УДК 519.876.2

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2020.1.6

РАСШИРЕНИЕ МОДЕЛИ «НАСТУПЛЕНИЕ — ОБОРОНА»

В.В. Шумов

Аннотация. Рассмотрена вероятностная модель боя, основанная на принципах ведения боевых действий и определении боя. Параметр боевого превосходства учитывает моральные и технологические характеристики. Предложена его оценка методом максимального правдоподобия. Сформулирована модель «наступление — оборона», учитывающая двухэшелонное построение войск (выполнение ближайшей и последующей задач). Найдено решение трех задач, связанных с отысканием: 1) распределения средств по пунктам обороны; 2) количества (доли) средств, выделяемых во второй эшелон (резерв); 3) темпов перемещения подразделений в бою и их потерь. Первая задача решена с помощью обобщенного метода уравнивания Ю.Б. Гермейера. В рамках второй задачи сведение игры к матричной антагонистической позволило найти оптимальные решения по распределению сил сторон между эшелонами. Показано, что решение игры содержательно интерпретируется с точки зрения военной науки (позиционная и мобильная оборона). Для решения третьей задачи учтены данные военной статистики. На конкретных примерах показана применимость представленных моделей при проведении командно-штабных и исследовательских учений.

Ключевые слова: модель боя, модель Гросса, модель Гермейера, эшелонирование войск, оценка параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование боевых действий началось во время первой мировой войны. В 1915 г. М.П. Осипов разработал модель высокоорганизованного боя (модель с переносом огня) [1], а в следующем году Ф. Ланчестером опубликована модель боя без переноса огня (иногда называемая моделью партизанской войны) [2]. В 1921 г. Е. Борель сформулировал игру полковника Блотто — игру двух лиц, в которой игроки однократно, одновременно и независимо (не зная выбора оппонента) распределяют свои ограниченные ресурсы между конечным числом полей сражений или объектов защиты/нападения [3]. Е. Борель и Ж. Вилле вычислили равновесие в смешанных стратегиях в игре полковника Блотто с симметричными игроками при трех полях сражений [4]. В годы второй мировой войны возник научный метод «исследование операций», дающий в распоряжение военного командования или другого исполнительного органа количественные основания для принятия решений по действию войск или других организаций, находящихся под их управлением [5]. Классификация математических моделей военных действий представлена в работе Д.А. Новикова [6]. К теоретико-игровым моделям боя можно отнести модель «нападение — оборона» Ю.Б. Гермейера [7], являющаяся модификацией модели О. Гросса [8]. В работах [9—11] рассмотрена многоуровневая система обороны при условии, что обороняющиеся располагаются на стационарных пунктах. В органах управления объединений, соединений и частей выполняются оперативно-тактические расчеты, основанные на учете боевого опыта и данных военной статистики [12].

Математические модели применяются в компьютерных имитационных системах военных действий, что позволяет, в частности, решать следующие задачи [13, 14]: сравнительная оценка альтернативных вариантов боевого применения войск (сил); анализ структуры и состава боевых и обеспечивающих формирований, имеющих на вооружении различные образцы вооружений и др.

Анализируя 40-летний опыт моделирования боевых действий, С. Бондер выделил важность искусства превращения проблемы принятия решения в проблему анализа, создания подходящих гипотез [15]. Вторая отмеченная им проблема заключается в том, что государство тратит слишком много ресурсов на разработку технических решений в ущерб повышению квалификации военных специалистов по анализу исследования операций. Отсюда вытекает важная научная проблема, заключающаяся в разработке моделей, оперирующих ограниченным набором параметров и управляемых переменных и учитывающих основные положения военной науки. Иными словами, модели боевых действий должны обладать свойством ингерентности — согласованности с управленческой (культурной) средой, соответствием взглядам военных теоретиков и практиков на ведение боя, сражения, операции. С другой стороны, согласованность достигается в ходе обучения военных руководителей выполнению оперативно-тактических расчетов с помощью математических моделей и их программных реализаций.

В настоящей работе рассматриваются вероятностная модель боя и расширение теоретико-игровой модели «нападение — оборона» Ю.Б. Гермейера [7], учитывающие действия подвижных вторых эшелонов (резервов) и позволяющие оценить темп наступления и ожидаемые потери сторон. Стиль изложения материала ориентирован как на специалистов по исследованию операций, так и на специалистов в области военной науки и искусства.

1. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ БОЯ

Пусть имеются две противостоящие друг другу боевые группы. Боевая численность первой группы равна x, второй — y. Обозначим β — параметр боевого превосходства первой стороны над второй. Допустим, что исход боя определяется результатами боестолкновений отдельных боевых единиц сторон, а сами боевые единицы в смысле их боевых возможностей однородны (т. е. каждая боевая единица в равной степени пользуется результатами обеспечения боя, разведки, наведения и др.). Тогда, учитывая классическое определение вероятности, определим вероятность победы в бою первой стороны по формуле [16]:

$$p_x(x,\,y) = \frac{\beta x}{\beta x + y} = \frac{q}{q+1}, \quad q = \frac{\beta x}{y},$$
$$p_x(0,\,0) = \frac{\beta}{\beta + 1}, \qquad (1)$$

где q есть соотношение сил сторон (превосходство первой стороны). Параметру β боевого превосходства в оперативно-тактических расчетах соответствует понятие боевого потенциала отдельной боевой единицы (определяемого как совокупность имеющихся средств, а также материальных и духовных возможностей). Боевой потенциал пехотинца (мотострелка) со штатным вооружением обычно принимается за единицу.

Для оценки параметра β боевого превосходства по результатам боевых действий можно воспользоваться функцией правдоподобия:

$$\prod_{i=1}^{m}(p_i)^s(1-p_i)^{1-s} = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i}\right)^s\left(\frac{y_i}{\beta x_i + y_i}\right)^{1-s},$$

где m — число наблюдений за ходом и результатами боев (объем выборки), p_i — вероятность победы первой стороны в i-м бою (неизвестная величина), s — доля боев, в которых победила первая сторона, $x_i > 0$ — количество боевых единиц первой стороны, участвовавших в i-м бою, $y_i > 0$ — количество боевых единиц второй стороны, участвовавших в i-м бою.

Максимизируя логарифмическую функцию правдоподобия, получим выражение для вычисления параметра β:

$$\frac{ms}{\beta} - \sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{\beta x_i + y_i} = 0.$$

В работе [17] на основе международной базы инцидентов в морском пространстве выполнена оценка параметра боевого превосходства нападающих над экипажами судов, стремящихся отразить их захват.

1.1. Учет морального и технологического факторов в модели боя

Исходя из взглядов военных теоретиков и практиков [18—21], можно выделить два важнейших фактора, определяющих боевую эффективность соединений, частей и подразделений: моральный фактор и его количественный показатель — проценты выдерживаемых кровавых потерь и технологический фактор.

Поскольку боевое превосходство определяется этими двумя факторами, выражение (1) можно переписать в виде:

$$p_x(x,\,y) = \frac{\alpha\lambda_x x}{\alpha\lambda_x x + \lambda_y y}, \quad \beta = \alpha\rho, \quad \rho = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}, \qquad (2)$$

где $\alpha > 0$ — параметр технологического превосходства первой стороны, ρ — отношение моральных потенциалов сторон, $0 < \lambda_x < 1$ — доля потерь, выдерживаемая первой стороной, $0 < \lambda_y < 1$ — доля потерь, выдерживаемая второй стороной.

