УДК 519.85

НЕЧЕТКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: КРАТКИЙ ОБЗОР

А.С. Шведов

Дан обзор ряда разделов нечеткого математического программирования. Отмечено, что к нечеткому математическому программированию относятся задачи математического программирования, при постановке которых тем или иным способом применяется аппарат теории нечетких множеств. Рассмотрены задачи с расплывчатыми неравенствами, задачи с нечеткими параметрами, ранжирующие функции, меры возможности. На примере выбора портфеля ценных бумаг обсуждены задачи нечетко-случайного математического программирования.

Ключевые слова: нечеткое математическое программирование, меры возможности, нечетко-случайные величины.

ВВЕДЕНИЕ

С утверждением, что оптимизационные задачи, содержащие в своей постановке неопределенность, имеют большое практическое значение, согласны все. Основные подходы введения неопределенности в математическую модель связаны с применением, прежде всего, теории вероятностей и теории нечетких множеств. И здесь речь идет о двух разных видах неопределенности. В случае теории вероятностей неизвестная величина может принимать различные значения, и с каждым значением или с каждой группой значений связывается некоторая вероятность. В случае теории нечетких множеств сами значения являются расплывчатыми, неопределенными. Например, для конкретной задачи может быть важно, как наилучшим образом определить «малые», «умеренные», «большие» значения той или иной величины и как осуществить плавный (или не плавный) переход от одного состояния к другому. Поведение системы может задаваться разными правилами для каждого из этих трех состояний. При этом, разумеется, можно говорить и о вероятности, например, умеренных значений. Задачи, включающие в себя и элементы нечеткого математического программирования, и элементы стохастического математического программирования, относятся к нечетко-случайному математическому программированию.

При подготовке обзора того или иного научного направления ставятся задачи отделить важное от существенного, существенное от рядового; следить за соблюдением равновесия между различными частями этого научного направления при представлении их в обзоре. Но стало уже обычным делом, когда число публикаций, относящихся к данному научному направлению, из трехзначного превратилось в четырехзначное и продолжает быстро расти. Представительный обзор должен быть даже не пятидесятистраничной статьей, а книгой. Остаются ли люди, которые такие обзоры могут и хотят писать? Ответом на возникший вызов может быть увеличение числа относительно небольших обзоров, подготовленных различными авторами. Сопоставление точек зрения на научное направление разных специалистов может дать картину, приближающуюся к объективной. При этом присутствующие в каждом таком обзоре пропуски необходимо признавать неизбежными. С другой стороны, какие-то объяснения, более уместные для учебника, чем для обзора (при обычном понимании этого жанра), в таких кратких обзорах должны допускаться. Учебников много, некоторые из них труднодоступны, и даже единый взгляд на терминологию часто отсутствует. Разумеется, если какая-то работа в таком кратком обзоре не упомянута, то это не означает, что автор не считает ее важной.

Классическая задача математического программирования состоит в максимизации критерия

$$f(x) \to \max$$

при ограничениях

$$g_1(x) \le b_1, \ldots, g_m(x) \le b_m.$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; функции $f, g_1, \ldots, g_m$ действуют из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ и являются известными; $b_1, \ldots, b_m$ — заданные действительные числа. В области точек x, удовлетворяющих приведенным ограничениям, требуется найти точку (или точки), в которой функция f достигает максимума. В данной задаче математического программирования максимизируется один критерий. Однако может присутствовать и несколько критериев.

Методы математического программирования применяются во многих прикладных областях. В ряде случаев оправдано включение в модель нечеткости; при этом существуют различные способы, которыми нечеткость включается. Среди книг, в которых рассматривается нечеткое математическое программирование, назовем работы [1—5]. Имеется также большое число журнальных публикаций. Среди них можно назвать обзоры [6—11].

В работе [8] выделяется пятнадцать типов задач нечеткого математического программирования. Мы будем придерживаться другой классификации и считать, что задачи нечеткого математического программирования можно разделить на типы по следующим девяти признакам. Первые два признака относятся и к обычным задачам математического программирования.

1. Один или несколько критериев в задаче. Из задач с несколькими критериями можно выделить те, где критерии имеют различную важность или различные приоритеты.

2. Все критерии и ограничения являются линейными функциями аргументов $x_1, \ldots, x_n$ (это задачи линейного программирования) либо среди критериев или ограничений присутствуют нелинейные функции аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

3. Симметричная постановка задачи, где критерии и ограничения выступают как равноправные, или несимметричная (обычная) постановка задачи, где критерии и ограничения играют различные роли.

4. Наличие или отсутствие желаемых уровней для критериев. Желаемые уровни, в свою очередь, могут быть четкими или нечеткими.

5. Наличие или отсутствие расплывчатых неравенств для критериев и/или для ограничений.

6. Наличие или отсутствие нечетких параметров в критериях и/или в ограничениях.

7. Наличие или отсутствие ранжирования нечетких чисел.

8. Наличие или отсутствие критериев и ограничений, связанных с мерой возможности или с мерой необходимости (или с другими сходными мерами).

9. Типы аргументов $x_1, \ldots, x_n$: действительные, целые, бинарные, нечеткие.

Если следовать такой классификации и считать, что любая задача может относиться к той или иной группе по каждому из признаков, то число различных типов задач нечеткого математического программирования равняется нескольким тысячам. Хотя некоторые признаки и не совсем независимы. Например, задачи с расплывчатыми неравенствами для ограничений и задачи с ограничениями, задаваемыми с помощью меры возможности, достаточно похожи.

