УДК 51-77;316.62:324

АКСИОМАТИКИ ДЛЯ ИНДЕКСОВ ВЛИЯНИЯ В ЗАДАЧЕ ГОЛОСОВАНИЯ С КВОТОЙ

Д.А. Шварц

Отмечено, что большинство встречающихся в жизни схем голосования представляют собой или могут быть записаны как голосования с квотой. Однако аксиоматики для индексов влияния, определенных на простых играх, прямо не переносятся на голосования с квотой, поскольку использующиеся в них операции в этом случае определены некорректно. Показано, что большую часть аксиоматик можно адаптировать для голосований с квотой. Приведены конкретные примеры.

Ключевые слова: индекс, влияние, Банцаф, аксиоматика, голосование с квотой, предпочтение.

ВВЕДЕНИЕ

Проблеме аксиоматического задания индексов влияния посвящено множество работ. Среди них можно отметить [1] (первая аксиоматика для индекса Шепли — Шубика [2]), [3] (первая аксиоматика для индекса Банцафа [4]), [5—8] (аксиоматика для индексов влияния, зависящих от предпочтений участников, введенных в работе [9]).

С другой стороны, большинство существующих схем голосования представляют собой (или могут быть описаны как) голосования с квотой. Возникает вопрос — как аксиоматически задать индекс влияния на этом классе правил принятия решения.

Непосредственно перенести любую из отмеченных этих или других, известных автору, аксиоматик на случай голосований с квотой не удается, поскольку в отличие от простых игр, на которых исходно определяются индексы влияния, множество голосований с квотой не замкнуто относительно многих операций (объединение, пересечение, вычеркивание коалиции).

В работе [10] была построена аксиоматика для индекса влияния Банцафа, адаптированная для голосований с квотой. Введено несколько новых аксиом, формулировки которых с точки зрения автора настоящей статьи сложнее, чем в аксиоматиках для индекса Банцафа для простых игр.

Предложенная конструкция интересна сама по себе, но оказывается, что многие (а на самом деле большинство) аксиоматик можно адаптировать для голосований с квотой, просто дописав в нужных местах фразу «если результат операции тоже будет голосованием с квотой».

Столь же просто удается переформулировать для голосований с квотой и аксиоматики для введенных в статье [9] индексов влияния, зависящих от предпочтений участников.

В рамках статьи невозможно, да и не нужно приводить переформулировки и доказательства для всех возможных аксиоматик. Заинтересованный читатель сможет легко проделать это сам. В настоящей статье это выполнено для аксиоматики Дуби—Шепли [3] для индекса Банцафа [4] и одной из аксиматик для индексов влияния, зависящих от предпочтений участников [8, 9].

1. ПРОСТЫЕ ИГРЫ, ГОЛОСОВАНИЯ С КВОТОЙ И ИНДЕКСЫ ВЛИЯНИЯ

Определение 1. Будем называть простой игрой пару (N, v), где N — множество, а v: $2^N \to \{0, 1\}$ — функция, сопоставляющая каждому подмножеству N либо 0, либо 1, причем выполняется свойство монотонности: если S и T — подмножества N и $S \subseteq T$, то $v(S) \le v(T)$. ♦

Определение дано в соответствии с работой [11]. Более традиционное определение простой игры предполагает также, что $v(\varnothing) = 0$, $v(N) = 1$. Это условие исключает только две тривиальные игры, в которых функция $v(S)$ тождественно равна 0 или 1. Будем обозначать эти игры как **0** и **1** соответсвенно.

Далее предполагается, что N — конечное множество, элементы которого пронумерованы от 1 до n, т. е. $N = \{1, ..., n\}$. Элементы множества N называются игроками, подмножества N — коалициями. Если это не вызывает путаницы, простая игра

(N, v) обозначается просто v, а число игроков в коалиции S как s. Множество всех простых игр n игроков обозначается SG_n.

Коалиция S называется выигрывающей, если $v(S) = 1$, и проигрывающей, если $v(S) = 0$.

Игрок i называется ключевым в коалиции S, если S выигрывающая, а $S\backslash\{i\}$ — проигрывающая (для этого, очевидно, необходимо, чтобы $i \in S$). Игрок называется болваном, если он не ключевой ни в одной коалиции. Название дано в работе [2] по аналогии с бриджем: и там и здесь болван — игрок, не имеющий возможности влиять на события. Множество всех коалиций, в которых игрок i ключевой, обозначается через $W_i(v)$.

Выигрывающая коалиция называется минимальной, если все игроки в ней ключевые или, другими словами, она не содержит никакой другой выигрывающей коалиции. Множества выигрывающих и минимальных выигрывающих коалиций обозначаются, соответственно, $W(v)$ и $M(v)$. Простая игра часто задается перечислением всех (или только минимальных) выигрывающих коалиций. Это оправдано, поскольку $M(v)$ однозначно определяет $W(v)$, а $W(v)$ — функцию v.

Замечание 1. Отметим, что в простой игре, кроме $v = 0$, 1 всегда есть хотя бы одна выигрывающая коалиция (N), поэтому есть и минимальная выигрывающая коалиция, причем непустая, так как $\varnothing \notin W(v)$. Поскольку в минимальной выигрывающей коалиции все игроки ключевые, то в любой простой игре будет игрок, ключевой в одной из коалиций. ♦

Пусть S — произвольная коалиция. Назовем олигархической и обозначим через u^S игру, в которой S будет единственной минимальной выигрывающей коалицией. Если $i \notin S$, то i ключевой игрок во всех коалициях, содержащих S. Если $i \notin S$, то i — болван.