Термин «моральная упругость» войск впервые введен Н.Н. Головиным: «Для сражений второй половины XVIII и всего XIX века пределом наибольшей, моральной упругости войск, после которого они не способны уже к победе, являются кровавые потери в 25 %» [20]. По современным представлениям, небоеспособными признаются соединения, части и подразделения при наличии в них менее 40 % боевого состава [21].

Технологический фактор определяется следующими показателями (вытекают из определения боя — совокупности согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск для уничтожения (разгрома) противника, отражения его ударов и выполнения других задач [21]):

— опыт и искусство командиров, их способность организовать всестороннее обеспечение боя и согласованные действия подчиненных и приданных сил и средств;

— возможности по разведке противника, своевременному целеуказанию, скрытной, оперативной и устойчивой связи и навигации;

— маневренность сил и средств;

— огневые и ударные возможности сил и средств.

В первом приближении параметр α можно определить с помощью среднего геометрического:

$$\alpha = \sqrt[4]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \quad \alpha_j = \alpha_j^{(1)}/\alpha_j^{(2)}, \quad j = 1, ..., 4,$$

где $\alpha_1 > 0$ — параметр превосходства первой стороны в опыте командования и всестороннем обеспечении, $\alpha_2 > 0$ — параметр ее превосходства в средствах разведки, связи и навигации, $\alpha_3 > 0$ — параметр ее превосходства в маневренности, $\alpha_4 > 0$ — параметр ее превосходства в огневых возможностях, $\alpha_j^{(1)}$ и $\alpha_j^{(2)}$ > значения *j*-го показателя первой и второй сторон.

Частные коэффициенты α_1, ..., α_4 вычисляются как отношения количественных характеристик боевых единиц сторон с учетом противодействия противника. Например, дальности эффективного поражения противника ($\alpha_4^{(1)}$ и $\alpha_4^{(2)}$) следует вычислять с учетом имеющихся у него средств индивидуальной и коллективной защиты; дальности обнаружения ($\alpha_2^{(1)}$ и $\alpha_2^{(2)}$) — с учетом возможностей по маскировке (задымлению) и т. д. Поскольку коэффициенты α_1, ..., α_4 определены через отношения величин, то в качестве допустимого среднего принято среднее геометрическое.

Среднее геометрическое более чувствительно к малым значениям одного из коэффициентов, например, скорости боевого перемещения или дальности обнаружения противника в сложных метеоусловиях и отражает искусство командиров (командующих) по формированию оптимального состава и вооружения штурмовых, батальонных, ротных групп, способных эффективно решать поставленные боевые задачи. Так, в начале 1942 г. Г.К. Жуков для захвата опорных пунктов противника требовал создавать ударные отряды, вооруженные автоматическим оружием, минометами, отдельными орудиями и включать в их состав саперов, огнеметчиков и танки [22]. Применение штурмовых групп и ударных отрядов позволяет выровнять значения частных коэффициентов, повышая значение параметра технологического превосходства.

Имея выражения для расчета показателей морального ρ и технологического α превосходства, по результатам боевых действий можно верифицировать модель боя, находя статистическую оценку параметра боевого превосходства β.

1.2. Масштабирование вероятностной модели боя

Личный состав объединений, соединений и частей подразделяется на боевой состав и обеспечивающий. Боевой состав предназначен для непосредственного ведения боевых действий. Расчетными единицами боевого состава являются: для тактических расчетов — солдат, пулемет, орудие, танк, самолет, а также организационные подразделения более или менее одинакового состава во всех армиях — пехотный (стрелковый, мотострелковый) батальон, танковый батальон, батарея, эскадрилья, саперная (инженерно-техническая) рота; для оперативно-стратегических расчетов — стрелковые (пехотные), моторизованные, танковые, авиационные дивизии, отдельные артиллерийские полки и инженерно-саперные батальоны; однако и в этом случае учитывается общий численный состав людей и число орудий, танков и самолетов [23].

В табл. 1 указаны силы и средства советских войск к началу операции «Багратион» и их возможности [12; 24, *с. 47*; 25].

Таблица 1

Состав и возможности советских войск (операция «Багратион»)

Боевой состав	Единиц, тыс.	Боевой потенциал	Произведение (II) × (III)	Образец	Стоимость образца, тыс. руб.	Произведение (II) × (VI)
I	II	III	IV	V	VI	VII
Личный состав	2400	0,1	240	ППШ	0,148	355,2
Орудия и минометы	36,4	8	291,2	45-ти мм пушка	14	509,6
Танки и САУ	5,2	50	260	Т-34	135	702
Боевые самолеты	5,3	60	318	Ил-2	140	742

Заметим, что несмотря на качественную разнородность элементов боевого состава, суммарный боевой потенциал (столбец IV) и суммарная стоимость (столбец VII) этих элементов примерно одинаковы (одного порядка). Тогда количества боевых единиц сторон в выражениях (1) и (2) могут быть определены по формулам:

$$x = J\varphi_x \min_{j=1,\ldots,J} c_{xj}n_{xj}k_{xj} + (1 - \varphi_x)\sum_{j=1}^{J} c_{xj}n_{xj}k_{xj},$$

$$y = J\varphi_y \min_{j=1,\ldots,J} c_{yj}n_{yj}k_{yj} + (1 - \varphi_y)\sum_{j=1}^{J} c_{yj}n_{yj}k_{yj},$$

где $c_{xj}(c_{yj})$ — боевой потенциал (стоимость) боевой единицы j-го типа первой (второй) стороны, $n_{xj}(n_{yj})$ — количество боевых единиц j-го типа первой (второй) стороны, k_{xj} (k_{yj}) — коэффициенты технической готовности и материальной обеспеченности боевых единиц j-го типа первой (второй) стороны, J — число типов боевых единиц, $0 \le \varphi_x \le 1$ $(0 \le \varphi_y \le 1)$ — показатель, обеспечивающий применение в бою (сражении) всех типов боевых единиц и учитывающий особенности боя (театра военных действий).

При $\varphi_x = 1$ $(\varphi_y = 1)$ обеспечивается «гармоничный» состав группировок, что подтверждается опытом советских стратегических операций 1944—1945 гг. В ходе статистического исследования В.И. Цыгичко и Ф. Стоили выявили важную особенность структур группировок войск сторон. Оказалось, что в среднем по анализируемым операциям пехота, танки, артиллерия и авиация вносили примерно одинаковый вклад в потери сторон, т. е. произведения численностей различных типов оружия на их боевой потенциал практически равны [12].

Таким образом, нами получена простейшая вероятностная модель боя, учитывающая численности сторон, их моральные и технологические характеристики и отвечающая требованиям масштабируемости.

2. МОДЕЛЬ «НАСТУПЛЕНИЕ — ОБОРОНА»

Задача моделирования действий нападения против защиты в военных операциях с критерием эффективности средств нападения поставлена и решена Ю.Б. Гермейером [7]:

$$\sum_{i=1}^{n} \max(x_i - p_i y_i;\, 0) \to \max, \quad x_i \ge 0,\ y_i \ge 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = r_x, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = r_y,$$

где r_x и r_y — число боевых единиц нападения и защиты, n — число пунктов обороны, где возможен ее прорыв, x_i и y_i — число боевых единиц, выделенных нападением и защитой на i-й пункт, p_i — число средств нападения, уничтожаемых одной единицей защиты на i-м пункте. С помощью обобщенного метода уравнивания Ю.Б. Гермейера далее рассмотрим расширение его модели, учитывающее базовые положения военной науки.

