УДК 519

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕХАНИЗМА СТИМУЛИРОВАНИЯ ПУТЕМ ВЫБОРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОЦЕНКИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЛЕНОВ ТРУДОВОГО КОЛЛЕКТИВА

А.В. Щепкин

Рассмотрены вопросы построения показателей оценки деятельности членов трудового коллектива, на основе которых распределяется ограниченный фонд вознаграждения. Дан анализ эффективности процедур распределения.

Ключевые слова: механизм стимулирования, эффективность распределения, показатель деятельности.

ВВЕДЕНИЕ

В работах, посвященных вопросам применения механизмов стимулирования в трудовых коллективах, часто рассматриваются ситуации, когда за результаты своей деятельности каждый член трудового коллектива (агент) получает вознаграждение из общего фонда премирования. Один из способов распределения фонда премирования основывается на применении коэффициентов трудового участия (КТУ). Результаты анализа таких механизмов стимулирования представлены в работах [1—4], в которых рассматриваются вопросы формирования показателей оценки деятельности агентов и анализируется эффективность процедур распределения на основе КТУ ограниченного фонда премирования. Определение показателя оценки деятельности i-го агента основывается только на значении действия самого агента. В настоящей же работе показатель оценки деятельности i-го агента рассчитывается как разница значения его действия и среднего значения действий остальных агентов, умноженных на некоторый весовой коэффициент. Как и в работах [1—4], функционирование коллектива рассматривается как игра n-лиц (агентов), а эффективность механизма стимулирования оценивается по результатам действий агентов в ситуации равновесия по Нэшу [5]. Данная работа посвящена исследованию процедур формирования КТУ на основе показателей оценки деятельности агентов, представленных как разница значений их действий и среднего значения действий остальных агентов, в целях повышения эффективности механизма стимулирования.

1. МОДЕЛЬ ТРУДОВОГО КОЛЛЕКТИВА

Здесь, как и в работах [3, 4], модель коллектива представляет собой двухуровневую систему, состоящую из Центра (руководителя коллектива) и N агентов нижнего уровня. Стратегия агента заключается в выборе действия $x_i \in A_i$, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$, принадлежащего компактному множеству допустимых действий A_i. Содержательно, действием агента может быть любой показатель его деятельности: число отработанных часов, объем произведенной продукции, ее качество и иные характеристики. Действие агента x_i будем считать принадлежащим множеству неотрицательных действительных чисел.

Повысить эффективность функционирования коллектива, а именно, обеспечить рост значений действий агентов предполагается путем их поощрения в виде премий из фиксированного фонда Φ, который распределяется между агентами в соответствии с выбранной процедурой стимулирования. Каждый агент получает вознаграждение (премию) в размере Π_i, $i = 1, ..., n$. Обозначим через δ_i КТУ i-го агента, тогда $\Pi_i = \delta_i\Phi$. Предполагается, что фонд премирования в коллективе распределяется полностью, т. е. $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i$ и $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$. Кроме того, фонд остается неизменным на протяжении нескольких периодов функционирования.

Как и в работах [3, 4] будем считать, что i-й агент характеризуется показателем r_i, отражающим его квалификацию (эффективность деятельности), т. е. индивидуальные затраты i-го агента $z_i = z_i(x_i, r_i)$ монотонно убывают с ростом квалификации r_i, $i \in N$.

Разница между вознаграждением Π_i и затратами агента z_i определяет целевую функцию i-го агента.

Предполагается, что функции затрат агентов линейны: $z_i(x_i, r_i) = x_i/r_i$, а КТУ i-го агента определяется путем деления его показателя деятельности на сумму показателей оценки деятельности всех агентов [1—4].

Обозначим через $y_i(x)$ показатель оценки деятельности i-го агента. Тогда

$$\delta_i = y_i(x)/\sum_{j=1}^{n} y_j(x), \quad i \in N, \tag{1}$$

и, соответственно, целевую функцию i-го агента можно записать в виде

$$f_i(x) = \delta_i\Phi - z_i(x_i, r_i), \quad i \in N. \tag{2}$$

Эффективность механизма стимулирования оценивается суммой действий агентов в ситуации равновесия по Нэшу $K = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i$.