Пусть v — простая игра, не совпадающая с u^N, $S \notin M(v)$. Обозначим через v_{-S} игру, полученную из v переводом S из выигрывающих коалиций в проигрывающие. Формально $W(v_{-S}) = W(v)/\{S\}$. Будем называть переход от v к v_{-S} *вычеркиванием коалиции S*. Игра v_{-S} также будет простой (поскольку коалиция S минимальна, ее вычеркивание не нарушает монотонности). При вычеркивании коалиции S игроки, входившие в нее, теряют одну коалицию, в которой они ключевые, игроки, не входящие в S, наоборот, приобретают одну. Точнее, верна следующая лемма.

Лемма 1 [5]. *Пусть $S \notin M(v)$. Тогда*

$$Wi(v_{-S}) = \begin{cases} W_i(v)\backslash\{S\}, \text{если } i \in S; \\ W_i(v) \cup \{S \cup \{i\}\}, \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

Пример 1. Пусть $N = \{1, 2, 3, 4\}$, выигрывающие коалиции в игре v — все трех- и четырехэлементные подмножества, коалиции $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$, $S = \{1, 2\}$.

Выигрывающими в игре v_{-S} будут по коалиции $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$.

В табл. 1 знаком «+» отмечены коалиции, в которых соответствующий участник ключевой (слева от косой черты — для игры v, справа — для игры v_{-S}).

Игроки 1 и 2 при переходе к игре v_{-S} перестают быть ключевыми в коалиции {1, 2} (она стала проигрывающей), а игроки 3 и 4 становятся ключевыми в коалициях {1, 2, 3} и {1, 2, 4} соответственно. В остальных клетках таблицы ничего не меняется.

1.1. Голосования с квотой

Так называется важный частный случай простых игр, под который подпадают большинство реальных схем голосования.

Определение 2. Пусть $N = \{1, ..., n\}$ — множество игроков. Голосованием с квотой называется упорядоченный набор из $n + 1$ неотрицательного числа, первое из которых (q) называется квотой, а остальные ($w_1, ..., w_n$) — числом голосов или весом соответствующего игрока. Голосование с квотой кратко записывается, как $(q; w_1, ..., w_n)$.

Числом голосов (или весом) коалиции называется сумма голосов входящих в нее игроков: $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$. Коалиция выигрывающая, если сум-

Таблица 1

Вычеркивание коалиции

Игрок	Коалиции						
	{1, 2}	{3, 4}	{1, 2, 3}	{1, 2, 4}	{1, 3, 4}	{2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4}
1	+/–	–/–	+/+	+/+	–/–	–/–	–/–
2	+/–	–/–	+/+	+/+	–/–	–/–	–/–
3	–/–	+/+	–/+	–/–	+/+	+/+	–/–
4	–/–	+/+	–/–	–/+	+/+	+/+	–/–

марное число голосов ее игроков не меньше квоты и проигрывающая в противном случае. Таким образом, голосованию с квотой сопоставляется простая игра. ♦

Пример 2. В Государственной Думе РФ (во время написания текста, июнь 2011 г.) 450 депутатов, входящих в 4 фракции: «Единая Россия» (315 депутатов), КПРФ (57), ЛДПР (40) и «Справедливая Россия» (38). Для принятия решений требуется более половины всех голосов, т. е. не менее 226. Таким образом, правило принятия решения — голосование с квотой (226; 315, 57, 40, 38). Выигрывающими коалициями в данном случае будут все, содержащие первую фракцию. ♦

Соответствие между голосованиями с квотой и простыми играми неоднозначно. Например, голосования с квотой (51; 34, 33, 33) и квотой (51; 49, 49, 2) задают одну и ту же простую игру — выигрывающими коалициями будут двух- и трехэлементные множества и только они.

Определение 3. Говорят, что простую игру v можно записать как голосование с квотой, если существуют такие неотрицательные числа q, w_1, ..., w_n, что голосование с квотой (q; w_1, ..., w_n) задает игру v. ♦

В тех случаях, когда разница не важна, мы будем отождествлять голосование с квотой и соответсвующую ей простую игру.

Обозначим через WG_n множество всех простых игр, которые можно записать как голосование с квотой.

Пример 3 [12]. Совет Безопасности ООН состоит из 15-ти членов: пяти постоянных (Великобритания, Китай, Россия, США, Франция) и 10-ти переизбираемых ежегодно. Решение принимается большинством в девять голосов, причем пять из них должны принадлежать постоянным членам.

Это правило принятия решения записывается как голосование с квотой (39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), т. е. те же выигрывающие коалиции будут, если предоставить постоянным членам Совета Безопасности по 7 голосов, остальным по одному, а квота — 39 голосов. ♦

Не все простые игры можно записать как голосование с квотой. Приведем «минимальный» пример.

Пример 4. Пусть $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Зададим игру множеством минимальных выигрывающих коалиций: $M(v) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Докажем, что эта игра не записывается, как голосование с квотой.

Пусть это не так, т. е. существует набор (q; w_1, w_2, w_3, w_4), задающий игру v. Коалиции {1, 2} и {3, 4} выигрывающие, поэтому $w_1 + w_2 \geq q$, $w_3 + w_4 \geq q$ и, следовательно, $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 2q$. Коалиции {1, 3} и {2, 4} проигрывающие, поэтому $w_1 + w_3 < q$, $w_2 + w_4 < q$ и, следовательно, $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 < 2q$. Противоречие. ♦

Правила принятия решения, не записывающиеся как голосование с квотой, встречаются и в реальных выборных органах. Один из примеров (правда, довольно громоздкий) можно посмотреть в работе [11].

