

ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ КОНЕЧНО-ЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Д.В. Шатов

Аннотация. Рассматриваются линейные объекты управления, подверженные действию неизвестных ограниченных внешних возмущений. Конечно-частотная идентификация позволяет найти оценки параметров таких объектов управления. Для этого используются специальные интегральные фильтры (фильтры Фурье), с помощью которых ищутся оценки значений частотной характеристики объекта на заданном наборе частот. По данному набору значений частотной характеристики составляется система линейных уравнений, решение которой дает искомые оценки параметров объекта. В рамках развития метода конечно-частотной идентификации в статье исследовано поведение ошибок процесса фильтрации. Исследование основано на известных результатах, описывающих асимптотическое поведение ошибок фильтров Фурье. Предложен метод определения длительности фильтрации, приводится оценка точности результатов фильтрации. Предлагаемый подход основан на специальной задаче линейного программирования, решение которой дает оценку значения фильтра Фурье и значения параметра, характеризующего скорость сходимости ошибок фильтрации. Последнее используется для определения длительности. Разработан соответствующий алгоритм фильтрации и приведены результаты численного эксперимента, подтвердившие работоспособность и эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: конечно-частотная идентификация, фильтры Фурье, линейное программирование, длительность идентификации, точность оценивания.

ВВЕДЕНИЕ

Идентификация в теории управления применяется для решения задач по определению моделей объектов управления (технологических процессов) по экспериментальным данным (входным и выходным сигналам). В рамках теории идентификации развиты и применяются различные подходы и методы, решающие сходные задачи, но имеющие определенные отличия. Среди них можно выделить: параметрические и непараметрические методы, идентификацию в частотной и временной области, методы на основе оптимизации, с использованием нейронных сетей и др. В теории идентификации подходы разделяются по различным признакам. В зависимости от предполагаемого типа внешнего возмущения, два основных класса составляют стохастические методы, в которых внешнее возмущение — случайный процесс, и детерминированные методы, когда внешнее возмущение — неизвестная детерминированная функция (в этом случае обычно пользуются предположениями о ее ограниченности). Подробнее теория идентификации и ее методы описаны, например, в работах [1—3].

Частотные методы идентификации широко применяются в теории управления, в них используется частотная характеристика объекта управления для определения его модели и нахождения ее параметров [4—6]. В качестве одного из частотных методов отметим разработанный А.Г. Александровым метод конечно-частотной идентификации [7], который относится к активным (используется гармонический испытательный сигнал). Модели объекта при этом полагаются линейными, а внешнее возмущение — неизвестной ограниченной функцией. Процесс идентификации состоит из двух этапов: на первом проводится эксперимент, в течение которого определяются частотные параметры объекта (значения его частотной характеристики на наборе частот), а на втором этапе решается система линейных уравнений, в результате чего получаются искомые оценки параметров объекта управления. Этот метод развивается в различных направлениях: существует дискретный вариант [8], вариант для многомерных систем [9], для исследования настраиваемых параметров алгоритма [10].

В настоящей работе исследуется первый этап идентификации: экспериментальное определение оценок частотных параметров с помощью фильтров Фурье (далее будем называть его фильтраци-



ей). Этот процесс очень важен, так как от качества определения частотных параметров во многом зависит итоговая точность идентификации. Ошибки фильтрации возникают в эксперименте из-за ненулевых начальных условий, переходных процессов от испытательного сигнала и внешнего возмущения, а также действия самого возмущения. В работе [11] доказана сходимости оценок фильтров Фурье к истинным значениям частотных параметров при времени фильтрации, стремящемся к бесконечности, и определенных предположениях о внешнем возмущении; там же получены оценки динамики ошибок фильтрации. Однако конструктивного алгоритма или способа использовать эти оценки для определения длительности фильтрации в статье не приводится. Настоящая статья продолжает и развивает результаты работы [11]: предлагается метод определения длительности фильтрации с помощью аналогичных оценок ошибок фильтрации и приводятся некоторые соображения об оценке текущей точности фильтрации.

