



# ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ СОБЛЮДЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ТРЕБОВАНИЙ

П.С. Щербakov

Работа посвящена развитию простого и эффективного подхода к синтезу регуляторов, предложенного в 1999 г. О.Н. Киселевым и Б.Т. Поляком, и его исследованию применительно к решению задачи стабилизации режима электроэнергетической системы. Подход заключается в построении множества всех допустимых регуляторов заданной структуры (либо генерировании их случайным образом) с последующей возможностью выбора среди них наилучшего по тому или иному инженерному критерию. Исследован также робастный вариант метода при наличии параметрической неопределенности в системе и дано обобщение на регуляторы более сложной структуры.

**Ключевые слова:** регуляторы фиксированной структуры,  $D$ -разбиение, робастность, рандомизация.

## ВВЕДЕНИЕ

При стабилизации систем на практике повсеместно используются комбинации простых типовых регуляторов, что, прежде всего, объясняется простотой их настройки. Этому посвящена обширная литература, например, [1, 2]. В общем случае, как известно [3, 4], задача построения стабилизирующего регулятора заданной структуры сложна, поскольку сводится к отысканию устойчивого полинома в данном семействе полиномов.

Обеспечение для замкнутой системы заданных свойств (помимо устойчивости) часто наталкивается на дополнительные трудности, связанные с тем, что в технических системах эти свойства обычно представлены в инженерных терминах и поэтому трудно формализуемы. Еще сложнее выбрать оптимальный регулятор в этих условиях, поскольку, как правило, не удается сформировать единый функционал качества. Не будет преувеличением сказать, что к решению задач такого рода в общем виде не существует универсального подхода; имеются лишь рецепты для различных частных случаев, использующие специфику конкретной задачи (см., например, работы [5–7]). Имеющиеся в литературе «регулярные» методики построения регуляторов, оптимальных по тому или иному критерию, имеют ряд недостатков: они сложны в реализации, приводят к регуляторам высоких порядков, получающиеся регуляторы часто теряют свойство

стабилизируемости при малых изменениях своих параметров и т. д., [8, 9].

В работе [10] была предложена следующая полувыверстическая схема построения простых регуляторов. Ограничившись передаточной функцией регулятора вида  $(\tau s + 1)/(v s + 1)$ , содержащей два настраиваемых вещественных параметра  $\tau$  и  $v$ , видим, что характеристический полином замкнутой системы зависит от них линейно. С помощью техники  $D$ -разбиения ([11, 12]) на плоскости  $\{\tau, v\}$  можно построить область, отвечающую устойчивости. Далее, выбирая с помощью «мыши» на экране компьютера ту или иную точку в этой области допустимых регуляторов, вычисляем значение оптимизируемого критерия. Процесс завершается по нахождению приемлемого регулятора. Такая интерактивная процедура проста с вычислительной точки зрения, дает все множество допустимых регуляторов и, кроме того, часто приводит к лучшим значениям критерия.

В настоящей статье этот подход развивается в нескольких направлениях (предварительный вариант данной работы см. в публикации [13]). Прежде всего, при построении допустимой области учитывается ряд дополнительных — помимо устойчивости — требований к регулятору и замкнутой системе, таких как устойчивость и минимально-фазовость регулятора, ограничение сверху на его коэффициент усиления, ограничения снизу на степень устойчивости и коэффициент затухания замкнутой системы. Это достигается путем элементарной модификации процедуры  $D$ -разбиения.

Далее, за критерий оптимальности приняты типичные инженерные показатели — время успокоения и значение перерегулирования. Кроме того, все построения обобщаются на робастную постановку задачи, когда в коэффициентах передаточной функции объекта присутствует интервальная неопределенность; это достигается путем робастной модификации процедуры  $D$ -разбиения. Наконец, поскольку в «бедном» семействе двухпараметрических регуляторов, возможно, не удастся найти приемлемый (или даже стабилизирующий), то рассматривается обобщение подхода на регуляторы, содержащие более двух параметров. В этом случае наглядная визуализация допустимой области затруднена, однако удается описывать ее неявно, путем случайного генерирования точек в ней на основе метода случайных блужданий типа Hit-and-Run [14, 15].

Рассматриваемая методика предоставляет проектировщику целый спектр регуляторов, отвечающих заданным спецификациям; из них легко выбрать наиболее приемлемый, руководствуясь указанными инженерными требованиями.

Рассматриваемый подход применен к широко распространенной модели Хеффона—Филипса [16], описывающей процессы перетока мощностей в реальных электроэнергетических системах. Задача заключается в построении такого регулятора заданной структуры (типового), который бы сохранял устойчивость системы и некоторым оптимальным образом переводил ее в установившийся послеаварийный режим работы. Результаты моделирования показывают, что, применяя указанную методику, удастся легко построить регулятор, зависящий всего от двух параметров, который по всем показателям значительно превосходит гораздо более сложный регулятор третьего порядка (содержащий шесть параметров), известный из литературы [17, 18]. Более того, и для робастной постановки задачи удастся построить простой регулятор, который стабилизирует интервальное семейство объектов при более высоком уровне неопределенности, чем регулятор из работ [17, 18], и обладает более высоким качеством для случайно выбираемого элемента семейства.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ АНАЛИЗ

### 1.1. Задачи стабилизации энергосистем

Современные электроэнергетические сети представляют собой сложные многосвязные динамические системы, подверженные различного рода возмущениям. Так, в нормальном режиме работы постоянно имеют место изменения нагрузки, ко-

торые сопровождаются перетоками мощности по линиям электропередач и должны покрываться генераторами. При некоторых конфигурациях сети небольшие изменения нагрузки или генерации приводят к существенным колебаниям мощности между подсистемами. С другой стороны, короткие замыкания, отключения цепей линий электропередач, отказы оборудования и другие неполадки требуют в некотором смысле оптимального перевода системы в установившийся (послеаварийный) режим. Основная цель при управлении переходными процессами в энергосистеме состоит в сохранении ее устойчивости или переводе ее в такой новый режим с минимально возможным числом качаний роторов генераторов [6].

