению к рынку, то существует равновесие Курно, и это равновесие приближенно является совершенной конкуренцией. При этом предполагается возможность свободного вступления фирм на рынок и свободного выхода; при анализе используется средняя функция затрат для фирм. Исследования из работы [50] продолжаются в работе [51], изучаются асимптотические свойства равновесий Курно. Для равновесия со свободным вступлением фирм на рынок зависимость числа фирм и совокупного выпуска от функции спроса и затрат изучается в работе [52].

В работах [53–55] изучается материальное благосостояние общества при конкуренции по Курно. Оказывается (в рамках рассматриваемых математических моделей), что свободное вступление фирм на рынок может не улучшать, а ухудшать материальное благосостояние общества. В работе [56] исследуются также излишек потребителя и безвозвратные потери. В работе [57] при определенном упрощении математической модели даются явные выражения для некоторых показателей эффективности через элементарные функции. В работе [58] рассматриваются фирмы, производящие несколько товаров, сравниваются конкуренция по Курно и сговор по излишку потребителя, совокупному излишку, изучаются потери прибыли фирм при конкуренции по Курно по сравнению со сговором. Отметим, что неопределенность, которая может сделать сговор неэффективным, в этой работе не рассматривается. В работе [59] ис-

следуется вопрос, каким образом для олигополии Курно со свободным вступлением новых фирм на рынок число фирм, выпуск отдельной фирмы и совокупный выпуск зависят от необходимых для вступления на рынок затрат и от размера рынка. В работе [60] анализируются действия властей, устанавливающих ограничения для вступления новых фирм на рынок; одной из целей властей является улучшение материального благосостояния общества.

В работе [61] продолжается начатое в работах [54, 55] исследование того, что вступление новых фирм на рынок может быть избыточным. Изучаются инвестиции, которые фирмы для уменьшения затрат производят в R&D, литература по равновесиям Курно связывается с предшествующей литературой по инвестициям в R&D. В работе [62] рассматриваются модели, где фирмы могут выбирать одну из двух технологий производства (от этого выбора зависит вид функции затрат); показано, что в ряде случаев может не существовать равновесия Курно.

### 3. ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО И ОЛИГОПОЛИЯ БЕРТРАНА

При изучении олигополии Бертрانا обычно предполагают, что фирмы производят не однородный товар, а различные товары. При этом фирма  $i$  устанавливает на свой товар цену  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Спрос  $q_i$  на товар фирмы  $i$  зависит от всех цен  $p_1, \dots, p_n$ . Тогда прибыль фирмы  $i$

$$\pi_i(p_1, \dots, p_n) = p_i q_i(p_1, \dots, p_n) - C_i(q_i(p_1, \dots, p_n)).$$

Целью фирмы  $i$  является максимизация прибыли  $\pi_i$ . Требуется найти профиль чистых стратегий  $p_1, \dots, p_n$ , который был бы равновесием Нэша.

Причина, по которой при изучении олигополии Бертрана обычно рассматриваются фирмы, производящие различные товары, а не фирмы, производящие однородный товар, состоит в том, что при производстве однородного товара единственным равновесием Нэша может оказаться установление цен, равных предельным затратам, и получение каждой фирмой нулевой прибыли. (Разумеется, для получения такого результата должны быть сделаны некоторые предположения относительно функций  $q_i$  и  $C_i$ , подробнее см., например, работы [2, 63, 64].) Выводы, относящиеся к олигополии Бертрана, а также к сравнению олигополии Курно и олигополии Бертрана, существенно зависят от того, являются производимые товары субститутами или компонентами. (Определение заменяю-

щих товаров (субституты) и дополняющих товаров (компоненты) см., например, в работе [1].)

Фирмы, которые производят различные товары, можно рассматривать и при изучении олигополии Курно. Тогда прибыль фирмы  $i$  вместо выражения (1) задается формулой

$$\pi_i(q_1, \dots, q_n) = P_i(q_1, \dots, q_n) q_i - C_i(q_i).$$

Сравнение равновесных цен на товары при конкуренции по Курно и равновесных цен на товары при конкуренции по Бертранию проводится, например, в книге [65, с. 68–78]. В той задаче дуополии, которая в этой книге рассматривается, получается, что равновесные цены при конкуренции по Курно не ниже, чем равновесные цены при конкуренции по Бертранию. Этот результат подтверждается в работе [66], где подробно исследована линейная модель дуополии, сравниваются не только равновесные цены и выпуски, но и прибыли фирм, излишки потребителя и совокупные излишки. В работе [67] схожие результаты даются для нелинейных моделей дуополии. Однако, как показано в работе [68], выводы из работы [66] могут не сохраняться, если рассматриваются не две фирмы, а произвольное число фирм.

В работе [69] равновесия Курно и Бертрана сравниваются для случая, когда фирмы производят однородный товар. Олигополия Курно и олигополия Бертрана сравниваются по различным показателям в работах [70–75] и др. Для линейного случая конкуренция по Курно и конкуренция по Бертранию детально сопоставляются в работе [76]. Заинтересованность в инновациях, которые могли бы уменьшить затраты, сравниваются для олигополии Курно и олигополии Бертрана в работе [77]. В работе [78] рассматривается дуополия с фирмами, производящими различные товары, где к уменьшению предельных затрат на производство приводят затраты на R&D и в своей фирме, и (с некоторым понижающим коэффициентом) в другой фирме; исследуется материальное благосостояние общества при конкуренции по Курно и при конкуренции по Бертранию в зависимости (в частности) от этого понижающего коэффициента. Конкуренция по Курно и конкуренция по Бертранию сравниваются также в работе [79], но без использования понятия равновесия по Нэшу.

В работе [80] представлен обзор моделей, в которых стратегиями одних фирм являются выпуски, а стратегиями других фирм – цены, так называемой олигополии Курно – Бертрана; о такой олигополии см. также [81]. В работе [82] рассматривается модель, позволяющая учесть, насколько при производстве загрязняется окружающая среда. Сравняются размеры такого загрязнения для



дуополии Курно, дуополии Бертрана и дуополии Курно – Бертрана.

#### 4. ВЫБОР СТРАТЕГИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ, ОБМЕН ИНФОРМАЦИЕЙ МЕЖДУ ФИРМАМИ, ПРОДАЖА ЛИЦЕНЗИЙ

Рассмотрим пример дуополии, когда  $P(Q) = a - Q = a - (q_1 + q_2)$ , затраты у обеих фирм нулевые. Предположим, что  $a$  является случайной величиной, которая принимает с вероятностью 0,5 значение 60 и с вероятностью 0,5 – значение 120. Первая из фирм является информированной, знает истинное значение  $a$  и определяет свой выпуск по формуле (4), исходя из текущего значения  $a$ . Вторая фирма неинформированная, всегда исходит из значения  $a = 90$  и также определяет свой выпуск по формуле (4).

Пусть, например, текущее значение  $a = 120$ . Тогда

$$q_1 = 40, q_2 = 30, Q = 70.$$

По формуле  $P = a - Q$  получаем  $P = 50$ . При этом прибыли  $\pi_1 = Pq_1 = 2\,000$ ,  $\pi_2 = Pq_2 = 1\,500$ . Но если первая фирма предоставила второй фирме информацию о текущем значении  $a$ , то  $q_2 = 40$ ,  $Q = 80$ ,  $P = 40$ . В этом случае  $\pi_1 = \pi_2 = 1\,600$ . То есть прибыль первой фирмы уменьшается, а прибыль второй фирмы увеличивается.

Пусть текущее значение  $a = 60$ . Тогда

$$q_1 = 20, q_2 = 30, Q = 50.$$

По формуле  $P = a - Q$  получаем  $P = 10$ . При этом прибыли  $\pi_1 = Pq_1 = 200$ ,  $\pi_2 = Pq_2 = 300$ . Но если первая фирма предоставила второй фирме информацию о текущем значении  $a$ , то  $q_2 = 20$ ,  $Q = 40$ ,  $P = 20$ . В этом случае  $\pi_1 = \pi_2 = 400$ .