Действия $\tilde{x}_i$, $i \in N$, i-го агента в ситуации равновесия по Нэшу определяются из решения системы уравнений

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\dfrac{\partial y_i}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n} y_j - y_i\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^2}\Phi - \frac{1}{r_i} = 0, \quad i \in N. \tag{3}$$

Коллектив, в котором квалификация всех агентов одинаковая, будем называть *однородным*, в противном случае — *неоднородным* [3].

2. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОГО КОЛЛЕКТИВА

Получить оценку максимальной эффективности функционирования однородного коллектива можно следующим образом. Если коллектив однородный, то в ситуации равновесия все агенты должны осуществлять одинаковое действие, иметь одинаковый показатель оценки деятельности и, соответственно, одинаковое вознаграждение. В этом случае целевую функцию агента можно представить в виде

$$f_i(x) = \Phi/n - x/r, \quad i \in N. \tag{4}$$

Очевидно, что в ситуации равновесия целевая функция агента не может быть меньше нуля, так как в противном случае выбор агентом действия $x = 0$ обеспечивает этому агенту $f(x) = 0$. Таким образом, агент может изменять свое действие $x > 0$ до тех пор, пока $f(x) \ge 0$. Из формулы (4) следует, что если в ситуации равновесия $f_i(\tilde{x}) = 0$, то максимальное действие агента $x = \Phi r/n$, и, соответственно, максимальная эффективность механизма стимулирования $K_{\max} = \Phi r$.

Выбор процедуры формирования показателя y_i, $i \in N$, оценки деятельности i-го агента определяет размер вознаграждения каждого агента и, в конечном счете, определяет значения действий агентов $\tilde{x}_i$, $i \in N$, в ситуации равновесия по Нэшу.

Естественный и простейший способ выбора показателя оценки деятельности i-го агента — это считать, что этим показателем служит само действие x_i, т. е. $y_i^{(1)} = x_i$.

Анализ показал [2, 3], что если КТУ (1) определяется для показателя $y_i(x) = y_i^{(1)}$, то в ситуации равновесия по Нэшу значения действий агентов $\tilde{x}_i^{(1)} = \Phi r(n-1)/n^2$, $i \in N$, а эффективность механизма стимулирования определяется выражением

$$K_1 = \Phi r(n-1)/n.$$

Отсюда легко видеть, что $K_{\max}$ больше K_1 в $n/(n-1)$ раз, т. е. в однородном коллективе, состоящем, например, из трех человек, когда показателем деятельности i-го агента выбрано действие этого агента, в ситуации равновесия по Нэшу эффективность функционирования в полтора раза меньше максимальной.

Другой способ определения показателя оценки деятельности i-го агента заключается в следующем. Значение действия i-го агента умножается на некоторый весовой коэффициент μ_i, характеризующий важность этого действия для руководителя коллектива, т. е. $y_i^{(2)} = x_i\mu_i$. Если положить $\mu_i = \left(x_i/\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^{\alpha-1}$, то

$$y_i^{(2)} = x_i^{\alpha}\Big/\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^{\alpha-1}, \quad i \in N. \tag{5}$$

Показано [2, 3], что когда КТУ i-го агента определяется на основе показателя оценки деятельности (5), эффективность механизма стимулирования принимает значение

$$K_2 = \alpha \Phi r(n - 1)/n,$$

причем $\alpha \le n/(n - 1)$, $K_2 = K_{\max}$ при $\alpha = n/(n - 1)$.

Иной способ определения показателя оценки деятельности заключается в сравнении действия i-го агента со средним значением действий остальных агентов. В этом случае показатель оценки деятельности i-го агента рассчитывается как разница его действия и среднего значения действий остальных агентов, умноженных на весовой коэффициент β, т. е.

$$y_i^{(3)} = \begin{cases} 0, \text{ если } x_i \le \beta \sum\limits_{j \ne i}^{n} x_j/(n-1), \\ x_i - \beta \sum\limits_{j \ne i}^{n} x_j/(n-1), \text{ если } x_i > \beta \sum\limits_{j \ne i}^{n} x_j/(n-1), \\ \qquad i \in N. \end{cases} \quad (6)$$

Будем считать, что

$$\min_i x_i \ge \frac{\beta}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j = \min_i x_i\right). \quad (7)$$

Тогда, подставляя в систему уравнений (3) y_i из выражения (6) и полагая $r_1 = r_2 = ... = r_n = r$, получаем, что в ситуации равновесия по Нэшу действия агентов имеют вид $\tilde{x}_i^{(3)} = r(n - 1 + \beta)\Phi/(1 - \beta)/n^2$, $i \in N$.