1. КОНЕЧНО-ЧАСТОТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ. ДИНАМИКА ФИЛЬТРОВ ФУРЬЕ

Рассматривается объект управления вида

$$d(s)y = b(s)u + c(s)f, \tag{1}$$

где y — измеряемый скалярный выход объекта; u — управляющее воздействие; f — внешнее возмущение, которое представляет собой ограниченную по модулю ($|f| < \infty$) разложимую в ряд Фурье функцию; полиномы объекта имеют вид:

$$d(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i, \quad b(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i, \quad c(s) = \sum_{i=0}^{m_f} c_i s^i, \\ n > m, \quad n > m_f,$$

полином $d(s)$ предполагается гурвицевым, s — переменная преобразования Лапласа.

Внешнее возмущение выглядит так:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_{fk} \sin(\omega_{fk} t + \varphi_k), \tag{2}$$

где ρ_{fk} , ω_{fk} , φ_k — неизвестные амплитуды, частоты и фазы внешнего возмущения.

Конечно-частотная идентификация решает задачу определения оценок коэффициентов d_p , $i = \overline{0, n}$, и b_j , $j = \overline{0, m}$, объекта управления. Для произвольной частоты ω частотными параметрами объекта (1) будем называть величины:

$$\alpha(\omega) = \text{Re}\{w_{yu}(j\omega)\}, \quad \beta(\omega) = \text{Im}\{w_{yu}(j\omega)\}, \tag{3}$$

где $w_{yu}(s) = b(s)/d(s)$ — передаточная функция объекта, связывающая вход u с выходом y . Аналогично параметрам (3), введем обозначения для частотных параметров по внешнему возмущению для частоты ω_f :

тнх параметров по внешнему возмущению для частоты ω_f :

$$\alpha_f(\omega_f) = \text{Re}\{w_{yf}(j\omega_f)\}, \quad \beta_f(\omega_f) = \text{Im}\{w_{yf}(j\omega_f)\},$$

где $w_{yf}(s) = c(s)/d(s)$ — передаточная функция объекта, связывающая внешнее возмущение f с выходом y .

Метод конечно-частотной идентификации основан на экспериментальном определении оценок частотных параметров $\hat{\alpha}(\omega_i)$ и $\hat{\beta}(\omega_i)$, $i = \overline{1, n}$, для набора из n частот, которые выбираются известным образом [12]. Далее решается система линейных уравнений, которая составляется в силу связи

$$b(j\omega) = [\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]d(j\omega),$$

в результате получаются искомые оценки коэффициентов полиномов объекта \hat{d}_i , $i = \overline{0, n}$, и \hat{b}_i , $i = \overline{0, m}$.

Оценки частотных параметров $\hat{\alpha}(\omega)$ и $\hat{\beta}(\omega)$ для выбранной частоты ω ищутся с помощью фильтров Фурье, при этом к объекту прикладывается гармонический испытательный сигнал этой частоты:

$$u(t) = \rho \sin(\omega t), \tag{4}$$

где ρ — амплитуда испытательного сигнала, выбираемая из известных соображений [12].

Сами фильтры Фурье имеют вид:

$$\hat{\alpha}(\omega) = \frac{2}{\rho\tau} \int_{t_f}^{t_f+\tau} y(t) \sin(\omega t) dt, \\ \hat{\beta}(\omega) = \frac{2}{\rho\tau} \int_{t_f}^{t_f+\tau} y(t) \cos(\omega t) dt, \tag{5}$$

где t_f — момент начала фильтрации, а τ — длительность процесса фильтрации.

В статье [11] исследовано асимптотическое поведение фильтров Фурье. В частности, доказана сходимости $\hat{\alpha}(\omega) \rightarrow \alpha(\omega)$, $\hat{\beta}(\omega) \rightarrow \beta(\omega)$ при $\tau \rightarrow \infty$ при условии, что внешнее возмущение обладает свойством ФФ-фильтруемости (фильтруемости с помощью фильтра Фурье), которое заключается в том, что спектр частот внешнего возмущения не содержит исследуемой испытательной частоты $\omega_{fk} \neq \omega$, $k = \overline{0, \infty}$, и проверяется экспериментально. В этой же работе получена динамика ошибок оценок $\hat{\alpha}(\omega)$ и $\hat{\beta}(\omega)$:

$$|\hat{\alpha}(\omega) - \alpha(\omega)| < \frac{2}{\tau} (v_a e^{-\sigma\tau} + v_a + \xi_a + c_{fa}), \\ |\hat{\beta}(\omega) - \beta(\omega)| < \frac{2}{\tau} (v_b e^{-\sigma\tau} + v_b + \xi_b + c_{fb}), \tag{6}$$