Таким образом, средняя прибыль первой фирмы равна  $0,5(2\,000 + 200) = 1\,100$  в случае, если она не предоставляет информацию второй фирме, и равна  $0,5(1\,600 + 400) = 1\,000$  в случае, если она предоставляет информацию второй фирме. То есть первой фирме невыгодно делиться информацией со второй фирмой. Аналогично для второй фирмы средняя прибыль составляет  $0,5(1\,500 + 300) = 900$  в случае, если она не получает информацию от первой фирмы, и составляет  $0,5(1\,600 + 400) = 1\,000$  в случае, если она получает информацию от первой фирмы. Таким образом, второй фирме выгодно получать информацию от первой фирмы.

Этот пример можно несколько обобщить. Пусть у первой фирмы есть информация  $a + \xi_1$  о значении параметра  $a$ , у второй фирмы есть информация  $a + \xi_2$  о значении параметра  $a$ , где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями. Выгодно ли фирмам обмениваться этой информацией? Зависит ли ответ от корреляции между случайными величинами  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ? Информация может иметь более сложный вид, чем только информация об одном числовом параметре. Выгодно ли тогда какую-то часть этой информации передавать другой фирме? Какую часть?

Именно такая задача, но не с двумя фирмами, а с произвольным числом фирм, когда  $a$  является случайной величиной, рассматривается в работе [83]. Обратная функция спроса и функции затрат у всех фирм линейные. Основной вопрос, рассматриваемый в работе, – выгодно ли для фирм проводить совместное исследование рынка. Оказывается, что выгода от уменьшения затрат на исследования может быть меньше, чем потери, возникающие из-за того, что информация появляется у конкурентов. Кроме того, изучается влияние исследований рынка на излишек потребителя. Это влияние оказывается положительным, т. е. исследования рынка увеличивают удовлетворенность потребителей. Схожая модель для случая дуополии рассматривается в работе [84]. При этом авторы делают вывод, что обмен информацией между фирмами увеличивает корреляцию между выпусками, а это уменьшает ожидаемую прибыль. Отличие работы [85] от работы [84] состоит в том, что в ней используются нормальные случайные величины. Это позволяет в ряде случаев рассчитать точные значения математических ожиданий. Кроме того, в работе [85] обмен информацией между фирмами связывается с последующим сговором по уменьшению выпусков.

При изучении схожей задачи в работе [86] рассматривается возможность частичного обмена информацией между фирмами, а в работе [87] сравниваются конкуренция по Курно и конкуренция по Бертранию. Также обмен информацией при конкуренции по Курно и при конкуренции по Бертранию изучается в работе [88]. В этой работе рассматривается дуополия с фирмами, производящими различные товары. Обратные функции спроса линейные; случайным считается вектор, компонентами которого являются свободные члены в уравнениях для цен; этот случайный вектор имеет двумерное нормальное распределение. В работе [89] аналогичные задачи рассматриваются, когда в уравнении  $P = a - bQ$  случайной величиной является  $b$ .

В начале этого раздела приведен пример, показывающий, что ожидаемая прибыль фирмы, обладающей более точной информацией, выше. В работе [90] дается пример противоположного характера для дуополии с фирмами, производящими различные товары, однако неопределенность в этом примере связана только с некоторыми кросс-эффектами.

Схожие задачи, но при обмене информацией о своих затратах, а не о рыночном спросе, рассматриваются в работе [91]. В рамках линейной модели делается вывод, что такой обмен информацией увеличивает ожидаемые прибыли фирм, но уменьшает ожидаемый излишек потребителя. В работе [92] рассматриваются задачи, где фирмы могут передавать или не передавать другим фирмам и информацию о затратах, и информацию о рыночном спросе. Получены теоремы о существовании равновесий Курно и о сходимости к совершенной конкуренции при стремлении числа фирм к бесконечности. В работе [93] оспаривается вывод из работы [91] о том, что обмен информацией между фирмами уменьшает ожидаемый излишек потребителя. В работе [94] прибыли фирм зависят не только от выбранных стратегий (ими могут быть и выпуски, и цены), но и от неизвестного состояния среды, когда каждая фирма получает некоторый сигнал об этом состоянии. Сравняются равновесия, получающиеся при обмене и без обмена информацией об этих сигналах.

Возможность того, что информация, которая передается другим фирмам, может быть дезориентирующей, рассматривается в работе [95]. В работе [96] многие из предшествующих результатов, относящихся к обмену информацией между фирмами, представлены в рамках единой модели. В работе [97] схожие вопросы обсуждаются применительно к дуополии Курно – Бертрана, т. е. к случаю, когда стратегиями одной фирмы являются выпуски, а стратегиями другой фирмы – цены. В ряде работ рассматривается задача, где целью фирмы является не максимизация прибыли, а максимизация дохода или некоторого взвешенного среднего прибыли и дохода. При этом разделяются интересы собственников и менеджеров, управляющих фирмой. В работе [98] изучается целесообразность обмена информацией между фирмами в рамках такой модели, а также то, каким образом распространение информации влияет на материальное благосостояние общества.

В работе [99] рассматривается задача, когда фирмы получают зашумленные сигналы о рыночном спросе и затратах и на основании этих зашумленных сигналов определяют равновесные по

Курно выпуски. С использованием усиленного закона больших чисел доказывается, что при стремлении числа фирм к бесконечности совокупные выпуски сходятся почти наверное к совокупному выпуску, соответствующему совершенной конкуренции. В работе рассматривается линейная модель с одинаковыми предельными затратами у всех фирм. В работе [100] развиваются результаты и подходы из работ [92], [99]. Рассматривается континуум фирм, для равновесий Байеса – Нэша получены результаты о сходимости.

В работе [101] изучается дуополия с фирмами, производящими различные товары. К обратной функции спроса добавляются случайные возмущения, т. е. цены товаров при заданных выпусках оказываются случайными величинами. Стратегия каждой фирмы имеет следующий вид. Сначала фирма определяет, будет она принимать решение по объему выпуска или по цене товара, а затем уже решает, какими будут выпуск или цена соответственно. Все решения обеими фирмами принимаются одновременно. Приводятся результаты о существовании равновесий Байеса – Нэша и об ожидаемых прибылях фирм. Схожая задача рассматривается в работе [102], решение фирмы связывается со степенью замещаемости товаров.

В работе [103] неопределенность относительно спроса и затрат описывается некоторым вероятностным пространством  $(\Omega, F, \mu)$ . Информированность фирмы  $i$  задается с помощью  $\sigma$ -подалгебры  $F_i$ , входящей в  $\sigma$ -алгебру  $F$ . Обсуждается, при каких условиях ожидаемая прибыль более информированной фирмы (т. е. фирмы с большей  $\sigma$ -подалгеброй  $F_i$ ) выше. В работе [104] при такой же постановке задачи исследуется вопрос о существовании равновесий Байеса – Нэша.

В работе [105] рассматривается линейная модель, все параметры которой известны всем фирмам. Каждая фирма считает, что все остальные фирмы будут определять свои выпуски с вероятностью  $p$ , исходя из равновесия Курно, и с вероятностью  $1 - p$  как-то иначе,  $0 < p < 1$ . Фирма-пессимист исходит из того, что «иначе» означает «наихудшим для нее способом». Фирма-оптимист исходит из того, что «иначе» означает «наилучшим для нее способом». Изучаются наилучшие ответы фирм, возможные выпуски, цены и прибыли.

В работе [106] рассматривается обратная функция спроса  $P(Q) = \max(a - Q, 0)$ , где  $a$  является случайной величиной, которая принимает два значения, «большое» с вероятностью 0,5 и «малое» с вероятностью 0,5. Найдены диапазоны значений,



при которых существует единственное равновесие Курно, и диапазоны значений, при которых равновесий Курно ровно два. Сравниваются ожидаемые прибыли и ожидаемый совокупный излишек для такой модели с прибылями и совокупным излишком для модели без неопределенности (т. е. для модели, в которой «большое» значение совпадает с «малым»). В работе [107] подтверждается вывод из работы [106] о том, что при неопределенности, касающейся рыночного спроса, требование неотрицательности цен может приводить к неединственности равновесия Курно. Однако для моделей со свободной реализацией (фирмы могут выставить на продажу меньше товара, чем произведено) такой неединственности не возникает. В работе [108] неопределенность связана с производственными возможностями фирм. В работе [109] при неопределенности относительно спроса для олигополии Курно изучаются равновесия Парето.