Соответственно, эффективность механизма стимулирования в этом случае можно записать как

$$K_3 = r(n - 1 + \beta)\Phi/(1 - \beta)/n. \quad (8)$$

Из выражения (8) видно, что если взять $\beta = 1/(n + 1)$, то

$$\tilde{x}_i^{(3)} = \Phi r/n, \quad i \in N, \quad (9)$$

и, соответственно, $K_3 = K_{\max}$.

Таким образом, выбор в однородном коллективе показателя оценки деятельности в виде

$$y_i^{(3)} = x_i - \sum_{j \ne i}^{n} x_j/(n^2 - 1), \quad i \in N,$$

обеспечивает максимальную эффективность механизма стимулирования.

Имитационный эксперимент показывает сходимость автоматов, реализующих поведение агентов, в ситуацию равновесия по Нэшу. Автоматы при выборе своих стратегий придерживаются гипотезы индикаторного поведения [5]. Функционирование системы рассматривается в течение нескольких партий. Считается, что в каждой партии выбор действия x_i i-м автоматом определяет его движение в сторону его цели. В этом случае процедура, реализующая аксиому индикаторного поведения, может быть записана в виде

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \gamma_i^k(\hat{x}_i^k - x_i^k), \quad \gamma_i^k \in [0; 1],$$

где x_i^{k+1} — выбор i-го автомата в $k + 1$-й партии игры, $\hat{x}_i^k$ — положение цели i-го автомата в k-й партии, или, другими словами, это то состояние, которое обеспечивает i-му автомату максимальное значение его целевой функции в k-й партии игры. Значение γ_i^k определяет размер шага в сторону цели. Конкретное значение γ_i^k может зависеть от времени, текущего состояния и некоторых других факторов, внешних по отношению к модели. В играх, где используются автоматы с индикаторным поведением, настройка автоматов заключается в выборе процедуры изменения γ_i^k от партии к партии. Но основная сложность при реализации алгоритма индикаторного поведения заключается в определении положения цели $\hat{x}_i^k$. Это связано с тем, что в общем случае при проведении игры отдельный участник не имеет точной информации о поведении каждого из остальных игроков. Однако во многих случаях каждый игрок, опираясь на собственную информацию, сообщенную в Центр, знание закона управления и полученное управленческое решение, может восстановить агрегат стратегий своих соперников по игре.

Для целевой функции (4) положение цели i-го автомата в k-й партии игры определяется выражением

$$\hat{x}_i^k = \sqrt{\frac{n}{n-1}\Phi r \sum_{j \ne i}^{n} x_j^k} - \sum_{j \ne i}^{n} x_j^k, \quad i \in N.$$

В приведенных далее результатах имитационного эксперимента участвовали пять агентов-автоматов ($n = 5$). Фонд премирования $\Phi = 1000$, значения показателей квалификации агентов $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 0{,}6$, значения $\gamma_1 = 0{,}3$, $\gamma_2 = 0{,}5$, $\gamma_3 = 0{,}2$, $\gamma_4 = 0{,}4$, $\gamma_5 = 0{,}6$.

Из формулы (9) следует, что равновесные действия агентов $\tilde{x}_1^{(3)} = \tilde{x}_2^{(3)} = \tilde{x}_3^{(3)} = \tilde{x}_4^{(3)} = \tilde{x}_5^{(3)} = 120$.