По-видимому, не существует простого способа определить, будет ли произвольная простая игра голосованием с квотой. Подробнее об этом также можно прочитать в работе [11].

Индекс влияния, Φ: $SG_n \to R^n$, сопоставляет каждой простой игре v вектор $\Phi(v)$, i-я компонента которого интерпретируется как влияние игрока i. Индексом влияния голосования с квотой называется индекс влияния соответствующей ей простой игры. Наиболее известны индексы влияния Банцафа и Шепли—Шубика. В настоящей статье преимущественно будет рассматриваться первый из них.

Индекс влияния Банцафа (BI) [4] вычисляется в предположении, что влияние игрока пропорционально числу коалиций, в которых он ключевой. Общий индекс Банцафа для игрока i $TBz_i = |W_i|$.

Индекс влияния Банцафа Bz_i получается из общего индекса нормированием:

$$Bz_i = |W_i| / \sum_{j=1}^{n} |W_j|.$$

Впервые подобный индекс влияния был введен Пенроузом [13], где число коалиций с ключевым игроком i делится на число всех коалиций, в которые входит игрок i:

$$P_i = \frac{1}{2^{n-1}} |W_i|.$$

Во многих работах, в частности, [15] под индексом Банцафа понимается именно индекс Пенроуза. Чтобы как-то совместить историческую справедливость и сложившуюся традицию, в данной статье результаты работ [3, 5] будут переформулированы для общего индекса Банцафа. Чтобы перейти к индексу Пенроуза, общий индекс Банцафа нужно просто поделить на 2^{n-1}.

Другая форма записи общего индекса Банцафа:

$$TBz_i = \sum_{S \subseteq N} (v(S) - v(S, \{i\})).$$

Здесь используется свойство ключевого игрока: $\Phi(v) + \Phi(w) = \Phi(v \vee w) - \Phi(v \wedge w)$, $v(S) - v(S \backslash \{i\})$ равно 1, если i — ключевой игрок в коалиции S, и 0 в противном случае.

Индекс Шепли—Шубика (SSI) [2] возник в теории игр как частный случай вектора Шепли. В нем число, которое коалиция добавляет к влиянию игрока, зависит от ее размера:

$$SS_i = \sum_{S \in W_i(v)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} ==$$

$$== \sum_{S \subseteq N} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}.$$

1.2. Аксиоматики для индексов Шепли—Шубика и Банцафа

Для этих, пожалуй, самых известных индексов влияния построено множество аксиоматик. Приведем две исторически первые из них.

Индекс Шепли—Шубика однозначно определяется следующими четырьмя аксиомами.

Аксиома болвана / Null Player (NP). Для любой простой игры v, если i — болван в игре v, то его влияние равно нулю.

Анонимность / Anonimity (An). Для любой игры $v \in SG_n$, любой перестановки π множества N и любого $i \in N$

$$\Phi_i(\pi v) = \Phi_{\pi(i)}(v),$$

где $(\pi v)(S) = v(\pi(S))$.

Трансфер / Transfer (T). Для любых игр $v, w \in SG_n$, таких что $v \vee w \in SG_n$,

$$\Phi(v) + \Phi(w) = \Phi(v \vee w) - \Phi(v \wedge v),$$

где $i \in N$ $(v \vee w)(S) = \max(v(S), w(S))$, а $(v \wedge w)(S) = \min(v(S), w(S))$. ♦

Эта аксиома, как показано в работе [5], имеет эквивалентную формулировку.

Трансфер* / Transfer* (T*). Для любых игр v, $w \in SG_n$, любой коалиции $S \in M(v) \cap M(w)$ и любого $i \in N$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_i(w) - \Phi_i(w_{-S}).$$

Эффективность / Efficiency axiom (E). Если $v \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v) = 1,$$

т. е. верна следующая теорема.

Теорема 1. [2] *Пусть* Φ: $SG_n \to R^n$. *Тогда* Φ *удовлетворяет аксиомам NP, An, T (T*) и E, если и только если* Φ *— индекс Шепли—Шубика.* ♦

Индекс Банцафа не удовлетворяет аксиоме эффективности, поэтому ее заменяет несколько более сложное условие.

Общая сумма Банцафа / Banzhaf Total Power (BzTP).

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subset N} (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

Остальные 3 аксиомы те же, что и для индекса Шепли—Шубика.

Теорема 2. [3, 5] *Пусть* Φ: $SG_n \to R^n$. *Тогда* Φ *удовлетворяет аксиомам* NP, An, T (T*) *и* BzTP, *если и только если* Φ *— индекс Банцафа.*

2. ИГРЫ И ИНДЕКСЫ ВЛИЯНИЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПРЕДПОЧТЕНИЙ УЧАСТНИКОВ

Приведенная далее конструкция обобщает определения [9] (см. пример 3). В определение простой игры добавляется дополнительная информация — каждому игроку i и коалиции S сопоставляется число $f(i, S)$, которое можно воспринимать как меру желания игрока i присоединиться к коалиции S.

Определение 4. Назовем простой игрой с предпочтениями тройку (N, v, f), где $N = \{1, ..., n\}$ — множество игроков, пара (N, v) образует простую игру, f — функция, сопоставляющее каждой коалиции S и игроку i положительное число $f(i, S)$. ♦

Простую игру можно воспринимать как простую игру с предпочтениями, в которой все коалиции одинаково предпочтительны: $(N, v) \equiv (N, v, 1)$. В случаях, когда это не вызывает путаницы, игра (N, v, f) обозначается просто v. Если две игры упоминаются в одном доказательстве, предполагается, что функция f у них одна и та же.