Для описания элементов энергосистем с большим числом генераторов, линий передач и нагрузок, действующих в условиях возмущений и реализующих некоторые простейшие схемы, традиционно применяются линейные дифференциальные уравнения. Одной из таких наиболее распространенных моделей является модель Хеффона—Филипса [16], которая и будет рассматриваться далее.

Для обеспечения устойчивости энергосистемы необходимо надлежащим образом изменять мощность генераторов путем подачи дополнительных сигналов от управляющего органа — так называемого системного стабилизатора. По современным представлениям системный стабилизатор следует выбирать в виде динамического регулятора (по возможности минимального порядка), реализующего ту или иную форму закона ПИД-управления [6].

### 1.2. Математическая постановка и требования к системе

Исходя из сказанного, рассматриваем следующую математическую модель. Имеется скалярный объект с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}, \quad (1)$$

где полиномы  $n_G(s)$ ,  $d_G(s)$  известны, и регулятор

$C(s) = \frac{n_C(s)}{d_C(s)}$  заданной структуры:

$$C(s) = \frac{\tau_1 s}{v_1 s + 1} \cdot \frac{\tau_2 s + 1}{v_2 s + 1} \cdots \frac{\tau_m s + 1}{v_m s + 1}, \quad (2)$$

где  $\tau_i, v_i \in \mathbb{R}$  — параметры, подлежащие выбору, а  $m$  — число звеньев, которое по возможности следует минимизировать.

Цель состоит в отыскании значений параметров (если таковые имеются), которые бы обеспе-



чивали замкнутой системе заданные свойства. Под свойствами понимаем следующее.

P1. Устойчивость и степень устойчивости  $\sigma = -\max_i \operatorname{Re} s_i$ , где  $s_i$  — корни характеристического полинома замкнутой системы.

P2. Степень колебательности  $\chi = 1/\xi$ ,  $\xi = \min_i |\operatorname{Re} s_i / \operatorname{Im} s_i|$ .

P3. Время успокоения  $t_s = \min\{T: |\pi(t)| < \varepsilon \forall t \geq T\}$  для некоторого заданного  $\varepsilon > 0$  (время попадания в  $\varepsilon$ -трубку).

P4. Перерегулирование  $h = \max_{t \geq 0} |\pi(t)|$  (максимальное по абсолютной величине значение переходной функции).

Для удовлетворительного функционирования системы требуется так выбирать коэффициенты регулятора, чтобы величины  $\sigma$  и  $\xi$  принимали большие значения, а  $t_s$  и  $h$  были бы по возможности малы. Исходя из технологических требований, предъявляемых к современным энергосистемам [6], за желаемые показатели качества системы принимаются следующие:

$$\sigma \geq 0,4; \quad \xi \geq 0,15; \quad t_s \leq 2 \text{ при } \varepsilon = 0,005; \\ h \leq 0,015. \quad (3)$$

Особенность модели (1) Хеффона—Филлипса состоит в ее асимптотической устойчивости и наличии длиннопериодических слабозатухающих колебаний. Поэтому обычно синтез регуляторов для этой модели осуществляется прежде всего в целях гашения таких колебаний, причем за возможно более короткое время. Таким образом, основные оптимизируемые показатели в данной модели — время успокоения  $t_s$ , перерегулирование  $h$  и степень колебательности  $\chi$ .

Кроме того, сам регулятор должен обладать следующими свойствами.

C1. Быть устойчивым и минимально-фазовым:  $\tau_i, v_i > 0$ .

C2. Иметь невысокий коэффициент усиления, т. е. величина  $g = \prod_{i=1}^m \tau_i / \prod_{i=1}^m v_i$  не должна быть очень большой.

C3. Иметь порядок  $m$  не выше заданного.

Выбор структуры регулятора в виде (2) объясняется тем, что при реализации регуляторов на практике часто применяются типовые звенья вида  $(\tau s + 1)/(v s + 1)$ , и при этом имеется возможность наращивать такую структуру, повышая при необходимости порядок регулятора.

С технической точки зрения, инженерный характер предъявляемых к системе требований опре-

деляется сложностью формализации нормативных ограничений, что приводит, в частности, к многокритериальности общей задачи управления энергосистемой и, как следствие, невозможности полностью удовлетворить всем требованиям, в том числе и в рамках рассматриваемого подхода. Предлагаемая методика ставит своей целью предложить проектировщику набор субоптимальных решений; окончательный выбор осуществляется им на основе опыта и иных неформальных соображений.