В работе [110] при ограниченном спросе  $d$  на товар вместо рассчитываемой по формуле (1) максимизируется прибыль

$$\pi_i(q_i, Q) = P(Q) \min\left(q_i, \frac{q_i d}{Q}\right) - C_i(q_i),$$

где  $C_i(q_i) = c_i q_i$ . При такой функции прибыли (для случая дуополии) найдены равновесия Курно. Затем считается, что спрос  $d_t$  является случайным процессом с непрерывным временем, который представляет собой решение некоторого стохастического дифференциального уравнения,  $t \in [0, T]$ . Исследуется задача управления случайными процессами  $q_{1t}$ ,  $q_{2t}$  с целью максимизации функционалов, выражающих суммарные прибыли фирм за период времени от 0 до  $T$  с учетом дисконтирования.

В работе [111] рассматривается дуополия, где каждая из фирм производит два товара,  $X$  и  $Y$ . По технологическим причинам выпуск каждого товара составляет определенную долю от общего выпуска фирмы:  $q_{iX} = \gamma q_i$ ,  $q_{iY} = (1 - \gamma) q_i$ , где  $0 < \gamma < 1$ ,  $i = 1, 2$ . Обратная функция спроса для каждого товара своя:

$$P_X = a_X - b_X (q_{1X} + q_{2X}), \quad P_Y = a_Y - b_Y (q_{1Y} + q_{2Y}).$$

Предполагается, что случайный вектор  $(a_X, a_Y)$  имеет двумерное нормальное распределение. Рассматривается конкуренция по Курно, т. е. фирмы определяют значения  $q_1$  и  $q_2$ . Исследуется, каким образом обладание или необладание информацией об истинной обратной функции спроса влияет на ожидаемую прибыль фирмы.

В работе [112] рассматривается нелинейная модель для дуополии, где одна из фирм (например, фирма 1) получает доход от продажи лицензии другой фирме (фирме 2). За счет этого фирма 2 уменьшает затраты. Тогда вместо формулы (1) используются выражения

$$\pi_1(q_1, q_2) = P(Q)q_1 - C_1(q_1) + (rq_2 + f),$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = P(Q)q_2 - C_2(q_2) - (rq_2 + f),$$

где  $f$  – фиксированная выплата,  $r$  – роялти. Изучается, при каких условиях фирма 2 пойдет или не пойдет на покупку лицензии, обе фирмы останутся активными, или фирма 1 превратится в монополиста. Отдельно рассматриваются случаи технологий, имеющих решающее значение, и технологий, не имеющих решающего значения.

В работе [112] переносится на нелинейный случай анализ, который в работе [113] был проведен для линейного случая (с выкладками, аналогичными тем, которые приводят к формулам (2)–(5)). Для линейного случая в работе Wang (2002) представлены относительные преимущества и недостатки фиксированных выплат и роялти. Также анализ из работы Wang (2002) переносится на нелинейный случай, но с квадратичной нелинейностью в работе [114], и обсуждаются отличия от линейного случая.

В работе [115] аналогичная задача исследуется в рамках линейной модели дуополии, рассматриваются только технологии, не имеющие решающего значения, при этом фирма 1 является иностранной, а фирма 2 – отечественной. Для разных случаев ( $f > 0$ ,  $r = 0$ ;  $f = 0$ ,  $r > 0$ ;  $f > 0$ ,  $r > 0$ ) изучается излишек потребителя и материальное благосостояние общества. В работе [116] исследуется, какое значение может иметь то, что производственные возможности фирмы, продающей лицензию, ограничены. В работе [117] продажа лицензии рассматривается для случая, когда фирмы 1 и 2 производят различные товары. Сравниваются конкуренция по Курно и конкуренция по Бертрану. Также конкуренция по Курно и конкуренция по Бертрану при покупке лицензий и наличии затрат на R&D сравниваются в работе [118]; частично выводы оказываются противоположными выводам работы [66].

## 5. ФОРМИРОВАНИЕ КАРТЕЛЕЙ

В случае, если сформирован картель, меняется оптимизационная задача. Вошедшие в картель фирмы стремятся максимизировать общую прибыль, а не каждая фирма максимизирует свою прибыль. При этом вопрос о том, каким образом

полученная прибыль делится между фирмами, может включаться в анализ, а может и не включаться. Таким образом, с точки зрения рассматриваемой математической модели формирование картеля не отличается от слияния фирм, хотя в реальности это не одно и то же.

Пусть рассматривается модель с линейной обратной функцией спроса  $P(Q) = a - bQ$  и с одинаковой функцией затрат для всех фирм  $C_i(q_i) = cq_i$ . Через  $\pi(m)$  обозначается прибыль одной фирмы, когда на рынке действуют  $m$  фирм. Пусть первоначально на рынке действовали  $n$  фирм, и  $k$  фирм сформировали картель. Прибыль делится поровну между входящими в картель фирмами. Тогда формирование картеля выгодно для входящих в него фирм, если положительна разность

$$\begin{aligned} & \pi(n - k + 1) - k\pi(n) = \\ & = \frac{(a - c)^2}{b} \left( \frac{1}{(n - k + 2)^2} - \frac{k}{(n + 1)^2} \right), \end{aligned}$$

при последнем переходе используется формула (5).

В работе [119] получен результат, который во многих последующих работах называется парадоксальным. Данная разность положительна только при  $k$ , достаточно близких к  $n$ , приблизительно при  $k \geq 0,8n$ .

Недостатком рассмотренной модели можно назвать то, что в ней картель ничем не отличается от остальных фирм, никак не учитывается то, что вновь созданная фирма является «большой». Для преодоления этого недостатка в работах [120, 121] рассматривается та же задача с функцией затрат

$$C_i(q_i) = \frac{q_i^2}{2k_i}, \text{ где } k_i - \text{ капитал фирмы } i. \text{ В работе}$$

[121] изучается также, как формирование картеля сказывается на материальном благосостоянии общества.

Задача формирования картеля при конкуренции по Бертрану рассмотрена в работе [122]. Полученные в этой работе результаты радикально отличаются от результатов работы [119]. Формирование картеля увеличивает прибыли всех фирм, при этом прибыли фирм, не входящих в картель, оказываются больше, чем прибыли фирм, входящих в картель. Кроме того, увеличение числа фирм, входящих в картель, приводит к увеличению прибыли фирмы, входящей в картель.

В работе [123] рассматриваются  $n$  фирм, которые производят однородный товар. При этом  $k$  фирм являются лидерами, а остальные фирмы – последователями. Предполагается, что фирмы-последователи участвуют в конкуренции по Кур-

но, принимая совокупный объем выпуска фирм-лидеров как заданный. Фирмы-лидеры понимают это (т. е. знают, какими будут функции реакции фирм-последователей на их объемы выпуска) и, исходя из этого, также участвуют в конкуренции по Курно между собой, определяя свои объемы выпуска. Изначально все фирмы предполагаются одинаковыми. В работе [124] для такой модели изучается материальное благосостояние общества. Сходные задачи с квадратичными функциями затрат рассматриваются в работе [125].