где $v_a, v_b, v_{a'}, v_{b'}$ — константы, зависящие от начальных условий; $\xi_a = \xi_b$ — компоненты, порожденные действием испытательного сигнала и обращающиеся в ноль в моменты времени, когда длительность фильтрации τ кратна периоду испытательной частоты ($2\pi/\omega$); $\sigma = -\max\{\text{Re}(\lambda_i)\}$ — степень устойчивости полинома $d(s)$, где $\lambda_i, i = \overline{1, n}$, — его корни; c_{fa}, c_{fb} — константы, зависящие от внешнего возмущения (2). Эти неравенства получены путем анализа фильтров Фурье (5). Выходной сигнал объекта $y(t)$ при этом рассматривался как сумма компонент, вызванных влиянием ненулевых начальных условий и действием испытательного сигнала $u(t)$ и внешнего возмущения $f(t)$. Из-за большого числа неизвестных параметров, входящих в правую часть неравенств (6), их конструктивное применение для определения длительности или точности получаемых оценок частотных параметров затруднительно.

В работе [13] применяется метод оценки длительности фильтрации, основанный на относительной скорости сходимости фильтров Фурье, когда проверяются целевые неравенства

$$1 - \left| \frac{\hat{\alpha}(i, \omega)}{\hat{\alpha}(i-1, \omega)} \right| < \varepsilon, \quad 1 - \left| \frac{\hat{\beta}(i, \omega)}{\hat{\beta}(i-1, \omega)} \right| < \varepsilon, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (7)$$

где $\hat{\alpha}(i, \omega), \hat{\beta}(i, \omega), i = 2, 3, \dots$ — значения оценок частотных параметров, полученные в дискретные моменты времени $\tau_i = Ti, i = 1, 2, 3, \dots$, кратные периоду исследуемой частоты

$$T = 2\pi/\omega, \quad (8)$$

а ε — выбираемое небольшое число. Выполнение условий (7) после окончания периода i_{fin} означает завершение процесса фильтрации, а полученные при этом оценки $\hat{\alpha}(i_{\text{fin}}, \omega), \hat{\beta}(i_{\text{fin}}, \omega)$ принимаются в качестве значений частотных параметров объекта (1). Оценка точности получаемых частотных параметров при этом не приводится.

2. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ

Будем, как в работе [13], рассматривать результаты фильтрации в дискретные моменты времени $Ti, i = 1, 2, 3, \dots$, где T считается согласно формуле (8). Далее предполагается, что момент начала фильтрации t_f сдвинут от момента подачи на объект испытательного сигнала (4) на время qT , где $q \in N$ — число, выбранное так, что за время qT переходные процессы в объекте закончились. Пусть

также внешнее возмущение (2) для простоты содержит одну гармонику частоты ω_f с амплитудой ρ_f и фазой φ , далее частоту ω_f представим как $\omega_f = \eta\omega$, которой соответствуют частотные параметры $\alpha_f(\eta\omega)$ и $\beta_f(\eta\omega)$, тогда выходной сигнал объекта, обозначенный $\bar{y}(t)$, с высокой точностью описывается суммой синусов и косинусов с частотами ω и ω_f и амплитудами, равными частотным параметрам объекта:

$$\bar{y}(t) = \rho(\alpha(\omega)\sin(\omega t) + \beta(\omega)\cos(\omega t)) + \rho_f(\alpha_f(\eta\omega)\sin(\eta\omega t + \varphi) + \beta_f(\eta\omega)\cos(\eta\omega t + \varphi)). \quad (9)$$