### 1.3. Модель объекта и анализ свойств известного регулятора

Моделью конкретного объекта, изучаемого в работе, служит скалярная передаточная функция

$$G(s) = -(73,321s^3 + 153,74s^2 + 146,419s)/(s^7 + 42,373s^6 + 549,823s^5 + 2349,217s^4 + 8667,712s^3 + 20561,931s^2 + 27641,875s + 21389,004), \quad (4)$$

которая описывает изменения скольжения генератора при изменении управляющего сигнала, поступающего от системного стабилизатора. В установленном режиме скольжение равно нулю, что соответствует успокоению качаний ротора генератора.

Для этого объекта в работе [17] со ссылкой на статью [18] приведен регулятор третьего порядка

$$C(s) = \frac{10s}{10s+1} \left( \frac{0,44s+1}{0,092s+1} \right)^2, \quad (5)$$

подключаемый с положительной обратной связью и предназначенный для демпфирования электро-механических колебаний в электроэнергетической системе.

Отметим, что регулятор (5) имеет коэффициент усиления  $\bar{g} \approx 22,8733$ ; далее при построении простых регуляторов в § 2 будем ограничивать их коэффициент усиления  $g$  этой величиной:  $g \leq \bar{g}$ .

Вычисляя значения показателей качества (см. таблицу), видим, что регулятор (5) не удовлетворяет требованиям (3) и даже ухудшает степень устойчивости замкнутой системы.

Показатель	$\sigma$	$\xi$	$t_s$	$h$
Желаемое значение	0,4	0,15	2,0	0,015
Разомкнутая система	0,2114	0,0663	5,9700	0,0171
Замкнутая система	0,1001	0,0920	4,0600	0,0166

Более того, оказывается, что более простой регулятор второго порядка

$$C(s) = \frac{47,826s}{10s+1} \cdot \frac{0,44s+1}{0,092s+1}, \quad (6)$$

который получается из регулятора (5) исключением одного звена и выравниванием коэффициента усиления до  $g = \bar{g}$ , приводит к лучшим показателям для замкнутой системы.

Это наблюдение говорит в пользу того, что в классе более простых регуляторов, возможно, удастся найти приемлемый. Таким образом, цель последующего изложения состоит в нахождении такого регулятора для объекта (4), который бы, прежде всего, удовлетворял указанным выше требованиям, а также был бы как можно более простым.

## 2. ПРЯМОЙ ПОИСК В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

### 2.1. Метод $D$ -разбиения

Обратимся к предлагаемому способу построения простых регуляторов. Прежде всего, в семействе (2) ограничимся регуляторами первого порядка вида

$$C_2(s, k_1, k_2) = \frac{k_1 s}{k_2 s + 1}, \quad (7)$$

которые зависят лишь от двух параметров  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда характеристический полином системы, замкнутой регулятором (7) в цепи положительной обратной связи, имеет вид

$$p_c(s, k) = p_0(s) + k_1 p_1(s) + k_2 p_2(s), \\ \deg p_c(s, k) = n, \quad (8)$$

где обозначено  $p_0(s) = d_G(s)$ ,  $p_1(s) = -s n_G(s)$ ,  $p_2(s) = s d_G(s)$ , а  $n_G(s)$  и  $d_G(s)$  — полиномы в числителе и знаменателе передаточной функции объекта (1). Этот полином линейно зависит от двух параметров, поэтому, пользуясь методом  $D$ -разбиения плоскости  $\{k_1, k_2\}$ , можем построить область  $D_{st} = \{(k_1, k_2): p_c(s, k) \text{ устойчив}\}$  всех регуляторов вида (7), стабилизирующих объект (1).

Для того чтобы подчеркнуть вычислительную простоту метода, предлагаемому ниже для построения стабилизирующих регуляторов, кратко напомним идею метода  $D$ -разбиения.

Если при каком-то значении параметров  $k_1$  и  $k_2$  полином  $p_c(s, k)$  (8) имеет ровно  $m \leq n$  устойчивых корней  $\text{Re } s_i < 0$ , то при варьировании  $k_1$  и  $k_2$  их число может измениться, лишь если изменится

степень полинома или некоторые из корней пересекут мнимую ось. Вторым случаем соответствует существованию решения уравнения  $p_c(j\omega, k_1, k_2) = 0$  при некотором  $\omega \geq 0$ . При фиксированном  $\omega$  это уравнение представляет собой систему двух *линейных* относительно  $k_1$  и  $k_2$  уравнений, соответствующих вещественной и мнимой частям полинома  $p_c(j\omega, k_1, k_2)$ , и их решение не представляет труда. Эти решения, таким образом, дают параметрические уравнения границы области  $D_m$  на плоскости  $\{k_1, k_2\}$ , внутри которой число устойчивых корней неизменно, и нас интересует лишь область устойчивости  $D_n = D_{st}$ . Мы не приводим аккуратного описания методики построения  $D$ -разбиения и выделения области  $D_{st}$ ; эта техника подробно разработана, детали и обобщения можно найти, например, в работах [11, 12].

Теперь осталось учесть дополнительные ограничения; именно, в области  $D_{st}$  выбираем лишь точки, удовлетворяющие условиям  $k_2 > 0$  (требование устойчивости регулятора) и  $k_1/k_2 \leq \bar{g}$  (ограничение на коэффициент усиления). Все такие регуляторы называем *допустимыми*, а соответствующую область на плоскости обозначаем через  $D_{feas}$ .