Стратегии агентов, представлены на графике, изображенном на рис. 1. Видно, что практически к двадцатой партии агенты сошлись к ситуации равновесия по Нэшу, причем аналитически рас-

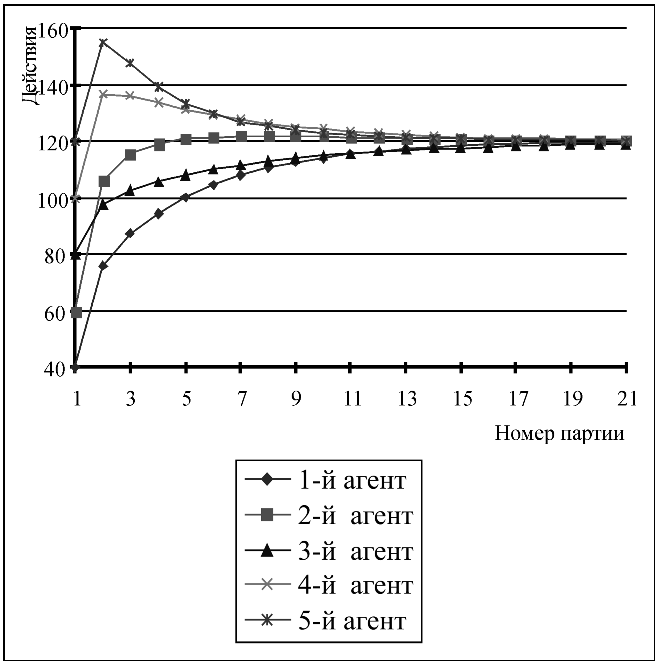

Рис. 1. Графическое представление стратегий агентов в однородном коллективе

считанные равновесные значения стратегий агентов совпадают с результатами игрового эксперимента.

3. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО КОЛЛЕКТИВА

Поскольку в неоднородном коллективе значения показателей квалификации всех агентов могут быть как близки друг другу, так и существенно отличаться, то для характеристики неоднородного коллектива введем понятие степени неоднородности. Будем считать, что степень неоднородности коллектива ω определяется как

$$\omega = H/\min_i r,$$

где $H = n/\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}$ — среднее гармоническое показателей квалификации всех агентов.

Очевидно, что в однородном коллективе $\omega = 1$, в неоднородном всегда $\omega > 1$.

Показано [2, 3], что если в неоднородном коллективе показатель оценки деятельности i-го агента определяется как $y_i^{(1)}$, то в ситуации равновесия по Нэшу значения действий агентов

$$\tilde{x}_i^{(4)} = [nr_i - H(n-1)]\Phi H(n-1)/(n^2r_i),\quad i \in N, \tag{10}$$

Соответственно, эффективность

$$K_4 = H\Phi(n-1)/n.$$

Так как действие агента всегда не меньше нуля, то выражение (10) имеет смысл только для случая $\omega \le n/(n-1)$.

Если, например, в коллективе пять агентов ($n = 5$), фонд премирования $\Phi = 1000$, значения $r_1 = 0{,}5$, $r_2 = 0{,}55$, $r_3 = 0{,}6$, $r_4 = 0{,}65$; $r_5 = 0{,}7$; то $\tilde{x}_1^{(4)} = 25{,}3$, $\tilde{x}_2^{(4)} = 66{,}03$, $\tilde{x}_3^{(4)} = 99{,}96$, $\tilde{x}_4^{(4)} = 99{,}96$, $\tilde{x}_5^{(4)} = 153{,}29$ и $K_4 = 473{,}27$.

Рассмотрим теперь случай, когда в неоднородном коллективе показатель оценки деятельности i-го агента определяется как $y_i^{(3)}$, см. выражение (6). Решая систему уравнений (3) для показателя оценки деятельности $y_i = y_i^{(3)}$, получаем

$$\tilde{x}_i^{(5)} = [n^2r_i - H(n-1)]\Phi H(n-1+\beta)/[(1-\beta)n^2r_i],\quad i \in N. \tag{11}$$

Соответственно, эффективность

$$K_5 = \Phi H(n-1+\beta)/[(1-\beta)n]. \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, что K_5 увеличивается с возрастанием β. В ситуации равновесия целевая функция i-го агента имеет вид

$$\tilde{f}_i = \Phi[(n-1+\beta)(r_in - H(n-1))^2/(r_i^2n^2) - \beta]/[(1-\beta)(n-1)].$$

