УДК 681.51

МЕТОД ОТКАЗОУСТОЙЧИВОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ: ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД[1]

А.Е. Шумский, А.Н. Жирабок, Е.Ю. Бобко

На основе логико-динамического подхода предложен метод решения задачи управления нелинейными динамическими системами с дефектами.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, дефект, отказоустойчивое управление, логико-динамический подход.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

К надежности и безопасности технических систем ответственного назначения предъявляются жесткие требования, что приводит к необходимости разработки комплекса мер по обеспечению их отказоустойчивости. Существующие подходы к обеспечению отказоустойчивости предполагают резервирование либо формирование специального управления, которое позволяет сохранять важнейшие характеристики системы при наличии в ней дефектов (возможно, при ухудшении второстепенных характеристик). Последний подход принято называть аккомодацией к дефектам [1].

Различают пассивный и активный подходы к решению задачи аккомодации [1]. Пассивный подход предполагает, что закон управления изначально разработан так, что обеспечивает адаптацию к параметрическим возмущениям, вызываемым дефектами. Возможности пассивного подхода ограничиваются так называемыми «малыми» дефектами. В основе активного подхода лежит формирование нового управления, позволяющего в той или иной степени устранить влияние дефектов на систему. Активный подход предоставляет больше возможностей, однако его реализация требует, как минимум, предварительного обнаружения дефектов. Более того, многие существующие методы, разработанные в рамках активного подхода, предполагают предварительное оценивание размера дефекта (что требует дополнительных временных и вычислительных затрат), после чего задача аккомодации может быть решена на основе методов оптимального управления [2], H_∞-оптимизации [3], слежения за эталонной моделью [4] и адаптивного управления [5].

Далее решение задачи аккомодации связывается с формированием управления, при котором обеспечивается полная развязка от воздействий, вызываемых дефектами. Такой метод предпочтителен в тех случаях, когда оценивание размера дефектов по тем или иным причинам не представляется возможным или нецелесообразно; его применение позволяет сократить временные затраты на формирование нового управления и, как следствие, повысить эффективность аккомодации.

Подобный метод был также рассмотрен в работе [6], где решение проблемы аккомодации для нелинейных систем с гладкими функциями было получено на основе алгебры функций и дифференциальной геометрии. В настоящей работе для решения этой проблемы применен логико-динамический подход [7—9]. Его особенность состоит в том, что он позволяет работать с недифференцируемыми нелинейностями. Подход не гарантирует получения оптимального решения задачи в смысле размерности получаемых систем, но он оперирует методами линейной алгебры, что существенно упрощает решение задачи. Кроме того, подход применим к системам с линейной функцией выхода и динамикой, приводимой к виду, описываемому следующими уравнениями:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) + C\varphi(Ax(t), u(t)) + L\vartheta(t),$$
$$y(t) = Hx(t). \quad (1)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^l$ — векторы состояния, управления и выхода; F, G, H и L — известные матрицы соответствующих размеров; $\varphi(Ax(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1x(t), u(t)) \\ \dots \\ \varphi_r(A_rx(t), u(t)) \end{pmatrix}$ — векторная функция, φ_i — нелинейная (возможно, недифференцируемая) функция; A_i — матрица-строка, $1 \leqslant i \leqslant r$; C — матрица размера $n \times r$: если в правую часть уравнения для i-й компоненты вектора состояния исходной системы входит нелинейность $\varphi_j(A_jx(t), u(t))$, то $C(i, j) \neq 0$, в противном случае $C(i, j) = 0$; $\vartheta(t) \in R^v$ — вектор, описывающий дефекты: при отсутствии дефектов $\vartheta(t) = 0$, при их возникновении $\vartheta(t)$ становится неизвестной функцией времени. Будем также обозначать систему (1) без нелинейности $\varphi(Ax(t), u(t))$ тройкой $\Sigma = (F, G, H)$.

Предполагается, что задача обнаружения дефектов решается известными методами, например, описанными в работах [1, 8, 9]. Поскольку функция времени $\vartheta(t)$ неизвестна, решение задачи управления на основе модели (1) при наличии в системе дефектов невозможно. Для преодоления этой трудности предлагается формировать вектор управления $u(t)$ в виде

$$u(t) = g(y(t), x_0(t), u_*(t)) \qquad (2)$$

для некоторой функции g, где $u_*(t) \in R^m$ — новый вектор управления, $x_0(t) \in R^s$, $s \leqslant n$, — вектор состояния вспомогательной системы Σ_0, подлежащей определению и описываемой уравнением

$$\dot{x}_0(t) = F_0x_0(t) + G_0u(t) + J_0y(t) + C_0\varphi(A_0x_0(t), y(t), u(t)). \qquad (3)$$

Модель (3) не зависит от неизвестного вектора $\vartheta(t)$ и может быть использована для построения наблюдателя, оценивающего некоторую линейную функцию от вектора состояния исходной системы при наличии в ней дефектов; эта функция определяется далее.