В результате такой простой вычислительной процедуры получаем явное описание *всех* регуляторов вида (7), которые стабилизируют объект и удовлетворяют требованиям С1 — С3. Далее, выбираем с помощью «мыши» на экране компьютера ту или иную точку в двумерной области  $D_{feas}$ , строим переходную функцию замкнутой системы, например, с помощью стандартной процедуры `step` в системе Matlab, и вычисляем значения показателей качества. Работа прекращается по нахождении регулятора, удовлетворяющего проектировщика.

Впервые общая идея такого подхода была сформулирована в работе [10]; там же его работоспособность была продемонстрирована на ряде простых тестовых задач, известных из литературы, но не имеющих реального физического происхождения. В настоящей работе ставится цель продемонстрировать эффективность этого подхода к решению важной практической задачи — стабилизации режимов электроэнергетической системы. При этом вместо  $H_\infty$ -критерия оптимальности регуляторов, который в основном использовался в работе [10], мы рассматриваем инженерные критерии п. 1.2. Наконец, в работе [10] допустимая область представляла собой лишь множество стабилизирующих регуляторов, причем первого порядка (т. е. зависящих от двух параметров). В настоящей работе при построении допустимой области поми-



мо устойчивости учитываются и некоторые иные требования; кроме того, обсуждается один из путей построения регуляторов более высокого порядка, зависящих от большего числа параметров.

Предлагаемый подход не гарантирует отыскания желаемого регулятора. Более того, область  $D_{feas}$  может оказаться пустой, что означает невозможность даже стабилизировать имеющийся объект простыми регуляторами вида (7) при предъявляемых к ним требованиях. Однако такой прямой поиск дает удобное средство отыскания инженерного решения, условия самого существования которого трудно формализуемы.

**2.2. Результаты численного решения**

Перейдем к решению поставленной задачи для объекта (4). На рис. 1 в плоскости параметров  $\{k_1, k_2\}$  изображена область  $D_{st}$  всех регуляторов вида (7), стабилизирующих объект (4) (ограничена жирными кривыми), построенная с помощью  $D$ -разбиения. Прямая  $k_1 = \bar{g}k_2$  учитывает ограничение на коэффициент усиления. Если по природе задачи имеются дополнительные ограничения на параметры типа  $\underline{k}_i \leq k_i \leq \bar{k}_i$ , то учесть их также не составляет труда.

Видим, что область  $D_{st}$  не ограничена, что может затруднить поиск. Однако видоизменив процедуру  $D$ -разбиения, можно вместо области  $D_{st}$  строить ограниченную область  $D_\sigma$ , внутри которой полином (8) имеет *степень устойчивости* не

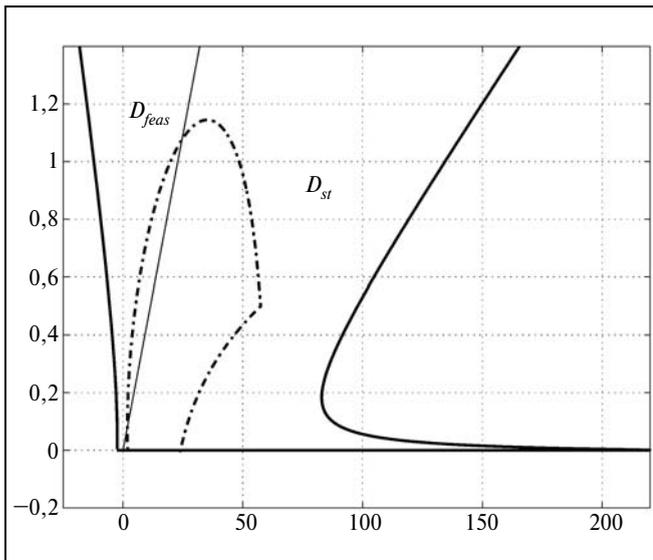


Рис. 1. Область стабилизирующих и допустимых регуляторов вида (7)

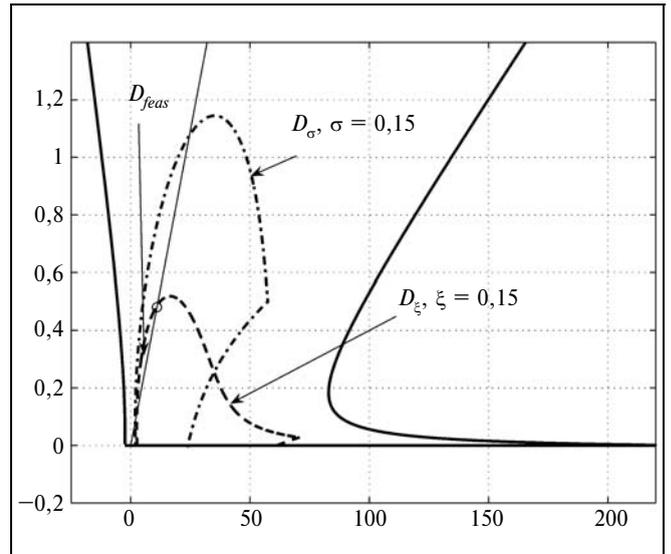


Рис. 2. Область  $D_\xi$  заданной степени колебательности  $\xi \geq 0,15$  для объекта, замкнутого регулятором вида (7)

меньше некоторой  $\sigma$  (тем самым выполняя требование P1 с заданной степенью устойчивости  $\sigma$ ). Для этого при изменении параметров  $k_1$  и  $k_2$  надо учитывать пересечение корнями не мнимой оси  $\{j\omega\}$ , а прямой  $\{-\sigma + j\omega\}$ . На рис. 1 граница соответствующей области при  $\sigma = 0,4$  изображена штрих-пунктирной линией, а ее пересечение с полуплоскостью  $k_1 \leq \bar{g}k_2$  выделяет ту часть области  $D_{feas}$ , в которой и надо производить поиск.