Понятия выигрывающей, проигрывающей и минимальной выигрывающей коалиций, ключевого игрока, вычеркивания коалиции и голосования с квотой дословно переносятся из простых игр. Наличие дополнительной функции f пока ни на что не влияет. При вычеркивании коалиции меняется только v, функция f остается прежней.

Пример 5 [9]. Предпочтения игроков задаются $n \times n$-матрицей P. Неформально говоря, ее элемент $p_{ij} \in [0, 1]$ определяет желание игрока i входить в коалицию с игроком j. Матрица P не обязательно симметрична, т. е. в общем случае $p_{ij} \neq p_{ji}$. Для вычислений удобно считать, что $p_{ii} = 0$.

В статье [9] приведены несколько способов определения матрицы предпочтений для реальных выборных органов и предложено более 10 версий индекса, основанных на матрице предпочтений. Приведем четыре из них. В обозначениях данной статьи

$$f^{+}(j, S, P) = \sum_{i \in S} \frac{p_{ji}}{s-1};$$

$$f^{-}(j, S, P) = \sum_{i \in S} \frac{p_{ij}}{s-1};$$

$$f(j, S, P) = [f^{+}(j, S, P) + f^{-}(j, S, P)]/2;$$

$$f(S, P) = \sum_{j \in S} \frac{f^{+}(j, S, P)}{s} = \sum_{j \in S} \frac{f^{-}(j, S, P)}{s} = \frac{1}{s(s-1)} \sum_{i, j \in S} p_{ij}.$$

Если коалиция S состоит из одного элемента, считаем все функции равными единице. Функцию $f^{+}(j, S, P)$ можно интерпретировать как среднее желание игрока j входить в коалицию с остальными игроками S, функцию $f^{-}(j, S, P)$ — как среднее желание остальных игроков коалиции S входить в коалицию с игроком j, $f(S, P)$ — как среднее желание всех игроков входить в коалицию со своими коллегами из коалиции S.

Если отношения между всеми игроками коалиции S хорошие, т. е. $p_{ij} = 1$ для всех $i, j \in S$, то $f^{+}(j, S, P) = f^{-}(j, S, P) = f(S, P) = 1$, если же отношения между всеми игроками коалиции S плохие, т. е. $p_{ij} = 0$ для всех $i, j \in S$, то $f^{+}(j, S, P) = f^{-}(j, S, P) = f(S, P) = 0$.

Индекс влияния, Φ: $SGP_n \to R^n$, как и в случае простых игр, сопоставляет каждой игре v с симметричными или несимметричными предпочтениями вектор $\Phi(v)$, i-я компонента которого интерпретируется как влияние игрока i. ♦

Определение 5. α-индекс влияния определяется по формуле

$$\alpha_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} f(i, S).$$

Пусть $f(i, S) > 0$ для всех игроков и коалиций, а v не равно тождественно ни 0, ни 1. Определим нормированный α-индекс влияния [9] как

$$N\alpha_i(v) = \frac{\alpha_i(v)}{\sum_{j \in N} \alpha_j(v)}. \ ♦$$

Условия определения 5 нужны для того, чтобы знаменатель не был равен нулю.

Доказательство следующего утверждения (правда, в несколько измененной формулировке) можно найти в статье [8].

Лемма 2. Пусть $S \in M(v)$. Тогда

$$\alpha_i(v) - \alpha_i(v_{-S}) = \begin{cases} f(i, S), \text{ если } i \in S, \\ -f(i, S \cup \{i\}), \text{ если } i \notin S. \end{cases}$$

Пример 6. Пусть функция $f(S)$ зависит только от числа игроков в коалиции S. Если $f(S) = 1$, то α-индекс совпадает с общим индексом Банцафа, а нормированный α-индекс — с индексом Банцафа:

$$St_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} 1 = |W_i(v)| = Bz_i(v).$$

Если же $f(S) = 1/2^{n-1}$, α-индекс совпадает с индексом Пенроуза.

Если, наконец, $f(S) = \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$, $\alpha(v)$ совпадает с индексом Шепли—Шубика:

$$\alpha(v) = \sum_{S \in W_i(v)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} = SS_i(v). \ ♦$$

Многие другие индексы влияния (например, Джонстона [14], Дигена—Пакела [16], Холера—Пакела [17]) также записываются через α-индекс [15]. Поэтому α-индекс можно рассматривать как обобщение этих индексов.

3. АКСИОМАТИКА ДЛЯ α-ИНДЕКСА

Для α-индекса возможна аксиоматика в стиле приведенных выше [8]. Но для разнообразия приведем здесь другую аксиоматику из той же работы [8]. Оказывается, что достаточно двух аксиом.

Аксиома болвана / Null Player (NP). Выигрыш болвана не зависит от интенсивностей предпочтений и всегда равен нулю.

Усиленная аксиома трансфера / Strong Transfer (ST). Для любой игры $v \in SGP_n$, любой коалиции $S \in M(v)$и любого $i \in S$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = f(i, S).$$

Если $i \in S$, то ST — усиление аксиомы T*, в которой указывается, что разность $\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S})$ постоянна по v, а ST дополнительно говорит, чему эта разность равна.

Но если $i \notin S$, аксиома ST, в отличие от аксиомы T*, ничего не утверждает.

Теорема 3. *Индекс влияния $\Phi(v)$ удовлетворяет аксиомам NP и ST тогда и только тогда, когда $\Phi(v) = \alpha(v)$.* ♦

Аналог этой аксиоматики — утверждение о том, что линейная функция определяется двумя свойствами: в нуле она равна нулю, а производная в любой точке постоянна.