Подставив сумму (9) в выражение для фильтров Фурье (5), приняв момент начала фильтрации $t_f = 0$, а длительность фильтрации $\tau_i = Ti, i = 1, 2, 3, \dots$, после вычисления интегралов получим аналитические выражения для ошибок фильтрации по компоненте внешнего возмущения с частотой ω_f :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha(i, \eta\omega) &= \frac{2\rho_f \sin(\eta\pi i)}{\rho\pi i(\eta^2 - 1)} \times \\ &\times (\alpha_f(\eta\omega)\cos(\eta\pi i + \varphi) - \beta_f(\eta\omega)\sin(\eta\pi i + \varphi)), \\ \Delta\beta(i, \eta\omega) &= \frac{2\rho_f \sin(\eta\pi i)}{\rho\pi i(\eta^2 - 1)} \times \\ &\times (\alpha_f(\eta\omega)\sin(\eta\pi i + \varphi) + \beta_f(\eta\omega)\cos(\eta\pi i + \varphi)), \\ &i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Применение выражений (10) для практической корректировки результатов фильтрации невозможно, однако можно сделать ряд качественных заключений о процессе фильтрации:

- с помощью фильтрации можно влиять на скорость сходимости оценок к истинным значениям через соотношение ρ_f/ρ , увеличивая по возможности амплитуду испытательного сигнала.
- ошибки, вызванные высокочастотными компонентами внешнего возмущения, будут исчезать очень быстро, в частности, можно не учитывать высокочастотные помехи (это справедливо, так как испытательная частота выбирается специальным образом [12] из диапазона собственных частот объекта, для которых помехи измерения имеют $\eta \gg 1$). И наоборот, если $\eta \approx 1$, то с помощью величины $(\eta^2 - 1)$ в знаменателе выражения (10) получим большой коэффициент, усиливающий ошибку фильтрации по данной компоненте, что значительно увеличит длительность фильтрации. Поэтому желательно выбирать испытательные частоты так, чтобы в некоторой их окрестности не содержалось компонент внешнего возмущения.
- если исследуемая частота выбрана так, что нарушается свойство ФФ-фильтруемости внеш-



него возмущения, т. е. если $\eta = 1$, то процесс фильтрации сойдется к частотным параметрам с ошибкой, которая не отфильтровывается с течением времени и согласно выражениям (10) представляет собой:

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \Delta\alpha(i, \omega) = \rho_f/\rho(\alpha_f(\omega)\cos(\varphi) - \beta_f(\omega)\sin(\varphi)),$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \Delta\beta(i, \omega) = \rho_f/\rho(\alpha_f(\omega)\sin(\varphi) + \beta_f(\omega)\cos(\varphi)).$$

Для выражений (10) можно записать верхние и нижние оценки ошибок:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\alpha}(i, \eta\omega) &= \frac{2\rho_f|w_{yf}(\eta\omega)|}{\rho\pi i|\eta^2 - 1|}, \\ \Delta\underline{\alpha}(i, \eta\omega) &= -\frac{2\rho_f|w_{yf}(\eta\omega)|}{\rho\pi i|\eta^2 - 1|}, \\ \Delta\bar{\beta}(i, \eta\omega) &= \frac{2\rho_f\eta|w_{yf}(\eta\omega)|}{\rho\pi i|\eta^2 - 1|}, \\ \Delta\underline{\beta}(i, \eta\omega) &= -\frac{2\rho_f\eta|w_{yf}(\eta\omega)|}{\rho\pi i|\eta^2 - 1|}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{11}$$

где $|w_{yf}(\eta\omega)| = \sqrt{\alpha_f^2(\eta\omega) + \beta_f^2(\eta\omega)}$ — модуль передаточной функции от внешнего возмущения на частоте $\omega_f = \eta\omega$.

Перепишем верхние оценки в выражениях (11), свернув постоянные величины в одну константу:

$$\Delta\bar{\alpha}(i, \eta\omega) = \frac{c_a(\eta\omega)}{i}, \quad \Delta\bar{\beta}(i, \eta\omega) = \frac{c_b(\eta\omega)}{i},$$

$$i = 1, 2, 3, \dots,$$

где $c_a(\eta\omega) = \frac{2\rho_f\eta|w_{yf}(\eta\omega)|}{\rho\pi|\eta^2 - 1|}$, $c_b(\eta\omega) = \frac{2\rho_f\eta|w_{yf}(\eta\omega)|}{\rho\pi|\eta^2 - 1|}$,

для нижних оценок можно сделать аналогичные операции.