В приведенную классификацию не включены некоторые классы задач. Прежде всего, это задачи интерактивного нечеткого программирования, где в процессе решения задачи можно изменять функции принадлежности и желаемые уровни (см. книгу [2] и последующие работы). Не включены задачи, в которых используются интуиционистские нечеткие множества[1]. Не включены многокритериальные задачи, где решения принимаются на нескольких уровнях подчиненности (см., например, [15]), а также задачи нечеткого линейного физического программирования (см., например, [16]). Не включены работы по робастному нечеткому математическому программированию (см., например, [17]). Отдельные группы исследований, также не затрагивающиеся в настоящем обзоре, это работы по симплекс-методу для задач нечеткого линейного программирования (см., например, [18]); работы по анализу чувствительности (см., например, [19]); работы по условиям оптимальности, таким как теорема Куна — Таккера (см., например, [20]); работы по двойственным задачам нечеткого линейного программирования [11].

Публикаций по применению методов нечеткого математического программирования в различных прикладных задачах очень много. В качестве примера назовем работы [21—28].

В § 1 настоящей работы приводятся необходимые определения. В § 2 рассматриваются задачи математического программирования с расплывчатыми неравенствами, описывается симметричный подход к проблеме оптимизации. В § 3 рассматри-

[1] Если обычное нечеткое множество определяется своей функцией принадлежности, то интуиционистское нечеткое множество определяется двумя функциями — функцией принадлежности и функцией непринадлежности. Сумма этих функций во всех точках не больше 1. См. работу [12] и другую литературу по интуиционистским нечетким множествам. Из недавних работ по интуиционистскому нечеткому программированию можно назвать статьи [13, 14].

ваются задачи с нечеткими параметрами, обсуждается дефаззификация как способ сведения задачи нечеткого математического программирования к задаче обычного математического программирования. В § 4 дается описание мер возможности, необходимости, уверенности; формулируется задача возможностного программирования. В § 5 на примере задачи о составлении портфелей из различных активов затрагивается более широкое научное направление — нечетко-случайное программирование.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ

Понятие нечеткого множества введено в работе [29]. Впоследствии теория нечетких множеств была существенно расширена многими авторами.

Рассмотрим некоторое множество U, которое будем называть универсальным множеством.

Определение 1. Любая функция $\mu: U \to [0, 1]$ называется функцией принадлежности.

Определение 2. График функции принадлежности μ, т. е. множество пар $(u, \mu_A(u))$, $u \in U$, называется нечетким множеством. ♦

Если нечеткое множество обозначить через A, то функция принадлежности этого нечеткого множества обычно обозначается $\mu_A(u)$. Иногда о числе $\mu_A(u)$ говорят, как о степени принадлежности элемента u нечеткому множеству A.

Определение 3. Пусть A — обычное подмножество множества U. Индикатором множества A называется функция $I_A: U \to [0, 1]$ такая, что $I_A(u) = 1$ при $u \in A$ и $I_A(u) = 0$ при $u \notin A$. ♦

Очевидно, что индикатор является функцией принадлежности и, следовательно, график индикатора — это нечеткое множество; если обычное множество обозначено A, то и нечеткое множество в этом случае часто обозначается A. Такое двусмысленное использование обозначения требует определенного внимания. Формально обычные подмножества множества U не являются частным видом нечетких множеств. Нечетким множеством является график индикатора обычного подмножества множества U.

Определение 4. Носителем нечеткого множества A называется множество $\{u \in U : \mu_A(u) > 0\}$.

Определение 5. Нечеткое множество A называется нормализованным, если существует элемент $u \in U$ такой, что $\mu_A(u) = 1$.

Определение 6. Пересечением нечетких множеств A и B называется нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}, \quad u \in U.$$

Определение 7. Объединением нечетких множеств A и B называется нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}, \quad u \in U.$$

Определение 8. Дополнением нечеткого множества A называется нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u), \quad u \in U.$$

Определение 9. η-срезом нечеткого множества A называется множество

$$A_\eta = \{u \in U: \mu_A(u) \geq \eta\},$$

$0 < \eta \leq 1$. ♦

При $U = \mathbb{R}$ вместо термина «нечеткое множество» в ряде случаев удобнее употреблять термин «нечеткая величина». Тогда вместо обозначения A используется, например, обозначение ξ. Для каждого множества $B \subseteq \mathbb{R}$ определяется

$$\sup_{u \in B} \mu_\xi(u).$$

Об этом значении говорят как о возможности того, что нечеткая величина ξ принадлежит множеству B.

Подчеркнем, что терминология, употребляемая при работе с нечеткими множествами, достаточно сильно различается от публикации к публикации. Разумеется, мы говорим лишь о тех определениях, которые используются в настоящей работе.

Определение 10. Пусть $U = \mathbb{R}$. Нечеткое множество A называется выпуклым, если существует точка $u_A \in \mathbb{R}$ такая, что функция $\mu_A(u)$ является монотонно неубывающей на полупрямой $(-\infty, u_A]$ и является монотонно невозрастающей на полупрямой $[u_A, \infty)$.

Определение 11. Пусть $U = \mathbb{R}$, A — выпуклое нормализованное нечеткое множество с ограниченным носителем. Функции

$$z^L(\eta) = \inf A_\eta, \quad z^R(\eta) = \sup A_\eta, \quad \eta \in (0, 1],$$

называются, соответственно, левым и правым индексами нечеткого множества A. ♦

Можно было бы сказать, что если A — это выпуклое нормализованное нечеткое множество с ограниченным носителем, то будем называть A нечетким числом. Однако для определения нечетко-случайных величин удобнее считать, что нечеткое число — это компактное подмножество плоскости, лежащее между таким нечетким множеством A (графиком функции принадлежности) и осью абсцисс. Подробнее о так определенных нечетких числах и об операциях над ними см. в работах [30, 31].

