УДК 519.876.2

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2020.6.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПОБЕДЫ В БОЮ (СРАЖЕНИИ, ОПЕРАЦИИ)

В.В. Шумов

Аннотация. Выполнено статистическое исследование функций победы в бою, основанных на модели Г. Таллока, устанавливающей зависимость вероятности победы в бою (сражении, операции) от отношения боевых потенциалов сторон. Боевой потенциал определяется численностями боевых единиц сторон и учитывает их моральные и технологические характеристики. Параметр масштаба (по Г. Таллоку — параметр решительности) оценен на примере сражений XIX — начала XX в., по результатам стратегических операций Великой Отечественной войны 1941—1945 гг., по данным о боестолкновениях пограничников с бандгруппами, а также на основе международной статистики о пиратских и разбойных актах на море. При проведении контртеррористических и специальных операций его значение мало, на тактическом уровне равно единице, на оперативном уровне примерно равно 2—4. Полученные статистические результаты не противоречат представлениям военной науки и искусства о планировании и ведении боевых действий. Функцию победы в бою (сражении, операции) целесообразно применять на этапе подготовки боя для обоснования потребного состава сил и средств для выполнения поставленных задач.

Ключевые слова: функция победы в бою, модель Таллока, оценка параметров, параметр масштаба, бой, сражение, операция.

ВВЕДЕНИЕ

Поскольку существует два основных способа получения дохода (производительная и конфликтная деятельность), то им ставятся в соответствие производственные функции (Production function) и функции конкурса или конфликта (Contest Functions and Conflict Functions) [1]. Функции конфликта отличаются от производственных двумя особенностями. Первая из них состоит в том, что в качестве значений функций конфликта выступают вероятности победы, тогда как значения производственных функций — ожидаемый объем производства (детерминированный результат). Вторая особенность функций конфликта — в их антагонистичности: рост усилий первой стороны увеличивает ее шансы на успех, так же как и снижение усилий второй стороны.

Исторически первой производственной функцией является функция Кобба — Дугласа [2], устанавливающая степенную зависимость объема выпуска продукции от затрат труда и капитала. Хотя первые модели боевых действий появились в начале XX в. [3, 4], в экономических исследованиях конфликтов акцент делается на вероятностные модели, описанные, в частности, в работах [5—9].

В общем случае функции конфликта (конкурса) по методу обоснования модели подразделяются на стохастические (теоретико-вероятностные) модели; модели, построенные на основе аксиом (предположений); конкурсные и аукционные модели, полученные на основе дизайна экономических механизмов (mechanism design); модели на основе агрегирования микроэкономических показателей (подмоделей) [10].

В настоящей работе представлен обзор наиболее известных функций конфликта и на основе данных военной статистики выполнена их верификация. Стиль изложения материала ориентирован как на специалистов по исследованию операций, так и на специалистов в области военной науки и искусства.

1. ОБЗОР ФУНКЦИЙ КОНФЛИКТА

Положим, что в конфликте (конкурсе, аукционе) участвуют две стороны. Их усилия (ресурсы) обозначим через $x > 0$ и $y > 0$ соответственно. Любой комбинации усилий сторон поставлены в соответствие вероятности успеха (победы) — $p_x(x, y)$ и $p_y(x, y)$. Достаточно хорошо исследован класс функций победы

$$p_x(x, y) = \frac{f_x(x)}{f_x(x) + f_y(y)}, \qquad (1)$$

где $f_x(\cdot)$ и $f_y(\cdot)$ — неотрицательные строго возрастающие функции.

Отметим наиболее часто встречающиеся функциональные формы модели (1). Модель Г. Таллока

$$p_x(x, y) = \frac{x^{\mu}}{x^{\mu} + y^{\mu}} = \frac{(x/y)^{\mu}}{(x/y)^{\mu} + 1}, \qquad (2)$$

где $\mu > 0$ — параметр решительности сторон, относится к классу моделей на основе отношения потенциалов (результат зависит от отношения усилий сторон). Модель Д. Макфаддена и Д. Хиршляйфена

$$p_x(x, y) = \frac{\exp(\mu x)}{\exp(\mu x) + \exp(\mu y)} = \\ = \frac{1}{1 + \exp(\mu(x - y))} \qquad (3)$$

относится к классу моделей на основе разности потенциалов. К этому же классу относится пробит-модель $p_x(x, y) = \Phi(x - y)$, где Φ — функция Лапласа. При анализе конфликтов и аукционов неантагонистического характера применяется разностная модель вида

$$p_x(x, y) = \alpha_p + f_x(x) - f_y(y),$$

где параметр $0 < \alpha_p < 1$ и функции $f_x(\cdot)$, $f_y(\cdot)$ подобраны так, чтобы выполнялось условие $p_x(\cdot) \in [0, 1]$. Параметр α_p отражает условия конкурса (аукциона) и не зависит от усилий его участников.

Теоретико-вероятностное обоснование функций конфликта основано на анализе влияния неучитываемых факторов (случайных ошибок) на результат. Функции регрессии в общем случае имеют вид $Y_x = h(x, \varepsilon_x)$, $Y_y = h(y, \varepsilon_y)$, где функции ошибок ε_x и ε_y имеют равные нулю математические ожидания. Тогда вероятность победы первой стороны в конфликте можно записать как $p_x(x, y) = P(Y_x > Y_y) = P(h(x, \varepsilon_x) > h(y, \varepsilon_y))$. В предположении, что функция регрессии линейна, а функция распределения ошибок имеет вид $F(u) = \exp(-\exp(-u))$ (функция экстремального распределения), Д. Макфадден получил модель бинарного выбора вида (3). Для функции регрессии мультипликативного вида и в предположении, что плотность распределения ошибок экспоненциальная, получена модель вида (2).

Функции конфликта аксиоматизированы, в частности, Р. Люсом [11] и С. Скапердасом [12]. В основу аксиоматики положено *свойство независимости от посторонних альтернатив* (Independence of Irrelevant Alternatives property): исход конфликта зависит только от усилий двух сторон (участников) и не зависит от усилий третьих лиц. Это свойство актуально для социальных и политических исследований (например, выборы в парламент, см. теорему Эрроу [13]). Другое важное требование к функциям конфликта — их *однородность нулевой степени*, т. е. $p_x(tx, ty) = p_x(x, y)$ для всех $t > 0$. Модели (2) и (3) обладают *свойством симметрии или анонимности* в том смысле, что если усилия сторон поменять местами, то и вероятности их победы также поменяются местами.