Очевидно, что $\tilde{f}_i \ge 0$, $i \in N$, так как в противном случае i-й агент может выбрать действие $x_i = 0$, и в соответствии с выражением (6) $y_i^{(3)} = 0$, а в этом случае значение целевой функции будет равно нулю. Из требования неотрицательности целевой функции следует, что

$$\beta \le [n - \omega(n-1)]^2/\{\omega[2n - \omega(n-1)]\}, \tag{13}$$

и, следовательно, K_5 принимает максимальное значение, когда условие (13) выполняется как равенство. При этом $K_5 = \Phi H/[\omega^2 - n(\omega-1)^2]$, а для того, чтобы выполнялось неравенство $\tilde{x}_i^{(5)} \ge 0$, на степень неоднородности ω должны быть наложены менее жесткие требования, а именно, $\omega \le \sqrt{n}/(\sqrt{n}-1)$. Более того, при выполнении неравенства (13) справедливо и неравенство (7), и выполняется неравенство $K_5 \ge K_4$.

Для проверки сходимости к ситуации равновесия также был проведен имитационный эксперимент с автоматами, реализующими гипотезу индикаторного поведения.

Для целевой функции (2) и показателей оценки деятельности (6) агентов положение цели i-го автомата в k-й партии игры определяется выражением

$$\hat{x}_i = \sqrt{\frac{n-1+\beta}{(n-1)(1-\beta)}\Phi r_i \sum_{j \neq i}^{n} x_j} - \sum_{j \neq i}^{n} x_j, \quad i \in N.$$

В приведенных далее результатах имитационного эксперимента также участвовали пять агентов-автоматов ($n = 5$). Фонд премирования $\Phi = 1000$, значения $r_1 = 0{,}5$, $r_2 = 0{,}55$, $r_3 = 0{,}6$, $r_4 = 0{,}65$, $r_5 = 0{,}7$ и $\beta = 0{,}015$, что соответствует тому, что неравенство (13) превращается в равенство. Значения коэффициентов γ взяты такими же, как и в предыдущем эксперименте.

Из выражения (11) следует, что равновесные действия агентов $\tilde{x}_1^{(5)} = 25{,}67$, $\tilde{x}_2^{(5)} = 66{,}98$, $\tilde{x}_3^{(5)} = 101{,}41$, $\tilde{x}_4^{(5)} = 130{,}55$ и $\tilde{x}_5^{(5)} = 155{,}52$, а $K_5 = 480{,}13$, т. е. применение показателя оценки деятельности (6) для формирования КТУ позволило увеличить эффективность стимулирования на 1,5 %.

Стратегии агентов, представлены на графике, изображенном на рис. 2. Видно, что практически к двадцатой партии агенты сошлись в ситуацию равновесия по Нэшу, причем аналитически рассчитанные равновесные значения стратегий агентов совпадают с результатами игрового эксперимента.

Показано [3], что если показатель оценки деятельности i-го агента определяется как $y_i^{(6)} = x_i/r_i$, $i \in N$, то в ситуации равновесия по Нэшу действия агентов имеют вид $\tilde{x}_i^{(6)} = r_i\Phi(n-1)/n^2$, $i \in N$, и, соответственно, эффективность системы стимулирования

$$K_6 = A\Phi(n-1)/n,$$

где $A = \sum_{j=1}^{n} r_j/n$ — среднее арифметическое показателей квалификации агентов.

Очевидно, что в неоднородном коллективе всегда $K_6 > K_4$. Что же касается соотношения между K_5 и K_6, то легко показать, что $K_6 \geq K_5$, когда

$$[n - \sqrt{n(1-H/A)}]/(n-1) \leq \omega \leq$$
$$\leq [n + \sqrt{n(1-H/A)}]/(n-1).$$

По аналогии с выражением (6) определим показатель оценки деятельности i-го агента путем сравнения его действия, отнесенного к его квалификации, со средним значением действий, отнесенных к квалификации остальных агентов, умноженных на коэффициент $1/(n+1)$, т. е.