В работе [126] изучается понятие стабильности картеля. В этой работе рассматривается отрасль экономики, где действуют  $n$  одинаковых фирм, производящих однородный товар. Затем  $k$  фирм формируют картель и устанавливают цену на товар таким образом, чтобы максимизировать свою общую прибыль. Пусть через  $\pi_c(k)$  обозначается прибыль фирмы, входящей в картель, через  $\pi_f(k)$  обозначается прибыль фирмы, не входящей в картель. Картель называется *внутренне стабильным*, если  $\pi_c(k) / k \geq \pi_f(k - 1)$ , т. е. фирма, входящая в картель, не увеличивает свою прибыль, если она выйдет из картеля. Картель называется *внешне стабильным*, если  $\pi_f(k) \geq \pi_c(k + 1) / (k + 1)$ , т. е. фирма, не входящая в картель, не увеличивает свою прибыль, если она войдет в картель. Картель называется стабильным, если он является и внутренне стабильным, и внешне стабильным. В работе [127] исследуется процесс формирования стабильного картеля, объединяются идеи из работ [126, 128]. В работе [126] не рассматриваются ни конкуренция по Курно, ни конкуренция по Бертрану. Понятие стабильности картеля применительно к конкуренции по Курно, конкуренции по Бертрану, играм типа «лидер – последователь» изучается во многих работах, см., например, работы [129–133].

Задача выбора коалиционной структуры, в наибольшей степени соответствующей интересам игроков, является одной из центральных в кооперативной теории игр. Применяются такие подходы и для игр олигополии. В работе [134] рассматривается очень общее понятие равновесия, включающее эндогенное нахождение наилучшей коалиционной структуры при заданном наборе допустимых коалиционных структур. Частными случаями этого равновесия являются равновесие Нэша для некооперативной игры и ядро для кооперативной игры с нетрансферабельной полезностью. В обоих этих частных случаях заданный набор допустимых коалиционных структур состоит из единственной структуры. В первом случае допускаются только коалиции, состоящие из одного игрока. Во втором



случае допускается только коалиция, состоящая из всех игроков. В работе [135] отдельно рассматриваются коалиции, внешний эффект от которых положителен (т. е. игроки, не вошедшие в коалицию, выигрывают от образования коалиции), и коалиции, внешний эффект от которых отрицателен (соответственно, проигрывают). Для различных правил формирования коалиций (например, обязательно ли согласие всех членов коалиции для вхождения в нее новых участников, может ли коалиция распаться или объединяться с другими коалициями) изучается вопрос о стабильности. Обзор ряда исследований, в которых рассматривается кооперативная игра с функцией разбиения (а не с характеристической функцией), дается в работе [136].

**6. ПРАКТИЧЕСКОЕ НАХОЖДЕНИЕ РАВНОВЕСИЙ КУРНО И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ**

Пусть  $n$  фирм производят  $m$  товаров;  $q_i$ , выпуск фирмы  $i$ , является  $m$ -мерным вектором;  $L_i$ , производственные возможности фирмы  $i$ , – также  $m$ -мерный вектор;  $P(Q)$  –  $m$ -мерный вектор цен; под произведением  $P(Q)q_i$  в формуле (1) понимается скалярное произведение. Если  $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$  – точка равновесия, то  $q_i^*$  доставляет максимум функции  $\pi_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*)$  как функции аргумента  $q_i$  при любом  $i$ . Распространенным подходом является нахождение равновесия Курно путем решения задачи дополненности.

Пусть  $\pi_i$  как функция аргумента  $q_i$  является вогнутой и непрерывно дифференцируемой. Тогда при любом  $k = 1, \dots, m$  частная производная  $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_{ik}}(q_i^*)$  неположительна, если  $q_{ik}^* = 0$ ; равна нулю, если  $0 < q_{ik}^* < L_{ik}$ ; неотрицательна, если  $q_{ik}^* = L_{ik}$ . Это означает, что существуют числа  $u_{ik}$  и  $v_{ik}$  такие, что

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_{ik}}(q_i^*) + u_{ik} - v_{ik} = 0, \tag{6}$$

где  $u_{ik}$  – неотрицательное число, если  $q_{ik}^* = 0$ ;  $u_{ik} = 0$ , если  $q_{ik}^* > 0$ ;  $v_{ik} = 0$ , если  $q_{ik}^* < L_{ik}$ ;  $v_{ik}$  – неотрицательное число, если  $q_{ik}^* = L_{ik}$ . Из определения чисел  $u_{ik}$  и  $v_{ik}$  следует, что

$$u_{ik}q_{ik}^* = 0, v_{ik}(L_{ik} - q_{ik}^*) = 0. \tag{7}$$

Если рассмотреть  $m$ -мерные векторы  $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{im})', v_i = (v_{i1}, \dots, v_{im})'$  (штрих означает транспонирование), то соотношение (6) можно записать в виде

$$\text{grad } \pi_i(q_i^*) + u_i - v_i = 0,$$

а соотношения (7) – в виде равенства нулю скалярных произведений

$$u_i q_i^* = 0, v_i (L_i - q_i^*) = 0.$$

При этом  $u_i \geq 0, v_i \geq 0, q_i^* \geq 0, L_i - q_i^* \geq 0$  (запись  $\geq 0$  для векторов означает, что данное неравенство выполняется покомпонентно).

Если рассмотреть  $2m$ -мерные векторы

$$w_i = \begin{pmatrix} q_i \\ v_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n,$$

и функцию

$$f_i(w_i) = \begin{pmatrix} v_i - \text{grad } \pi_i(q_i) \\ L_i - q_i \end{pmatrix},$$

переводящую  $2m$ -мерные векторы в  $2m$ -мерные векторы, то при  $q_i = q_i^*$  для скалярного произведения выполняется равенство

$$w_i f_i(w_i) = 0, i = 1, \dots, n. \tag{8}$$

Введем обозначения

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix},$$

$$\text{grad } \pi(q) = \begin{pmatrix} \text{grad } \pi_1(q_1) \\ \vdots \\ \text{grad } \pi_n(q_n) \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix},$$

$$f(w) = \begin{pmatrix} v - \text{grad } \pi(q) \\ L - q \end{pmatrix}.$$

Таким образом, отыскание равновесий Курно сводится к решению задачи дополненности: требуется найти векторы  $w$  такие, что  $w \geq 0, f(w) \geq 0,$

$$w f(w) = 0.$$

Существование решений для задач дополненности изучается в работах [137, 138]. Из выражения (8) следует, что если  $q^*$  является равновесием Курно, то существует вектор  $v^*$  с неотрицательными компонентами такой, что вектор

$$w^* = \begin{pmatrix} q^* \\ v^* \end{pmatrix}$$

является решением приведенной задачи дополнителъности.

Ссылки на литературу по применению описанного выше подхода для нахождения равновесий Курно можно найти, например, в работе [139]. Основываясь на тех же идеях, равновесия Курно можно находить и тогда, когда функции спроса не являются дифференцируемыми [140]. В работах [141, 142] равновесия Курно предлагается искать как решения некоторых задач математического программирования. В работе [143] предложен еще один алгоритм нахождения равновесий Курно, включающий в себя идеи из работ [137, 138, 142]. В работе [35], основываясь на задачах дополнителъности, изучаются вопросы существования и единственности равновесий Курно при наличии ценовых ограничений, а также алгоритмы для нахождения равновесий Курно.

Отметим также, что если фирмы производят однородный товар, то в ряде случаев равновесия Курно могут быть найдены путем непосредственного анализа многозначного отображения, при котором каждому профилю стратегий остальных фирм ставятся в соответствие наилучшие ответы данной фирмы [144]. Для нахождения равновесий Курно может быть применена процедура нащупывания, также основанная на использовании наилучших ответов [145, с. 84–97]. Процедура нащупывания при производстве фирмами различных продуктов рассматривается в работе [146].

В работе [147] решения задач дополнителъности используются для изучения конкуренции по Курно при наличии неопределенности для рынков электроэнергии. Также равновесия Курно используются для анализа рынков электроэнергии в работах [139, 140, 148].

В работе [149] конкуренция по Курно и конкуренция по Бертрану сравниваются для индустрии программного обеспечения. Одна из фирм продает платформу (например, операционную систему), а две другие фирмы поставляют прикладное программное обеспечение. Результаты сравнения конкуренции по Курно и конкуренции по Бертрану для этой задачи существенно отличаются от обычных результатов такого сравнения.