Основными видами военных (боевых) действий являются наступление и оборона [21].

На *стратегическом и оперативном уровнях* наступление применяется для разгрома противника и овладения важными районами, рубежами и объектами на его территории (акватории). Оборона применяется, как правило, в неблагоприятно складывающейся обстановке для срыва или отражения наступления (ударов) численно превосходящего противника, уничтожения его сил и средств, удержания важных районов, рубежей и объектов на своей территории (акватории), выигрыша времени и с другими целями [21].

Основной формой *тактических действий* является бой. Наступательный бой применяется в целях разгрома противостоящей тактической группировки войск противника и овладения важным районом (рубежом, объектом) на его территории. Разновидности наступательного боя — прорыв, встречный бой и преследование. Оборонительный бой применяется для срыва или отражения наступления превосходящих сил противника, удержания занимаемых позиций (рубежей), предотвращения прорыва противника к прикрываемым объектам и создания условий для перехода в наступление [21].

Управление действиями наступающих и обороняющихся подразделений в общем случае может сводиться к отысканию:

— распределения средств по пунктам обороны;

— количества (доли) средств, выделяемых во второй эшелон (резерв);

— темпов перемещения подразделений в бою и их потерь;

— размеров по фронту и в глубину районов обороны, направлений маневра;

— способов действий, направленных на разгром противника или его окружение, или занятие важного рубежа (объекта) в глубине обороны;

— способов действий в обороне, при отходе и в окружении;

— способов маскировки и введения противника в заблуждение и др.

Задачи управления боем, в которых определялись бы все указанные элементы законов управления, в литературе не описаны. Далее с помощью вероятностной модели боя рассмотрим частные решения первых трех задач.

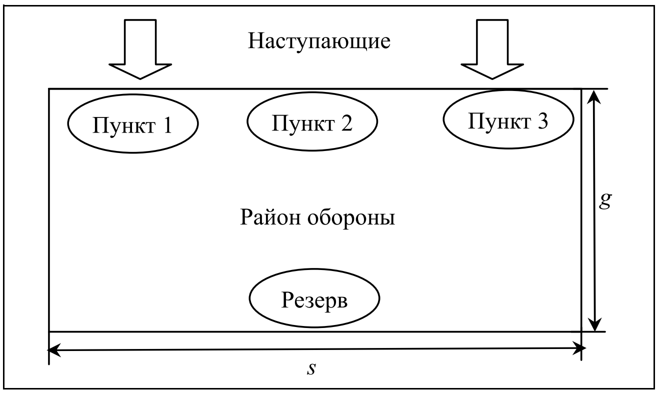

Рис. 1. Условная схема района обороны

Пусть имеется n обороняемых пунктов (районов, участков, направлений) с номерами $i = 1, ..., n$, где возможен прорыв средствами наступающих (рис. 1). Обозначим R_x и R_y — количества боевых средств в распоряжении наступающих и обороняющихся. Ресурсы R_x и R_y полагаются бесконечно делимыми, что позволит учесть действия своих, приданных и поддерживающих единиц, когда их усилия попеременно направлены на различные пункты и задачи.

Наступающая сторона состоит из войск первого эшелона, имеющего задачу прорыва обороны хотя бы на одном из обороняемых пунктов, и войск второго эшелона, которые вводятся в прорыв с задачей разгрома второго эшелона (резервов) обороны и выхода на назначенный рубеж в глубине обороны. Вектор средств наступления:

$$x = (x_1, ..., x_n, u) \in X = \left\{x \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i + u = R_x\right\},$$
$$x_i, u \in \Re,$$

где $x_i \geq 0$ — количество средств первого эшелона, имеющих задачу прорыва пункта i; $u \geq 0$ — количество средств второго эшелона.

Обороняющаяся сторона состоит из войск первого эшелона и резерва (или второго эшелона). Задача первого эшелона заключается в недопущении прорыва пунктов обороны, задача резерва (второго эшелона) — в нанесении контрудара в случае прорыва обороны или удержании второй линии обороны. Вектор средств обороны:

$$y = (y_1, ..., y_n, w) \in Y = \left\{y \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i + w = R_y\right\},$$
$$y_i, w \in \Re,$$

где $y_i \geq 0$ — количество средств первого эшелона, имеющих задачу обороны пункта i; $w \geq 0$ — количество средств резерва, предназначенных для нанесения контрудара в случае прорыва пункта i.

Дополнительно определим подмножества действий первых эшелонов сторон через разность множеств:

$$X \backslash u = \left\{x \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i = R_x - u\right\},$$

$$Y \backslash w = \left\{y \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i = R_y - w\right\}.$$

Применительно к действиям первых эшелонов векторы средств сторон:

$$x = (x_1, ..., x_n) \in X\backslash u, \quad y = (y_1, ..., y_n) \in Y\backslash w.$$

2.1. Задача управления прорывом (удержанием) пунктов обороны

Рассмотрим постановку частной теоретико-игровой задачи управления прорывом (удержанием) пунктов обороны в условиях, когда стороны принимают решения одновременно (продолжительности тактических циклов действий сторон примерно одинаковы) и для нахождения решения достаточно вычислить равновесие Нэша.

Определим целевую функцию первого эшелона наступающих в виде:

$$f(x, y) = \max_{i = 1, ..., n}\left(\frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i}\right),$$

где β_i — параметр боевого превосходства наступающих на i-м пункте обороны; $x_i \geq 0$ — количество средств наступающих, выделенных для прорыва пункта i; $y_i \geq 0$ — количество средств, имеющих задачу обороны пункта i.

Так как выигрыш наступающих есть проигрыш обороняющихся, то мы имеем антагонистическую игру. Отметим, что функция $\frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i}$ выпукла по y_i и вогнута по x_i, $i = 1, ..., n$, а функция $f(x, y)$ выпукла по y (выпуклость поточечного максимума).

Без потери общности положим, что $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ...$ $... \geq \beta_n$ (первый пункт для обороны является слабейшим), чего легко добиться перенумерацией пунктов обороны.

Нижняя цена игры прорыва пунктов обороны:

$$\underline{v} = \max_{x \in X\backslash u} \min_{y \in Y\backslash w} f(x, y) =$$
$$= \frac{\beta_1(R_x - u)}{\beta_1(R_x - u) + R_y - w} = \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + t_y},$$

$$r_x = R_x - u, \; r_y = R_y - w,$$

а $x^{(1)} = \{r_x, 0, ..., 0\}$ есть максиминная стратегия наступающих, заключающаяся в нанесении удара всеми силами первого эшелона (концентрированного удара) по слабейшему (первому) пункту.