Отмечено, что несмотря на наличие значительного числа публикаций по моделированию конфликтов, конкурсов и аукционов в различных сферах деятельности, лишь в небольшом количестве публикаций затрагиваются вопросы верификации функций конфликта на реальных данных [10].

В серии статей [3] сформулированы основные требования к построению моделей боя:

— неразрывная связь военной статистики, военного искусства и математического моделирования;

— аналитические модели, основанные на тактических принципах и физических законах, представляются более предпочтительными, чем статистические, основанные на «подгонке» результатов под ограниченный набор статистических данных;

— свидетельство «правильности» моделей — соответствие результатов моделирования принципам военного искусства («правило — бить врага по частям служит несомненным подтверждением основного положения нашей теории, что потери сильнейшего числом должны быть меньше, чем у слабейшего» [3]) и др.

Рассмотрим функцию боя, основанную на модели Г. Таллока и учитывающую положения военного искусства и психологические характеристики бойцов [14, 15]:

$$p_x(x, y) = \frac{(\beta x)^m}{(\beta x)^m + y^m} = \frac{q^m}{q^m + 1},$$

$$p_y(x, y) = \frac{y^m}{(\beta x)^m + y^m} = \frac{1}{q^m + 1},$$

$$\beta = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}\alpha, \quad \alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \qquad (4)$$

где m — параметр формы; $0 < \lambda_x < 1$ ($0 < \lambda_y < 1$) — доля «кровавых» потерь (убитыми и ранеными), выдерживаемая первой (второй) стороной; q — соотношение сил сторон (превосходство первой стороны); $\beta > 0$ — параметр боевого превосходства первой стороны над второй; $\alpha > 0$ — параметр технологического превосходства первой стороны над второй. Компоненты параметра α вытекают из определения боя (бой представляет собой совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск для уничтожения (разгрома) противника, отражения его ударов и выполнения других задач) и произведения математических ожиданий независимых случайных величин α_1, α_2, α_3, α_4, характеризующих превосходство первой стороны над второй соответственно в боевом опыте командиров и их подчиненных, в разведке, маневренности и огневых возможностях. Опытом командиров и слаженностью подразделений обеспечивается согласованность действий. Частные коэффициенты $\alpha_1, ..., \alpha_4$ вычисляются как отношения количественных характеристик боевых единиц сторон с учетом противодействия противника. Например, дальности эффективного поражения противника следует вычислять с учетом имеющихся у него средств индивидуальной и коллективной защиты, а дальности обнаружения — с учетом возможностей по маскировке (задымлению) и др.

Параметр морального превосходства λ_x/λ_y имеет решающее влияние на исход боя. По М.П. Осипову, «победа зависит не от продолжительности боя, а главным образом от понесенных сторонами потерь; поэтому вернее считать, что бой длится до тех пор, пока потери одной из сторон не достигнут некоторого определенного процента. Таким в среднем можно считать 20 %...» [3].

Модель (4) обладает свойством однородности нулевой степени. Содержательно данное свойство трактуется так: вероятность победы в бою не зависит от выбора единицы измерения ресурсов сторон x и y. Под боевыми единицами в оперативно-тактических расчетах могут пониматься как отдельные бойцы (танки, орудия, самолеты), так и ротные или батальонные тактические группы и пр. При планировании стратегических операций в качестве боевых единиц используются как численности сил и средств сторон, так и расчетные дивизии [16, 17]. Названному свойству в военном искусстве соответствует принцип масштабируемости. Основанием для объединения тактических, оперативных и стратегических действий в одной модели представляется анализ опыта Великой Отечественной войны. Г.К. Жуков выделил одни и те же факторы, определяющие успех любого боя, сражения и операции [18]. Параметр формы позволяет разделить модели по видам на оперативно-стратегические, тактические и модели боестолкновений небольших по численности групп.

Свойство симметрии также выполняется в модели (4). Учет отдельных важных случаев (несимметричная информация сторон, разные продолжительности циклов действий наступающих и обороняющихся и др.) может быть выполнен в моделях более высокого уровня (к примеру, в модели «наступление — оборона») с помощью методов теории игр.

Отметим еще одно важное требование к модели (4) — учет ограничений на значение показателя q, характеризующего соотношение сил сторон. Значение показателя принадлежит интервалу $[1/q^*, q^*]$, где q^* не превышает 5—15 (для сражений и операций число q^* мало, для боя это число может достигать 10—15). Иначе боевые действия превращаются в партизанские (антипартизанские), специальные, контртеррористические и другие действия, которые протекают в иных формах и способах.

Таким образом, нами рассмотрен ряд моделей, которые можно применять в качестве функции конфликта (боя). Предпочтительным представляется класс моделей Г. Таллока, в максимальной степени удовлетворяющий сложившимся представлениям военной науки об оперативно-тактических расчетах [19]. Выбор лучшей из моделей возможен по результатам анализа данных военной статистики.

2. ВЕРИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ КОНФЛИКТА

2.1. Методы верификации

В математической статистике для проверки гипотез о виде распределения наиболее часто применяются критерии хи-квадрат Пирсона (для простых гипотез) и Фишера (для сложных, с оценкой параметров распределения). Пусть проводится n независимых испытаний, каждое из которых может иметь r различных исходов, вероятности этих исходов равны $p_1, p_2, ..., p_r$. Пусть в последовательности испытаний исходы встретились $c_1, c_2, ..., c_r$ раз. По теореме Пирсона, в случае справедливости основной гипотезы, распределение статистики хи-квадрат

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(c_i - np_i)^2}{np_i}$$

при $n \to \infty$ стремится к распределению хи-квадрат с $r - 1$ степенями свободы. В противном случае эта статистика стремится к бесконечности.