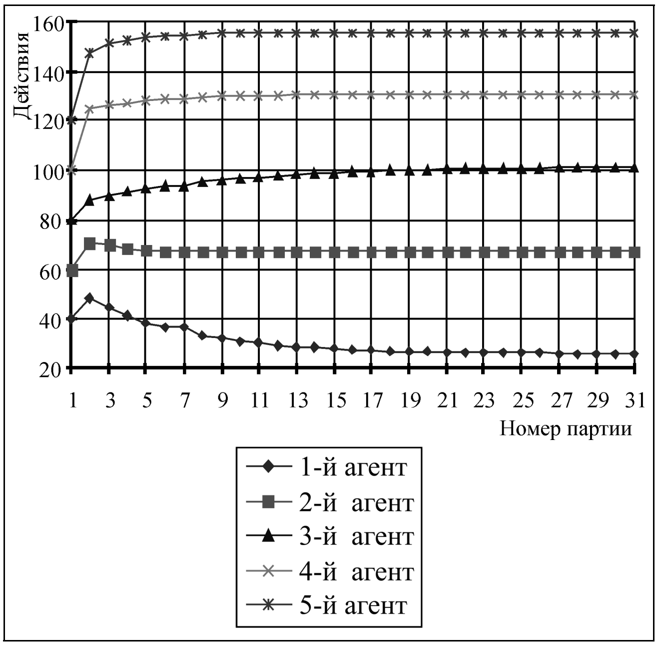

Рис. 2. Графическое представление стратегий агентов в неоднородном коллективе

$$y_i^{(7)} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } \dfrac{x_i}{r_i} \leq \dfrac{1}{n^2-1}\sum_{j \neq i}^{n}\dfrac{x_j}{r_j} \\ \dfrac{x_i}{r_i} - \dfrac{1}{n^2-1}\sum_{j \neq i}^{n}\dfrac{x_j}{r_j}, \text{ если } \dfrac{x_i}{r_i} > \dfrac{1}{n^2-1}\sum_{j \neq i}^{n}\dfrac{x_j}{r_j}, \ i \in N. \end{cases} \quad (14)$$

Будем считать, что

$$\min_i \frac{x_i}{r_i} \geq \frac{1}{n^2-1}\left(\sum_{j \neq i}^{n}\frac{x_j}{r_j} - \min_i \frac{x_i}{r_i}\right).$$

Решая систему уравнений (3) для показателя оценки деятельности y_i, определяемого выражением (14), получаем

$$\tilde{x}_i^{(7)} = \Phi r_i/n, \quad i \in N. \quad (15)$$

Соответственно, эффективность

$$K_7 = \Phi A.$$

Отсюда легко видеть, что всегда $K_7 > K_6$ и $K_7 > K_5$. Более того, применение показателей оценки деятельности (14) для формирования КТУ позволяет увеличить эффективность стимулирования по сравнению с применением показателей $y_i^{(1)} = x_i$ на $100/(n-1)$ %. Например, для коллектива, состоящего из пяти агентов, увеличение составляет 25 %.

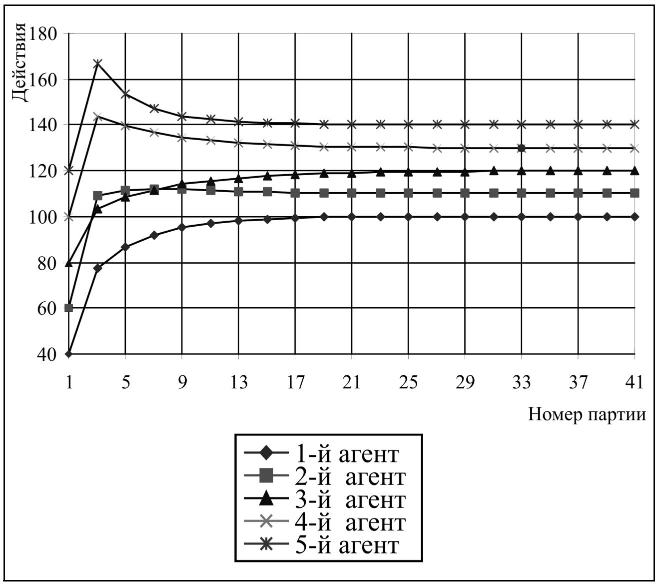

Рис. 3. Графическое представление стратегий агентов при показателях (14)

Здесь также для проверки сходимости к ситуации равновесия был проведен имитационный эксперимент с автоматами, реализующими гипотезу индикаторного поведения.