В работе [150] конкуренция между авиаперевозчиками и железнодорожными компаниями, осуществляющими высокоскоростные перевозки, рассматривается как дуополия Курно. Применяется модель с линейными обратными функциями спроса и с нулевыми затратами. При этом авиапе-

ревозчики могут проводить ценовую дискриминацию (продавать билеты разным группам пассажиров по разным ценам), а железнодорожные компании – нет. Оказывается, что ценовая дискриминация увеличивает прибыль авиаперевозчиков. Исследуются также излишек потребителя и материальное благосостояние общества.

---

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

В настоящем обзоре представлены основные разделы математической дисциплины, которую можно назвать «олигополия Курно»:

- существование, единственность и устойчивость равновесий;
- вступление новых фирм на рынок и вопросы эффективности;
- сравнение олигополии Курно, олигополии Бертрана и олигополии Курно – Бертрана;
- учет неопределенности с помощью вероятностных методов при задании параметров модели, при отличии реальных объемов выпусков от запланированных и т. д. (за рамками обзора остается использование теории нечетких множеств);
- обмен информацией между фирмами и продажа лицензий;
- формирование картелей;
- численные методы нахождения равновесий, в первую очередь, для многомерных задач.

Затрагиваются вопросы применения данной математической теории при изучении различных отраслей экономики.

Развитие теории олигополии пошло по пути включения в математическую модель все большего числа реальных процессов. Таким образом могут выработываться рекомендации для управления. Математическое моделирование обмена информацией между фирмами, формирования картелей важно не только для определения того, какой обмен информацией или уровень взаимодействия между фирмами в наибольшей степени отвечают интересам фирм, но и с точки зрения общественных интересов, недопущения значительного роста цен на товары.

---

## ЛИТЕРАТУРА

---

1. *Вэриан Х.Р.* Микроэкономика. Промежуточный уровень. – М.: ЮНИТИ, 1997. – 767 с. [*Varian, H.R.* Intermediate microeconomics. A modern approach. 4th ed. – N.-Y.: W. W. Norton, 1996. – 650 p.]
2. *Джейли Дж.А., Рени Ф.Дж.* Микроэкономика. Продвинутый уровень. – М.: ИД ГУ ВШЭ, 2011. – 734 с. [*Jehle, J.A., Remy, P.J.* Advanced Microeconomic Theory, 3rd Edition. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2011]



3. Dixit, A., Stern, N. Oligopoly and Welfare: A Unified Presentation with Applications to Trade and Development // *European Economic Review*. – 1982. – Vol. 19. – P. 123–143.
4. Theocharis, R.D. On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem // *Review of Economic Studies*. – 1960. – Vol. 27. – P. 133–134.
5. Negishi, T. The stability of a Competitive Economy: A Survey Article // *Econometrica*. – 1962. – Vol. 30. – P. 635–669.
6. Fisher, F.M. The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: The Effects of Speeds of Adjustment and Increasing Marginal Costs // *Review of Economic Studies*. – 1961. – Vol. 28. – P. 125–135.
7. Hahn, F.H. The Stability of the Cournot Oligopoly Solution // *Review of Economic Studies*. – 1962. – Vol. 29. – P. 329–333.
8. Okuguchi, K. The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: A Further Generalization // *Review of Economic Studies*. – 1964. – Vol. 31. – P. 143–146.
9. Hadar, J. Stability of Oligopoly with Product Differentiation // *Review of Economic Studies*. – 1966. – Vol. 33. – P. 57–60.
10. Seade, J. The Stability of Cournot Revisited // *J. Econ. Theory*. – 1980. – Vol. 23. – P. 15–27.
11. Чеканский А.Н., Фролова Н.Л. Микроэкономика. Промежуточный уровень. – М.: Инфра-М, 2005. – 685 с. [Chekan-skii A.N., Frolova N.L. Mikroekonomika. Promezhtuchnyi uroven'. – М.: Infra-M, 2005. – 685 s. (In Russian)]
12. Okuguchi, K., Yamazaki, T. Global Stability of Unique Nash Equilibrium in Cournot Oligopoly and Public Good Game // *J. of Economic Dynamics and Control*. – 2008. – Vol. 32. – P. 1204–1211.
13. Gao, B., Du, Y. Exploring General Equilibrium Points for Cournot Model // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. – 2018. – Art. ID 7630395. – 7 p.
14. Soldatos, G. Marginal Utility and Cournot Stability under Market Entry // *Studies in Business and Economics*. – 2021. – Vol. 16. – P. 187–197.
15. Frank, C.R., Quandt, R.E. On the Existence of Cournot Equilibrium // *Int. Economic Review*. – 1963. – Vol. 4. – P. 92–96.
16. Okuguchi, K., Suzumura, K. Uniqueness of the Cournot Oligopoly Equilibrium: A Note // *Economic Studies Quarterly*. – 1971. – Vol. 22. – P. 81–83.
17. Rosen, J.B. Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave N-person Games // *Econometrica*. – 1965. – Vol. 33. – P. 520–534.
18. Szidarovszky, F., Yakowitz, S. A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium // *Int. Economic Review*. – 1977. – Vol. 18. – P. 787–789.
19. Okuguchi, K., Szidarovszky, F. The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms. 2<sup>nd</sup> ed. – Berlin: Springer, 1999. – 167 p.
20. Fujimoto, T. Cournot Oligopoly Model with Multi-product Firms // *Economic Studies Quarterly*. – 1989. – Vol. 40. – P. 364–368.
21. Ewerhart, C. Cournot Games with Biconcave Demand // *Games and Economic Behavior*. – 2014. – Vol. 85. – P. 37–47.
22. Roberts, J., Sonnenschein, H. On the Existence of Cournot Equilibrium without Concave Profit Functions // *J. of Economic Theory*. – 1976. – Vol. 13. – P. 112–117.
23. Novshek, W., Sonnenschein H. Cournot and Walras Equilibrium // *J. of Economic Theory*. – 1978. – Vol. 19. – P. 223–266.
24. Radi, D. Walrasian versus Cournot Behavior in an Oligopoly of Boundedly Rational Firms // *J. of Evolutionary Economics*. – 2017. – Vol. 27. – P. 933–961.
25. Novshek, W. On the Existence of Cournot Equilibria // *Review of Economic Studies*. – 1985. – Vol. 52. – P. 85–98.
26. Bamón, R., Frayssé, J. Existence of Cournot Equilibrium in Large Markets // *Econometrica*. – 1985. – Vol. 53. – P. 587–597.
27. Gaudet, G., Salant, S.W. Uniqueness of Cournot Equilibrium: New Results from Old Methods // *Review of Economic Studies*. – 1991. – Vol. 58. – P. 399–404.
28. Corchón, L.C., Torregrosa, R.J. Cournot Equilibrium Revisited // *Mathematical Social Sciences*. – 2020. – Vol. 106. – P. 1–10.
29. Asplund, M. Risk-Averse Firms in Oligopoly // *Int. J. of Industrial Organization*. – 2002. – Vol. 20. – P. 995–1012.
30. Loury, G. A Theory of 'Oil'igopoly: Cournot Equilibrium in Exhaustive Resource Markets with Fixed Supplies // *Int. Economic Review*. – 1986. – Vol. 27. – P. 285–300.
31. Okuguchi, K. Labor-Managed Cournot Oligopoly with Product Differentiation // *J. of Economics*. – 1992. – Vol. 56. – P. 197–208.
32. Okuguchi, K., Yamazaki, T. Existence of Unique Equilibrium in Cournot Mixed Oligopoly // *Int. Game Theory Review*. – 2018. – Vol. 20. – Art. no. 1750035. – 13 p.
33. Bergstrom, T.C., Varian, H.R. Two Remarks on Cournot Equilibria // *Economics Lett.* – 1985. – Vol. 19. – P. 5–8.
34. Katz, M.L., Rosen, H.S. Tax Analysis in an Oligopoly Model // *Public Finance Quarterly*. – 1985. – Vol. 13(1). – P. 3–20.
35. Han, L., Liu, A.L. On Nash-Cournot Games with Price Caps // *Operations Research Letters*. – 2013. – Vol. 41. – P. 92–97.
36. Deo, S., Corbett, C.J. Cournot Competition under Yield Uncertainty: The Case of the U.S. Influenza Vaccine Market // *Manufacturing and Service Operations Management*. – 2009. – Vol. 11. – P. 563–576.
37. Liu, L. Correlated Equilibrium of Cournot Oligopoly Competition // *J. of Economic Theory*. – 1996. – Vol. 68. – P. 544–548.
38. Yi, S.-S. On the Existence of a Unique Correlated Equilibrium in Cournot Oligopoly // *Economics Letters*. – 1997. – Vol. 54. – P. 235–239.
39. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 149 с. [Novikov, D.A., Chkhartishvili, A.G. Refleksivnye igry. – М.: SINTEG, 2003. – 149 s. (In Russian)]
40. Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г. Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // *Автоматика и телемеханика*. – 2020. – № 2. – С. 115–133. [Algazin, G.I., Algazina, Y.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // *Automation and Remote Control*. – 2020. – Vol. 81, no. 2. – P. 287–301.]
41. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // *Автоматика и телемеханика*. – 2020. – № 7. – С. 113–128. [Algazin, G.I., Algazina, Y.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // *Automation and Remote Control*. – 2020. – Vol. 81, no. 7. – P. 1258–1270.]
42. Гераськин М.И. Анализ равновесий в нелинейной модели олигополии // *Автоматика и телемеханика*. – 2022. – № 8. – С. 140–158. [Geraskin, M.I. Analysis of Equilibria in a Non-linear Oligopoly Model // *Automation and Remote Control*. – 2022. – Vol. 83, no. 8. – P. 1261–1277.]
43. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в модели дуополии Курно с учетом экологического фактора // *Вопросы экономики*. – 2022. – № 10. – С. 115–130.