По аналогии с работой [6] предполагается, что модель, полученная подстановкой уравнения (2) в первое из уравнений (1), может быть преобразована к системе Σ_*, описываемой в общем случае уравнением

$$\dot{x}_*(t) = F_*x_*(t) + G_*u_*(t) + C_*\varphi(A_*x_*(t), u(t)) \qquad (4)$$

с вектором состояния $x_*(t) \in R^p$, $p \leqslant s$. Если дефект возник и обнаружен, а управление (2) существует,

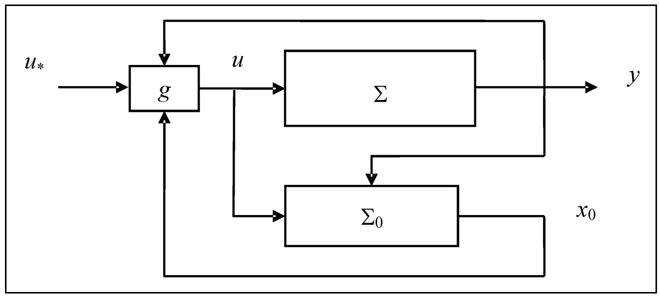

Рис. 1. Схема управления системой

то проблема управления исходной системой решается на основе модели (4), которая не содержит неизвестный вектор $\vartheta(t)$, для чего находится требуемое управление $u_*(t)$ и затем по формуле (2) определяется управление $u(t)$, подаваемое на систему с дефектом. В результате описанных действий возникает эффект аккомодации к дефектам. Описанная схема управления представлена на рис. 1.

Отметим, что использование управления (2) предполагает движение системы (1) только в некотором подпространстве ее пространства состояний, которое соответствует пространству состояний системы (4). Отсюда следует, что цель управления достигается соответствующим выбором траектории в этом подпространстве. Необходимость существования соответствующей траектории (или необходимость корректировки цели управления для нахождения такой траектории) ограничивает область приложения рассматриваемого подхода.

Задача, решаемая в настоящей работе, состоит в определении условий существования закона управления (2) и всех матриц, описывающих системы (3) и (4), на основе логико-динамического подхода, описанного в работах [7—9]. Для удобства дальнейшего изложения приведем его краткое описание.

1. ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Логико-динамический подход предполагает выполнение следующих трех шагов [7—9].

1. Замена нелинейной системы (1) так называемой логико-динамической (ЛД) системой, содержащей несколько линейных подсистем и логических условий определенного вида.

2. Решение задачи для ЛД системы и получение ЛД формы системы (3).

3. Преобразование ЛД формы в нелинейную систему.

Для иллюстрации подхода рассмотрим простой случай с единственной нелинейностью вида $C\varphi(Ax(t), u(t)) = G'u(t)\mathrm{sign}(Ax(t))$ для некоторой матрицы G' и матрицы-строки A.

На первом шаге исходная система заменяется ЛД системой, которая состоит из трех линейных подсистем $\Sigma_1 = (F, G - G', H)$, $\Sigma_2 = (F, G, H)$, $\Sigma_3 = (F, G + G', H)$ и трех логических условий $Ax(t) < 0$, $Ax(t) = 0$, $Ax(t) > 0$. Если выполняется условие $Ax(t) < 0$, то (при отсутствии дефектов) модель (1) принимает вид Σ_1: $\dot{x}(t) = Fx(t) + (G - G')u(t)$, если $Ax(t) = 0$, то вид Σ_2: $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$, если $Ax(t) > 0$, то вид Σ_3: $\dot{x}(t) = Fx(t) + (G + G')u(t)$. Важно, что все три модели содержат одинаковую матрицу F. Будем называть Σ_2 линейной частью системы (1).

На втором шаге строится ЛД форма системы (3). Предполагается, что ее структура аналогична ЛД структуре исходной системы, т. е. существуют три подсистемы Σ_{01}, Σ_{02}, Σ_{03} и матрица-строка A_0 такие, что выполняется следующее: если $A_0z < 0$, то система (3) принимает вид Σ_{01}: $\dot{x}_0(t) = F_0x_0(t) + (G_0 - G_0')u(t) + J_0y(t)$, если $A_0z = 0$, то вид Σ_{02}: $\dot{x}_0(t) = F_0x_0(t) + G_0u(t) + J_0y(t)$, если $A_0z > 0$, то вид Σ_{03}: $\dot{x}_0(t) = F_0x_0(t) + (G_0 + G_0')u(t) + J_0y(t)$. Здесь F_0, G_0, J_0 и G_0' — матрицы, подлежащие определению, $z = \begin{pmatrix} x_0 \\ y \end{pmatrix}$.