4. АКСИОМАТИКИ ДЛЯ ИНДЕКСОВ ВЛИЯНИЯ В СЛУЧАЕ ГОЛОСОВАНИЙ С КВОТОЙ

Перенести непосредственно любую из рассмотренных аксиоматик на случай голосований с квотой не удается, поскольку результат многих операций над голосованиями с квотой (объединение, пересечение, вычеркивание коалиции) уже не будет записываться как голосование с квотой.

Пример 7. Пусть $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Обозначим v простую игру с двумя минимальными выигрывающими коалициями — $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$. В примере 2 было доказано, что v нельзя записать в виде голосования с квотой. Но

- $v = u^{\{1, 2\}} \cup u^{\{3, 4\}}$, т. е. объединение двух голосований с квотой;
- рассмотрим четыре голосования с квотой:

$$w_1 = (3; 2, 1, 2, 1), \quad w_2 = (3; 1, 2, 2, 1),$$
$$w_3 = (3; 2, 1, 1, 2), \quad w_4 = (3; 1, 2, 1, 2);$$

выигрывающими коалициями в них будут все трех- и четырехэлементные множества игроков и все двухэлементные, кроме коалиции $\{2, 4\}$ для голосования w_1, кроме $\{1, 4\}$ для w_2, кроме $\{2, 3\}$ для w_3 и кроме $\{1, 3\}$ для w_4; поэтому при пересечении этих голосований с квотой получается игра v;
- в голосовании w_1 пять минимальных выигрывающих коалиций — все двухэлементные, кроме коалиции $\{2, 4\}$. Вычеркнем коалицию $\{1, 3\}$. Полученная простая игра не может быть записана, как голосование с квотой. Иначе, поскольку коалиции $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$ выигрывающие, сумма их голосов не меньше двух квот, коалиции $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$ — проигрывающие, поэтому сумма их голосов меньше двух квот. Но в обоих случаях речь идет о сумме голосов всех игроков. Противоречие. ♦

С другой стороны, некоторые «базовые» игры записываются как голосования с квотой и, хотя из игры $v \in WG_n$ нельзя вычеркнуть произвольную минимальную выигрывающую коалицию, оставшись в множестве WG_n, но какую-нибудь можно. Поэтому некоторые доказательства проходят, если во все аксиомы добавить фразу «в том случае, если результат операции будет голосованием с квотой». Формализацию сказанного начнем со следующей леммы.

Лемма 3. (*а*) *Простые игры* $\mathbf{0}$, $\mathbf{1} \in WG_n$; (*б*) *для любого* S $u^S \in WG_n$; (*в*) *для любого* $S \neq N$ $u^S_{-S} \in WG_n$; (*г*) *пусть* $v \in WG_n$, *а игрок* i *не болван в игре* v. *Тогда существует такая минимальная выигрывающая коалиция* $S \ni i$, *что* $v_{-S} \in WG_n$.

Доказательство. (а) Пусть для всех $i \in N$ $w_i = 1$. Тогда если $q = 0$, выигрывающими будут все коалиции, а если $q = n + 1$, выигрывающих коалиций не будет.

(б) Пусть $w_i = n + 1$, если $i \in S$, $v_i = 1$, если $i \notin S$, $q = |S|\,(n + 1)$. В этом случае коалиция будет выигрывающей, если и только если она содержит S. Что и требовалось доказать.

(в) Определим веса игроков так же, как и в предыдущем пункте, а квоту сделаем на единицу меньше: $q = |S|(n + 1) - 1$. Коалиция будет выигрывающей, если и только если она содержит S за одним исключением: S — проигрывающая. Конструкция некорректна, если $|S| = 0$. Но тогда $S = \varnothing$ и $v = 1$, а этот случай уже рассмотрен в п. (а).

(г) Разобьем это утверждение на два.

(г1) Если игру можно записать как голосование с квотой, то ее можно записать как голосование с квотой так, чтобы выигрыши всех коалиций были попарно различны.

(г2) Если выигрыши всех коалиций попарно различны, то уменьшив вес игрока i, можно добиться того, чтобы выигрывающими остались все те же коалиции, кроме одной, содержащей i.

Докажем сначала (г1). Пусть ε — разница между квотой и весом самой сильной из проигрывающих коалиций. Выберем положительные числа ε_1, ..., ε_n, каждое из которых меньше ε/n и рассмотрим теперь голосование с квотой $(q;\ v_1 + \varepsilon_1, ..., v_n + \varepsilon_n)$.

Покажем, что новое голосование с квотой задает ту же простую игру, что и старое. Квота не изменилась, а вес каждого из игроков увеличился, поэтому выигрывающие коалиции остались выигрывающими. Но вес каждой коалиции увеличился не более, чем на сумму всех ε_i, каждое из которых меньше, чем ε/n, т. е. вся сумма увеличилась менее, чем на ε. Поэтому все проигрывающие коалиции остались проигрывающими. Что и требовалось доказать.

Осталось доказать, что можно выбрать ε_i так, что веса всех коалиций различны.

Множество всех допустимых ε_i образует открытый гиперкуб в R^n, заданный неравенствами $0 < \varepsilon_{\mathrm{i}} < \varepsilon_{\mathrm{i}}/n$, мера которого равна $(\varepsilon/n)^n > 0$. Каждое условие равенства весов двух коалиций задает линейное уравнение на ε_i, т. е. не подходящие нам наборы $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ лежат на конечном множестве гиперплоскостей в R^n, т. е. имеют меру 0 в R^n. Поэтому множество подходящих наборов имеет ту же (положительную) меру, что и множество всех допустимых наборов ε_i, поэтому множество всех подходящих наборов непусто.