Для любой стратегии наступающих определим вспомогательную («выравнивающую») стратегию обороняющихся:

$$\bar{y}_i = \frac{\beta_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j} r_y, \quad i = 1, ..., n.$$

Тогда $\min_{y \in Y \backslash w} f(x, y) \le f(x, \bar{y}) = \max_{i=1,...,n} \frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + \bar{y}_i}$,

$$f(x, \bar{y}) = \max_{i=1,...,n} \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j + r_y} \le \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y}.$$

Таким образом, для любой стратегии x

$$\min_{y \in Y \backslash w} f(x, y) \le \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y} = \min_{y \in Y \backslash w} f(x^{(1)}, y)$$

и $x^{(1)}$ — максиминная стратегия наступающих.

Верхняя цена игры. Предварительно рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру с диагональной матрицей A, в которой диагональные элементы $a_i > 0$ и предположим, что все элементы оптимальных смешанных стратегий φ^0, π^0 положительны (нет доминируемых стратегий). Тогда по теореме (свойству дополняющей нежесткости) [26, *с. 36*] получим:

$$A(i, \pi^0) = a_i \pi_i^0 = v, \quad i = 1, ..., n, \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i^0 = 1.$$

Решение системы относительно $n + 1$ неизвестных π_i^0, v [26]:

$$\varphi^0 = \pi^0 = v/a_i, \quad i = 1, ..., n, \quad v = 1/\sum_{j=1}^{n} (a_j)^{-1}.$$

Утверждение. *В игре прорыва пунктов обороны верхняя цена и минимаксная стратегия обороняющихся*

$$\bar{v} = \min_{y \in Y \backslash w} \max_{x \in X \backslash u} f(x, y) = \frac{r_x \sum_{j=1}^{n} \beta_j}{r_x \sum_{j=1}^{n} \beta_j + r_y}$$

и y^0: $$y_i^0 = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j} r_y, \quad i = 1, ..., n.$$

Доказательство. Пусть $x^{(i)} = \{0, ..., \underbrace{r_x}_{i}, 0, ..., 0\}$ есть стратегия наступающих, заключающаяся в нанесении всеми силами удара по i-му пункту обороны и докажем равенство:

$$\max_{x \in X \backslash u} f(x, y) = \max_{i=1,...,n} f(x^{(i)}, y) \;\forall y \in Y \backslash w. \tag{3}$$

Представим стратегию x в виде:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{r_x} x^{(i)} = \max_{i=1,...,n} \left(\frac{x_i}{r_x} x^{(i)} \right).$$

Тогда целевая функция

$$f(x^{(i)}, y) = \frac{\beta_i r_x}{\beta_i r_x + y_i} = \left(1 + \frac{y_i}{\beta_i r_x}\right)^{-1},$$

и равенство (3) выполняется в силу того, что целевая функция $f(x, y)$ является возрастающей по x.

Рассмотрим вспомогательную целевую функцию и заменим переменные

$$g(i, y) = \frac{1}{f(x^{(i)}, y)} = 1 + \frac{y_i}{\beta_i r_x} = g(i, \pi) = 1 + \frac{r_y}{\beta_i r_x} \pi_i,$$

где $\pi = y/r_y \in \Pi = \left\{ \pi = (\pi_1, ..., \pi_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1, \pi_i \ge 0, i = 1, ..., n \right\}$.

Найдем ее максимин (с учетом выражения (3) и что $a_i = 1/\beta_i$):

$$\max_{\pi \in \Pi} \min_{i=1,...,n} g(i, \pi) = 1 + \frac{r_y}{r_x} \max_{\pi \in \Pi} \min_{i=1,...,n} \frac{\pi_i}{\beta_i} = 1 + \frac{r_y}{r_x \sum_{j=1}^{n} \beta_j}.$$

Обозначим $B = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$. В результате получаем верхнюю цену игры прорыва пунктов обороны

$$\bar{v} = \min_{y \in Y \backslash w} \max_{x \in X \backslash u} f(x, y) = \frac{r_x B}{r_x B + r_y}$$

и оптимальное решение обороняющихся

$$y_i^0 = \frac{v}{a_i} r_y = \frac{\beta_i}{B} r_y, \quad i = 1, ..., n.$$

Равновесие игры прорыва пунктов обороны в чистых стратегиях при $n > 1$ не существует, поскольку $\underline{v} < \bar{v}$ или

$$\frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y} < \frac{r_x B}{r_x B + r_y}.$$

Решение игры в смешанных стратегиях. В игре прорыва пунктов обороны существует решение в смешанных стратегиях вида $(\varphi^0, y^0, \bar{v})$, где y^0 — чистая минимаксная стратегия обороны, а оптимальная смешанная стратегия наступающих имеет вид

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^0 I_{x^{(i)}}, \quad \pi_i^0 = \frac{\beta_i}{B}, \quad i = 1, ..., n,$$

где $I_{x^{(i)}}$ — вероятностная мера, сосредоточенная в точке $x^{(i)}$.

Наличие чистой минимаксной стратегии обороняющихся следует из выпуклости целевой функции по y (см. теорему 5.4 в работе [26]). Для смешанной стратегии наступающей стороны проверим выполнение условия:

$$f(\varphi^0, y) \ge \bar{v} \quad \forall y \in Y \backslash w.$$

Имеем:

$$f(\varphi^0, y) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^0 f(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{B} \times \frac{\beta_i r_x}{\beta_i r_x + y_i}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{B} \times \frac{\beta_i r_x + y_i}{\beta_i r_x}\right)} = \frac{B r_x}{\sum_{i=1}^{n} (\beta_i r_x + y_i)} = \frac{B r_x}{B r_x + r_y}.$$

Мы воспользовались известным неравенством:

$$x_i > 0, \ \sum_{j=1}^{n} \pi_i = 1, \ \pi_i > 0, \ i = 1, ..., n, \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi_i}{x_i} \ge 1 / \sum_{j=1}^{n} \pi_i x_i.$$

Таким образом, цена игры при прорыве первого эшелона обороны

$$v = \frac{r_x B}{r_x B + r_y} = \frac{r_x \sum_{j=1}^{n} \beta_j}{r_x \sum_{j=1}^{n} \beta_j + r_y}. \qquad (4)$$

Пример 1. При исходных данных: $n = 3$, $\beta_1 = 0{,}7$, $\beta_2 = 0{,}5$, $\beta_3 = 0{,}3$, $r_x = 100$, $r_y = 100$ найти вероятность прорыва обороны и оптимальные стратегии сторон. Вероятность прорыва обороны вычисляем по формуле (4):

$$v = \frac{r_x B}{r_x B + r_y} = \frac{100 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 1{,}5 + 100} = 0{,}6.$$

Обороняющиеся применяют максиминную стратегию, распределяя ресурс по пунктам обороны:

$$y_1^0 = \frac{\beta_1}{B} r_y = \frac{0{,}7}{1{,}5} 100 \approx 46{,}7, \quad y_2^0 = \frac{\beta_2}{B} r_y = \frac{0{,}5}{1{,}5} 100 \approx 33{,}3,$$

$$y_3^0 = \frac{\beta_3}{B} r_y = \frac{0{,}3}{1{,}5} 100 \approx 20{,}0.$$

Наступающие всеми силами первого эшелона наносят удар по одному из пунктов обороны с вероятностями выбора пунктов:

$$\pi_1^0 = \frac{\beta_1}{B} = \frac{0{,}7}{1{,}5} \approx 0{,}47, \quad \pi_2^0 = \frac{\beta_2}{B} = \frac{0{,}5}{1{,}5} \approx 0{,}33,$$

$$\pi_3^0 = \frac{\beta_3}{B} = \frac{0{,}3}{1{,}5} \approx 0{,}20.$$

Если пункты обороны однородны ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = ...$ $... = \beta_n$), то цена игры

$$v = \frac{n \beta r_x}{n \beta r_x + r_y}.$$

Вынужденность обороны непосредственно следует из последнего выражения — с ростом числа пунктов обороны возможности наступающих существенно возрастают. На практике число пунктов не превышает трех—пяти.