Параметры β и m модели (4) также можно оценить методом максимального правдоподобия. Поскольку исход отдельного боя (сражения, операции) принимает одно из двух значений: 1 — победа

Таблица 1

Начальные численности сторон и исходы сражений

Сражение	Начальная численность войск		Исход сражения s_i	Отношение численностей войск q_i	Разность численностей войск Δ_i, тыс. чел.
	первой стороны x_i, тыс. чел.	второй стороны y_i, тыс. чел.			
Аустерлиц	83	75	0	1,11	8
Тена	74	43	1	1,72	31
Ауэрштедт	48	30	0	1,60	18
Прейсиш Эйлау	80	64	1	1,25	16
Фридланд	85	60	1	1,42	25
Асперн	75	70	1	1,07	5
Ваграм	160	124	1	1,29	36
Бородино	130	103	1	1,26	27
Березина	75	45	1	1,67	30
Люцен	157	92	1	1,71	65
Бауцен	163	96	1	1,70	67
Дрезден	160	125	0	1,28	35
Кацбах	75	65	1	1,15	10
Кульм	46	35	1	1,31	11
Дениевиц	70	57	0	1,23	13
Лейпциг	300	200	1	1,50	100
Ганау	75	50	1	1,50	25
Краон	30	18	1	1,67	12
Лаон	100	45	1	2,22	55
Линьи	120	85	1	1,41	35
Ватерлоо	100	72	1	1,39	28
Грохово	72	56	1	1,29	16
Альма	62	34	1	1,82	28
Черная речка	60	56	1	1,07	4
Инкерман	90	63	0	1,43	27
Маджента	58	54	0	1,07	4
Сольферино	170	150	0	1,13	20
Кустоцца	70	51	1	1,37	19
Кениггрец	222	215	1	1,03	7
Верт	100	45	1	2,22	55
Марс ла Тур	125	65	1	1,92	60
Гравелот	220	130	1	1,69	90
Седан	245	124	1	1,98	121
Мец	200	173	1	1,16	27
Аладжа	60	36	1	1,67	24
Лаоян	150	120	0	1,25	30
Шахе	212	157	0	1,35	55
Мукден	330	280	0	1,18	50

первой стороны или 0 — ее поражение, то функция правдоподобия имеет вид:

$$L = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{(\beta x_i)^m}{(\beta x_i)^m + (y_i)^m}\right)^{s}\left(\frac{(y_i)^m}{(\beta x_i)^m + (y_i)^m}\right)^{1-s},$$

где s — доля боев, в которых победила первая сторона; x_i (y_i) — численность войск первой (второй) стороны в i-м бою. Вычислив частные производные логарифмической функции правдоподобия по β и m и приравняв их к нулю, получим систему двух уравнений для оценки параметров:

$$sm\frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{m(\beta x_i)^{m-1}x_i}{(\beta x_i)^m + (y_i)^m} = 0, \qquad (5)$$

$$s\sum_{i=1}^{n}\ln(\beta x_i) + (1-s)\sum_{i=1}^{n}\ln(y_i) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\beta x_i)^m\ln(\beta x_i) + (y_i)^m\ln(y_i)}{(\beta x_i)^m + (y_i)^m} = 0. \qquad (6)$$

2.2. Верификация функций по результатам сражений XIX — начала XX вв.

В табл. 1 представлены численности войск и результаты сражений XIX — начала XX вв. Сражения подобраны М.П. Осиповым таким образом, что есть все основания считать, что параметр боевого превосходства β равен единице [3]. Исход i-го сражения s_i равен 1, если победила первая сторона, иначе $s_i = 0$.

Значения отношений и разностей численностей сторон разбиты на $k = 6$ интервалов. Отношения численностей сторон используются в моделях (2) и (4), а разности численностей войск сторон — в модели (3). Результаты вычислений статистики хи-квадрат для модели (4) при $\beta = 1$ и $m = 0,5$; 1; 2; 3; 3,5; 4; 5; 6 и для модели (3) при $\mu = 0,5$; 1; 2 представлены в табл. 2.

Из таблицы видно, что модели на основе разностей численностей войск сторон (№ 9—11) применять нецелесообразно в связи с большим значением статистики хи-квадрат. Предпочтительна модель на основе отношения потенциалов со значением параметра формы $m \approx 3$—4. Вместе с тем, для всех значений параметра модели (4) в интервале $m = (3, 4)$ значения статистики хи-квадрат выше критической точки распределения хи-квадрат при уровне значимости 0,01 и числе степеней свободы $k - 1 = 5$ ($\chi^2_{0,01;\,5} = 15,1$). Следовательно, нельзя принять статистически значимое заключение о значении параметра модели (4), поскольку нам неизвестно значение параметра β боевого превосходства.

Таблица 2

Значения статистики хи-квадрат по результатам сражений

№ п/п	Модель	Значение статистики хи-квадрат
1	$\sqrt{x}/(\sqrt{x}+\sqrt{y})$	377
2	$x/(x+y)$	161
3	$x^2/(x^2+y^2)$	63
4	$x^3/(x^3+y^3)$	39
5	$x^{3,5}/(x^{3,5}+y^{3,5})$	35
6	$x^4/(x^4+y^4)$	35
7	$x^5/(x^5+y^5)$	44
8	$x^6/(x^6+y^6)$	65
9	$\dfrac{\exp(x/2)}{\exp(x/2)+\exp(y/2)}$	155
10	$\dfrac{\exp(x)}{\exp(x)+\exp(y)}$	158
11	$\dfrac{\exp(2x)}{\exp(2x)+\exp(2y)}$	158

Методом максимального правдоподобия (численное решение системы уравнений (5)—(6)) получены такие оценки параметров модели (4): $\beta \approx 1$, $m \approx 3$.

Осипов М.П. [3] предположил, что если потери сторон в сражении определяются численностью войск противника и их боевой эффективностью (числом поражаемых боевых единиц за малый интервал времени), то получаем квадратичную модель боя (разность квадратов численностей сражающихся во всех фазах сражения постоянна), т. е. $m = 2$. Данные табл. 1 со статистической точки зрения лучше описываются другой моделью, но М.П. Осипов остановился на квадратичной модели в силу ее простоты и математической обоснованности.

2.3. Верификация функций по результатам стратегических операций Великой Отечественной войны

Сведем данные по стратегическим операциям [16, 17] в табл. 3. Начальную численность советских войск в i-м сражении обозначим x_i, войск противника — y_i. Исход i-го сражения s_i равен 1, если победили советские войска, иначе $s_i = 0$.