(г2) Будем непрерывно уменьшать вес i-го игрока, не меняя квоту и веса остальных игроков. Когда вес игрока i станет равен 0, проигрывающими станут все коалиции, в которых i — ключевой. Поскольку i не болван, такие коалиции есть.

Поэтому при непрерывном уменьшении веса игрока i был момент, когда проигрывающей стала первая из этих коалиций, а поскольку веса всех коалиций различны, можно выбрать момент, когда проигрывающей будет только одна из них. ♦

Отметим, что если, как это обычно и бывает на практике, веса игроков целые, то можно сделать так, что и измененные веса игроков останутся целыми. Ничто не мешает выбрать ε_i рациональными, тогда рациональными будут и измененные веса игроков. (Дело в том, что множество подходящих наборов $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ будет не только непусто, но также и открыто (как разность открытого множества и конечного числа замкнутых). А любое непус-

Таблица 2

Иллюстрация к лемме 3

X	$\varnothing$	$\{C\}$	$\{B\}$	$\{A\}$	q	$\{B, C\}$	$\{A, C\}$	$\{A, B\}$	$\{A, B, C\}$
$w(X)$	0	7	8	9	12	15	16	17	24

тое открытое подмножество в R^n содержит точку с рациональными координатами.)

Отметим, что для любого положительного a голосования с квотой (q; w_1, ..., w_n) и (aq; aw_1, ..., aw_n) задают одну и ту же простую игру. Поэтому, умножив квоту и веса всех игроков на общий знаменатель ε_i, получим голосование с квотой с целыми коэффициентами.

Вообще, рассуждая аналогично, несложно доказать, что любую игру, записывающуюся как голосование с квотой, можно записать как голосование с квотой с целыми квотой и весами игроков. Было бы очень интересно получить тот же результат, не используя «промежуточное» голосование с квотой.

Пример 8. Рассмотрим голосование с квотой (2; 1, 1, 1). Пусть $\varepsilon_1 = 1/2$, $\varepsilon_2 = 1/3$, $\varepsilon_3 = 1/6$. Добавив их к весам игроков, получим голосование с квотой (2, 3/2, 4/3, 7/6) или (12; 9, 8, 7).

Как видно из табл. 2, веса всех коалиций различны, а выигрывающими, как и раньше, будут только коалиции из двух и трех игроков.

Замечание 2. Пункты (а), (б) и (в) леммы очевидны и добавлены для полноты формулировки. Аналогичный пункту (2) результат: если игра v записывется как голосование с квотой, то существует минимальная выигрывающая коалиция S такая, что игра v_{-S} тоже записывется как голосование с квотой, был доказан в работе [10], но утверждение леммы более точно, а приведенное здесь доказательство по мнению автора проще и лучше описывает суть проблемы.

4.1. Адаптированные аксиомы и характеризация

Аксиомы NP, An, E и BzTP никак не изменяются. Только область определения индекса сужается со всех простых игр на голосования с квотой.

Аксиомы T и T*, кроме того, несколько ослабляются:

Трансфер / Transfer (T). Для любых v, $w \in WG_n$, таких что $v \vee w \in WG_n$ и $v \wedge w \in WG_n$

$$\Phi(v) + \Phi(w) = \Phi(v \vee w) - \Phi(v \wedge v),$$

где $i \in N(v \vee w)(S) = \max(v(S), w(S))$, а $(v \wedge w)(S) = \min(v(S), w(S))$.

Трансфер* / Transfer* (T*). Для любых игр v, $w \in WG_n$, для любой коалиции $S \in M(v) \cap M(w)$ такой, что v_{-S}, $w_{-S} \in WG_n$, и любого игрока i

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_i(w) - \Phi_i(w_{-S}).$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть индекс влияния* Φ *удовлетворяет аксиоме* T. *Тогда он удовлетворяет и аксиоме* T*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть v и w записываются как голосования с квотой, $S \in M(v) \cap M(w)$, v_{-S} и w_{-S} также записываются как голосования с квотой. Если $S = N$, то $v = w = u^N$ и утверждение леммы тривиально. Далее будем считать, что $S \neq N$.

По лемме 5 игры u^S и u^S_{-S} записываются как голосования с квотой, причем $v_{-S} \cup u^S = v$, $v_{-S} \cap u^S = u^S_{-S}$, $w_{-S} \cup u^S = w$, $w_{-S} \cap u^S = u^S_{-S}$. Значит, по аксиоме T

$$\Phi(v) = \Phi(v_{-S} \cup u^S) = \Phi(v_{-S}) + \Phi(u^S) - \Phi_i(u^S_{-S}),$$

$$\Phi(w) = \Phi(w_{-S} \cup u^S) = \Phi(w_{-S}) + \Phi(u^S) - \Phi_i(u^S_{-S}),$$

т. е.

$$\Phi(v) - \Phi(v_{-S}) = \Phi(w) - \Phi(w_{-S}) = \Phi(u^S) - \Phi_i(u^S_{-S}).$$

Лемма 4 доказана. ♦

Доказательство корректности приведенной аксиоматики для индекса Банцафа близко к доказательствам похожих утверждений в работах [5, 8]. Сделанные поправки позволяют обойти особенности голосований с квотой.