- гических условий // Автоматика и телемеханика. – 2023. – № 2. – С. 150–168. [Ougolnitsky, G.A., and Usov, A.B. The Interaction of Economic Agents in Cournot Duopoly Models under Ecological Conditions: A Comparison of Organizational Modes // Automation and Remote Control. – 2023. – Vol. 84, no. 2. – P. 175–189.]
44. Frank, C.R. Entry in a Cournot Market // Review of Economic Studies. – 1965. – Vol. 32. – P. 245–250.
45. Ruffin, R.J. Cournot Oligopoly and Competitive Behaviour // Review of Economic Studies. – 1971. – Vol. 38. – P. 493–502.
46. Okuguchi, K. Quasi-competitiveness and Cournot Oligopoly // Review of Economic Studies. – 1973. – Vol. 40. – P. 145–148.
47. Amir, R., Lambson, V.E. On the Effects of Entry in Cournot Markets // Review of Economic Studies. – 2000. – Vol. 67. – P. 235–254.
48. Puu, T. On the Stability of Cournot Equilibrium When the Number of Competitors Increases // J. of Economic Behavior and Organization. – 2008. – Vol. 66. – P. 445–456.
49. Seade, J. On the Effects of Entry // Econometrica. – 1980. – Vol. 48. – P. 479–489.
50. Novshek, W. Cournot Equilibria with Free Entry // Review of Economic Studies. – 1980. – Vol. 47. – P. 473–486.
51. Ushio, Y. Cournot Equilibrium with Free Entry: The Case of Decreasing Average Cost Functions // Review of Economic Studies. – 1983. – Vol. 50. – P. 347–354.
52. Corchón, L., Fradera, I. Comparative Statics in Cournot Free Entry Equilibrium // Math. Soc. Sci. – 2002. – Vol. 44, no. 2. – P. 155–168.
53. von Weizsäcker, C.C. A Welfare Analysis of Barriers to Entry // Bell J. of Economics. – 1980. – Vol. 11. – P. 399–420.
54. Mankiw, N.G., Whinston, M.D. Free Entry and Social Efficiency of Entry // Rand J. of Economics. – 1986. – Vol. 17. – P. 48–58.
55. Suzumura, K., Kiyono, K. Entry Barriers and Economic Welfare // Review of Economic Studies. – 1987. – Vol. 54. – P. 157–167.
56. Anderson, S.P., Renault, R. Efficiency and Surplus Bounds in Cournot Competition // J. Economic Theory. – 2003. – Vol. 113. – P. 253–264.
57. Corchón, L. Welfare Losses under Cournot Competition // Int. J. Ind. Organ. – 2008. – Vol. 26. – P. 1120–1131.
58. Kluberg, J., Perakis, G. Generalized Quantity Competition for Multiple Products and Loss of Efficiency // Operations Research. – 2012. – Vol. 60. – P. 335–350.
59. Dastidar, K.G., Marjit, S. Market Size, Entry Costs and Free Cournot Equilibrium // J. of Economics. – 2022. – Vol. 136. – P. 97–114.
60. Goerke, L. Partisan Competition Authorities, Cournot-Oligopoly, and Endogenous Market Structure // Southern Economic J. – 2022. – Vol. 89. – P. 238–270.
61. Okuno-Fujiwara, M., Suzumura, K. Symmetric Cournot Oligopoly and Economic Welfare: A Synthesis // Econ. Theory. – 1993. – Vol. 3. – P. 43–59.
62. Götz, G. Market Size, Technology Choice, and the Existence of Free-Entry Cournot Equilibrium // J. of Institutional and Theoretical Economics. – 2005. – Vol. 161. – P. 503–521.
63. Авдашева С.Б., Розанова Н.М. Теория организации отраслевых рынков. – М.: Магистр, 1998. – 320 с. [Avdashева, S.B., Rozanova, N.M. Theory of organization of industrial markets. – M.: Master, 1998. – 320 s. (In Russian)]
64. Dastidar, K.G. On the Existence of Pure Strategy Bertrand Equilibrium // Economic Theory. – 1995. – Vol. 5. – P. 19–32.
65. Shubik, M., Levitan, R.E. Market Structure and Behavior. – Cambridge (MA): Harvard Univ. Press, 1980. – 252 p.
66. Singh, N., Vives, X. Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly // Rand J. of Economics. – 1984. – Vol. 15. – P. 546–554.
67. Cheng, L. Comparing Bertrand and Cournot Equilibria: A Geometric Approach // Rand J. of Economics. – 1985. – Vol. 16. – P. 146–152.
68. Häckner, J. A Note on Price and Quantity Competition in Differentiated Oligopolies // J. of Economic Theory. – 2000. – Vol. 93. – P. 233–239.
69. Dastidar, K.G. Comparing Cournot and Bertrand in a Homogeneous Product Market // J. Econ. Theory. – 1997. – Vol. 75. – P. 205–212.
70. Amir, R., Jin, J.Y. Cournot and Bertrand Equilibria Compared: Substitutability, Complementarity and Concavity // Int. J. of Industrial Organization. – 2001. – Vol. 19. – P. 303–317.
71. Hsu, J., Wang, X.H. On Welfare under Cournot and Bertrand Competition in Differentiated Oligopolies // Review of Industrial Organization. – 2005. – Vol. 27. – P. 185–191.
72. Zanchettin, P. Differentiated Duopoly with Asymmetric Costs // J. of Economics & Management Strategy. – 2006. – Vol. 15. – P. 999–1015.
73. Correa-López, M. Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly with Upstream Suppliers // J. of Economics & Management Strategy. – 2007. – Vol. 16. – P. 469–505.
74. Farahat, A., Perakis, G. A Comparison of Bertrand and Cournot Profits in Oligopolies with Differentiated Products // Operations Research. – 2011. – Vol. 59. – P. 507–513.
75. Chang, M.C., Peng, H.-P. Cournot and Bertrand Equilibria Compared: A Critical Review and an Extension from the Output-Structure Viewpoint // Japanese Economic Review. – 2012. – Vol. 63. – P. 467–496.
76. Choné, P., Linnemer, L. The Quasilinear Quadratic Utility Model: An Overview. CESifo Working Paper No. 7640. – Munich: Munich Society for the Promotion of Economic Research – CESifo GmbH, 2019. – 29 p.
77. Bester, H., Petrakis, E. The Incentives for Cost Reduction in a Differentiated Industry // Int. J. of Industrial Organization. – 1993. – Vol. 11. – P. 519–534.
78. Qiu, L.D. On the Dynamic Efficiency of Bertrand and Cournot Equilibria // J. of Economic Theory. – 1997. – Vol. 75(1). – P. 213–229.
79. Bulow, J.I., Geanakoplos, J.D., Klemperer, P.D. Multimarket Oligopoly: Strategic Substitutes and Complements // J. of Political Economy. – 1985. – Vol. 93. – P. 488–511.
80. Tremblay, C.H., Tremblay, V.J. Oligopoly Games and the Cournot-Bertrand Model // J. of Economic Surveys. – 2019. – Vol. 33. – P. 1555–1577.
81. Friedman, J.W. On the Strategic Importance of Prices versus Quantities // Rand J. of Economics. – 1988. – Vol. 19. – P. 607–622.
82. Asproudis, E., Filippidis, E. Environmental Technological Choice in a Cournot-Bertrand Model // J. of Industry, Competition & Trade. – 2021. – Vol. 21. – P. 43–58.
83. Ponsard, J.-P. The Strategic Role of Information on the Demand Function in an Oligopolistic Market // Management Science. – 1979. – Vol. 25. – P. 243–250.