2.2. Темп наступления и потери сторон

Важнейшим показателем боя, сражения и операции служит темп наступления (маневра). До начала механизации войск суточный переход подразделений в походном порядке составлял около 32 км нормальным маршем и до 50—60 км форсированным маршем. При движении на автомобилях размер суточного перехода увеличился до 200 км [27].

В табл. 2 и на рис. 2 показана зависимость темпов наступления в тактической глубине от соотношения сил сторон и степени подготовленности обороны противника [28].

В годы корейской войны (1950—1953 гг.) темп наступления дивизий армии США составлял при прорыве обороны 2—3 км/сут, при преследовании — 10—17 км/сут [29]. По взглядам командования НАТО средний темп наступления в тактической зоне должен составлять до 25 км/сут, в оперативной глубине — до 80 км/сут [30].

В общем случае темп наступления при прорыве обороны зависит от характера местности, ее инженерного оборудования, тактических характеристик имеющегося вооружения и др. Названные факторы могут быть учтены в модели боя через показатель технологического превосходства α наступающих (инженерное оборудование местности обычно снижает его значение). Увеличение темпов

Таблица 2

Зависимость темпов осуществления маневра советских войск в наступательном бою в годы Великой Отечественной войны от соотношения в силах и средствах степени подготовленности обороны противника

Соотношение сил и средств по пехоте, артиллерии, танкам (среднее)	Темпы осуществления маневра при различной степени готовности обороны противника, км/ч			
	Оборона не подготовлена	Оборона слабо подготовлена	Оборона подготовлена	Оборона подготовлена полностью
3:1	0,4	0,3	0,2	0,15
4:1	0,55	0,4	0,3	0,2
5:1	0,7	0,5	0,35	0,25
6:1	0,85	0,6	0,4	0,3
7:1	—	0,75	0,5	0,33

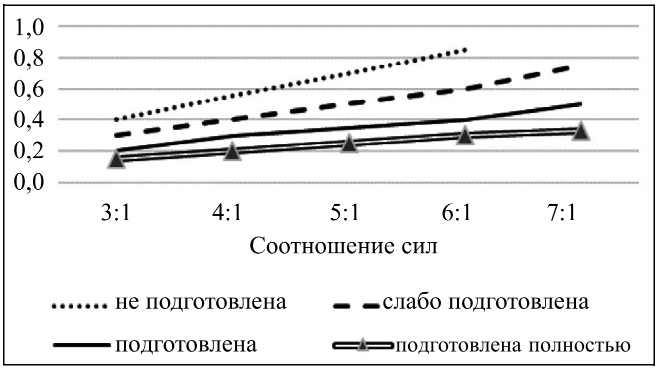

Рис. 2. Зависимость темпа наступления от соотношения сил и подготовки обороны

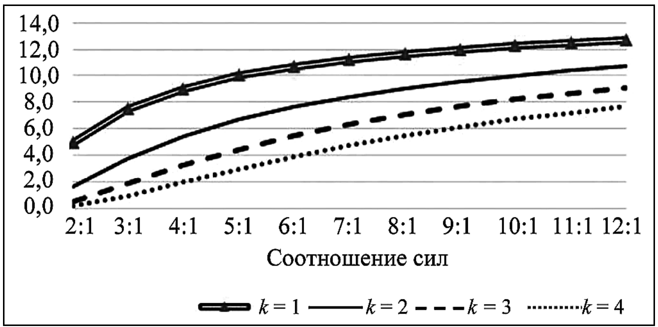

Рис. 3. Зависимость темпа наступления от соотношения сил при различных значениях параметра формы

наступления по сравнению с темпами, характерными для операций Великой Отечественной войны, может быть достигнуто путем применения БТР и БМП, способных вести эффективный огонь на ходу, разведывательно-огневых комплексов, механических средств разминирования и др.

В работе [31, *с. 251*] предложена формула для расчета темпа W наступления на обороняющуюся сторону:

$$W = \frac{q^2}{q^2 + 1},$$

которую целесообразно модифицировать с учетом данных военной статистики.

Примем допущения:

— при вероятности победы $p_x(x, y) \le 0{,}5$ темп наступления равен нулю;

— с увеличением вероятности победы темп наступления приближается к скорости группы в походном порядке с учетом характера местности и препятствий на ней.

Наиболее простое выражение для расчета темпа наступления:

$$W = 2^k W_0\left(\frac{q}{q+1} - 0{,}5\right)^k = W_0\left(\frac{q-1}{q+1}\right)^k, \quad q \ge 1, \qquad (5)$$

где W_0 — скорость перемещения наступающих в походном порядке с учетом характера местности, q — соотношение сил сторон, k — параметр формы, учитывающий возможности эффективного применения наступающими оружия в движении.

Данные из табл. 2 достаточно хорошо аппроксимируются моделью (5) при $k \approx 3$—4. На рис. 3 при $W_0 = 15$ км/ч показана зависимость темпов наступления от соотношения сил при различных значениях параметра формы k.

Из рисунка видно, что темп наступления можно существенно повысить путем изменения технологии прорыва обороны противника.

Количество обороняющихся, выделяемых в первый эшелон, должно обеспечивать своевременное выдвижение резерва на угрожаемое направление прорыва обороны и его развертывание в боевой порядок. С учетом данного условия обороняющимся назначается район обороны шириной s и глубиной g (см. рис. 1).

Перечислим виды маневра подразделений в бою [32]:

— обход — более глубокий маневр, совершаемый подразделениями для удара по противнику с тыла;

— охват — маневр, осуществляемый подразделениями в целях выхода для удара во фланг противнику;

— отход и смена района — маневр, применяемый в целях вывода своих войск из-под ударов превосходящих сил противника, выигрыша времени и занятия более выгодного рубежа (района).

Исходя из особенностей района обороны, степени его инженерного оборудования, ожидаемого маневра наступающих, обороняющиеся назначают для каждого пункта обороны минимальное число боевых единиц, сковывающих наступающих и вынуждающих их развернуться в боевой порядок.

В табл. 3 представлена зависимость суточных потерь наступающей стороны от начального соотношения сил [12]. Приведенные в таблице данные достаточно хорошо аппроксимируются выражением $L_x = a_x q^{-c}$, $a_x = 10$, $c = 0{,}5$, где L_x — среднесуточные потери наступающих в ходе операции; a_x — коэффициент потерь наступающих; c — параметр формы функции потерь.

Соответственно, потери L_y обороняющихся можно описать выражением $L_y = a_y q^{-c}$, где a_y — коэффициент потерь обороняющихся.

Таблица 3

Зависимость суточных потерь наступающей стороны от начального соотношения сил

Начальное соотношение сил	5:1	3:1	1:1
Суточные потери, %	3,5	7	10

Имея выражения для расчета темпа наступления и ожидаемых потерь, можно назначать различные критерии боевых действий, отражающих цели сторон и особенности обстановки.