Более того, используя аналогичную модификацию  $D$ -разбиения, можно с ее помощью строить область  $D_\xi$ , внутри которой значение *показателя колебательности* замкнутой системы не меньше заданного  $\xi$  (тем самым выполняя требование P2). Для этого при изменении параметров  $k_1$  и  $k_2$  надо учитывать пересечение корнями границы сектора  $\{-\xi\omega \pm j\omega, \omega \geq 0\}$ . На рис. 2 область  $D_\xi$  изображена штриховой линией. Теперь в качестве области  $D_{feas}$  нужно принять пересечение всех полученных областей.

В результате поиска в полученной области не сложно получить один из регуляторов

$$C_2(s, k_1, k_2) = \frac{11s}{0,4809s + 1} \tag{9}$$

(изображен кружком на рис. 2), который дает лучший, чем регулятор (5), переходный процесс (рис. 3) с показателями  $\sigma \approx 0,5633$ ,  $\xi \approx 0,1511$ ,  $t_s \approx 2,04$ ,  $h \approx 0,0153$ .

Таким образом, среди очень простых регуляторов (зависящих всего от двух параметров) легко

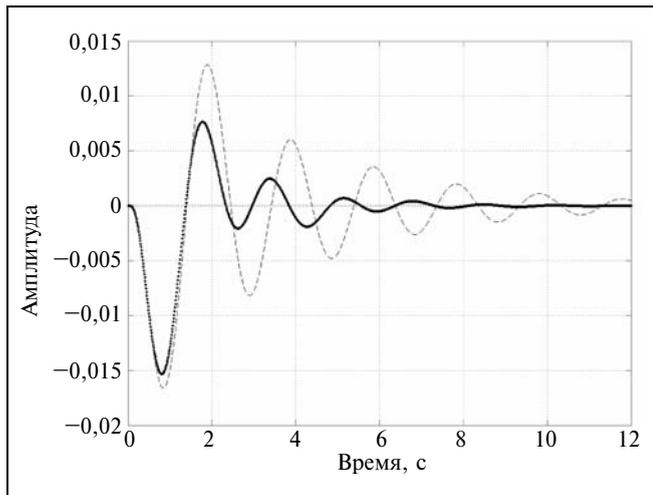


Рис. 3. Переходные функции для системы с исходным регулятором (5) и регулятором (9) (жирная линия)

нашли тот, который по всем показателям существенно лучше гораздо более сложного исходного регулятора (5) и в целом удовлетворяет ограничениям С1—С3 и требованиям (3).

### 3. РОБАСТНАЯ МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ

#### 3.1. Параметрическая неопределенность в объекте

На практике математическая модель объекта управления, как правило, не бывает известна точно. В настоящем исследовании мы придерживаемся концепции параметрической неопределенности, полагая, что степени полиномов в числителе и знаменателе передаточной функции объекта известны (и неизменны), а их коэффициенты  $p_i$  содержат неопределенность интервального характера, причем отклонения от номиналов составляет не более  $100\gamma$  процентов:

$$p_i = p_i^0 - \gamma|p_i^0| \leq p_i \leq p_i^0 + \gamma|p_i^0| = \bar{p}_i, \quad \gamma \geq 0, \quad (10)$$

где  $p_i^0$  — номинальные значения, равные заданным в передаточной функции (4). Такая модель соответствует ситуации, когда значения параметров объекта известны с точностью до некоторых технологических допусков, получены в результате идентификации по наблюдениям, зашумленным случайными помехами и т. д. Эта ситуация характерна и для электроэнергетики: на практике математические модели энергосистем строятся на основе информации, получаемой от различных

систем мониторинга, имеющих различную достоверность и точность. В рассматриваемых задачах эта неопределенность составляет единицы процентов, т. е.  $\gamma = 0,03 \div 0,07$ .

В такой более реалистичной постановке имеем интервальное семейство передаточных функций, и задача теперь заключается в построении регулятора, который бы робастно стабилизировал семейство и обладал приемлемым качеством для всех объектов семейства. При синтезе регулятора (5) в работах [17, 18] возможная неопределенность в объекте не учитывалась и робастные качества полученного регулятора не исследовались.

#### 3.2. Робастная стабилизация

Как и ранее, обратимся к простым регуляторам, имеющим вид (7). Известно [3], что регулятор первого порядка стабилизирует интервальный объект тогда и только тогда, когда он стабилизирует 16 объектов, отвечающих харитоновским полиномам. Именно, для интервальных числителя и знаменателя строим по четыре харитоновских полинома и говорим, что 16 передаточных функций, соответствующих всем полученным комбинациям, отвечают *харитоновским объектам*. Для робастной стабилизации семейства необходимо и достаточно стабилизировать все эти объекты (детали см. в работе [19]).