Для построения линейной части системы (3) предположим, что существует матрица Φ с условием $\Phi x(t) = x_0(t)$ $\forall t$ при отсутствии дефектов. Известно [8], что для этой матрицы выполняются следующие соотношения:

$$\Phi F = F_0\Phi + J_0H, \quad G_0 = \Phi G. \tag{5}$$

Известно также [8, 9], что система (3) будет свободна от неизвестного вектора $\vartheta(t)$, когда выполняется равенство $\Phi L = 0$. Для согласования логических условий исходной ЛД системы и ЛД системы (3) предположим, что выполняются следующие условия: если $Ax(t) < 0$, то $A_0z < 0$, если $Ax(t) = 0$, то $A_0z = 0$, если $Ax(t) > 0$, то $A_0z > 0$. Поскольку $x_0(t) = \Phi x(t)$ и $y(t) = Hx(t)$, т. е. $A_0z = A_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y \end{pmatrix} = A_0\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}x$, эти условия выполняются, если $A = A_0\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}$. Последнее равенство эквивалентно ранговому равенству

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Это соотношение представляет собой дополнительное к соотношениям (5) ограничение на матрицу Φ.

2. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ Σ_0

Матрица Φ может быть получена следующим образом. Введем матрицу L^0 максимального ранга такую, что $L^0L = 0$. Условие $\Phi L = 0$ тогда эквивалентно равенству $\Phi = NL^0$ для некоторой матрицы N. Замена матрицы Φ в первом из уравнений (5) на NL^0 дает уравнение $NL^0F = F_0NL^0 + J_0H$, которое может быть преобразовано к виду $(N - F_0N - J_0)\begin{pmatrix} L^0F \\ L^0 \\ H \end{pmatrix} = 0$. Это выражение можно рассматривать как однородное алгебраическое уравнение для неизвестных матриц N, F_0 и J_0. Пусть матрица $(A\ B\ C)$ дает все линейно независимые решения этого уравнения, т. е.

$$(A\ B\ C)\begin{pmatrix} L^0F \\ L^0 \\ H \end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

Для того чтобы матрицы A и B могли быть использованы для построения системы (3), должно выполняться соотношение $B = -F_0A$ для некоторой матрицы F_0, поскольку $A = N$ и $B = -F_0N$. Для получения матриц, удовлетворяющих этому требованию, найдем строки матрицы B, линейно независимые от строк матрицы A, и удалим их из матрицы $(A\ B\ C)$. Обозначим полученную матрицу через $(A^0\ B^0\ C^0)$ и положим $N = A^0$, $\Phi = NL^0$. Если при $\Phi G' \neq 0$ матрица Φ удовлетворяет условию (6), то ЛД система (3) может быть построена, в противном случае — нет; при $\Phi G' = 0$ условие (6) можно не проверять. При положительном исходе проверки положим $G_0 = \Phi G$ и $J_0 = -C^0$; матрица F_0 является решением уравнения $F_0N = -B^0$. В результате получаем линейную часть системы (3), описываемую уравнением $\dot{x}_0(t) = F_0x_0(t) + G_0u(t) + J_0y(t)$.

На третьем шаге полученная ЛД система преобразуется в нелинейную. Для этого согласно работе [8] нелинейный член $G_0'u(t)\operatorname{sign}(A_0x(t))$ с $G_0' = \Phi G'$ и матрицей A_0, полученной из уравнения $A = A_0\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}$, добавляется в правую часть уравнения, описывающего линейную часть, что дает окончательное выражение для системы (3):

$$\dot{x}_0(t) = F_0x_0(t) + G_0u(t) + J_0y(t) + G_0'u(t)\operatorname{sign}(A_0x(t)).$$

3. ОБОБЩЕНИЯ

Предложенный подход может быть применен для других типов нелинейностей, включая гладкие (дифференцируемые), например, $G'u(t)\sin(Ax)$, $G'u(t)\log(Ax)$ и др. Действительно, рассмотрим члены $G'u(t)\mathrm{sign}(Ax)$ и $G_0'\,u(t)\mathrm{sign}(A_0z(t))$ в системах (1) и (3) соответственно. Ясно, что последний получен в результате определенного преобразования первого, и логико-динамический подход дает правила такого преобразования. Поэтому нелинейность $G'u(t)\sin(Ax)$ в исходной системе даст член $G_0'\,u(t)\sin(A_0z(t))$ в системе (3). В этом случае ограничение (6) отражает уже не логику, а условия согласования нелинейностей в системах (1) и (3). Логический смысл этого ограничения сохраняется для нелинейностей типа люфт, гистерезис, насыщение, а также в случае кусочно-линейной аппроксимации функций, входящих в правую часть модели исходной системы.

Если модель (1) содержит несколько нелинейностей, то матрица A в условии (6) заменяется на матрицу $A' = (A_{j_1}^T\ A_{j_2}^T\ \dots\ A_{j_d}^T)^T$, где $j_1, j_2, \dots, j_d$ — номера ненулевых столбцов матрицы $C_0 = \Phi C$. На третьем шаге нелинейный член добавляется в правую часть линейной части системы (3) в виде $C_0\cdot\begin{pmatrix}\varphi_{j_1}(A_{0j_1}x(t), u(t))\\ \dots\\ \varphi_{j_d}(A_{0j_d}x(t), u(t))\end{pmatrix}$, где матрицы-строки A_{0j_1}, A_{0j_2}, ..., A_{0j_d} определяются из линейных алгебраических уравнений $A_j = A_{0j}\begin{pmatrix}\Phi\\ H\end{pmatrix}$, $j = j_1, j_2, \dots, j_d$.