Теорема 4. *Пусть* Φ: $WG_n \to R^n$. *Тогда* Φ *удовлетворяет аксиомам NP, An, T и BzTP, если и только если* Φ *— индекс Банцафа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что переформулированные аксиомы слабее их аналогов — они утверждают то же самое, но при существенных ограничениях. По теореме 2 индекс Банцафа, определенный на SG_n, удовлетворяет аксиомам NP, An, T и BzTP, следовательно, тот же индекс, но определенный на WG_n, должен удовлетворять тем же аксиомам.

Обратное утверждение будем доказывать по индукции по числу выигрывающих коалиций, используя при этом первую часть доказательства.

Основание индукции. Пусть $|W(v)| = 0$, т. е. $v = \mathbf{0}$. По лемме 5 $v \in WG_n$. Ни один игрок не будет ключевым ни в одной коалиции. Следовательно, по аксиоме NP $\Phi_i(v) = 0$ для всех i. Поскольку $Bz(v)$ тоже удовлетворяет оксиоме NP, $Bz_i(v) = 0$. Значит, $\Phi_i(v) = Bz_i(v)$.

Шаг индукции. Возможны два случая.

1. Пусть в игре v одна минимальная выигрывающая коалиция S, т. е. $v = u^S$. По лемме 5 u^S $w \in WG_n$. В этом случае коалиция T будет выигрывающей тогда и только тогда, когда она содержит S, т. е. содержит в себе всех

игроков из S. Поэтому, если игрок $j \notin S$, от его вхождения или не вхождения в коалицию T ничего не изменится — T и $T\backslash\{j\}$ будут выигрывающими или проигрывающими одновременно. Поэтому все игроки, не входящие в S, будут болванами в игре v. Поэтому, если $i \notin S$, $\Phi_i(v) = Bz_i(v) = 0$.

Рассмотрим теперь игроков, входящих в S. По аксиоме анонимности влияния этих игроков равны, т. е. для любых $i, j \in S$ $\Phi_i(v) = \Phi_j(v)$ и $Bz_i(v) = Bz_j(v)$. По аксиоме BzTP суммы влияний игроков, вычисленные с помощью индексов Bz и Φ, равны, т. е.

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = \sum_{i \in N} Bz_i(v),$$

$$\sum_{i \in S} \Phi_i(v) = \sum_{i \in S} Bz_i(v),$$

$$|S|\Phi_j(v) = |S|Bz_j(v),\ \forall\ j \in S,$$

$$\Phi_j(v) = Bz_j(v),\ \forall\ j \in S,$$

что и требовалось.

2. Пусть теперь $M(v) > 1$, т. е. в игре v есть две минимальные выигрывающие коалиции (S и S'), причем можно считать, что $v_{-S} \in WG_n$. Также выигрывающими будут все коалиции, содержащие S, поэтому в v не меньше выигрывающих коалиций, чем в u^S. Но $S \not\subset S'$ (иначе коалиция S' не была бы минимальной выигрывающей). Значит, в v больше выигрывающих коалиций, чем в u^S. Поэтому к u^S применимо предположение индукции. Вычеркнем S из v и u^S; $v_{-S} \in WG_n$ по предположению, $u_{-S} \in WG_n$ по лемме 5. По аксиоме T* для индекса Φ, предположению индукции для u^S и u^S_{-S} и аксиоме T* для индекса Bz

$$\Phi(v) - \Phi(v_{-S}) = \Phi(u^S) - \Phi(u^S_{-S}) = Bz(u^S) - Bz(u^S_{-S}) = \\ = Bz(v) - Bz(v_{-S}).$$

Но по предположению индукции для v_{-S} $\Phi(v_{-S}) = Bz(v_{-S})$. Значит, и $\Phi(v) = Bz(v)$. ♦

Аналогично можно сформулировать и доказать аналогичную теорему и для индекса Шепли—Шубика.

Теорема 5. *Пусть* $\Phi: WG_n \to R^n$. *Тогда* Φ *удовлетворяет аксиомам NP, An, T и E, если и только если* Φ *— индекс Шепли—Шубика.* ♦

Доказательство дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы с заменой аксиомы BzTP на аксиому эффективности. Формально говоря, аксиома E ничего не утверждает, если $v = \mathbf{0}, \mathbf{1}$, но это следует из аксиомы NP.

Если $v = \mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$, в игре v не будет игроков, ключевых хоть в какой-нибудь коалиции, так как в первом случае не будет выигрывающих коалиций, а во втором — проигрывающих. Поэтому все игроки будут болванами и, если индекс влияния Φ удовлетворяет аксиоме NP, то, как и в доказательстве теоремы 4, $\Phi_i(v) = 0$ для всех игроков i.

5. АКСИОМАТИКА ДЛЯ α-ИНДЕКСА В СЛУЧАЕ ГОЛОСОВАНИЙ С КВОТОЙ

Благодаря лемме 5 можно переформулировать для голосований с квотой и аксиоматику для α-индекса. Перепишем аксиомы.

Аксиома болвана / Null Player (NP). Выигрыш болвана не зависит от интенсивностей предпочтений и всегда равен нулю.

Усиленная аксиома трансфера / Strong Transfer (ST). Для любого голосования с квотой v и для любой коалиции $S \in M(v)$ таких, что v_{-S} — тоже голосование с квотой и любого $i \in S$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = f(i, S).$$

Теорема 6. *α-индекс влияния для голосований с квотой однозначно задается аксиомами NP и ST, переформулированными для голосований с квотой.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 4, отметим, что переформулированные аксиомы слабее их аналогов. Поэтому раз α-индекс удовлетворяет не переформулированным для голосований с квотой аксиомам NP и ST, то он удовлетворяет и переформулированным аксиомам.