Значения отношений численностей сторон разбиты на шесть интервалов. Результаты вычислений значения статистики хи-квадрат для каждой модели представлены в табл. 4.

Таблица 3

Начальные численности сторон и исходы операций

Стратегическая операция	Начальная численность войск		Исход операции s_i
	советских x_i, чел.	немецких y_i, чел.	
Стратегическая оборонительная операция в Прибалтике (22 июня — 9 июля 1941 г.)	369 702	655 000	0
Стратегическая оборонительная операция в Белоруссии (22 июня — 9 июля 1941 г.)	673 472	820 000	0
Стратегическая оборонительная операция на Западной Украине (22 июня — 6 июля 1941 г.)	907 046	1 695 460	0
Стратегическая оборонительная операция в Заполярье и Карелии (29 июня — 10 октября 1941 г.)	131 683	253 000	0
Киевская стратегическая оборонительная операция (7 июля — 26 сентября 1941 г.)	187 990	670 000	0
Смоленское сражение (10 июля — 10 сентября 1941 г.)	1 469 551	1 045 000	0
Донбасско-Ростовская стратегическая оборонительная операция (29 сентября — 16 ноября 1941 г.)	413 229	301 800	0
Московская стратегическая оборонительная операция (30 сентября — 5 декабря 1941 г.)	1 250 010	1 800 000	0
Ростовская стратегическая наступательная операция (17 ноября — 2 декабря 1941 г.)	423 945	340 000	1
Московская стратегическая наступательная операция (17 ноября — 2 декабря 1941 г.)	1 069 173	801 000	1
Керченско-Феодосийская десантная операция (25 декабря 1941 г. — 2 января 1942 г.)	135 080	25 000	1
Ржевско-Вяземская стратегическая наступательная операция (8 января — 20 апреля 1942 г.)	723 211	624 800	1
Воронежско-Ворошиловградская стратегическая оборонительная операция (28 июня — 24 июля 1942 г.)	1 715 000	900 000	0
Сталинградская стратегическая оборонительная операция (17 июля — 18 ноября 1942 г.)	386 365	381 000	0

Окончание табл. 3

Стратегическая операция	Начальная численность войск		Исход операции s_i
	советских x_i, чел.	немецких y_i, чел.	
Северо-Кавказская стратегическая оборонительная операция (25 июля — 31 декабря 1942 г.)	134 892	167 000	0
Сталинградская стратегическая наступательная операция (19 ноября 1942 г. — 2 февраля 1943 г.)	2 084 600	2 023 000	1
Северо-Кавказская стратегическая наступательная операция (1 января — 4 февраля 1943 г.)	1 025 230	764 000	1
Операция по прорыву блокады Ленинграда «Искра» (12—30 января 1943 г.)	188 563	50 000	1
Воронежско-Харьковская стратегическая наступательная операция (13 января — 3 марта 1943 г.)	378 342	125 000	1
Харьковская оборонительная операция (4—25 марта 1943 г.)	172 256	160 000	0
Курская стратегическая оборонительная операция (5—23 июля 1943 г.)	1 392 065	900 000	0
Орловская стратегическая наступательная операция «Кутузов» (12 июля — 18 августа 1943 г.)	927 494	492 300	1
Белгородско-Харьковская стратегическая наступательная операция «Румянцев» (3—23 августа 1943 г.)	656 201	200 000	1
Смоленская стратегическая наступательная операция «Суворов» (7 августа — 2 октября 1943 г.)	754 948	850 000	1
Донбасская стратегическая наступательная операция (13 августа — 22 сентября 1943 г.)	719 889	540 000	1
Черниговско-Полтавская стратегическая наступательная операция (26 августа — 30 сентября 1943 г.)	978 616	700 000	1
Новороссийско-Таманская стратегическая наступательная операция (10 сентября — 9 октября 1943 г.)	337 178	440 000	1
Нижнеднепровская стратегическая наступательная операция (26 сентября — 20 декабря 1943 г.)	1 339 298	770 000	1
Киевская стратегическая наступательная операция (3—13 ноября 1943 г.)	412 826	500 000	1
Днепровско-Карпатская стратегическая наступательная операция (24 декабря 1943 г. — 6 мая 1944 г.)	1 466 500	1 800 000	1
Крымская стратегическая наступательная операция (8 апреля — 12 мая 1944 г.)	272 885	195 000	1
Выборгско-Петрозаводская стратегическая наступательная операция (10 июня — 9 августа 1944 г.)	290 975	280 000	1
Белорусская стратегическая наступательная операция (23 июня — 29 августа 1944 г.)	1 254 300	800 000	1
Львовско-Сандомирская стратегическая наступательная операция (13 июля — 29 августа 1944 г.)	1 070 953	600 000	1
Ясско-Кишиневская стратегическая наступательная операция (20—29 августа 1944 г.)	873 322	643 000	1
Восточно-Карпатская стратегическая наступательная операция (8 сентября — 28 октября 1944 г.)	280 323	300 000	1
Прибалтийская стратегическая наступательная операция (14 сентября — 24 ноября 1944 г.)	1 214 978	700 000	1
Белградская стратегическая наступательная операция (28 сентября — 20 октября 1944 г.)	447 500	400 000	1
Петсамо-Киркенесская стратегическая наступательная операция (7—29 октября 1944 г.)	112 310	53 000	1
Висло-Одерская стратегическая наступательная операция (12 января — 3 февраля 1945 г.)	2 294 630	400 000	1
Западно-Карпатская стратегическая наступательная операция (12 января — 18 февраля 1945 г.)	719 857	550 000	1
Восточно-Прусская стратегическая наступательная операция (13 января — 25 апреля 1945 г.)	1 590 000	580 000	1
Восточно-Померанская стратегическая наступательная операция (10 февраля — 4 апреля 1945 г.)	380 259	230 000	1
Венская стратегическая наступательная операция (16 марта — 15 апреля 1945 г.)	664 925	410 000	1
Берлинская стратегическая наступательная операция (16 апреля — 8 мая 1945 г.)	2 062 100	1 000 000	1
Пражская стратегическая наступательная операция (6—11 мая 1945 г.)	1 196 390	900 000	1