2. ЗАДАЧИ С РАСПЛЫВЧАТЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ. СИММЕТРИЧНЫЙ ПОДХОД

Симметричный подход к принятию решений, при котором критерии и ограничения играют похожие роли, предложен в работе [32]. Идея этого подхода может быть выражена так. В качестве решения нужно выбрать тот элемент универсального множества, степень принадлежности которого к пересечению нечетких множеств, задающих желаемые уровни для всех критериев и для всех ограничений, максимальна. Подход, предложенный в работе [32], был развит в работе [33]. К задаче линейного программирования симметричный подход применен в работе [34]. Близкие вопросы рассматриваются в работе [35].

Классическая задача линейного программирования имеет вид $cx \to \max$ при условиях $ax \ge b$, $x_1 \ge 0, ..., x_n \ge 0$. Здесь $c = (c_1, ..., c_n)$ — n-мерный вектор, $b = (b_1, ..., b_m)^T$ — m-мерный вектор, a — $m \times n$ матрица. Элементы матрицы и координаты векторов в классической задаче линейного программирования считаются действительными числами. Требуется найти n-мерный вектор с действительными координатами $x = (x_1, ..., x_n)^T$, для которого при выполнении приведенных выше неравенств достигает максимума функция cx.

В нечетком математическом программировании рассматриваются задачи с расплывчатыми неравенствами. Пусть g_0 — желаемый уровень для рассматриваемого критерия. В данном случае g_0 — действительное число. Требуется найти n-мерный вектор $x = (x_1, ..., x_n)^T$ такой, что

$$cx \gtrsim g_0, \quad ax \lesssim b,$$

$x_1 \ge 0, ..., x_n \ge 0$. Матрица a и векторы b, c те же, что и выше. Для обычного неравенства «$\ge$» или «$\le$» степень его выполнения либо 1 (неравенство выполняется), либо 0 (неравенство не выполняется). Для расплывчатого неравенства «$\gtrsim$» или «$\lesssim$» степень его выполнения может принимать любое действительное значение от 0 до 1. В этом сходство с функцией принадлежности нечеткого множества, которая также показывает степень принадлежности каждого элемента некоторого универсального множества к нечеткому множеству. Строго математически смысл расплывчатого неравенства следующий.

Предположим, что выбрано положительное действительное число e_0. Степень выполнения $f_0(cx \gtrsim g_0)$ расплывчатого неравенства $cx \gtrsim g_0$ определяется следующим образом: $f_0(cx \gtrsim g_0) = 1$, если $cx > g_0$; $f_0(cx \gtrsim g_0) = 1 - (g_0 - cx)/e_0$, если $g_0 - e_0 \le cx \le g_0$; $f_0(cx \gtrsim g_0) = 0$, если $cx < g_0 - e_0$.

Предположим, что $e_1, ..., e_m$ — положительные действительные числа. Пусть a_i — i-я строка матрицы a, $a_i x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Степень выполнения $f_i(ax \lesssim b)$ расплывчатого неравенства $ax \lesssim b$ определяется при $i = 1, ..., m$ следующим образом: $f_i(ax \lesssim b) = 1$, если $a_i x < b_i$; $f_i(ax \lesssim b) = 1 - (a_i x - b_i)/e_i$, если $b_i \le a_i x \le b_i + e_i$; $f_i(ax \lesssim b) = 0$, если $a_i x > b_i + e_i$.

Требуется максимизировать степень выполнения всех расплывчатых неравенств в смысле:

$$\gamma \to \max$$

при условиях

$$1 - (g_0 - cx)/e_0 \ge \gamma, \quad 1 - (a_i x - b_i)/e_i \ge \gamma,$$

$$i = 1, ..., m, \quad \gamma \ge 0, \quad x_1 \ge 0, ..., \quad x_n \ge 0.$$

Теперь задача поставлена математически строго и является обычной задачей линейного программирования, в которой требуется найти решение γ, $x_1, ..., x_n$.

Очевидно, что данный подход легко обобщается на случай нескольких критериев. Возможно обобщение и на случай, когда степень выполнения каждого расплывчатого неравенства определяется при помощи нелинейной функции, и различным критериям даются различные веса; по этим вопросам см., например, работу [36]. Применение интуиционистских нечетких множеств в данном подходе описывается в работе [37].

Сходную задачу можно рассматривать и в рамках несимметричного подхода, когда критерий максимизируется при заданной степени выполнения расплывчатых неравенств, задающих ограничения [38]. В работе [38] также показана двойственность задач линейного программирования с четким критерием и с расплывчатыми неравенствами для ограничений и задач линейного программирования с нечетким критерием и с обычными ограничениями.

3. ЗАДАЧИ С НЕЧЕТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Задачи линейного программирования с нечеткими параметрами изучаются, например, в работах [39—41]. Далее рассматриваются лишь подходы к упорядочению нечетких чисел, основанные на ранжирующих функциях. Произвольная функция $\Re$, действующая из множества нечетких чисел в множество действительных чисел, может быть выбрана в качестве ранжирующей функции. Для нечетких чисел $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ устанавливается отношение порядка: $\tilde{x} \le_{\Re} \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда

$\Re(\tilde{x}) \le \Re(\tilde{y})$. (Разумеется, на практике используются лишь те функции $\Re$, для которых отношение порядка «$\le_\Re$» обладает некоторыми разумными свойствами.)