84. *Novshek, W., Sonnenschein, H.* Fulfilled Expectations Cournot Duopoly with Information Acquisition and Release // *Bell J. of Economics.* – 1982. – Vol. 13. – P. 214–218.
85. *Clarke, R.N.* Collusion and the Incentives for Information Sharing // *Bell J. of Economics.* – 1983. – Vol. 14. – P. 383–394.
86. *Gal-Or, E.* Information Sharing in Oligopoly // *Econometrica.* – 1985. – Vol. 53. – P. 329–343.
87. *Gal-Or, E.* Information Transmission – Cournot and Bertrand Equilibria // *Review of Economic Studies.* – 1986. – Vol. 53. – P. 85–92.
88. *Sakai, Y.* Cournot and Bertrand Equilibria under Imperfect Information // *J. Econ.* – 1986. – Vol. 46. – P. 213–232.
89. *Malueg, D.A., Tsutsui, S.O.* Duopoly Information Exchange: The Case of Unknown Slope // *Int. J. of Industrial Organization.* – 1996. – Vol. 14. – P. 119–136.
90. *Chokler, A., Hon-Snir, S., Kim, M., Shitovitz, B.* Information Disadvantage in Linear Cournot Duopolies with Differentiated Products // *Int. J. of Industrial Organization.* – 2006. – Vol. 24. – P. 785–793.
91. *Shapiro, C.* Exchange of Cost Information in Oligopoly // *Review of Economic Studies.* – 1986. – Vol. 53. – P. 433–446.
92. *Li, L.* Cournot Oligopoly with Information Sharing // *Rand J. of Economics.* – 1985. – Vol. 16. – P. 521–536.
93. *Sakai, Y., Yamato, T.* Oligopoly, Information and Welfare // *J. of Economics.* – 1989. – Vol. 49. – P. 3–24.
94. *Vives, X.* Trade Association Disclosure Rules, Incentives to Share Information, and Welfare // *Rand J. of Economics.* – 1990. – Vol. 21. – P. 409–430.
95. *Ziv, A.* Information Sharing in Oligopoly: The Truth-Telling Problem // *Rand J. of Economics.* – 1993. – Vol. 24. – P. 455–465.
96. *Raith, M.* A General Model of Information Sharing in Oligopoly // *J. of Economic Theory.* – 1996. – Vol. 71. – P. 260–288.
97. *Kopel, M., Putz, E.M.* Information Sharing in a Cournot – Bertrand Duopoly // *Manage. Decis. Econ.* – 2021. – Vol. 42. – P. 1645–1655.
98. *Theilen, B.* Delegation and Information Sharing in Cournot Duopoly // *J. of Economics.* – 2007. – Vol. 92. – P. 21–50.
99. *Palfrey, T.* Uncertainty Resolution, Private Information Aggregation, and the Cournot Competitive Limit // *Review of Economic Studies.* – 1985. – Vol. 52. – P. 69–83.
100. *Vives, X.* Aggregation of Information in Large Cournot Markets // *Econometrica.* – 1988. – Vol. 56. – P. 851–876.
101. *Klemperer, P., Meyer, M.* Price Competition vs. Quantity Competition: The Role of Uncertainty // *Rand J. of Economics.* – 1986. – Vol. 17. – P. 618–638.
102. *Reissinger, M., Ressner, L.* The Choice of Prices versus Quantities under Uncertainty // *J. of Economics & Management Strategy.* – 2009. – Vol. 18. – P. 1155–1177.
103. *Einy, E., Moreno, D., Shitovitz, B.* Information Advantage in Cournot Oligopoly // *J. of Economic Theory.* – 2002. – Vol. 106. – P. 151–160.
104. *Einy, E., Haimanko, O., Moreno, D., Shitovitz, B.* On the Existence of Bayesian Cournot Equilibrium // *Games and Economic Behavior.* – 2010. – Vol. 68. – P. 77–94.
105. *Fontini, F.* Cournot Oligopoly under Strategic Uncertainty with Optimistic and Pessimistic Firms // *Metroeconomica.* – 2005. – Vol. 56. – P. 318–333.
106. *Lagerlöf, J.N.M.* Insisting on a Non-negative Price: Oligopoly, Uncertainty, Welfare, and Multiple Equilibria // *Int. J. Ind. Organ.* – 2007. – Vol. 25. – P. 861–875.
107. *Grimm, V.* Cournot Competition under Uncertainty. Working Paper. – Köln: University of Cologne, 2008. – 16 p.
108. *Richter, J.* Incomplete Information in Cournot Oligopoly: The Case of Unknown Production Capacities. EWI Working Paper No. 13/01. – Köln: Institute of Energy Economics at the University of Cologne (EWI), 2013. – 31 p.
109. *Caraballo, M.A., Mármol, A.M., Monroy, L., Buitrago, E.M.* Cournot Competition under Uncertainty: Conservative and Optimistic Equilibria // *Rev. Econ. Design.* – 2015. – Vol. 19. – P. 145–165.
110. *Polak, I., Privault, N.* Cournot Games with Limited Demand: From Multiple Equilibria to Stochastic Equilibrium // *Appl. Math. Optim.* – 2020. – Vol. 81. – P. 195–220.
111. *Okura, M.* Cournot Competition in the Joint Products Market under Demand Uncertainty // *Manage. Decis. Econ.* – 2021. – Vol. 42. – P. 1105–1116.
112. *Sen, D., Stamatopoulos, G.* Licensing under General Demand and Cost Functions // *European J. of Operational Research.* – 2016. – Vol. 253. – P. 673–680.
113. *Wang, X.H.* Fee versus Royalty Licensing in a Differentiated Cournot Duopoly // *J. Econ. Bus.* – 2002. – Vol. 54. – P. 253–266.
114. *Fauli-Oller, R., Sandonis, J.* Fee versus Royalty Licensing in a Cournot Duopoly with Increasing Marginal Costs // *Manchester School.* – 2022. – Vol. 90. – P. 439–452.
115. *Kabiraj, A., Kabiraj, T.* Tariff Induced Licensing Contracts, Consumers' Surplus and Welfare // *Economic Modelling.* – 2017. – Vol. 60. – P. 439–447.
116. *Colombo, S., Filippini, L., Sen, D.* Patent Licensing and Capacity in a Cournot Model // *Review of Industrial Organization.* – 2022. – Vol. 62. – P. 1–18.
117. *Ferreira, F.A., Ferreira, F., Bode, O.R.* Licensing under Cournot vs. Bertrand Competition // *Economic Research – Ekonomiska Istraživanja.* – 2021. – Vol. 34. – P. 651–1675.
118. *Li, C., Ji, X.* Innovation Licensing and Price vs. Quantity Competition // *Economic Modelling.* – 2010. – Vol. 27. – P. 746–754.
119. *Salant, S.W., Switzer, S., Reynolds, R.J.* Losses from Horizontal Merger: The Effects of an Exogenous Change in Industry Structure on Cournot–Nash Equilibrium // *Quarterly J. of Economics.* – 1983. – Vol. 98, no. 2. – P. 185–199.
120. *Perry, M.K., Porter, R.H.* Oligopoly and the Incentive for Horizontal Merger // *American Economic Review.* – 1985. – Vol. 75, no. 1. – P. 219–227.
121. *McAfee, R.P., Williams, M.A.* Horizontal Mergers and Antitrust Policy // *J. of Industrial Economics.* – 1992. – Vol. 40. – P. 181–187.
122. *Deneckere, R., Davidson, C.* Incentives to Form Coalitions with Bertrand Competition // *Rand J. of Economics.* – 1985. – Vol. 16, no. 4. – P. 473–486.
123. *Daughety, A.F.* Beneficial Concentration // *American Economic Review.* – 1990. – Vol. 80, no. 5. – P. 1231–1237.
124. *Feltovich, N.* Mergers, Welfare, and Concentration: Results from a Model of Stackelberg–Cournot Oligopoly // *Atlantic Economic J.* – 2001. – Vol. 29. – P. 378–392.
125. *Heywood, J.S., McGinty, M.* Leading and Merging: Convex Costs, Stackelberg, and the Merger Paradox // *Southern Economic J.* – 2008. – Vol. 74, no. 3. – P. 879–893.
126. *d'Aspremont, C., Jacquemin, A., Gabszewicz, J.J., Weymark, J.A.* On the Stability of Collusive Price Leadership // *Canadian J. of Economics.* – 1983. – Vol. 16, no. 1. – P. 17–25.