Таблица 4

Значения статистики хи-квадрат по результатам стратегических операций

Значение параметра формы модели (4)	Значение статистики хи-квадрат	
	Оценка параметра боевого превосходства советских войск (*)	Оценка параметра боевого превосходства советских войск (**)
0,5	159	269
1	55	121
2	18	85
3	20	156
4	47	418

В одном случае (*) параметр боевого превосходства в i-й операции полагался равным единице: $\beta_i = 1$, $q_i = x_i/y_i$. В другом случае (**) параметр β_i вычислялся по формуле

$$\beta = \frac{\beta_{ls} + \beta_r + \beta_t + \beta_s}{4}, \qquad (7)$$

где β_{ls} — отношение начальных численностей войск сторон; β_r — отношение численностей орудий и минометов; β_t — отношение численностей танков, самоходных и штурмовых орудий; β_s — отношение численностей самолетов. Данное выражение учитывает опыт советских стратегических операций 1944—1945 гг.: в среднем по операциям пехота, танки, артиллерия и авиация вносили примерно одинаковый вклад в потери сторон [19].

Из табл. 4 видно, что применительно к стратегическим операциям значение статистики хи-квадрат минимально при параметре формы $m = 2$. Предложенный метод расчета параметра боевого превосходства по формуле (7) оказался некорректным, так как в этом случае значение статистики хи-квадрат существенно выше. Статистических данных в работах [16, 17] недостаточно, чтобы вычислить параметр боевого превосходства аналитически по формуле (4).

Для стратегических операций периода Великой Отечественной войны методом максимального правдоподобия получены такие оценки параметров модели (4): $\beta \approx 1{,}4$, $m \approx 3$.

2.4. Верификация функций по результатам боестолкновений с бандгруппами

По статистическим данным о результатах боестолкновений пограничников с бандгруппами (объем выборки $n = 56$, значения отношений численностей сторон разделены на шесть интервалов) рассчитана статистика хи-квадрат (табл. 5).

Из результатов расчетов видно, что боестолкновения с нерегулярными формированиями достаточно хорошо описываются моделью отношения сил с параметром формы $m = 0{,}5$—1.

Применительно к боестолкновениям пограничников с бандгруппами (нерегулярными формированиями) методом максимального правдоподобия получены такие оценки параметров модели (4): $\beta \approx 3{,}7$, $m = 0{,}65$.

2.5. Верификация функций по результатам попыток захватов судов пиратами

Результаты статистического анализа пиратских и разбойных актов в морском пространстве за период с 2009 по 2019 г. представлены в табл. 6.

В столбце 1 указана доля успешных актов по всей выборке, а в столбце 2 — только по тем актам, по которым в базе данных есть сведения о числе судов и пиратских катеров, а также указаны численности пиратов и экипажа. Коэффициент корреляции между данными последних двух столбцов таблицы равен 0,94.

Для анализа из общей выборки были отобраны факты нападений пиратов (морских разбойников) на суда типа Bulk carrier, Product tanker и Tanker (первая выборка) и на суда типа General cargo ship (вторая выборка), где пираты использовали для атаки одну лодку. Объем первой выборки составил $n = 215$, второй — $n = 135$. По первой выборке на рис. 1 и 2 показана зависимость соответственно количества и доли успешных пиратских актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов.

По второй выборке на рис. 3 показана зависимость доли успешных пиратских актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов.

На содержательном уровне действия пиратов разделяются на два этапа: первый — вынуждение судна к остановке и создание условий для его абордажа, второй — взятие пиратами контроля над управлением судном, захват экипажа. Поскольку, по данным двух выборок, в силовом акте участвует

Таблица 5

Значение статистики хи-квадрат по результатам боестолкновений с бандгруппами

Значение	
параметра формы модели (4)	статистики хи-квадрат
0,5	76
1	77
2	504

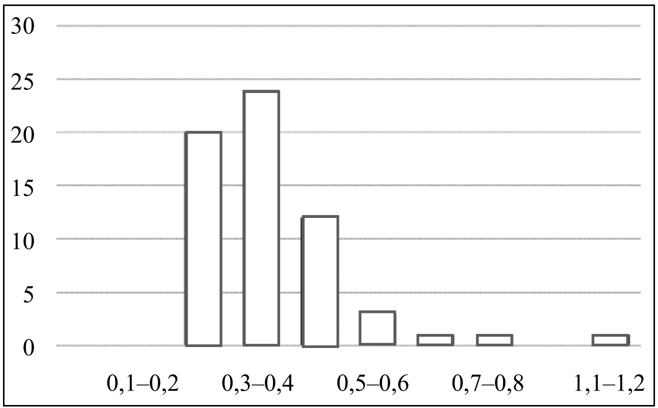

Рис. 1. График зависимости числа успешных актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов (первая выборка)

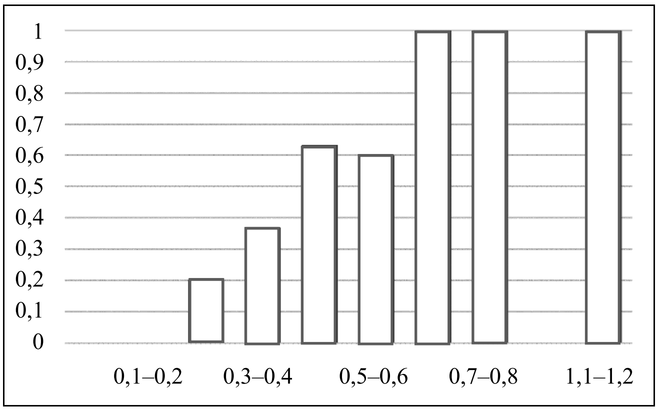

Рис. 2. График зависимости доли успешных актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов (первая выборка)