Например, в качестве ранжирующей функции $\Re$ может быть выбрана функция

$$\Re(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x^L(\eta)d\eta + \int_0^1 x^R(\eta)d\eta\right),$$

где $x^L(\eta)$ и $x^R(\eta)$, соответственно, левый индекс и правый индекс нечеткого числа $\tilde{x}$. Используются и другие ранжирующие функции.

Пусть вместо условия $ax \le b$, рассмотренного в § 2, требуется использовать условие с матрицей $\{\tilde{a}_{ij}\}$ и с вектором $(\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_m)$, где $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$ — нечеткие числа; координаты вектора x — действительные числа. Тогда в качестве условий можно принять

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le_\Re \tilde{b}_i, \quad i = 1, ..., m.$$

Для многокритериальных задач остановимся на методе ограничений [42, 43, 44, *c. 36—39*]). Сначала рассмотрим задачи обычного (не нечеткого) математического программирования. Приводимое описание дает удобную форму для перехода к нечеткому случаю.

Рассмотрим многокритериальную задачу

$$c_1(x) \to \max, ..., c_k(x) \to \max, \quad x \in V, \qquad (1)$$

где множество $V \subseteq \mathbb{R}^n$ может определяться системой равенств и неравенств для значений некоторых функций.

Определение 12. Точка $x^0 \in V$ называется эффективным решением задачи (1), если не существует точки $x \in V$ такой, что $c_i(x) \ge c_i(x^0)$ при всех $i = 1, ..., k$, и $c_j(x) > c_j(x^0)$ хотя бы при одном j, $1 \le j \le k$.

Определение 13. Точка $x^0 \in V$ называется слабо эффективным решением задачи (1), если не существует точки $x \in V$ такой, что $c_i(x) > c_i(x^0)$ при всех $i = 1, ..., k$. ♦

Ясно, что любое эффективное решение задачи (1) будет и слабо эффективным решением задачи (1).

В методе ограничений рассматривается следующее семейство однокритериальных задач математического программирования. При каждом j, $1 \le j \le k$, и при каждом наборе действительных чисел e_i, где $i = 1, ..., k$, $i \ne j$, рассматривается задача

$$c_j(x) \to \max, \quad c_i(x) \ge e_i,$$
$$i = 1, ..., k, \quad i \ne j, \quad x \in V. \qquad (2)$$

Семейство задач (2) можно назвать двухпараметрическим. Один параметр — это число j, другой параметр — это точка $(e_1, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$.

Для полноты изложения приведем три известные теоремы, доказательства которых можно найти, например, в книге [2].

Теорема 1. *Если существует задача из семейства* (2)*, имеющая единственное решение* x^0*, то* x^0 *является эффективным решением многокритериальной задачи* (1).

Теорема 2. *Если существует задача из семейства* (2)*, имеющая решение* x^0*, то* x^0 *является слабо эффективным решением многокритериальной задачи* (1).

Теорема 3. *Пусть* x^0 *является эффективным решением многокритериальной задачи* (1). *Тогда существует однокритериальная задача из семейства* (2)*, для которой* x^0 *является решением.* ♦

Рассмотрим задачу нечеткого линейного программирования

$$\tilde{c}_1 x \to \max, ..., \tilde{c}_k x \to \max, \quad ax \le b,$$

$x_1 \ge 0, ..., x_n \ge 0$. Здесь $\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_k$ — n-мерные векторы, координаты которых являются нечеткими числами, вектора b и x имеют действительные координаты, a — матрица с действительными элементами.

Используя ранжирующие функции $\Re_1, ..., \Re_k$ и применяя метод ограничений, можно заменить рассматриваемую многокритериальную задачу нечеткого линейного программирования на семейство однокритериальных задач математического программирования:

$$\Re_j(\tilde{c}_j x) \to \max \ \tilde{c}_i x \ge_{\Re_i} \tilde{e}_i,$$
$$i = 1, ..., k, \quad i \ne j, \quad ax \le b,$$

$x_1 \ge 0, ..., x_n \ge 0$. Здесь $\tilde{e}_i$, $i = 1, ..., k$, $i \ne j$ — нечеткие числа.

В работе [38] приводится пример, показывающий, что эти однокритериальные задачи математического программирования могут не быть задачами линейного программирования.

4. МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ, НЕОБХОДИМОСТИ, УВЕРЕННОСТИ. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ВОЗМОЖНОСТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Далее даются определения и некоторые свойства мер возможности, необходимости, уверенности. Приводится одна из постановок задачи возможностного программирования. Подробнее о мерах, отличных от вероятностной см., например, в работах [4, 45—47].

Пусть U — произвольное множество. Через A, B, будем обозначать подмножества множества U.

Определение 14. Система R подмножеств множества U называется кольцом, если из условия $A \in R$, $B \in R$ следует, что $A \cap B \in R$ и $A \Delta B \in R$. ♦

Напомним, что симметрическая разность множеств A и B определяется как $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. Из соотношений $A \cup B = (A\Delta B) \Delta (A \cap B)$ и $A\backslash B = A\Delta(A \cap B)$ вытекает, что вместе с любыми двумя множествами A и B кольцу принадлежат также их объединение $A \cup B$ и разность $A\backslash B$. Из соотношения $\varnothing = A\backslash A$ следует, что $\varnothing \in R$.

Определение 15. Функция Pos, определенная на кольце R и принимающая значения в отрезке [0, 1], называется мерой возможности, если $Pos(\varnothing) = 0$ и для любых двух множеств $A \in R$, $B \in R$ $Pos(A \cup B) = \max(Pos(A), Pos(B))$.