Для целевой функции (2) и показателей оценки деятельности агентов (14) положение цели i-го автомата в k-й партии игры определяется выражением

$$\hat{x}_i = \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}\sum_{j \ne i}^{n}\frac{x_j}{r_j}\Phi} - \sum_{j \ne i}^{n}\frac{x_j}{r_j}\right), \quad i \in N.$$

Из формулы (15) следует, что равновесные действия агентов $\tilde{x}_1^{(7)} = 100$, $\tilde{x}_2^{(7)} = 110$, $\tilde{x}_3^{(7)} = 120$, $\tilde{x}_4^{(7)} = 130$ и $\tilde{x}_5^{(7)} = 140$, а $K_7 = 600$.

Число участников, фонд премирования, показатели эффективности агентов и значения коэффициентов γ_i такие же, как и в предыдущих экспериментах. Стратегии агентов, представлены на графике, изображенном на рис. 3. Видно, что к двадцать пятой партии агенты сошлись к ситуации равновесия по Нэшу, причем аналитически рассчитанные равновесные значения стратегий агентов совпадают с результатами игрового эксперимента.

В практической деятельности для формирования КТУ вместо коэффициентов квалификации агентов могут использоваться размеры их окладов или тарифные ставки. Обозначим через $З_i$, $i \in N$ тарифную ставку i-го агента. Показано [4], что если показатель оценки деятельности i-го агента определяется как $y_i^{(8)} = x_i/З_i$, $i \in N$, то эффективность системы стимулирования

$$K_8 = \frac{n-1}{Z}\Phi\left(\sum_{j=1}^{n}З_j - \frac{n-1}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}\right),$$

где $Z = \sum_{j=1}^{n}\frac{З_j}{r_j}$. Причем $K_8 \ge K_4$, если выполняются неравенства

$$\begin{cases} З_1 \ge З_2 \ge \ldots \ge З_n, \\ r_1 \ge r_2 \ge \ldots \ge r_n, \\ \dfrac{З_1}{r_1} \le \dfrac{З_2}{r_2} \le \ldots \le \dfrac{З_n}{r_n}. \end{cases} \qquad (16)$$

Учитывая тарифные ставки, показатель оценки деятельности агента по аналогии с выражением (14) можно представить в виде

$$y_i^{(9)} = $$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } \dfrac{x_i}{З_i} \le \dfrac{1}{n^2-1}\sum\limits_{j \ne i}^{n}\dfrac{x_j}{З_j}, \\ \dfrac{x_i}{З_i} - \dfrac{1}{n^2-1}\sum\limits_{j \ne i}^{n}\dfrac{x_j}{З_j}, \text{ если } \dfrac{x_i}{З_i} > \dfrac{1}{n^2-1}\sum\limits_{j \ne i}^{n}\dfrac{x_j}{З_j}, \ i \in N. \end{cases} \qquad (17)$$

Будем считать, что

$$\min_i \frac{x_i}{З_i} \ge \frac{1}{n^2-1}\left(Z - \min_i \frac{x_i}{З_i}\right).$$

Решая систему уравнений (3) для показателя оценки деятельности $y_i = y_i^{(9)}$, получаем

$$\tilde{x}_i^{(9)} = З_i\frac{n\Phi}{Z}\left(1 - \frac{З_i}{r_i}\frac{n-1}{Z}\right), \quad i \in N.$$

Эффективность системы стимулирования

$$K_9 = \frac{n\Phi}{Z}\left(\sum_{j=1}^{n}З_j - \frac{n-1}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}\right).$$

Отсюда видно, что $K_9 > K_8$ в $n/(n-1)$ раз.

Утверждение. *Если справедливы неравенства* (16), *то* $K_9 \ge K_5$.

Доказательство. Необходимо показать, что

$$\frac{n\Phi}{Z}\left(\sum_{j=1}^{n}З_j - \frac{n-1}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}\right) \ge \frac{\Phi H}{\omega^2 - n(\omega-1)^2}.$$

Так как для $\omega \in [1; \sqrt{n}/(\sqrt{n} - 1)]$ функция $\omega^2 - n(\omega - 1)^2$ возрастающая, достаточно доказать, что

$$\frac{n}{Z}\left(\sum_{j=1}^{n} З_j - \frac{n-1}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}\right) \geq H.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j}{r_j}\sum_{j=1}^{n}З_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j} \geq \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}\right)^2 + n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}.$$

Последнее неравенство выполняется всегда, если справедливы два следующих неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j}{r_j}\sum_{j=1}^{n}З_j \geq n\sum_{j=1}^{n}З_j\frac{З_j}{r_j} \qquad (17)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j} \geq \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}\right)^2. \qquad (18)$$

Неравенство (17) — это неравенство Чебышева, которое выполняется при выполнении неравенства (16), соответственно, неравенства (18) — неравенства Коши—Буняковского.