Как и при отсутствии неопределенности, характеристический полином замкнутой системы с регулятором (7) линейно зависит от двух параметров  $k_1$  и  $k_2$ . Воспользуемся тем же подходом на основе  $D$ -разбиения: построим с его помощью область устойчивости  $D_{st}^i$  для каждого из 16-ти харитоновских объектов и возьмем их пересечение  $D_{st}^{rob}$ . Полученная область отвечает всем регуляторам, робастно стабилизирующим интервальный объект (как и в ситуации без неопределенности, несложно построить область  $D_\sigma^{rob} \subset D_{st}^{rob}$ , внутри которой робастность гарантируется со степенью устойчивости не ниже  $\sigma$ ). Возможны и иные способы построения области  $D_{st}^{rob}$ ; подробно техника робастного  $D$ -разбиения описана в работах [3, 20].

Дальнейшие действия аналогичны предлагавшимся в § 2. Неравенство  $g \leq \bar{g}$  выделяет внутри  $D_{st}^{rob}$  область допустимых робастно стабилизирующих регуляторов  $D_{feas}^{rob}$ . Выбирая «мышью» ту или иную точку в этой области, принимаем решение о пригодности соответствующего робастно стабилизирующего регулятора.

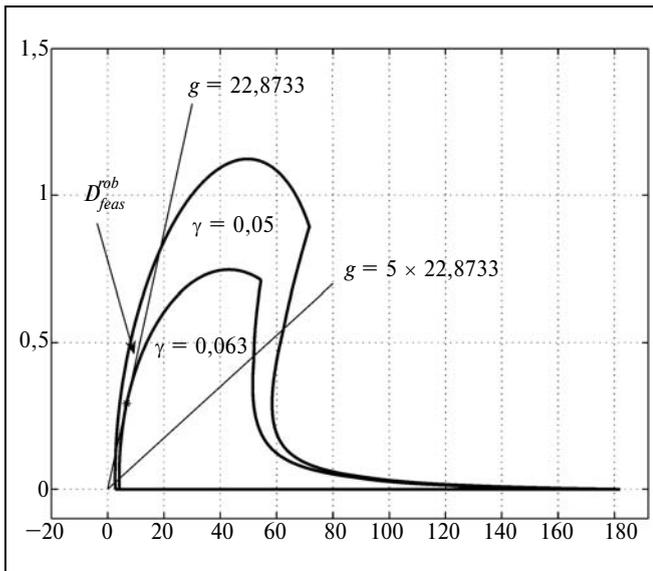


Рис. 4. Области робастно стабилизирующих регуляторов вида (7) при разных уровнях неопределенности

В соответствии с инженерным характером предлагаемой методики это решение может приниматься на основе анализа построенных переходных характеристик для нескольких случайно выбранных представителей интервального семейства: регулятор признается пригодным, если для «большинства» объектов он демонстрирует приемлемое качество. Альтернативно, можно анализировать переходные процессы или вычисленные значения показателей  $\sigma$ ,  $\xi$ ,  $t_s$  и  $h$  для 16-ти харитоновских объектов. Однако следует признать, что гарантированное качество переходного процесса для интервального семейства не определяется наихудшим из харитоновских объектов, хотя и дает представление о поведении семейства в целом.

Область на рис. 4, ограниченная прямой  $k_2 = 0$  и «внешней» кривой, отвечает регуляторам вида (7), робастно стабилизирующим объект (4), (10) при уровне неопределенности  $\gamma = 0,05$ .

Левый луч задает ограничение на коэффициент усиления; неравенство  $g \leq \bar{g}$  выделяет область допустимых робастно стабилизирующих регуляторов  $D_{feas}^{rob}$ . Эта область мала, т. е.  $\gamma = 0,05$  близко к максимальному уровню неопределенности, при котором интервальное семейство робастно стабилизируется регуляторами вида (7). С ростом  $\gamma$  область  $D_{st}^{rob}$  уменьшается; максимальное значение, при котором стабилизация объекта (4), (10) возможна (радиус стабилизируемости), оказывается равным

$\gamma \approx 0,063$  («внутренняя» кривая на рис. 5), ему соответствует регулятор

$$C_2(s, k_1, k_2) = \frac{6,7s}{0,2929s + 1}, \quad (11)$$

который отмечен «звездочкой» на рис. 4. Для сравнения, исходный регулятор (5) имеет гораздо меньший радиус стабилизируемости,  $\gamma \approx 0,033$ .

Ранее предполагалось, что коэффициент усиления допустимых регуляторов ограничен сверху величиной  $\bar{g}$ , соответствующей исходному регулятору (5), однако в ряде случаев расходы энергии на управление могут быть увеличены [6]. Так, если разрешить в 5 раз большие коэффициенты усиления  $g = 5\bar{g}$  (правый луч на рисунке), то получаем гораздо более широкую область допустимых регуляторов, и с их помощью робастная стабилизация возможна до уровня неопределенности  $\gamma \approx 0,135$ .

Для  $N = 1000$  случайно выбранных объектов из интервального семейства с уровнем неопределенности  $\gamma = 0,03$  регулятор (11) демонстрирует значительно более высокие показатели качества, чем регулятор (5). Так, средние значения степени колебательности составляют  $\xi^{(11)} = 0,1988$  и  $\xi^{(5)} = 0,0940$ , а времени установления  $t_s^{(11)} = 2,14$  и  $t_s^{(5)} = 4,4217$ .

Таким образом, методика § 2 успешно распространяется и на наличие неопределенности в объекте: предложен более простой регулятор, робастно стабилизирующий интервальное семейство при более высоком уровне неопределенности и обладающий более высоким качеством для «случайно выбираемого» элемента семейства.

#### 4. РЕГУЛЯТОРЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Ранее мы ограничивались регуляторами, зависящими от двух параметров. Кратко опишем идею подхода к синтезу регуляторов более высоких порядков и приведем результат его реализации.

Прежде всего, область  $D_{feas}$ , построенная в § 2, могла бы оказаться пустой. Это означает, что двухпараметрическими регуляторами вида (7) при наложенных на них требованиях объект невозможно даже стабилизировать, не говоря уже об удовлетворении требований P2—P4. Далее, регулятор (5) взят из более широкого класса, чем регулятор (7); в этом классе, возможно, найдутся регуляторы, гораздо более успешные, чем регулятор (9).

Обозначим все параметры  $\tau_i, \nu_i$  регулятора (2) через  $k_1, \dots, k_p$ , тогда характеристический полином замкнутой системы  $p_c(s, k) = d_G(s)d_C(s, k) -$

–  $n_c(s)n_c(s, k)$ . В этой ситуации (при наличии  $m > 1$  звеньев регулятора) применение техники  $D$ -разбиения затруднено как в силу того, что коэффициенты полинома  $p_c(s, k)$  теперь нелинейно зависят от параметров  $k_i$ , так и вследствие большого их числа; в результате, визуализация области  $D_{feas}$  невозможна. Заметим, что в ряде случаев, когда регуляторы имеют иную структуру (например, ПИД-регуляторы вида  $(\tau s^2 + \nu s + \mu)/s$ ) и линейность по параметрам сохранена, можно проводить  $D$ -разбиение и по трем параметрам.

Воспользуемся той же идеей, что и ранее: «опишем» всю область  $D_{feas}$ , но теперь осуществим это путем случайного генерирования в ней точек.

Рассмотрим, например, класс всех допустимых регуляторов второго порядка вида

$$C(s) = \frac{k_1 s}{k_2 s + 1} \cdot \frac{k_3 s + 1}{k_4 s + 1}.$$

Под допустимостью, как и раньше, понимаем устойчивость замкнутой системы и ограничения  $k_i > 0$  (минимально-фазовость и устойчивость регулятора) и  $k_1 k_3 \leq \bar{g} k_2 k_4$  (ограничение на коэффициент усиления регулятора). При желании можем наложить ограничения сверху на параметры, чтобы гарантировать ограниченность области  $D_{feas} \subset \mathbb{R}^4$ .

Опишем кратко, как может осуществляться случайное генерирование точек в  $D_{feas}$ . Пусть  $(k_1, k_2, k_3, k_4) = k^0 \in D_{feas} \subset \mathbb{R}^4$  отвечает некоторому допустимому регулятору, например, (6), а  $d \in \mathbb{R}^4$  — случайное *направление* (генерируемое равномерно на единичной сфере в  $\mathbb{R}^4$ ). Рассмотрим однопараметрическое семейство полиномов  $p_c(s, k^0 + \lambda d)$ , и пусть  $\lambda_{\min}$  и  $\lambda_{\max}$  — минимальное и максимальное значения параметра  $\lambda$ , при которых (i) полином  $p_c(s, k^0 + \lambda d)$  устойчив при всех  $\lambda \in (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ , и (ii) регулятор, соответствующий значениям коэффициентов  $k^0 + \lambda d$ ,  $\lambda \in (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ , является допустимым. Для случайно выбранного  $\lambda^1 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  положим  $k^1 = k^0 + \lambda^1 d$ , рассмотрим полином  $p_c(s, k^1)$ , выберем случайное направление движения из точки  $k^1$  и т. д. Такая процедура носит название Hit-and-Run ([14]); она представляет собой один из методов случайных блужданий на ограниченных многомерных областях.

Ключевым местом при реализации этой процедуры является нахождение величин  $\lambda_{\min}$  и  $\lambda_{\max}$ , т. е. точек пересечения произвольного одномерного

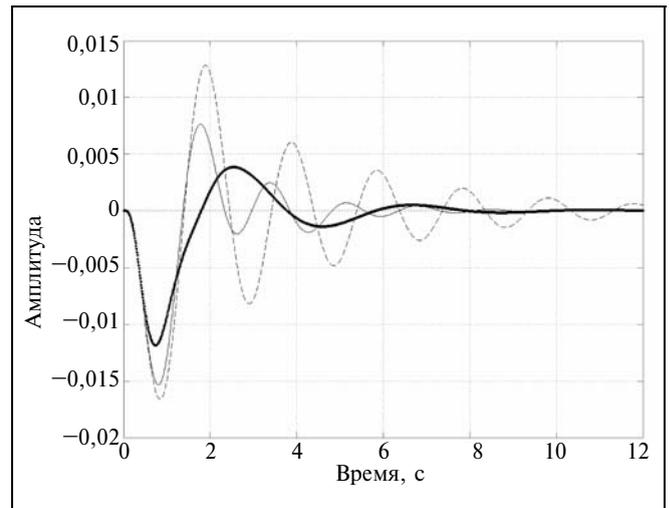


Рис. 5. Переходные функции для объекта, замкнутого исходным регулятором (5) (штриховая линия), регулятором  $C_2$  (9) (сплошная) и регулятором  $C_4$  (жирная)

луча с границей области  $D_{feas}$ . В работе [15] показано, что в случае, когда  $D_{feas}$  — область гурвицевости полинома, технически дело сводится к решению некоторого полиномиального уравнения относительно  $\lambda$ , что может быть осуществлено, например, с помощью процедуры `fsolve` в системе Matlab. Остальные ограничения ( $k_i > 0$ ,  $k_1 k_3 \leq \bar{g} k_2 k_4$ ) учитываются аналогично.