Пример 1. Пусть непустое множество $C \in R$ и пусть для любого $A \in R$ выполняется $Pos(A) = 1$, если $A \cap C \neq \varnothing$, и $Pos(A) = 0$, если $A \cap C = \varnothing$. Этот пример объясняет и название меры. Подмножество A является возможным, если оно пересекается с подмножеством C, и является невозможным, если оно не пересекается с подмножеством C.

Определение 16. Кольцо R называется алгеброй, если $U \in R$. ♦

В дальнейшем, будем считать, что все рассматриваемые кольца являются алгебрами и $Pos(U) = 1$.

Отметим два свойства меры возможности.

- Если $A \subseteq B$, то $Pos(A) \le Pos(B)$. Действительно, $B = A \cup (B\backslash A)$, поэтому $Pos(B) = \max(Pos(A), Pos(B\backslash A))$.
- Для любого $A \in R$ выполняется $Pos(A) + Pos(\bar{A}) \ge 1$. Действительно, $1 = Pos(U) = Pos(A \cup \bar{A}) = \max(Pos(A), Pos(\bar{A}))$.

Пусть выбрана некоторая мера возможности.

Определение 17. Функция Nec, определенная на кольце R и принимающая значения в отрезке [0, 1], задаваемая формулой $Nec(A) = 1 - Pos(\bar{A})$, называется мерой необходимости. ♦

Из определения (17) следует, что $Nec(\varnothing) = 0$, поскольку $Pos(U) = 1$.

Отметим три свойства меры необходимости.

- Если $A \subseteq B$, то $Nec(A) \le Nec(B)$. Действительно, $\bar{B} \subseteq \bar{A}$, поэтому $Pos(\bar{B}) \le Pos(\bar{A})$.
- Для любых $A \in R$, $B \in R$ выполняется $Nec(A \cap B) = \min(Nec(A), Nec(B))$. Имеем

$$Nec(A \cap B) = 1 - Pos(\overline{A \cap B}) =$$
$$= 1 - Pos(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - \max(Pos(\bar{A}), Pos(\bar{B})) =$$
$$= \min(1 - Pos(\bar{A}), 1 - Pos(\bar{B})) =$$
$$= \min(Nec(A), Nec(B)).$$

- Для любого $A \in R$ выполняется $Nec(A) + Nec(\bar{A}) \le 1$. Действительно, $0 = Nec(\varnothing) = Nec(A \cap \bar{A}) = \min(Nec(A), Nec(\bar{A}))$.

Покажем, что любого $A \in R$ имеет место соотношение $Nec(A) \le Pos(A)$. Неравенство очевидно, если $Pos(A) = 1$. Если $Pos(\bar{A}) = 1$, то $Nec(A) = 1 - Pos(\bar{A}) = 0$, и неравенство также имеет место.

Определение 18. Функция Cr, определенная на кольце R и принимающая значения в отрезке [0, 1], задаваемая формулой $Cr(A) = 0,5(Pos(A) + Nec(A))$, называется мерой уверенности. ♦

Нетрудно увидеть, что для любого $A \in R$ выполняется $Cr(A) + Cr(\bar{A}) = 1$. Действительно,

$$Cr(A) + Cr(\bar{A}) = 0,5(Pos(A) + 1 - Pos(\bar{A}) +$$
$$+ Pos(\bar{A}) + 1 - Pos(A)) = 1.$$

Из доказанного неравенства $Nec(A) \le Pos(A)$ следует, что

$$Nec(A) \le Cr(A) \le Pos(A).$$

Пример 2. Пусть U — конечное множество, и кольцо R состоит из всех подмножеств множества U. Функция $\mu: U \to [0, 1]$, и $\max_{u \in U} \mu(u) = 1$. Если при любом $u \in U$ положить $Pos(\{u\}) = \mu(u)$, то тем самым задается мера возможности на кольце R. При этом для любого подмножества $\{u_1, ..., u_n\} \subseteq U$ выполняется $Pos(\{u_1, ..., u_n\}) = \max(\mu(u_1), ..., \mu(u_n))$. ♦

Аналогично можно связать меру возможности с функцией принадлежности нечеткого множества и в случае произвольного множества U.

Когда в рамках одной задачи математического программирования разрешается использовать и меру возможности, и меру необходимости, связанные с различными функциями принадлежности, это открывает перспективы для тонкого учета многих реальных требований. Достаточно общая мера изучается в работе [48]; при каждом $\lambda \in [0, 1]$

$$M_\lambda(A) \overset{def}{=} \lambda Pos(A) + (1 - \lambda)Nec(A).$$

Если в задаче математического программирования, сформулированной во Введении, присутствуют нечеткие параметры, то вместо нее может быть рассмотрена задача возможностного программирования:

$$\gamma \to \max$$

при условиях

$$M_{\lambda_0}(f(x) \ge \gamma) \ge \alpha_0,$$

$$M_{\lambda_j}(g_j(x) \le b_j) \ge \alpha_j, \quad j = 1, ..., m;$$

здесь $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ — заданные числа.

Отметим, что среди ограничений исходной задачи математического программирования может быть, например, ограничение $x_1 \ge 0, ..., x_n \ge 0$, не содержащее никаких нечетких параметров. Такое ограничение остается в задаче возможностного программирования в своем первоначальном виде.

5. ЗАДАЧА ВЫБОРА ПОРТФЕЛЯ В НЕЧЕТКО-СЛУЧАЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Рассматривается задача составления портфеля из n активов; $x_1, ..., x_n$ — параметры портфеля, т. е. действительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Пусть $x_1 \ge 0, ..., x_n \ge 0$. Тогда x_i — это доля капитала, вложенная в i-й актив.