Таблица 6

Количество силовых актов и их результативность по типам судов

Тип судна (англ.)	Тип судна (рус.)	Число актов	Доля успешных актов	
			1	2
Dhow	Парусно-моторное судно	12	1,000	1,000
Yacht	Яхта	12	0,792	0,700
Tug	Буксир	44	0,732	0,758
Supply ship	Судно снабжения	16	0,625	0,714
Fishing vessel	Рыболовное судно	47	0,617	0,600
Oil product tanker	Танкер для нефтепродуктов	4	0,500	0,333
Barge carrier	Баржевоз	9	0,444	0,667
Passenger ship	Пассажирское судно	5	0,400	0,667
Product tanker	Танкер-продуктовоз	84	0,351	0,455
Refrigerated cargo carrier	Рефрижераторное судно	6	0,333	0,200
General cargo ship	Сухогруз общего назначения	126	0,310	0,357
Нет данных	—	11	0,273	0,167
Chemical tanker	Танкер-химовоз	127	0,268	0,294
Bulk carrier	Балкер (навалочник)	227	0,201	0,203
Tanker	Танкер	188	0,193	0,259
Ro-ro-cargo ship	Ролкер (перевозка грузов на колесах)	15	0,167	0,200
Oil tanker	Нефтяной танкер	39	0,132	0,136
Vehicle carrier	Ролкер (перевозка грузов на колесах)	16	0,125	0,167
Special purpose ship	Судно специального назначения	4	0,125	0,125
Heavy load carrier	Грузовое судно	4	0,125	—
LPG tanker	Газовоз	9	0,111	0,250
Container ship	Контейнеровоз	144	0,108	0,160
Военный корабль	—	1	0	—
Cement carrier	Цементовоз	1	0	0
Ore/bulk/oil Carrier	Нефтерудовоз	1	0	—
Reefer	Рефрижератор	1	0	0
Gas carrier — LNG	Газовоз СПГ	3	0	0
Gas carrier — non-specified	Газовоз	1	0	—
Патрульная лодка	—	1	0	0
Multipurpose ship	Многоцелевое судно	1	0	—
Livestock carrier	Судно для перевозки скота	1	0	0
Research ship	Исследовательское судно	5	0	—
Общий итог		1165	0,272	0,317

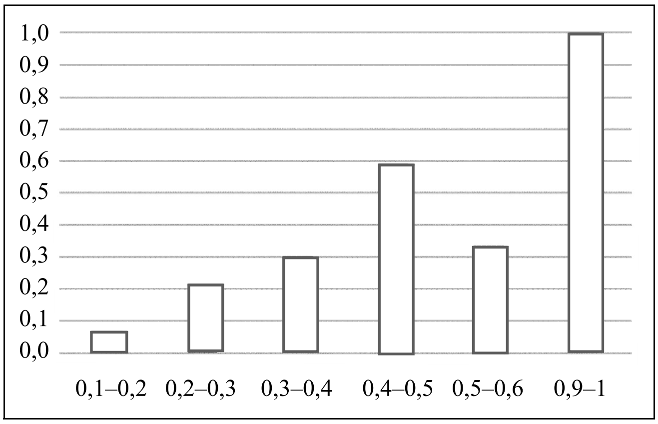

Рис. 3. График зависимости доли успешных актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов (вторая выборка)

одно пиратское судно (лодка, катер) и нападению подвергается только одно судно, то модифицируем модель (4) для учета характеристик силового акта. Функция успеха силового акта (вероятность победы нападающей стороны) будет иметь вид:

$$p_x(x, y) = \pi \frac{(\beta q)^m}{(\beta q)^m + 1}, \qquad (8)$$

где π — вероятность успешных действий по остановке судна и созданию условий для абордажа; m — параметр формы; $q > 0$ — отношение численности пиратов, участвующих в действиях по захвату судна, к численности экипажа; $\beta > 0$ — параметр боевого превосходства нападающей стороны в действиях по взятию под контроль управления судном. Первый сомножитель отражает действия по остановке судна (в котором участвуют с каждой стороны по единице) и позволяет учесть маневренные и скоростные характеристики судов, технические средства нападения (гранатометы, пулеметы и др.) и защиты (колючая проволока, пожарные шланги, слепящие лазеры и др.), высоту борта и пр. Второй сомножитель характеризует действия сторон по захвату (недопущению захвата) судна и экипажа.

Запишем функцию правдоподобия для модели (8):

$$L = \prod_{i=1}^{n}\left(\pi \frac{(\beta q_i)^m}{(\beta q_i)^m + 1}\right)^s \left(1 - \pi \frac{(\beta q_i)^m}{(\beta q_i)^m + 1}\right)^{1-s},$$

где s — доля успешных силовых актов; q_i — отношение численности пиратов и экипажа судна в i-м акте.

Вычислив частные производные логарифмической функции правдоподобия и приравняв их к нулю, получим уравнения для оценки параметров π и β модели (8):

$$\frac{\partial l}{\partial \pi} = \frac{sn}{\pi} + (1 - s)\sum_{i=1}^{n} \frac{-(\beta q_i)^m}{1 + (1 - \pi)(\beta q_i)^m} = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{smn}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m\beta^{m-1}(q_i)^m}{(\beta q_i)^m + 1} +$$

$$+ (1 - s)\sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - \pi)m\beta^{m-1}(q_i)^m}{1 + (1 - \pi)(\beta q_i)^m} = 0.$$

Каждая из двух выборок, отсортированная по дате совершения силового акта, была разделена на две части. По первой части выполнена оценка параметров π и β модели (8) при фиксированных значениях параметра формы m, а по второй части рассчитаны статистики хи-квадрат.

Результаты расчетов представлены в табл. 7.

Из результатов расчетов видно, что применительно к пиратским и разбойным актам в морском пространстве в качестве оценки параметра формы можно принять m = 1—1,25.

3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 4 при различных значениях параметра формы m показана зависимость победы первой стороны от отношения сил сторон q (модель Г. Таллока, учитывающая отношение сил сторон). Из рисунка видно, что вклад случайных факторов в результат конфликта снижается с увеличением значения параметра формы.