Для того чтобы линейная часть системы отражала структуру исходной нелинейной, необходимо соответствующим образом выбирать матрицу F, одновременно преобразуя нелинейный член. В общем случае рекомендуется использовать матрицу динамики исходной системы в виде $F + CA$, а нелинейный член — в виде $C\varphi(Ax(t), u(t)) - CAx(t)$. Во многих случаях к строкам матрицы F достаточно добавить только отдельные члены вида $A_jx(t)$.

Обобщая и несколько упрощая, можно сказать, что логико-динамический подход состоит в решении поставленной задачи для линейной части исходной нелинейной системы и добавлении в полученное линейное решение определенным образом преобразованную нелинейную составляющую исходной системы.

4. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ Σ_*

Для построения системы (4) предположим, что векторная функция $G_0u(t) + C_0\varphi(A_0z(t), u(t))$, имеющая s компонент, содержит m', $m' \leqslant m$, компонент вектора u и функция φ дифференцируема по этим компонентам. Без потери степени общности предположим, что это будут первые m' компонент: $u_1, u_2, \dots, u_{m'}$. Предположим также, что для всех $x_0 \in R^s$, $y \in R^l$ и $u \in R^m$ справедливо равенство

$$\mathrm{rank}\Big(\frac{\partial}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_{m'})}(G_0u(t) + C_0\varphi(A_0z(t), u(t)))\Big) = c \qquad (8)$$

для некоторого c. Далее введем матрицу Ψ такую, что $x_*(t) = \Psi x(t)\ \forall t$. Дифференцируя обе части этого равенства по времени и учитывая модель (1) при $\vartheta(t) = 0$, получаем $\dot{x}_*(t) = \Psi(Fx(t) + Gu(t) + C\varphi(Ax(t), u(t)))$. Из результатов работы [6] следует, что матрицы Φ и Ψ связаны соотношением $\Psi = M\Phi$ для некоторой матрицы M. Определяя матрицу Ψ, рассмотрим два случая.

1. Если $s = c$, положим $M = I_{c\times c}$, где $I_{c\times c}$ — единичная $c \times c$ матрица, откуда $\Psi = \Phi$. Из равенства $x_*(t) = \Psi x(t) = \Phi x(t) = x_0(t)$ и моделей (3) и (4) следует соотношение

$$\begin{aligned}F_*x_*(t) + G_*u_*(t) + C_*\varphi(A_*x_*(t), u_*(t)) &=\\ = F_0x_0(t) + G_0u(t) + J_0y(t) &+\\ + C_0\varphi(A_0x_0(t), y(t), u_*(t)),&\end{aligned} \qquad (9)$$

которое является основой для построения закона управления (2). Поскольку в выражение (2) по предположению не входит вектор состояния x_*, примем $F_* = 0$ и $C_* = 0$. Кроме того, для упрощения процесса управления системой Σ_* положим $C_* = I_{c\times c}$. В результате получаем следующую модель системы Σ_*:

$$\dot{x}_{*i}(t) = u_{*i}(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant c, \qquad (10)$$

т. е. для управления системой (4) необходимо определить первые c компонент вектора $u_*(t)$. Остальные компоненты могут быть выбраны произвольно, например, можно принять $u_{*i}(t) = 0$, $c + 1 \leqslant i \leqslant m$. ♦

2. Если $s > c$, найдем матрицу P, содержащую c строк, такую, что

$$\operatorname{rank}\Big(\frac{\partial}{\partial(u_1, u_2, ..., u_{m'})}(PG_0u(t) + PC_0\varphi(A_0z(t), u(t)))\Big) = c \qquad (11)$$

для всех $x \in R^n$ и $u \in R^m$. Представим матрицу Ψ в виде $\Psi x = \begin{pmatrix}\Psi^{(1)}\\ \Psi^{(2)}\end{pmatrix}x = \begin{pmatrix}x_*^{(1)}\\ x_*^{(2)}\end{pmatrix} = x_*$, где $\Psi^{(1)} = P\Phi$, $\Psi^{(2)} = Q\Phi$ для некоторой матрицы Q, что соответствует $M = \begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix}$. Из сказанного следует, что система Σ_* ищется в виде композиции двух подсистем. Как и ранее, положим $F_* = 0$, $C_* = 0$ и $C_* = I_{c \times c}$, что в результате дает

$$\dot{x}_{*i}^{(1)}(t) = u_{*i}(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant c.$$