Пусть $S_{i,\,t}$ — стоимость единицы i-го актива в момент времени t, $S_{i,\,t+\Delta t}$ — стоимость единицы i-го актива в момент времени $t + \Delta t$, $\Delta t > 0$; d_i — доход, полученный от владения единицей i-го актива с момента времени t до момента времени $t + \Delta t$. Например, если активом является акция, то d_i — это дивиденды, выплачиваемые на одну акцию. Будем предполагать, что $S_{i,t} > 0$ при любом $i = 1, ..., n$. Доходностью i-го актива называется число

$$r_i = \frac{S_{i,\,t+\Delta t} - S_{i,\,t} + d_i}{S_{i,\,t}}.$$

Математической моделью для доходностей $r_1, ..., r_n$ могут быть случайные величины $R_1, ..., R_n$, нечеткие числа $\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_n$, нечетко-случайные величины[2] $\tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_n$.

В работах [53, 54] рассматривается вероятностная модель и предлагается определять портфельные параметры $x_1, ..., x_n$ путем решения двухкритериальной задачи

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right) \to \max, \quad D\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right) \to \min.$$

Если первый из критериев, максимизация ожидаемой доходности, не вызывает вопросов, то правильность второго критерия, минимизации дисперсии, не так очевидна. Тем не менее, это обоснованный критерий; подробнее см., например, работу [55], где обсуждается также экономический смысл отрицательных портфельных параметров.

Работы Марковица в значительной степени определили направления развития портфельной теории на последующие десятилетия. Например, в ряде последующих работ используются моменты случайной величины $\sum_{i=1}^{n} x_i R_i$ более высоких порядков, чем второй. Вместо дисперсии могут рассматриваться и другие меры риска: семидисперсия, сумма под риском.

Значительное внимание в современной портфельной теории уделяется моделям, включающим в себя нечеткость.

Пусть $\tilde{r}$ — нечеткое число, $r^L(\eta)$ и $r^R(\eta)$ — соответственно, левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{r}$, $0 < \nu \le 1$. В работе [56] предлагается использовать ν-среднее нечеткого числа $\tilde{r}$:

$$\int_0^1 ((1 - \nu)r^L(\eta) + \nu r^R(\eta))d\eta,$$

$0 \le \nu \le 1$. Для нечетко-случайной величины $\tilde{R}$ через $M^{\nu}(\tilde{R})$ обозначим ν-среднее нечеткого ожидания этой нечетко-случайной величины[3].

Будем считать, что моделью для доходностей $r_1, ..., r_n$ служит набор нечетко-случайных величин $\tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_n$. Тогда доходность портфеля моделируется нечетко-случайной величиной

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{R}_i.$$

Определения суммы нечетко-случайных величин и произведения действительного числа и нечетко-случайной величины даются, например, в работе [30]. Результатом в обоих случаях является нечетко-случайная величина. Ковариация двух нечетко-случайных величин — это действительное число; определение дается в работах [30, 52]. Для математического ожидания и дисперсии нечетко-случайной величины $\tilde{R}_p$ имеют место формулы

$$M^{\nu}(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i M^{\nu}(\tilde{R}_i),$$

$$D(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \mathrm{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j).$$

---

[2] Говоря нестрого, нечетко-случайная величина — это измеримая функция, значениями которой являются нечеткие числа. Первые определения нечетко-случайных величин даются в работах [49—51]. Подробнее см. в работах [30, 31, 52].

[3] Ожиданием нечетко-случайной величины является действительное число, нечетким ожиданием нечетко-случайной величины является нечеткое число.

Двухкритериальная задача для нахождения параметров портфеля ставится следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i M^{\nu}(\tilde{R}_i) \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \mathrm{Cov}(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_j) \to \min.$$

Значение ν, $0 \le \nu \le 1$, считается выбранным; $\nu = 0$ соответствует пессимистичному сценарию, $\nu = 1$ — оптимистичному.

В соответствии с определением 12 эффективного решения многокритериальной задачи портфель называется эффективным, если нельзя изменить параметры портфеля так, чтобы дисперсия доходности портфеля уменьшилась, а ожидание доходности портфеля не уменьшилось, и нельзя изменить параметры портфеля так, чтобы ожидание доходности портфеля увеличилось, а дисперсия доходности портфеля не увеличилась.

Задача портфельной теории в нечетко-случайной постановке рассматривается в ряде работ, причем не только в виде двухкритериальной задачи. Например, в работе [57] в качестве третьего критерия максимизируется ликвидность портфеля. В этой же работе приводится достаточно подробный список публикаций, в которых задача портфельной теории рассматривается в нечеткой постановке. В работе [58] изучается подход, близкий к максимизации ожидаемой полезности. Могут рассматриваться и задачи, где параметры портфеля являются нечеткими числами [59]. Составление портфелей с применением методов возможностного программирования изучается, например, в работах [60, 61].

Разумеется, методы нечетко-случайного математического программирования применяются не только в портфельной теории. Например, в работе [62] обсуждается использование нечетко-случайных величин при оболочечном анализе данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За неполные пятьдесят лет своего существования нечеткое математическое программирование превратилось в большое и разветвленное научное направление, стало одним из основных подходов к решению задач оптимизации. В настоящее время прикладные задачи из самых разных областей решаются с помощью методов нечеткого математического программирования.

В работе дана классификация задач нечеткого математического программирования. Оказывается, что число различных типов задач нечеткого математического программирования оценивается несколькими тысячами. Рассмотрены задачи с нечеткими параметрами, задачи возможностного программирования. Представлен симметричный подход, при котором критерии и ограничения выступают как равноправные. Затронуты задачи нечетко-случайного программирования.