Генерируя таким случайным образом допустимые регуляторы (точки в области  $D_{feas}$ ), вычисляем показатели соответствующей замкнутой системы или строим ее переходную функцию и принимаем решение о пригодности этого регулятора.

Один из приемлемых регуляторов, полученных в результате реализации описанного подхода, имеет вид

$$C_4(s) = \frac{20,1241s}{0,0088s + 1} \cdot \frac{0,0012s + 1}{0,1200s + 1}$$

и дает ощутимо лучшие показатели, чем регулятор (9):  $\sigma = 0,5022$ ,  $\xi = 0,3273$ ;  $t_s = 1,2800$ ;  $h = 0,0119$ , его переходная функция дана на рис. 5.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен возможный подход к решению реальной трудно формализуемой задачи стабилизации энергетической системы регуляторами заданной структуры при ограничениях на качество переходного процесса. Продемонстрировано преимущество предложенного подхода по сравнению



с рассмотренным в работах [17, 18]. Основное внимание уделяется простоте процедуры синтеза регулятора низкого порядка, а для численного решения применяются стандартные вычислительные средства системы Matlab. Отличительная черта рассмотренной техники состоит в предоставлении проектировщику целого набора допустимых регуляторов и возможности учета неопределенности в модели объекта.

Дальнейшее развитие данного подхода предполагает разработку численно устойчивых робастных вариантов алгоритма Hit-and-Run для генерирования робастно стабилизирующих регуляторов, описанных в § 4, исследование чувствительности синтезированных регуляторов по отношению к возможным неопределенностям (неточности численной реализации) в их коэффициентах (так называемой проблеме «хрупкости») и др.

Автор глубоко признателен М.Ш. Мисриханову и В.Н. Рябченко за предоставление модели (4)–(5), обсуждения постановки задачи и указания на литературу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Datta A., Ho M.-T., Bhattacharyya S.P. Structure and synthesis of PID controllers. — London: Springer, 2000.
2. Åström K.J., Hägglund T. Advanced PID Control. — Research Triangle Park: Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
3. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
4. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7–46.
5. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1986.
6. Kundur P. Power system stability and control. — NY: McGraw-Hill, 1994.
7. Андерсон П., Фауд А. Управление энергосистемами и устойчивость. — М.: Энергия, 1980.
8. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and optimal control. — Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
9. Keel L.H., Bhattacharyya S.P. Robust, fragile, or optimal? // IEEE Trans. Autom. Control. — 1997. — Vol. 42, N 8. — P. 1098–1105.
10. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию  $H^\infty$  и критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 3. — С. 119–130.
11. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем. — Л.: ЛКВВИА, 1949.
12. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А. Современное состояние метода  $D$ -разбиения (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 12. — С. 3–40.
13. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Шербаков П.С. Стабилизация электроэнергетической системы простыми регуляторами с обеспечением желаемого качества переходного процесса // Электро-Инфо. — 2008. — № 10 (57). — С. 46–55.
14. Smith R.L. Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions // Operations Research. — 1984. — Vol. 32. — P. 1296–1308.
15. Gryazina E.N., Polyak B.T. Stability regions in the parameter space:  $D$ -decomposition revisited // Automatica. — 2006. — Vol. 42, N 1. — P. 13–26.
16. Heffron W.G., Phillips R.A. Effect of modern amplidyne voltage regulators on underexcited operation of large turbine generators // AIEE Trans. — 1952. — Vol. PAS-71. — P. 692–697.
17. Parmar G., Mukherjee S., Prasad R. Reduced order modeling of linear MIMO systems using genetic algorithm // Int. J. Simul. Model. — 2007. — N 6. — P. 173–184.
18. Papadopoulos D. P. Order reduction of linear system models with a time-frequency domain method // J. Franklin Inst. — 1986. — Vol. 322, N 4. — P. 209–220.
19. Barmish B.R., Hollot C.V., Kraus F., Tempo R. Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators // IEEE Trans. Automat. Control. — 1992. — Vol. 37. — P. 707–714.
20. Петров Н.П., Поляк Б.Т. Робастное  $D$ -разбиение // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 11. — С. 41–53.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

**Шербаков Павел Сергеевич** — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎(495) 334-76-41, ✉sherba@ipu.ru.

## Новая книга

**Твердохлебов В.А. Геометрические образы законов функционирования автоматов.** — Саратов: Научная книга, 2008. — 183 с.

Представлены основные положения, определяющие новый способ задания дискретных детерминированных динамических систем (автоматов с конечным или бесконечным множеством состояний) геометрическими образами законов функционирования, описаны модели и методы анализа и синтеза этих геометрических образов. Отмечено, что главным является совмещение дискретных символьных автоматных структур с числовыми структурами непрерывной математики, в частности, геометрическими кривыми и числовыми последовательностями. Изложены методы построения законов функционирования автоматов по произвольным последовательностям и по произвольным геометрическим кривым. Приведены методы определения эквивалентных состояний автоматов по геометрическим образам и методы интерполяции геометрических образов. Для классификации и оценки сложности законов функционирования автоматов разработан спектр числовых показателей и показано применение спектра для оценки сложности маршрутов движения.

Для специалистов, занимающихся применением и развитием теории автоматов.