Обратное утверждение будем доказывать по индукции по числу выигрывающих коалиций, используя при этом первую часть доказательства.

Основание индукции. Пусть выигрывающих коалиций нет. Эта игра записывается, как голосование с квотой ($n + 1$; 1, ..., 1). Ни один игрок не будет ключевым ни в одной коалиции. Следовательно, по аксиоме NP $\Phi_i(v) = 0$ для всех i. Поскольку $\alpha(v)$ тоже удовлетворяет аксиоме NP, $\alpha_i(v) = 0$. Значит $\Phi_i(v) = \alpha_i(v)$.

Шаг индукции. Пусть $v \in WGP_n$. Если i — болван в игре v, то $\Phi_i(v) = \alpha_i(v) = 0$. Если это не так, то по лемме 5 существует $S \in M(v)$ такая, что $v_{-S} \in WG_n$. К игре v_{-S} применимо предположение индукции, поэтому

$$\Phi_i(v_{-S}) = \alpha(v_{-S}) = \sum_{T \in W_i(v_{-S})} f(i, S).$$

По аксиоме ST для $\Phi(v)$, предположению индукции и аксиоме ST для $\alpha(v)$

$$\Phi_i(v) = \Phi_i(v_{-S}) + f(i, S) = \alpha_i(v_{-S}) + f(i, S),$$

$$\alpha_i(v) = \alpha_i(v_{-S}) + f(i, S).$$

Поэтому $\Phi_i(v) = \alpha_i(v)$. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача построения аксиоматик для индексов влияния, ограниченных на голосования с квотой, не кажется автору интересной. Дело в том, что все известные индексы влияния однозначно задаются, например, множеством выигрывающих коалиций и никакой специфики голосований с квотой не используют.

С другой стороны, эта статья показывает, что аксиоматики для индексов влияния в случае голосований с квотой можно получать простой переформулировкой аксиом.

Но основное (с математической точки зрения) утверждение статьи, состоит в том, что хотя простые игры, соответствующие голосованиям с квотой не образуют решетку, но по этой «не решетке» можно пройти от максимального элемента к минимальному, посетив любую наперед заданную вершину. Возможно, что это соображение поможет точнее описать множество игр, записывающихся как голосования с квотой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dubey P.* On the Uniqueness of the Shapley Value // Int. J. of Game Theory. — 1975. — Vol. 4. — P. 131—139.
2. *Shapley L.S.*, *Shubik M.* A method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System // Amer. Polit. Sci. Rev., 1954. — Vol. 48 (3). — P. 787—792.
3. *Dubey P.*, *Shapley L.S.* Mathemaical Properties of the Banzhaf Power Index // Math. of Oper. Res. — 1979. — Vol. 4. — P. 99—131.
4. *Banzhaf J.F.* Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis // Rutgers Law Review. — 1965. — Vol. 19. — P. 317—343.
5. *Laruelle A.*, *Valenciano F.* Shapley—Shubik and Banzhat Indices Revisited // Math. of Oper. Res. — 2000. — Vol. 26, N 1. — P. 89—104.
6. *Lehrer E.* An Axiomatizaton of the Banzhaf Value // Int. J. of Game Theory. — 1988. — Vol. 17. — P. 88—99.
7. *Nowak A.S.* An Axiomatizaton of the Banzhaf Value without the Additivity axiom // Int. J. of Game Theory. — 1997. — Vol. 26. — P. 137—141.
8. *Шварц Д.А.* Аксиоматика для индексов влияния, учитывающих предпочтения участников // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 1. — С. 144—158.
9. *Алескеров Ф.Т.* Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 414. — № 5. — С. 594—597.
10. *Бацын М.В.*, *Калягин В.А.* Об аксиоматическом определении общих индексов влияния в задаче голосования с квотой. — М.: Изд. дом ГУ — ВШЭ. — 2009.
11. *Taylor A.D.*, *Zwicker W.S.* Simple Games. — Princeton: Princeton University Press, 1999.
12. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. — М.: Наука, 1986.
13. *Penrose L.S.* Elementary statistics of majority voting // Journal of the Royal Statictics Society. — 1946. — Vol. 109. — P. 53—57.
14. *Johnston R.J.* On the Measurement of Power: Some Reactions to Laver // Environment and Planning. — 1978. — Vol. 10. — P. 907—914.
15. *Шварц Д.А.* О вычислении индексов влияния, учитывающих предпочтения участников // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 3. — С. 152—159.
16. *Deegan J.*, *Packel E.W.* A New Index of Power for Simple *n*-Person Games // Int. J. Game Theory. — 1978. — Vol. 7 (2). — P. 113—123.
17. *Holler M.J.*, *Packel E.W.* Power, Luck and the Right Index // J. Econom. — 1983. — Vol. 43. — P. 21—29.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Шварц Дмитрий Александрович — преподаватель,
Национальный исследовательский университет —
Высшая школа экономики, г. Москва,
☎ (495) 621-13-42, ✉ dshvarts@mail.ru.

Поздравляем

авторов нашего журнала
доктора технических наук, профессора
Владислава Юльевича РУТКОВСКОГО,
доктора технических наук
Виктора Миньоновича СУХАНОВА,
доктора технических наук
Виктора Михайловича ГЛУМОВА
с присуждением Президиумом Российской академии наук премии им. К.Э. Циолковского
за серию работ «Теория управления сборкой больших космических конструкций
на орбите с помощью свободно летающих роботов»

Желаем дальнейших творческих успехов!

*Редколлегия и редакция журнала
«Проблемы управления»*