127. *Prokop, J.* Process of Dominant Cartel Formation // Int. J. of Industrial Organization. – 1999. – Vol. 17. – P. 241–257.
128. *Selten, R.* A Simple Model of Imperfect Competition, Where 4 Are Few and 6 Are Many // Int. J. of Game Theory. – 1973. – Vol. 2. – P. 141–201.
129. *Shaffer, S.* Stable Cartels with a Cournot Fringe // Southern J. of Economics. – 1995. – Vol. 61. – P. 744–754.
130. *Thoron, S.* Formation of Coalition-Proof Stable Cartels // Canadian J. of Economics. – 1998. – Vol. 31. – P. 63–76.
131. *Konishi, H., Lin, P.* Stable Cartels with a Cournot Fringe in a Symmetric Oligopoly // Keio Economic Studies. – 1999. – Vol. 36, no. 2. – P. 1–10.
132. *Escriva-Villar, M.* A Note on Cartel Stability and Endogenous Sequencing with Tacit Collusion // J. of Economics. – 2009. – Vol. 96. – P. 137–147.
133. *Zu, L., Zhang, J., Wang, S.* The Size of Stable Cartels: An Analytical Approach // Int. J. of Industrial Organization. – 2012. – Vol. 30. – P. 217–222.
134. *Ichiishi, T.* A Social Coalitional Equilibrium Existence Lemma // Econometrica. – 1981. – Vol. 49. – P. 369–377.
135. *Yi, S.-S.* Stable Coalition Structures with Externalities // Games and Economic Behavior. – 1997. – Vol. 20. – P. 201–237.
136. *Abe, T.* Cartel Formation in Cournot Competition with Asymmetric Costs: A Partition Function Approach // Games. – 2021. – Vol. 12. – Art. no. 14.
137. *Karamardian, S.* The Nonlinear Complementarity Problem with Applications. Part 1 // J. of Optimization Theory and Applications. – 1969. – Vol. 4. – P. 87–98.
138. *Karamardian, S.* The Nonlinear Complementarity Problem with Applications. Part 2 // J. of Optimization Theory and Applications. – 1969. – Vol. 4. – P. 167–181.
139. *Hobbs, B.* Linear Complementarity Models of Nash–Cournot Competition in Bilateral and POOLCO Power Markets // IEEE Transactions on Power Systems. – 2001. – Vol. 16. – P. 194–202.
140. *Hobbs, B., Pang, J.* Nash–Cournot Equilibria in Electric Power Markets with Piecewise Linear Demand Functions and Joint Constraints // Operations Research. – 2007. – Vol. 55. – P. 113–127.
141. *Mañas, M.* A Linear Oligopoly Game // Econometrica. – 1972. – Vol. 40. – P. 917–922.
142. *Murphy, F.H., Sherall, H.D., Soyster, A.L.* A Mathematical Programming Approach for Determining Oligopolistic Market Equilibrium // Mathematical Programming. – 1982. – Vol. 24. – P. 92–106.
143. *Harker, P.T.* A Variational Inequality Approach for the Determination of Oligopolistic Market Equilibrium // Mathematical Programming. – 1984. – Vol. 30. – P. 105–111.
144. *Novshek, W.* Finding All N-Firm Cournot Equilibria // Int. Economic Review. – 1984. – Vol. 25. – P. 61–70.
145. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. – 200 с. [Moulin, H. Theorie des jeux pour l'economie et la politique. – Paris: Hermann, 1981.]
146. *Zhang, A., Zhang, Y.* Stability of a Cournot–Nash Equilibrium: The Multiproduct Case // J. of Mathematical Economics. – 1996. – Vol. 26. – P. 441–462.
147. *Siriruk, P.* Cournot Competition under Uncertainty in Power Markets: Ph. D. Dissertation. – Alabama: Auburn University, 2009. – 137 p.
148. *Valezuela, J., Mazumdar, M.* Cournot Prices Considering Generator Availability and Demand Uncertainty // IEEE Transactions on Power Systems. – 2007. – Vol. 22. – P. 116–125.
149. *Fanti, L., Buccella, D.* Cournot and Bertrand Competition in the Software Industry // Economics Research International. 2017. – Vol. 2017. – Art. ID 9752520. – 10 p.
150. *Li, J., Li, X., Ma, N.* A Price Discrimination Based Cournot Game Model for High-Speed Rail and Airline // J. of Intelligent and Fuzzy Systems. – 2021. – Vol. 41. – P. 4793–4801.

Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком РАН Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 14.03.2023,  
после доработки 28.09.2023.  
Принята к публикации 28.09.2023.

**Шведов Алексей Сергеевич** – д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва,  
✉ ashvedov@hse.ru  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8988-0432>.

© 2023 г. Шведов А.С.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



# COURNOT OLIGOPOLY: STRATEGY CHOICE UNDER UNCERTAINTY AND OTHER PROBLEMS

A.S. Shvedov

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

✉ ashvedov@hse.ru

**Abstract.** Firms operating in a market economy naturally strive to increase revenues. When large firms affect prices by their actions, this task involves nontrivial mathematics, i.e., game-theoretic oligopoly models. The survey is more concerned with Cournot competition than with Bertrand competition. The existence, uniqueness, and stability of Cournot equilibrium are discussed. The other issues under consideration are as follows: the entry of new firms into the market; the barriers that can be imposed for this; and the impact of such an entry on society's welfare as well as on total surplus and consumer surplus. The problems of collusion between firms are touched upon. Publications comparing the prices of goods, the profits of firms, and society's welfare under Cournot and Bertrand competition are overviewed. Much attention is paid to the problems faced by firms due to the ignorance of some current or future market conditions and the existing uncertainty. The issues of information sharing among firms are considered. One approach to reducing marginal cost is the purchase of licenses; licensing in a Cournot duopoly is also described. Computational methods for Cournot equilibria in the case of multi-product firms are presented. Finally, publications with particular applications of Cournot equilibria are considered.

**Keywords:** Cournot equilibrium, social efficiency, Bertrand equilibrium, information sharing, uncertainty, licensing, cartel formation, complementarity problem.

**Funding.** This work was supported by Academician Nikolai Fedorenko International Scientific Foundation for Economic Research, project no. 2022-139.