Переходя к общему виду внешнего возмущения (2) и учитывая его ограниченность, можно записать неравенства, схожие с выражениями (6), но с предположением, что переходные процессы закончились и соответствующими слагаемыми в правой части неравенств можно пренебречь ($v_a e^{-\sigma t} = 0$, $v_b e^{-\sigma t} = 0$), а остальные постоянные слагаемые (2, v_a , v_b и c_{fa} , c_{fb}) объединены в константы c_{af} и c_{bf} :

$$\begin{aligned} |\hat{\alpha}(i, \omega) - \alpha(\omega)| &\leq \frac{c_{af}}{i}, \\ |\hat{\beta}(i, \omega) - \beta(\omega)| &\leq \frac{c_{bf}}{i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{12}$$

В следующем разделе эти неравенства применяются для оценивания длительности и точности процесса фильтрации; описывается способ анализа результатов процесса фильтрации, который поз-

воляет по текущим экспериментальным данным найти оценки частотных параметров и оценить сходимость процесса фильтрации, скорость которой определяет длительность фильтрации. Далее рассуждения проводятся для оценки длительности и даны оценки точности фильтрации по параметру $\alpha(\omega)$; для параметра $\beta(\omega)$ рассуждения будут аналогичными.

3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И ДЛИТЕЛЬНОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ

3.1. Идея подхода

Пусть в процессе фильтрации последовательно получено l оценок частотных параметров $\hat{\alpha}(i, \omega)$, $i = \overline{1, l}$, тогда значения параметров $\alpha(\omega)$ и c_{af} из неравенств (12) можно получить с помощью решения задачи линейного программирования:

найти

$$\min_{\alpha(\omega), c_{af}} c_{af} \tag{13}$$

Ограничения в задаче (13) формируются из условия $c_{af} > 0$ и неравенств (12), которые после раскрытия модуля имеют форму, удобную для наглядной геометрической интерпретации решения задачи:

$$\hat{\alpha}(i, \omega) \leq \frac{c_{af}}{i} + \alpha(\omega), \tag{14}$$

$$\hat{\alpha}(i, \omega) \geq -\frac{c_{af}}{i} + \alpha(\omega), \quad i = \overline{1, l}.$$

Пусть в результате решения задачи (13) получены оценки параметров $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{c}_{af}(l)$. Их геометрический смысл состоит в том, что они определяют две кривые, заданные выражениями в правой части неравенств (14), а все значения оценок $\hat{\alpha}(i, \omega)$, $i = \overline{1, l}$, лежат между ними.

Решение задачи (13) обладает свойствами:

- 1) если внешнее возмущение $\Phi\Phi$ -фильтруемо, то при $l \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $\tilde{\alpha}(\omega, l) \rightarrow \alpha(\omega)$;
- 2) параметр $\tilde{c}_{af}(l)$, $l = 2, 3, \dots$, представляет собой неубывающую монотонную последовательность, предел которой сверху ограничен константой c_{af} .

Пусть при некотором l имеем решение задачи (13) $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{c}_{af}(l)$, для которого справедливы неравенства (14). Когда в процессе фильтрации получено следующее значение оценки частотного параметра $\hat{\alpha}(l+1, \omega)$, возможны два варианта его расположения относительно кривых, задаваемых

решением $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{c}_{af}(l)$ согласно неравенствам (14). Если выполняется условие

$$\hat{\alpha}(l+1, \omega) \in \left[-\frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l+1} + \tilde{\alpha}(\omega, l); \frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l+1} + \tilde{\alpha}(\omega, l) \right], \quad (15)$$

т. е. оценка $\hat{\alpha}(l+1, \omega)$ лежит между двумя кривыми из неравенств (14), тогда решение $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{c}_{af}(l)$ является оптимальным для $l+1$ периодов фильтрации.

Если условие (15) не выполняется, то параметры $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{c}_{af}(l)$ не являются решением задачи (13) для набора $\hat{\alpha}(i, \omega)$, $i = \overline{1, l+1}$, и ее необходимо решать снова, причем для нового решения $\tilde{\alpha}(\omega, l+1)$ и $\tilde{c}_{af}(l+1)$ гарантировано будет выполняться неравенство $\tilde{c}_{af}(l+1) > \tilde{c}_{af}(l)$.