Остальные компоненты вектора $u_*(t)$, как и ранее, могут быть выбраны произвольно. ♦

Предполагается, что вектор $x_*^{(2)} = \Psi^{(2)}x = Q\Phi x$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_*^{(2)}(t) = F_*x_*^{(2)}(t) + J_*x_*^{(1)}(t) + C_*\varphi\left(A_*\begin{pmatrix}x_*^{(1)}(t)\\ x_*^{(2)}(t)\end{pmatrix}\right), \qquad (12)$$

т. е. он не зависит от вектора управления. Из этого уравнения и уравнения $x_*^{(2)} = Q\Phi x$ получаем

$$\dot{x}_*^{(2)}(t) = Q\Phi(Fx(t) + Gu(t) + C\varphi(Ax(t), u(t)) + L\vartheta(t)) = Q(F_0x(t) + G_0u(t) + C_0\varphi(Ax(t), u(t))) = F_*x_*^{(2)}(t) + J_*x_*^{(1)}(t) + C_*\varphi\left(A_*\begin{pmatrix}x_*^{(1)}(t)\\ x_*^{(2)}(t)\end{pmatrix}\right),$$

откуда следует, что матрица Q должна удовлетворять условию $Q\Big(G_0 + C_0\frac{\partial}{\partial u}\varphi(Ax, u)\Big) = 0$. Такая матрица может быть получена следующим образом. Введем матрицу Q^* максимального ранга такую, что

$$Q^*\Big(G_0 + C_0\frac{\partial}{\partial u}\varphi(Ax, u)\Big) = 0, \qquad (13)$$

тогда $Q = N^*Q^*$ для некоторой матрицы N^*. Из модели (12) и соотношений $x_{*i}^{(1)}(t) = P\Phi(t)$ и $x_*^{(2)}(t) = Q\Phi(t)$ следует равенство $Q\Phi F = F_*Q\Phi + J_*P\Phi$. Как и в случае системы Σ_0, оно эквивалентно равенству

$$(N^* - F_*N^* - J_*)\begin{pmatrix}Q^*\Phi F\\ Q^*\Phi\\ P\Phi\end{pmatrix} = 0. \qquad (14)$$

По аналогии с матрицей $(A^0 \ B^0 \ C^0)$ получим матрицу $(A^* \ B^* \ C^*)$, что в итоге дает $N^* = A^*$ и $J^* = -C^*$; матрицы F_* и A_* — это решения уравнений $F_*N^* = -B^*$ и $A = A_*\begin{pmatrix}P\Phi\\ Q\Phi\end{pmatrix}$ соответственно; примем $Q = N^*Q^*$, $C^* = QC_0$. Таким образом, получены все матрицы, входящие в модель (12).

5. ПОСТРОЕНИЕ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

Конструируя закон управления, рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $c = m'$ и $s = c$, то из равенств (9), $F_* = 0$, $C_* = 0$ и $G_* = I_{c \times c}$ следует уравнение

$$F_0x_0(t) + G_0u(t) + J_0y(t) + C_0\varphi(A_0z(t), u(t)) = u_*(t) \qquad (15)$$

с вектором u_* размерности c. Поскольку $c = m'$ и $s = c$, оно разрешимо относительно переменных $u_1, u_2, ..., u_c$ и согласно выражению (2) переменные $u_1, u_2, ..., u_c$ могут быть определены с помощью некоторых функций $g_1, g_2, ..., g_c$ следующим образом:

$$u_i(t) = g_i(y(t), x_0(t), u_{*1}(t), ..., u_{*c}(t)), \quad 1 \leqslant i \leqslant c = m'. \qquad (16)$$

Положим $u_i(t) = u_{*1}(t)$, $m' + 1 \leqslant i \leqslant m$, для остальных $m - m'$ компонент. Отметим, что в некоторых случаях равенство (8) может нарушаться для некоторых значений вектора $u \in R^m$, но уравнение (15) остается разрешимым. В частном случае, когда $m' = m$, $\operatorname{rank}(G_0) = c$ и $G_0^{-1}C_0 = 0$, выражение (16) принимает вид

$$u(t) = G_0^{-1}(u_*(t) - F_0x_0(t) - J_0y(t)). ♦$$

2. Если $c = m'$ и $c < s$, то равенство (15) с учетом определения матрицы P согласно равенству (11) переходит в уравнение

$$P(F_0x_0(t) + G_0u(t) + J_0y(t) + C_0\varphi(A_0z(t), u(t))) = u_*(t),$$

которое разрешимо относительно переменных u_1, u_2, ..., $u_{m'}$ в форме (16). ♦

3. Если $c < m'$ и $s = c$, выражение $G_0u(t) + C_0\varphi(A_0z(t), u(t))$ содержит избыточные компоненты вектора u. В этом случае можно получить не отдельные компоненты вектора $u(t)$ (как это дается выражением (16)), а только их комбинации в виде

$$\psi_i(u(t)) = g_i(y(t), x_0(t), u_{*1}, ..., u_{*c}(t)), \quad 1 \leqslant i \leqslant c,$$