Прямым обобщением нечетких множеств являются нечеткие множества типа 2. Окажутся ли нечеткие множества типа 2 настолько же востребованными в математическом программировании, насколько востребованными они оказались в теории систем? Ответ на этот вопрос принадлежит будущему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lai Y.J., Hwang C.L.* Fuzzy mathematical programming. — Berlin: Springer, 1992. — 306 p.
2. *Sakawa M.* Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization. — N.-Y.: Plenum Press, 1993. — 308 p.
3. *Carlsson C., Fuller R.* Fuzzy reasoning in decision making and optimization. — Heidelberg: Physica-Verlag, 2002. — 338 p.
4. *Лю Б.* Теория и практика неопределенного программирования. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 416 с.
5. *Bector C.R., Chandra S.* Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games. — Berlin: Springer, 2005. — 248 p.
6. *Luhandjula M.K.* Fuzzy optimization: an appraisal // Fuzzy Sets and Systems. — 1989. — Vol. 30. — P. 257—282.
7. *Rommelfanger H.* Fuzzy linear programming and applications // European J. of Operational Research. — 1996. — Vol. 92. — P. 512—527.
8. *Bayakasoğlu A., Göçken T.* A review and classification of fuzzy mathematical programs // Journal of Intelligent and Fuzzy Systems. — 2008. — Vol. 19. — P. 205—229.
9. *Verdegay J.L.* Progress on fuzzy mathematical programming: A personal perspective // Fuzzy Sets and Systems. — 2015. — Vol. 281. — P. 219—226.
10. *Luhandjula M.K.* Fuzzy optimization: Milestones and perspectives // Fuzzy Sets and Systems. — 2015. — Vol. 274. — P. 4—11.
11. *Schryen G., Hristova D.* Duality in fuzzy linear programming: a survey // OR Spectrum. — 2015. — Vol. 37. — P. 1—48.
12. *Atanassov K.T.* Intuitionistic fuzzy sets: Theory and applications. — Heidelberg: Physica-Verlag, 1999. — 324 p.
13. *Rani D., Gulati T.R., Garg H.* Multi-objective non-linear programming problem in intuitionistic fuzzy environment: Optimistic and pessimistic view point // Expert Systems with Applications. — 2016. — Vol. 64. — P. 228—238.
14. *Razmi J., Jafarian E., Amin S.H.* An intuitionistic fuzzy goal programming approach for finding Pareto-optimal solutions to multi-objective programming problems // Expert Systems with Applications. — 2016. — Vol. 65. — P. 181—193.
15. *Arbaiy N., Watada J.* Building fuzzy goal programming with fuzzy random linear programming for multi-level multi-objective problem // Int. J. on New Computer Architectures and Their Applications. — 2011. — Vol. 1. — P. 911—925.
16. *ElSayed A., Kongar E., Gupta S.M.* Fuzzy linear physical programming for multiple criteria decision-making under uncertainty // Int. J. of Computers Communications & Control. — 2016. — Vol. 11. — P. 26—38.
17. *Pishvaee M.S., Khalaf M.F.* Novel robust fuzzy mathematical programming methods // Applied Mathematical Modelling. — 2016. — Vol. 40. — P. 407—418.
18. *Liu Q.-M., Shi F.-G.* Stratified simplex method for solving fuzzy multi-objective linear programming problem // J. of Intelligent and Fuzzy Systems. — 2015. — Vol. 29. — P. 2357—2364.
19. *Ebrahimnejad A., Verdegay J.L.* A novel approach for sensitivity analysis in linear programs with trapezoidal fuzzy numbers // J. of Intelligent & Fuzzy Systems. — 2014. — Vol. 27. — P. 173—185.