2.3. Модель «наступление — оборона»

Цель наступления (обороны) определяется при непосредственном планировании и зависит от множества факторов: боевая обстановка на участке ответственности старшего начальника, расположение и маневренность войск и резервов, социальная обстановка, характер местности и т. д.

Каждой возможной цели наступающих и обороняющихся должен быть поставлен в соответствие критерий. Причем в общем случае игра может быть неантагонистической, например, цель наступающих заключается в максимизации минимального значения из двух вероятностей — вероятности прорыва пункта обороны первого эшелона и вероятности отражения атаки резерва и выхода на назначенный рубеж; цель обороняющихся — максимизация суммарного времени обороны на двух рубежах.

Поскольку, зная соотношение сил сторон и выражения для расчета темпа наступления и потерь, достаточно из всего многообразия целевых функций рассмотреть функции

$$F(u, w) = \min\left(\frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + R_y - w}, \frac{\delta u}{\delta u + w}\right),$$

$$B = \sum_{j=1}^{n} \beta_j, \qquad (6)$$

$$u_{\min} \le u \le R_x - u_{\min}, \quad w_{\min} \le w \le R_y - w_{\min}, \qquad (7)$$

где δ — параметр боевого превосходства второго эшелона наступающих над резервом обороны, $u_{\min} > 0$ ($w_{\min} > 0$) — малое значение боевых единиц первой (второй) стороны. Ограничения (7) отражают невырожденность двухэшелонного построения войск или требование наличия резерва.

Содержательно целевая функция означает, что наступающие стремятся так распределить силы и средства между эшелонами, чтобы обеспечить одинаково успешные и прорыв пунктов обороны (первого эшелона обороны), и отражение атаки резерва обороны (прорыв второго эшелона обороны). Иными словами, и наступающие, и обороняющиеся руководствуются принципом гарантированного результата при распределении ресурсов между эшелонами. Вместе с тем, в выражении (6) вместо минимума в ряде случаев представляется обоснованным взять произведение.

Задача не имеет решения в области чистых стратегий. Учитывая, что увеличение (сокращение) численности эшелона (резерва) происходит порциями, минимально по 5—10 единиц (отделение, группа), далее рассмотрим матричную антагонистическую игру с целевой функцией наступающих

$$F(u_k, w_k) = \min\left(\frac{B(R_x - u_k)}{B(R_x - u_k) + R_y - w_k}, \frac{\delta u_k}{\delta u_k + w_k}\right),$$

где u_k (w_k) — количество средств второго эшелона наступающих (резерва обороны) при k-й стратегии, $k = 1, ..., K$.

Для обозначения смешанных стратегий наступающих и обороняющихся будем пользоваться векторами

$$\pi = (\pi_1, ..., \pi_K), \quad \sum_{j=1}^{K} \pi_j = 1, \quad \pi_k \ge 0, \quad k = 1, ..., K,$$

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_K), \quad \sum_{j=1}^{K} \varphi_j = 1, \quad \varphi_k \ge 0, \quad k = 1, ..., K.$$

Решение матричной игры сводится к паре двойственных задач линейного программирования [26].

Пример 2. При исходных данных $n = 3$, $\beta = 0{,}7$, $\delta = 1{,}2$, $R_x = 300$, $R_y = 100$ (трехкратное превосходство наступающих над обороняющимися), $K = 9$ решена матричная антагонистическая игра (матрица игры представлена в табл. 4).

Решение игры представлено в табл. 5.

Наступающим целесообразно с вероятностью 0,66 назначать во второй эшелон 180 боевых единиц из $R_x = 300$, а в оставшихся случаях — 210 единиц ($\pi_6 = 0{,}66$; $\pi_7 = 0{,}34$). Соответственно, обороняющимся выгодно в 34 случаев из 100 выделять в резерв (второй эшелон обороны) 10 боевых единиц (позиционная оборона), а в оставшихся случаях — 90 единиц (мобильная оборона), $\varphi_1 = 0{,}34$, $\varphi_9 = 0{,}66$. Значения целевой функции $F(u_k, w_k)$, вероят-

Таблица 4

Матрица игры «наступление—оборона»

Число единиц 2-го эшелона	Число боевых единиц, выделенных обороной в резерв								
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
30	0,78	0,64	0,55	0,47	0,42	0,38	0,34	0,31	0,29
60	0,85	0,78	0,71	0,64	0,59	0,55	0,51	0,47	0,44
90	0,83	0,84	0,78	0,73	0,68	0,64	0,61	0,57	0,55
120	0,81	0,83	0,83	0,78	0,74	0,71	0,67	0,64	0,62
150	0,78	0,80	0,82	0,82	0,78	0,75	0,72	0,69	0,67
180	0,74	0,76	0,78	0,81	0,81	0,78	0,76	0,73	0,71
210	0,68	0,70	0,73	0,76	0,79	0,81	0,78	0,76	0,74
240	0,58	0,61	0,64	0,68	0,72	0,76	0,80	0,78	0,76
270	0,41	0,44	0,47	0,51	0,56	0,61	0,68	0,76	0,78

Таблица 5

Решение игры «наступление—оборона»

Число единиц 2-го эшелона, u_k	Число боевых единиц, выделенных обороной в резерв, w_k						Смешанная стратегия наступления
	10			90			
	$F(u_k, w_k)$	v^0	v^R	$F(u_k, w_k)$	v^0	v^R	
180	0,74	0,74	0,96	0,71	0,96	0,71	0,66
210	0,68	0,68	0,96	0,74	0,95	0,74	0,34
Смешанная стратегия обороны	0,34			0,66			–

ности v^0 прорыва пунктов обороны и вероятности v^R выхода на назначенный рубеж показаны в таблице.

Цена игры при этом равна 0,72, ожидаемые вероятности прорыва пунктов обороны и выхода на назначенный рубеж: $p^{(1)} = 0,88$, $p^{(2)} = 0,80$. ♦

Результаты решения задачи имеют содержательную интерпретацию с точки зрения военной науки и военного искусства. В частности, по взглядам командования армии США в зависимости от условий обстановки применяется или мобильная оборона (основные силы и средства выделяются в резерв или второй эшелон), или позиционная, когда основные силы и средства находятся в первом эшелоне.

Если модели боя рассматривать как элемент теории игр, то в них смешанные стратегии вычисляют, а их реализация предполагает применение рулетки, датчика случайных чисел и др. Вместе с тем, военачальники, владеющие искусством подготовки и осуществления боев, сражений и операций, принимая решения, в кратчайшие сроки проигрывают в уме множество возможных действий сторон, учитывают опыт предыдущих действий, стремятся обмануть противника нешаблонными действиями. Оперативно-тактические расчеты и сводки, которые готовит штаб, по меткому выражению К. Клаузевица [18] являются шпагой, а искусство командира есть искусство фехтования в условиях постоянной нехватки времени, данных и непрерывно меняющейся обстановке. Совокупность действий, тактических приемов, развернутая во времени (учет опыта предыдущих боев) и пространстве (учет опыта соседей и др.) образует реализацию, называемую в теории игр смешанными стратегиями.