для некоторых функций ψ_1, ψ_2,..., ψ_c. В частном случае, когда $G_0 = (G_* \ G'_*)$, $\mathrm{rank}(G_0) = \mathrm{rank}(G_*) = c$ и $G_*^{-L} C_0 = 0$, из уравнения (15) следует простое выражение

$$(I_{c \times c} G_*^{-L} G'_*)u(t) = G_*^{-L}(u_*(t) - F_0x_0(t) - J_0y(t)),$$

в явном виде задающее отмеченные выше комбинации компонент вектора $u(t)$; здесь G_*^{-L} — левая обратная матрица к матрице G_*. ♦

4. Если $c < m'$ и $c < s$, все сказанное в п. 3 должно применяться к выражению $P(G_0u(t) + C_0\varphi(A_0z(t), u(t)))$ и матрице PG_0, где матрица P определяется согласно выражению (11). ♦

6. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Как уже говорилось, эффект аккомодации обеспечивается тем, что при наличии в системе дефектов задача управления решается на основе модели (4). Пусть, например, требуется найти управление, переводящее систему (1) из состояния $x^1 = x(t_1)$ в состояние $x^2 = x(t_2)$. Для решения этой задачи находятся состояния системы (4) $x_*^1 = \Psi x^1$ и $x_*^2 = \Psi x^2$ (для простоты рассмотрим случай $s = c$). Как следует из модели (10), система Σ_* имеет элементарное описание, что позволяет получить для нее исчерпывающее решение задачи терминального управления. Поскольку составляющие в модели (10) независимы друг от друга, каждую из них можно рассматривать отдельно. Так как i-я компонента вектора управления совпадает со скоростью изменения соответствующей компоненты вектора состояния x_*, то управление, изменяющее значение его i-й компоненты с $x_{*i}^1 = x_{*i}(t_1)$ на $x_{*i}^2 = x_{*i}(t_2)$ в случае $x_{*i}^1 = x_{*i}^2$, имеет очевидный вид, представленный на рис. 2, где $u_{i0}^* = (x_{*i}^2 - x_{*i}^1)/(t_2 - t_1)$. Аналогичный вид имеют решения для остальных компонент, подстановка которых в уравнение (3) дает управление для исходной системы.

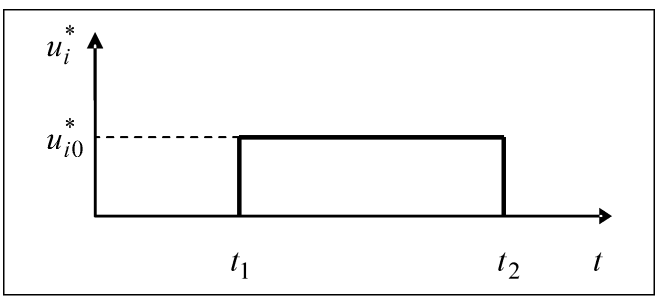

Рис. 2. Вид закона управления

Как следует из изложенного, в общем случае размерность вектора состояния x_* меньше размерности вектора x, в результате чего перевод исходной системы в состояние x^2 может осуществляться только с определенной степенью точности, которая определяется матрицей Ψ. Это означает, что перевод может быть произведен в такое состояние x^{2*}, что $\Psi x^{2*} = \Psi x^2$. При этом можно сказать, что указанная степень точности, а также качество функционирования системы (4) будут определять качество функционирования исходной системы в присутствии дефектов. Отметим, что состояние, фактически достигнутое в результате такого перевода, может быть определено с помощью системы Σ_0; точность такого определения дается матрицей $\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}$.

Очевидно, что описанная процедура построения закона управления может быть применена и тогда, когда дефекты в системе (1) не рассматриваются. В этом случае вместо системы (3) может быть взят классический наблюдатель Люенбергера (или фильтр Калмана при необходимости учета возмущений в динамике и измерениях), формирующий оценку $\hat{x}(t)$ полного вектора состояния исходной системы. Здесь наиболее простой по форме результат получается в случае, когда $m' = m$ для всех $x \in R^n$ и $u \in R^m$, где

$$m' = \mathrm{rank}\left(\frac{\partial}{\partial(u_1, u_2, ..., u_m)}(Gu(t) + C\varphi(Ax(t), u(t)))\right).$$