Справедливость неравенств (17) и (18) доказывает утверждение. ♦

Отмечается, что если оклад агента пропорционален его квалификации, т. е. $З_i = br_i$, то эффективность K_9 совпадает с эффективностью K_7 [4]. Такой способ расчета оклада применяется в организациях бюджетной сферы, где используется единая тарифная сетка.

Эффективность системы стимулирования в зависимости от показателя оценки деятельности агентов

Показатель	Эффективность
$y_i^{(4)} = x_i$	$K_4 = HФ(n-1)/n$
$y_i^{(5)} = x_i - \sum_{j \neq i}^{n} /x_j/(n^2-1)$	$K_5 = ФH/[\omega^2 - n(\omega - 1)^2$
$y_i^{(6)} = x_i/r_i$	$K_6 = AФ(n-1)/n$
$y_i^{(7)} = \frac{x_i}{r_i} - \frac{1}{n^2-1}\sum_{j \neq i}^{n}\frac{x_j}{r_j}$	$K_7 = ФA$
$y_i^{(8)} = x_i/З_i$	$K_8 = \frac{n-1}{Z}Ф\left(\sum_{j=1}^{n}З_j - \frac{n-1}{Z}\frac{З_j^2}{r_j}\right)$
$y_i^{(9)} = \frac{x_i}{З_i} - \frac{1}{n^2-1}\sum_{j \neq i}^{n}\frac{x_j}{З_j}$	$K_9 = \frac{nФ}{Z}\left(\sum_{j=1}^{n}З_j - \frac{n-1}{Z}\frac{З_j^2}{r_j}\right)$

В таблице представлена зависимость эффективности системы стимулирования от выбора показателя оценки деятельности агентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В однородном коллективе при показателях $y_i^{(2)}$ и $y_i^{(3)}$ оценки деятельности агентов обеспечивается максимальная эффективность механизма стимулирования. В неоднородном коллективе при показателях $y_i^{(4)}$—$y_i^{(9)}$ оценки деятельности агентов для эффективности систем стимулирования справедливы следующие неравенства: $K_4 < K_5 < K_6 < K_7$, $K_4 \leq K_8$ и $K_5 \leq K_9$.

Выбор того или иного показателя оценки деятельности агента зависит от степени информированности Центра. Если в распоряжении Центра имеется информация о показателях квалификации агентов, то выбор показателя $y_i^{(7)}$ оценки деятельности агентов обеспечивает наибольшую эффективность механизма стимулирования. Если в распоряжении Центра имеется информация только об окладах агентов и известно, что справедливы неравенства (16), то целесообразно выбирать показатель оценки деятельности агентов $y_i^{(9)}$. Заметим, что здесь Центру достаточно знать лишь диапазон изменения показателей квалификации агентов. И, наконец, если Центр не имеет никакой информации об агентах, кроме значений их действий, целесообразно выбирать показатели $y_i^{(5)}$ оценки деятельности агентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Динова Н.И.* Бригадные формы оплаты труда // Механизмы управления социально-экономическими системами: Сб. науч. тр. — М., 1988. — С. 32—40.
2. *Щепкин А.В.* Внутрифирменное управление (модели и механизмы). — М.: ИПУ РАН, 2001. — 80 с.
3. *Иващенко А.А., Новиков Д.А., Щепкина М.А.* Модели и механизмы многокритериального стимулирования в организационных системах. — М.: ИПУ РАН, 2006. — 60 с.
4. *Щепкина М.А.* Оптимизация параметров механизма стимулирования // Проблемы управления. — 2007. — № 2. — С. 52—55.
5. *Бурков В.Н., Опойцев В.И.* Метаигровой подход к управлению иерархическими системами // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 1. — С. 103—114.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Щепкин Александр Васильевич — гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-90-51, ✉ sch@ipu.ru.