Применение смешанных стратегий одной из сторон дает ей существенное преимущество. Г.К. Жуков, рассуждая о планировании Варшавско-Познаньской операции, отмечал [33]:

«У меня не было полной гарантии, что нам удастся оперативно-тактическая внезапность, а поэтому я шел на худшее и расчет строил также на худшее. Противник мог определить не только направление нашего удара, но он мог догадаться и о силе этого удара, а это главное. Не так страшно направление, как важно разгадать силу удара, чтобы своевременно подготовить соответствующие силы для противодействия...

Что противник мог сделать, когда бы он разгадал наш замысел? Он мог оставить в первом эшелоне обороны, т. е. на своем переднем крае, усиленное прикрытие, станковые пулеметы, ручное автоматическое оружие, отдельные пушки и даже поставить танки... Главные же силы он мог держать в 5—6 км от переднего края. Потеряв, наконец, от нашего первого удара 5—6 км территории и заставив нас расстрелять артзапасы, он достиг бы срыва нашей операции. Вы знаете, что для подвоза снарядов для артиллерийской подготовки по условиям коммуникаций требовался один месяц времени... После тщательного и всестороннего изучения обороны противника... решили генеральную атаку сразу не вести, так как не было полной гарантии, что данные, полученные от всех видов разведки за вчерашний день, не могут измениться к началу атаки...

Поэтому после тщательного изучения этих вопросов и обсуждения их с командующими, начальниками родов войск, командирами соединений и со штабными офицерами мы пришли к выводу: лучше пойти на обман во время самой атаки, а для этого должна быть проведена ложная атака, но такая ложная атака, которую противник не распознал бы, что она ложная. Значит, сила артудара, сила атаки не должны вызвать какое-либо подозрение у противника, и если окажется, что противник будет захвачен врасплох, дрогнет и не выдержит этого удара, мы используем этот успех, немедленно перейдем в атаку всеми силами и будем осуществлять свой генеральный план, т. е будем вести генеральную атаку. Допустим, что противник пошел все же на обман и очистил бы территорию на 3—5 км, дал возможность нашему первому эшелону атаки приблизиться к истинному переднему краю, а там бы его остановил и атака бы захлебнулась. В этом случае максимум через 1—1,5 ч после передачи соответствующих команд и распоряжений мы могли перейти к плану осуществления артподготовки генеральной атаки».

Расчетное число единиц первого эшелона наступающих, равное 300 − 210 = 90 (см. пример 1 и табл. 4), — это «ложная атака», 300 − 180 = 120 — «генеральная атака». Стратегия обороны: выделить в первый эшелон 10 или 90 ед. из 100 имеющихся — это попытка ввести наступающих в заблуждение, заставив их попусту израсходовать ресурсы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена вероятностная модель боя, основанная на определении и принципах боя и учитывающая моральные и технологические характеристики сторон конфликта. Моральный фактор характеризуется процентом выдерживаемых кровавых потерь, при котором войска (боевые единицы) еще способны выполнять поставленные задачи. Технологический фактор определяется показателями: опытом и искусством командиров, возможностями по разведке, маневром и огневым поражением противника. Методом максимального правдоподобия найдена оценка параметра боевого превосходства. Рассмотрена задача масштабирования модели боя.

Сформулирована и решена теоретико-игровая задача «наступление — оборона», в которой учитываются действия первых и вторых эшелонов сторон. Задача состоит из подзадачи прорыва обороны первым эшелоном наступающих и подзадачи распределения ресурсов между эшелонами. Найдено решение игры и рассмотрен содержательный пример, отражающий опыт боевых действий в годы Великой Отечественной войны.

Из анализа данных по наступательным операциям Красной Армии 1944—1945 гг. получены зависимости темпа наступления и потерь от начального соотношения сил и средств сторон.

Перспективные направления дальнейших исследований: нахождение равновесия Штакельберга в игре «наступление — оборона», постановка и решение задач информационного и рефлексивного управления боевыми действиями и др. Кроме того, значительный интерес представляет апробация модели на реальных данных военной статистики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осипов М.П.* Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. — 1915. — № 6. — С. 59—74; № 7. — С. 25—36; № 8. — С. 31—40; № 9. — С. 25—37. [*Osipov, M.P.* The influence of the number of parties fighting on their losses // Voennyj sbornik. — 1915. — No. 6. — P. 59—74; No. 7. — P. 25—36; No. 8. — P. 31—40; No. 9. — P. 25—37. (In Russian)]
2. *Lanchester, F.W.* Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. — London: Constable and Co, Ltd., 1916. — 243 p.
3. *Borel, E.* La théorie du jeu les équations intégrales á noyau symétrique // Comptes Rendus de l'Académie. — 1921. — Vol. 173. — P. 1304—1308.
4. *Borel, E., Ville, J.* Application de la theorie des probabilites aux jeux de hasard, original edition by Gauthier-Villars. — Paris, 1938; reprinted in Theorie mathematique du bridge a la portee de tous, by E. Borel and A. Cheron, Editions Jacques Gabay. — Paris, 1991.
5. *Morse, P.M., Kimball, G.E.* Methods of Operations Research. — Cambridge, MA: Technology Press of MIT; N.-Y.: John Wiley & Sons, 1951. — 158 p.
6. *Новиков Д.А.* Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 37. — С. 25—62. [*Novikov, D.A.* Hierarchical models of hostilities // Upravlenie bol'shimi sistemami. — 2012. — Vyp. 37. — P. 25—62. (In Russian)]
7. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. — 384 с. [*Germejer, Yu.B.* Introduction to Operations Research Theory. — M.: Nauka, 1971. — 384 p. (In Russian)]
8. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964. — 835 с. [*Karlin, S.* Mathematical methods and theory in games, programming, and economics. — London—Paris: Pergamon press, 1959.]
9. *Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.* Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Сер. «Прикладная математика». — 2013. — № 3 (30). — С. 83—95. [*Perevozchikov, A.G., Lesik, I.A.* The simplest model of a layered air defense system // Vestnik TvGU. Ser. «Prikladnaya matematika». — 2013. — No. 3 (30). — P. 83—95. (In Russian)]
10. *Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Шаповалов Т.Г.* Многоуровневое обобщение модели «нападение-оборона» // Вестник ТвГУ. Сер. «Прикладная математика». — 2017. — № 1. — С. 57—69. [*Perevozchikov, A.G., Reshetov, V.Yu., Shapovalov, T.G.* Multilevel generalization of the attack-defense model // Vestnik TvGU. Ser. «Prikladnaya matematika». — 2017. — No. 1. — P. 57—69. (In Russian)]
11. *Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.* Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением // Прикладная математика и информатика. — 2015. — № 49. — С. 80—96. [*Reshetov, V.Yu., Perevozchikov, A.G., Lesik, I.A.* A model for overcoming a multi-level attack defense system // Prikladnaya matematika i informatika. — 2015. — No. 49. — P. 80—96. (In Russian)]
12. *Цыгичко В.И., Стоили Ф.* Метод боевых потенциалов: история и настоящее // Военная мысль. — 1997. — № 4. — С. 23—28. [*Cygichko, V.I., Stoili, F.* The method of combat potentials: history and present // Voennaya mysl'. — 1997. — No. 4. — P. 23—28. (In Russian)]
13. *Медин А.* Имитационная система JTLS // Зарубежное военное обозрение. — 2010. — № 2. — С. 31—34. [*Medin, A.* JTLS Simulation System // Zarubezhnoe voennoe obozrenie. — 2010. — No. 2. — P. 31—34. (In Russian)]
14. *Костяев Н.И., Кучаров В.Н.* Единая система управления в тактическом звене // Армейский сборник. — 2011. — № 3 (202). — С. 18—23. [*Kostyaev, N.I., Kucharov, V.N.* Unified tactical management system // Armejskij sbornik. — 2011. — No. 3 (202). — P. 18—23. (In Russian)]
15. *Bonder, S.* Army Operations Research — Historical Perspectives and Lessons Learned // Operation Research. — 2002. — Vol. 50, no. 1. — P. 25—34.
16. *Шумов В.В.* Иерархия моделей боевых действий и пограничных конфликтов // Управление большими системами. — 2019. — Вып. 79. — С. 86—111. [*Shumov, V.V.* Hierarchy of models of hostilities and border conflicts // Upravlenie bol'shimi sistemami. — 2019. — Vyp. 79. — P. 86—111. (In Russian)]
17. *Шумов В.В., Цезарь Д.А.* Вероятностная модель борьбы с пиратскими и террористическими актами в морском пространстве // Системы управления и информационные технологии. — 2019. — № 1 (75). — С. 97—100. [*Shumov, V.V., Cezar', D.A.* A probabilistic model for combating pirate and terrorist acts in the sea // Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii. — 2019. — No. 1 (75). — P. 97—100. (In Russian)]
18. *Клаузевиц К.* О войне. — М.: Госвоениздат, 1934. [*Clausewitz, K.* Vom Krieg. 1832/34.]