Таблица 7

Оценки значений параметров π и β и статистики хи-квадрат

Значение параметра формы m	Результаты оценок по выборке					
	первой			второй		
	π	β	χ^2	π	β	χ^2
0,25	7,5	0,568	117,4	8,86	0,43	41,6
0,5	7,17	0,525	160,7	8,4	0,4	21,3
0,75	7,02	0,49	112,8	8,16	0,37	17,0
1	6,9	0,46	91,4	7,96	0,35	16,0
1,25	6,78	0,44	79,2	7,86	0,33	16,8
1,5	8,68	0,39	100,7	7,71	0,32	18,2
2	11	0,35	174,1	7,67	0,3	24,8
3	10,79	0,328	339,9	7,76	0,27	62,0

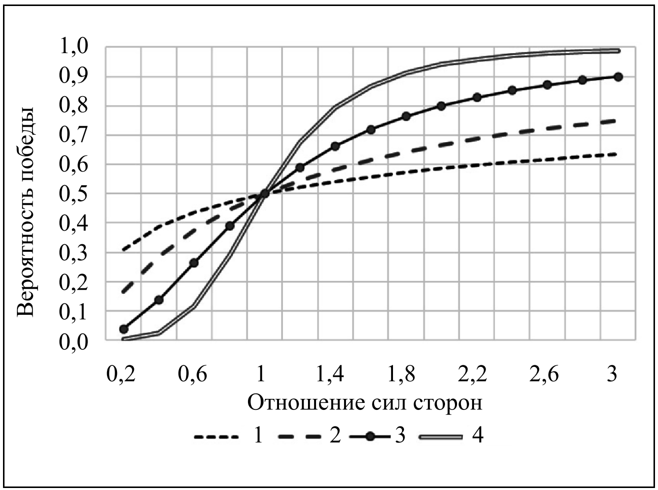

Рис. 4. Зависимость вероятности победы от отношения сил сторон

При малых численностях боевых единиц сторон и при преобладании нетрадиционных форм боя (нападения из засад, партизанские действия и др.) целесообразно использовать значение параметра формы m = 0,25—0,5. Успех боестолкновений в этом случае зависит от множества случайных факторов, учесть которые почти невозможно. Чтобы добиться высокой вероятности победы, необходимо обеспечить многократное превосходство в силах и средствах над противником. Например, при m = 0,5 вероятность победы 0,75 достигается при боевом превосходстве над противником $q \approx 9$. Данный результат подтверждается практикой контртеррористических и специальных операций: опыт внутренних конфликтов свидетельствует о том, что соотношение численности правительственных войск к повстанцам должно быть в пределах (8—10): 1 (восемь — десять единиц к одной). Многие государства Запада исходят именно из таких показателей при определении численности сил правопорядка [20].

Действия небольших тактических подразделений (рот, батальонов, тактических групп) в наступлении и обороне могут быть описаны моделью отношения сил со значением параметра формы $m = 1$. В этом случае вероятность победы 0,75 достигается при трехкратном превосходстве в силах и средствах над противником, что соответствует сложившимся представлениям о ведении общевойскового боя.

При моделировании действий дивизий (корпусов, армий) в сражении (операции) представляется статистически обоснованным использовать значение параметра формы m = 2—3. Здесь успех сражения (операции) почти гарантирован при двухтрехкратном общем превосходстве над противником в силах и средствах. Полученные статистические выводы подтверждаются специалистами в области военной науки и искусства. Президент Академии военных наук генерал армии М.А. Гареев отмечал, что за время Великой Отечественной войны не было ни одной успешной оборонительной операции, проведенной значительно меньшими силами, чем у наступающего противника. Возможно отражение атак превосходящих сил противника в тактическом звене, но не в оперативно-стратегическом [21].

Результаты расчетов и содержательный анализ боевых действий позволяет обобщить требования к достижению победы в бою, сражении, операции и представить в форме таблицы требуемое значение превосходства над противником в силах и средствах (табл. 8).

Из таблицы видно, что для достижения вероятности победы над противником, равной 0,75, в ходе контртеррористических и специальных операций необходимо обеспечить превосходство в силах и средствах не ниже 9:1, тогда как при ведении боевых действий полком (батальоном) достаточно иметь превосходство 3:1.

Укажем ограничение на применение функций победы. Работа командиров и штабов по планированию и ведению боевых действий (наступления, обороны и др.) разделяется на два этапа: подготовка боевых действий и ведение боевых действий. Рассмотренные выше модели (функции боя, конфликта) целесообразно применять в основном на первом этапе для обоснования потребных сил и средств на бой (сражение, операцию). Моделирование ведения боевых действий выполняется в ходе военных игр, а также с применением дискретных моделей динамики боя, марковских цепей, имитационных моделей и пр.

Таблица 8

Превосходство в силах и средствах q, необходимое для достижения победы над противником

Требуемое значение вероятности победы над противником p_x	Значение параметра формы m модели $q = \sqrt[m]{\frac{p_x}{1-p_x}}$			
	$m = 0{,}5$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
0,7	5,4:1	2,3:1	1,5:1	1,3:1
0,75	9,0:1	3,0:1	1,7:1	1,4:1
0,8	16,0:1	4,0:1	2,0:1	1,6:1
0,9	81,0:1	9,0:1	3,0:1	2,1:1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено статистическое исследование функций победы в бою, основанных на модели Г. Таллока, устанавливающей зависимость вероятности победы в бою (сражении, операции) от отношения боевых потенциалов сторон. Боевой потенциал определяется численностями боевых единиц сторон и учитывает их моральные и технологические характеристики.

Параметр функции конфликта, определяемый Г. Таллоком как параметр решительности, применительно к моделям военных и боевых действий отражает характер и масштаб действий. При проведении контртеррористических и специальных операций его значение мало, на тактическом уровне равно единице, на оперативном уровне примерно равно 2—4. Параметр масштаба оценен на примере сражений XIX — начала XX в., по результатам стратегических операций Великой Отечественной войны 1941—1945 гг., по данным о боестолкновениях пограничников с бандгруппами, а также на основе международной статистики о пиратских и разбойных актах на море. Полученные статистические результаты не противоречат представлениям военной науки и искусства о планировании и ведении боевых действий.