Тогда уравнение $F\hat{x}(t) + Gu(t) + C\varphi(A\hat{x}(t), u(t)) = u_*(t)$ с вектором u_* размерности m разрешимо относительно переменных u_1, u_2, ..., u_m и согласно выражению (2) переменные u_1, u_2, ..., u_m могут быть определены с помощью некоторых функций $g_1, g_2, ..., g_m$ следующим образом:

$$u_i(t) = g_i(\hat{x}(t), u_{*1}(t), ..., u_{*m}(t)), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Простое аналитическое решение получается в частном случае, когда $\mathrm{rank}\, G = m$ и $G^{-L}C = 0$, поскольку тогда

$$u(t) = G^{-L}(u_*(t) - F\hat{x}(t)).$$

Если $m' < m$, то, как и ранее, можно найти матрицу P, содержащую m' строк, удовлетворяющую условию $\mathrm{rank}\left(\frac{\partial}{\partial(u_1, u_2, ..., u_m)}(PGu(t) + PC\varphi(Ax(t), u(t)))\right) = m'$ для всех $x \in R^n$ и $u \in R^m$, и выразить переменные $u_1, u_2, ..., u_{m'}$ из уравнения $P(F\hat{x}(t) + Gu(t) + C\varphi(A\hat{x}(t), u(t))) = u_*(t)$. Система (4) во всех рассмотренных случаях имеет вид

$$\dot{x}_{*i}^{(1)}(t) = u_{*i}(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant m'.$$

7. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим систему, описываемую моделью

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{sign}(x_1(t)) + \ln(1 + u_1(t) + u_2(t)) \\ -x_1(t)x_2(t) + \ln(1 + u_1(t) - u_2(t) + x_1(t)u_3(t)) + x_3(t) - \vartheta(t) \\ x_4(t) - x_1(t)x_2(t) + \ln(1 + u_3(t)) - \vartheta(t) \\ x_3(t) - x_2(t))\exp{-x_4(t)} \\ x_1(t)x_2(t) + x_5(t) + \vartheta(t) \end{pmatrix},$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix}.$$

Выберем следующие матрицы для ЛД описания системы:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = 0,$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$A_1 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)$, $A_2 = (0\ 1\ 0\ 0\ 0)$,
$A_3 = (0\ 0\ 0\ 1\ 0)$, $A_4 = (0\ -1\ 1\ 0\ 0)$.

В этом случае нелинейный член $\varphi(Ax(t), u(t))$ принимает вид

$$\varphi(Ax(t), u(t)) = \begin{pmatrix} -\mathrm{sign}(A_1x(t)) + \ln(1 + u_1(t) + u_2(t)) + A_1x(t) \\ \ln(1 + u_1(t) - u_2(t) + A_1x(t)u_3(t)) \\ \ln(1 + u_3(t)) \\ A_4x(t)\exp(-A_3x(t)) - A_4x(t) + A_3x(t) \\ A_1x(t)A_2x(t) - A_1x(t) - A_2x(t) \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу L^0: $L^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Уравнение (7) имеет несколько линейно независимых решений: $(A^0\ B^0\ C^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G_0 = 0$, $s = 4$. Поскольку произведение $C_0\varphi$ не содержит нелинейности с переменной x_2, найдем матрицы A_{01}, A_{03} и A_{04} из уравнения $A_i = A_{i0}\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}$: A_{01}=(0 0 0 0 1 0 0), A_{03}=(0 0 0 0 0 1 0), A_{04}=(0 −1 1 0 0 0 0). В результате система (3) описывается следующим образом:

$$\dot{x}_0(t) = F_0x_0(t) + J_0y(t) + C_0\varphi\left(A_0\begin{pmatrix} x_0(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, u(t)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}x_0(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}y(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\mathrm{sign}(A_{01}z(t)) + \ln(1 + u_1(t) + u_2(t)) + A_{01}z(t) \\ \ln(1 + u_1(t) - u_2(t) + A_{01}z(t)u_3(t)) \\ \ln(1 + u_3(t)) \\ A_{04}z(t)\exp(-A_{02}z(t)) - A_{04}z(t) + A_{03}z(t) \\ A_1x(t)A_2x(t) - A_1x(t) - A_2x(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathrm{sign}(y_1) + \ln(1 + u_1 + u_2) \\ \ln(1 + u_1 - u_2 + y_1u_3) + x_{03} \\ y_2 + y_3 + \ln(1 + u_3) \\ (x_{03}(t) - x_{02}(t))\exp(-y_2(t)) \end{pmatrix},$$

где $z(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Из вида правой части уравнения для системы (3) следует, что $m' = m = 3$. Далее найдем матрицу $\frac{\partial}{\partial u}(C_0\varphi(A_0z, u))$:

$$\frac{\partial}{\partial u}(C_0\varphi(A_0z, u)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+u_1+u_2} & \frac{1}{1+u_1+u_2} & 0 \\ \frac{1}{1+u_1-u_2+y_1u_3} & \frac{1}{1+u_1-u_2+y_1u_3} & \frac{y_1}{1+u_1-u_2+y_1u_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+u_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial}{\partial u}(C_0\varphi(A_0z, u))\right) = 3$ для всех u (за исключением некоторых его значений, например, $u_3 = -1$), то $c = m' = 3$. Поскольку $s = 4 > c = 3$, необходимо найти матрицу P, удовлетворяющую условию (11). Наиболее простое решение имеет вид $P = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}$. Легко проверить, что уравнение

$$P(F_0x_0 + J_0y + C_0\varphi(A_0z, u)) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\operatorname{sign}(y_1) + \ln(1+u_1+u_2) \\ \ln(1+u_1-u_2+y_1u_3) + x_{03} \\ y_2 + y_3 + \ln(1+u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{*1} \\ u_{*2} \\ u_{*3} \end{pmatrix}$$