19. *Головин Н.Н.* Исследование боя. Исследование деятельности и свойств человека как бойца. Кн. 2. Статьи и письма. — М.: ВАГШ, 1995. — 303 с. [*Golovin, N.N.* Battle research. The study of the activities and properties of man as a fighter. Prince 2. Articles and letters. — M.: VAGSH, 1995. — 303 p. (In Russian)]
20. *Головин Н.Н.* Наука о войне. О социологическом изучении войны. — Париж: Изд-во газеты «Сигнал», 1938. — 242 с. [*Golovin, N.N.* The science of war. On the sociological study of war. — Parizh: Izd-vo gazety «Signal», 1938. — 242 p. (In Russian)]
21. *Война* и мир в терминах и определениях: военно-политический словарь / под общ. ред. Д. Рогозина. — М.: ПоРог, 2004. — 334 с. [*War* and peace in terms and definitions: a military-political dictionary / pod obshch. red. D. Rogozina. — M.: PoRog, 2004. — 334 p. (In Russian)]
22. *Исаев А.* Георгий Жуков. Последний довод короля. — М.: Яуза, Эксмо, 2006. — 480 с. [*Isaev, A.* George Zhukov. King's last argument. — M.: Yauza, Eksmo, 2006. — 480 p. (In Russian)]
23. *Краткий* словарь оперативно-тактических и общевоенных слов (терминов). — М.: Воениздат, 1958. — 323 с. [*A brief* dictionary of operational-tactical and general words (terms). — M.: Voenizdat, 1958. — 323 p. (In Russian)]
24. *История* Второй мировой войны 1939—1945. — Т. 9. — М.: Воениздат, 1978. — 574 с. [*History* of the Second World War 1939—1945. — Vol. 9. — M.: Voenizdat, 1978. — 574 p. (In Russian)]
25. *Цена* Победы: сколько стоил Т-34, Ил-4 и автомат ППШ. — URL: https://militaryarms.ru/novosti/cena-pobedy/ (дата обращения: 14.06.2019). [*Victory* price: how much T-34, Il-4 and PPSh machine cost (In Russian)]
26. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики: учеб. пособие. — М.: Макс-Пресс, 2005. — 278 с. [*Vasin, A.A., Morozov, V.V.* Game Theory and Models of Mathematical Economics: A Study Guide. — M.: Maks-Press, 2005. — 278 p. (In Russian)]
27. *Гуров С.Г.* Боец и отделение на походе. — М.: Воениздат, 1941. — 46 с. [*Gurov, S.G.* Soldier and squad on a campaign. — M.: Voenizdat, 1941. — 46 p. (In Russian)]
28. *Воробьев И.Н., Киселев В.А.* Ударом во фланг и тыл учитесь громить врага // Армейский сборник. — Май 2009. — С. 35—38. [*Vorob'ev, I.N., Kiselev, V.A.* Blow to the flank and rear learn to smash the enemy // Armejskij sbornik. — Maj 2009. — P. 35—38. (In Russian)]
29. *Военная* история: учебник для вузов МО РФ. — М.: Воениздат, 2006. — 469 с. [*Military* history: uchebnik dlya vuzov MO RF. — M.: Voenizdat, 2006. — 469 p. (In Russian)]
30. *Ахметов Р.Р.* Инженерные войска иностранных армий: учебное пособие. — Омск: СибАДИ, 2011. — 102 с. [*Ahmetov, R.R.* Foreign Army Engineering Troops: Tutorial. — Omsk: SibADI, 2011. — 102 p. (In Russian)]
31. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 264 с. [*Krasnoshchekov, P.S., Petrov, A.A.* Principles of model building. — M.: Izd-vo MGU, 1983. — 264 p. (In Russian)]
32. *Общая* тактика: учебник / под общ. ред. Ю.Б. Торгованова: 2-е изд., испр. и доп. — Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2017. — 346 с. [*General* tactics: uchebnik / pod obshch. red. YU.B. Torgovanova: 2-e izd., ispr. i dop. — Krasnoyarsk: Sib. feder. un-t, 2017. — 346 p. (In Russian)]
33. *Речь* Г.К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г. // Военная мысль. — 1985. — Спец. вып. (февраль). — С. 3, 17—33. [Speech G.K. Zhukov at the military scientific conference, December 1945 // Voennaya mysl'. — 1985. — Spec. vyp. (fevral'). — P. 3, 17—33. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 07.02.2019, после доработки 06.07.2019.
Принята к публикации 02.08.2019.

Шумов Владислав Вячеславович — д-р техн. наук, доцент, Международная академия информатизации, г. Москва, ✉ v.v.shumov@yandex.ru.

Международная академия информатизации, г. Москва.

EXPANSION OF THE «ATTACK — DEFENSE» MODEL

V.V. Shumov

International Informatization Academy, Moscow, Russia
✉ v.v.shumov@yandex.ru

Abstract. A probabilistic model of combat based on the principles of warfare and the definition of combat is considered. The parameter of combat superiority takes into account the moral and technological characteristics. Its estimation by the maximum likelihood method is proposed. The «attack-defense» model is formulated, taking into account the two-tier formation of troops (implementation of the next and subsequent tasks). The solution of three problems connected with search is found: 1) distribution of means between the points of defense; 2) quantity (share) of the means allocated in the second echelon (reserve); 3) the rate of movement of units in battle and their losses. The first problem is solved using the Y.B. Germeyer's generalized principle of equalization. Within the second problem reducing the game to an antagonistic matrix type allowed us to find optimal solutions for the distribution of forces of the parties between the echelons. It is shown that the decision of the game has a meaningful interpretation from the military science point of view (positional and mobile defense). To solve the third problem, military statistics data were used. The applicability of the presented models during command-staff and experimental exercises is shown on concrete examples.

Keywords: model of battle, Gross' model, Germeyer's model, echelonment of troops, assessment of parameters.