Перспективными направлениями дальнейших исследований представляются разработка на основе функции победы теоретико-игровых моделей подготовки боя, сражения, операции, а также разработка и обоснование комплекса моделей, позволяющих учитывать многообразные боевые ситуации, возникающие по ходу боевых действий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hirshleifer, J.* The Macrotechnology of Conflict // Journal of Conflict Resolution. — 2000. — Vol. 44 (6). — P. 773—792.
2. *Cobb, C.W., Douglas, P.H.* A Theory of Production // The American Economic Review. — 1928. — Vol. 18, no. 1. — P. 139—165.
3. *Осипов М.П.* Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. — 1915. — № 6. — С. 59—74; № 7. — С. 25—36; № 8. — С. 31—40; № 9. — С. 25—37. [*Osipov, M.P.* The Influence of the Number of Parties Fighting on Their Losses // Voennyj Sbornik. — 1915. — No. 6. — P. 59—74; No. 7. — P. 25—36; No. 8. — P. 31—40; No. 9. — P. 25—37. (In Russian)]
4. *Lanchester, F.W.* Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. — London: Constable and Co, Ltd., 1916. — 243 p.
5. *Tullock, G.* Efficient rent seeking / In J.M. Buchanan, R.D. Tollison, G. Tullock (Eds.) Toward a Theory of the Rent-Seeking Society. — College Station, TX: Texas A&M University Press. — 1980. — P. 97—112.
6. *Schmalensee, R.* A model of advertising and product quality // Journal of Political Economy. — 1978. — No. 86. — P. 485—503.
7. *Konrad, K.A.* Strategy and Dynamics in Contests. — New York: Oxford University Press, 2009. — 232 p.
8. *Hirshleifer, J.* Conflict and Rent-Seeking Success Functions: Ratio vs. Difference Models of Relative Success // Public Choice. — 1989. — No. 63. — P. 101—112.
9. *McFadden, D.L.* Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior / In P. Zarembka, ed., Frontiers in Econometrics. — New York: Academic Press, 1974. — P. 105—142.
10. *Jia, H., Skaperdas, S., Vaidya, S.* Contest Functions: Theoretical Foundations and Issues in Estimation // International Journal of Industrial Organization. — 2013. — No. 31. — P. 211—222.
11. *Luce, R.D.* Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis. — New York: Wiley, 1959. — 176 p.
12. *Skaperdas, S.* Contest Success Functions // Economic Theory. — 1996. — No. 7. — P. 283—290.
13. *Arrow, K.J.* Social Choice and Individual Values. — New York: John Wiley, 1951. — 111 p.
14. *Шумов В.В., Корепанов В.О.* Математические модели боевых и военных действий // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12. — № 1. — С. 217—242. [*Shumov, V.V., Korepanov, V.O.* Mathematical Models of Combat and Military Operations / Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, no. 1. — P. 217—242. (In Russian)]
15. *Шумов В.В.* Расширение модели «наступление — оборона» // Проблемы управления. — № 1. — С. 59—70. [*Shumov, V.V.* Expansion of the «Attack — Defense» Model / Control Sciences. — 2020. — No. 1. — P. 59—70. (In Russian)]
16. *Великая* Отечественная война 1941—1945 гг. Кампании и стратегические операции в цифрах. — В 2 т. — Т. I. — М.: Объединенная редакция МВД России, 2010. — 608 с. [*The Great* Patriotic War of 1941—1945. Campaigns and Strategic Operations in Numbers. — In 2 vol. — Vol. I. — M.: Ob'edinennaya redakciya MVD Rossii, 2010. — 608 p. (In Russian)]
17. *Великая* Отечественная война 1941—1945 гг. Кампании и стратегические операции в цифрах. — В 2 томах. — Том II. — М.: Объединенная редакция МВД России, 2010. — 784 с. [*The Great* Patriotic War of 1941—1945. Campaigns and strategic operations in numbers. — In 2 vol. — Vol. II. — M.: Ob'edinennaya redakciya MVD Rossii, 2010. — 784 p. (In Russian)]
18. *Речь* Г.К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г. // Военная мысль. — 1985. — Спец. вып. (февраль). — С. 3, 17—33. [*Speech* of G.K. Zhukov at the Military Scientific Conference, December 1945 // Voennaya mysl'. — 1985. — Spec. vyp. (fevral'). — P. 3, 17—33. (In Russian)]
19. *Цыгичко В.И., Стоили Ф.* Метод боевых потенциалов: история и настоящее // Военная мысль. — 1997. — № 4. — С. 23—28. [*Cygichko, V.I., Stoili, F.* The Method of Combat Potentials: History and Present // Voennaya mysl'. — 1997. — No. 4. — P. 23—28. (In Russian)]
20. *Контртеррористическая* операция на Северном Кавказе: основные уроки и выводы (3) // Военная мысль. — 2000. — № 4. — С. 2—17. [*Counter-Terrorist* Operation in the North Caucasus: Main Lessons and Conclusions (3) // Voennaya mysl'. — 2000. — No. 4. — P. 2—17. (In Russian)]
21. *Ионин Г.* Теория общевойскового боя требует переосмысления, развития и совершенствования // Военно-промышленный курьер. — 2005. — № 21 (88). — С. 4. [*Ionin, G.* The Theory of Combined Arms Combat Requires Rethinking, Development and Improvement // Voenno-promyshlennyj kur'er. — 2005. — No. 21 (88). — P. 4. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 31.05.2020, после доработки 16.09.2020.
Принята к публикации 05.10.2020.

Шумов Владислав Вячеславович — д-р техн. наук,
Международный научно-исследовательский институт
проблем управления, г. Москва, ✉ v.v.shumov@yandex.ru.

A STUDY OF CONTEST SUCCESS FUNCTION FOR BATTLES (COMBATS, OPERATIONS)

V.V. Shumov

International Research Institute for Advanced Systems, Moscow, Russia

✉ v.v.shumov@yandex.ru

Abstract. A statistical study of contest success functions for battles was performed, based on the model of G. Tullock, which establishes the dependence of battle (combat, operation) victory probability on the ratio of combat potentials of the sides. The combat potential is determined by the number of combat units of the sides and takes into account their moral and technological characteristics. The scale parameter (according to G. Tullock, the decisiveness parameter) is estimated by using the examples of battles that took part in the 19th and early 20th century, the results of strategic operations of the Great Patriotic War of 1941—1945, the data on clashes between border guards and bandit groups, and also on the base of international statistical data on acts of piracy and armed robbery at sea. For counter-terrorism and special operations, its value is small; at the tactical level, it equals one; at the operational level its approximate value is 2—4. The obtained statistical results do not contradict the military science and art ideas of planning and conduct of hostilities. Using the contest success function for battle (combat, operation) is advisable at the stage of preparation for the battle to substantiate the required forces and means for completing the tasks.

Keywords: contest success function, Tullock model, parameter estimation, scale parameter, battle, combat, operation.