разрешимо для u_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, и

$$u_1 = 0{,}5\exp(u_{*1} + \operatorname{sign}(y_1)) + 0{,}5\exp(u_{*2} - x_{03}) - \\ - 0{,}5y_1(\exp(u_{*3} - y_2 - y_3) - 1) - 1,$$

$$u_2 = 0{,}5\exp(u_{*1} + \operatorname{sign}(y_1)) - 0{,}5\exp(u_{*2} - x_{03}) + \\ + 0{,}5y_1(\exp(u_{*3} - y_2 - y_3) - 1),$$

$$u_3 = \exp(u_{*3} - y_2 - y_3) - 1.$$

Три первые компоненты системы (4) имеют стандартный вид (10): $\dot{x}_{*i}^{(1)}(t) = u_{*i}(t)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Поскольку $s = 4 > c = 3$, необходимо найти матрицу Q. Можно показать, что условие (13) приводит к матрице $Q^* = (0\ 0\ 0\ 1)$. Решение уравнения (14) дает $N^* = 1$, $F_* = -1$, $J_* = (0\ {-1}\ 1)$. Следовательно, $Q = (0\ 0\ 0\ 1)$ и $C_* = QC_0 = (0\ 0\ 0\ 1\ 0)$. Поскольку произведение $C_*\varphi$ содержит четвертую строку функции φ, из уравнения $A_i = A_{i*}\Phi$ найдем матрицы A_{*3} и A_{*4}: $A_{*3} = (0\ 0\ 0\ 1)$, $A_{*4} = (0\ {-1}\ 1\ 0)$. Описание четвертой компоненты системы (4) может быть получено по аналогии с уравнением (3) в следующем виде:

$$\dot{x}_{*4}(t) = (x_{*3}(t) - x_{*2}(t))\exp(-x_{*4}(t)).$$

Таким образом, построены системы Σ_0 и Σ_*, а также закон управления (2), на основе которых может осуществляться управление исходной системой при наличии в ней определенных дефектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках решения задачи аккомодации для системы, описанной моделью (1), применен логико-динамический подход, гарантирующий нахождение управления, полностью развязанного от воздействий, вызываемых дефектами. Особенность подхода состоит в применении линейных методов для нелинейных систем с линейной функцией выхода и динамикой определенного вида, что позволяет избежать сложных аналитических вычислений, характерных для алгебры функций и дифференциальной геометрии. Кроме того, логико-динамический подход дает возможность работать с нелинейными системами, содержащими недифференцируемые нелинейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Diagnosis* and Fault Tolerant Control / M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, M. Staroswiecki. — Berlin: Springer-Verlag, 2003.
2. *Staroswiecki M., Yang H., Jiang B.* Progressive accommodation of aircraft actuator faults // Proc. of the IFAC Symposium Safeprocess'2006. — Beijing, PR China, 2006. — P. 877—882. — (CD-ROM).
3. *Weng Z., Patton R., Cui P.* Active fault-tolerant control of a double inverted pendulum // Proc. of the IFAC Symposium Safeprocess'2006. Beijing, PR China, 2006. — P.1591—1596. — (CD-ROM).
4. *Staroswiecki M.* Fault tolerant control: the pseudo-inverse method revisited // Proc. of the 16th IFAC Congress. Prague, Czech Republic, 2005. — (CD-ROM).
5. *Jang B., Staroswiecki M., Cocquempot V.* Active fault tolerant control for a class nonlinear systems // Proc. of the IFAC Symposium Safeprocess'03. — Washington, 2003. — P. 127—132. — (CD-ROM).
6. *Шумский А.Н., Жирабок А.Н.* Метод аккомодации нелинейных динамических систем к дефектам // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 4. — С. 62—70.
7. *Zhirabok A., Usoltsev S.* Fault diagnosis in nonlinear dynamic systems via linear methods // Proc. 15 IFAC World Congress. — Barcelona, Spain, July 2002. — (CD-ROM).
8. *Жирабок А.Н., Усольцев С.А.* Линейные методы при диагностировании нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 7. — С. 149—159.
9. *Жирабок А.Н.* Нелинейные соотношения паритета: логико-динамический подход // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 6. — С. 160—174.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Шумский Алексей Евгеньевич — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток,

Жирабок Алексей Нилович — д-р техн. наук, профессор, Дальневосточный государственный технический университет, г. Владивосток,

Бобко Евгений Юрьевич — ассистент, Дальневосточный государственный технический университет, г. Владивосток,

☎ (4232) 45-08-64, ✉ zhirabok@mail.ru.