20. *Nehi H.M., Daryab A.* Saddle point optimality conditions in fuzzy optimization problems // Int. J. of Fuzzy Systems. — 2012. — Vol. 14. — P. 11—21.
21. *Bilgen B.* Application of fuzzy mathematical programming approach to the production allocation and distribution supply chain network problem // Expert Systems with Applications. — 2010. — Vol. 37. — P. 4488—4495.
22. *Mula J., Peidro D., Poler R.* The effectiveness of a fuzzy mathematical programming approach for supply chain production planning with fuzzy demand // Int. J. Production Economics. — 2010. — Vol. 128. — P. 136—143.
23. *Mahapatra G.S., Mahapatra B.S., Roy P.K.* Fuzzy variable based fuzzy non-linear programming approach for optimization of complex system reliability // J. of Intelligent and Fuzzy Systems. — 2015. — Vol. 28. — P. 1899—1908.
24. *Zhong S., Chen Y., Zhou J.* Fuzzy random programming models for location-allocation problem with applications // Computers & Industrial Engineering. — 2015. — Vol. 89. — P. 194—202.
25. *Afzali A., Rafsanjani M.K., Saeid A.B.* A fuzzy multi-objective linear programming model based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets for supplier selection // Int. J. Fuzzy Syst. — 2016. — Vol. 18. — P. 864—874.
26. *Ebrahimnejad A.* Fuzzy linear programming approach for solving transportation problems with interval-valued trapezoidal fuzzy numbers // Sādhanā. — 2016. — Vol. 41. — P. 299—316.
27. *Lin C.-C., Liu Y.-T., Chen A.P.* Hedging an option portfolio with minimum transaction lots: A fuzzy goal programming problem // Applied Soft Computing. — 2016. — Vol. 47. — P. 295—303.
28. *Chen F., Huang G.H., Fan Y.R., Chen J.P.* A copula-based fuzzy chance-constrained programming model and its application to electric power generation systems planning // Applied Energy. — 2017. — Vol. 187. — P. 291—309.
29. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and Control. — 1965. — Vol. 8. — P. 338—353.
30. *Шведов А.С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикладная эконометрика. — 2016. — Т. 42. — С. 121—138.
31. *Шведов А.С.* Квантильная функция нечетко-случайной величины и выражения для ожиданий // Математические заметки. — 2016. — Т. 100. — С. 455—460.
32. *Bellman R., Zadeh L.A.* Decision making in a fuzzy environment // Management Science. — 1970. — Vol. 17. — P. 141—164.
33. *Tanaka H., Okuda T., Asai K.* On fuzzy mathematical programming // J. of Cybernetics. — 1974. — Vol. 3. — P. 37—46.
34. *Zimmermann H.J.* Fuzzy programming and linear programming with several objective functions // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — Vol. 1. — P. 45—55.
35. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 207 с.
36. *Lin C.-C.* A weighted max-min model for fuzzy goal programming // Fuzzy Sets and Systems. — 2004. — Vol. 142. — P. 407—420.
37. *Dubey D., Chandra S., Mehra A.* Fuzzy linear programming under interval uncertainty based on IFS representation // Fuzzy Sets and Systems. — 2012. — Vol. 188. — P. 68—87.
38. *Verdegay J.L.* A dual approach to solve the linear programming problem // Fuzzy Sets and Systems. — 1984. — Vol. 14. — P. 131—141.
39. *Cadenas J.M., Verdegay J.L.* Using ranking functions in multi-objective fuzzy linear programming // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — Vol. 111. — P. 47—53.
40. *Mahdavi-Amiri N., Nasseri S.H.* Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function // Applied Mathematics and Computation. — 2006. — Vol. 180. — P. 206—216.
41. *Maleki H.R., Tata M., Mashinchi M.* Linear programming with fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — Vol. 109. — P. 21—33.
42. *Haimes Y.Y., Lasdon L., Wismer D.* On a bicriteria formulation of the problems of integrated system identification and system optimization // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. — 1971. — Vol. 1. — P. 296—297.
43. *Haimes Y.Y., Hall W.A.* Multiobjectives in water resources systems analysis: the surrogate worth trade-off method // Water Resources Research. — 1974. — Vol. 10. — P. 614—624.
44. *Токарев В.В.* Методы оптимальных решений. Многокритериальность. Динамика. Неопределенность. — 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2011. — 420 с.
45. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. — М.: Радио и связь, 1990. — 288 с.
46. *Пытьев Ю.П.* Возможность. Элементы теории и применения. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 192 с.
47. *Язенин А.В.* Основные понятия теории возможностей. — М.: Физматлит, 2016. — 143 с.
48. *Yang L., Iwamura K.* Fuzzy chance-constrained programming with linear combination of possibility measure and necessity measure // Applied Mathematical Sciences. — 2008. — Vol. 2. — P. 2271—2288.
49. *Kwakernaak H.* Fuzzy random variables — I. Definitions and theorems // Information Sciences. — 1978. — Vol. 15. — P. 1—29.
50. *Kwakernaak H.* Fuzzy random variables — II. Algorithms and examples for the discrete case // Information Sciences. — 1979. — Vol. 17. — P. 153—178.
51. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Fuzzy random variables // J. of Mathematical Analysis and Applications. — 1986. — Vol. 114. — P. 409—422.
52. *К анализу* нечетко-случайных временных рядов. — Препринт WP2/2015/01. — М.: НИУ ВШЭ, 2015. — 28 с. — URL: http://www.hse.ru/data/2015/02/04/1105772662/WP2_2015_01_f.pdf (дата обращения 25.03.2017).
53. *Markowitz H.M.* Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — Vol. 7. — P. 77—91.
54. *Markowitz H.M.* Portfolio selection: Efficient diversification of investments. — N.-Y.: Wiley, 1959. — 344 p.
55. *Шведов А.С.* Теория эффективных портфелей ценных бумаг. — М.: Высшая школа экономики, 1999. — 144 с.
56. *Campos J.M., González A.* A subjective approach for ranking fuzzy numbers // Fuzzy Sets and Systems. — 1989. — Vol. 29. — P. 145—153.
57. *Li J., Xu J.P.* Multi-objective portfolio selection model with fuzzy random returns and a compromise approach-based genetic algorithm // Information Sciences. — 2013. — Vol. 220. — P. 507—521.
58. *Yoshida Y.* A risk-sensitive portfolio with mean and variance of fuzzy random variables // in: LNAI 5227. — Berlin: Springer, 2008. — P. 358—366.
59. *Ammar E.E.* On solutions of fuzzy random multiobjective quadratic programming with applications in portfolio problem // Information Sciences. — 2008. — Vol. 178. — P. 468—484.
60. *Inuiguchi M., Ramik J.* Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — Vol. 111. — P. 3—28.
61. *Mehlavat M.K., Gupta P.* Credibility-based fuzzy mathematical programming model for portfolio selection under uncertainty // Int. J. of Information Technology & Decision Making. — 2014. — Vol. 13. — P. 101—135.
62. *Шведов А.С.* Нечетко-случайные методы в оболочечном анализе данных. — Препринт WP2/2014/05. — М.: НИУ ВШЭ, 2014. — 28 с. — URL: http://www.hse.ru/data/2014/09/19/1315864820/WP2_2014_05.pdf (дата обращения 25.03.2017).

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Шведов Алексей Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ ashvedov@hse.ru.