Для определения длительности фильтрации будем пользоваться свойством 2, согласно которому параметр $\tilde{c}_{af}(l)$ меняется монотонным образом. Учитывая этот факт, можно построить разные алгоритмы определения момента окончания фильтрации. В настоящей статье предлагается провести простую проверку относительного изменения значения $\tilde{c}_{af}(l)$ на некотором временном интервале. В процессе фильтрации будем пользоваться скользящим окном шириной $D \in N$, определяющим некоторое число периодов исследуемой частоты ω , на которых будем вычислять изменение величины $\tilde{c}_{af}(l)$ (и соответственно $\tilde{c}_{bf}(l)$). Целевыми условиями для определения длительности фильтрации являются неравенства, похожие на (7), но для соответствующих параметров $\tilde{c}_{af}(l)$ и $\tilde{c}_{bf}(l)$:

$$1 - \left| \frac{\tilde{c}_{af}(i)}{\tilde{c}_{af}(i-D)} \right| < \varepsilon, \quad 1 - \left| \frac{\tilde{c}_{bf}(i)}{\tilde{c}_{bf}(i-D)} \right| < \varepsilon, \\ i = D+1, D+2, D+3, \dots$$

При одновременном выполнении этих целевых условий процесс фильтрации считаем завершённым.

Параметр D выбирается пропорционально исследуемой частоте: $D \sim \omega$. Большой частоте ω соответствует небольшой период (8), а так как ошибка фильтрации фактически сходится линейно по времени, то необходимо выбирать D достаточно большим, чтобы адекватно анализировать поведение $\tilde{c}_{af}(l)$ и $\tilde{c}_{bf}(l)$. При малом ω ситуация противоположная, и следует выбирать D небольшим. Вообще при выборе D следует учитывать специфику конкретной решаемой задачи, например, возможные ограничения на длительность фильтрации.

Анализ точности получаемых оценок $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{\beta}(\omega, l)$ ввиду отсутствия информации о внешнем возмущении и объекте в общем случае невозможен (в выражениях (10) участвуют неизвестные амплитуды, фазы и частоты внешнего возмущения, а также соответствующие им значения частотной характеристики объекта по внешнему возмущению).

Однако при выполнении неравенств

$$-\frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l} + \tilde{\alpha}(\omega, l) \leq \alpha(\omega) \leq \frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l} + \tilde{\alpha}(\omega, l), \quad (16)$$

можно выписать верхнюю оценку ошибок фильтрации для соответствующего l :

$$|\tilde{\alpha}(\omega, l) - \alpha(\omega)| \leq \frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l}. \quad (17)$$

Проверить условие (16) на практике невозможно, поэтому пользоваться неравенством (17) нужно с известной осторожностью. Для выполнения условий (16) необходимо, чтобы последовательность ошибок оценивания $\hat{\alpha}(i, \omega) - \alpha(\omega)$, $i = 1, 2, \dots$, имела хотя бы два элемента разных знаков (есть хотя бы две такие экспериментальные оценки частотного параметра, одна из которых больше истинного значения $\alpha(\omega)$, а другая меньше), но это условие может не выполняться для многих практических сигналов. Так, при постоянном внешнем возмущении экспериментальные оценки $\hat{\alpha}(i, \omega)$, $i = 1, 2, \dots$, ведут себя монотонным образом $\hat{\alpha}(i, \omega) = \alpha(\omega) + c/i$, $i = 1, 2, \dots$, где c — некоторая константа, зависящая от величины $f(t) = \text{const}$. В этом случае решение задачи (13) имеет вид:

$$\tilde{\alpha}(\omega, l) = \alpha(\omega) + \frac{2c}{l+1}, \\ \tilde{c}_{af}(l) = c \frac{l-1}{l+1},$$

откуда следует, что условие (16) не выполняется для всех $l > 2$. При этом асимптотическая сходимость $\tilde{\alpha}(\omega, l) \rightarrow \alpha(\omega)$, естественно, сохраняется, и предложенный способ определения длительности фильтрации применим и в этом случае.

Далее коротко обсуждаются численные аспекты решения задачи (13).

3.2. Решение задачи линейного программирования

Найти точное решение задачи (13) можно, учитывая тот факт, что кривые, задаваемые решением задачи $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{c}_{af}(l)$, касаются экспериментально полученных оценок $\hat{\alpha}_i(\omega)$, $i = 1, l$, только в двух точках (зажимают их «сверху» и «снизу»). Для этих двух оценок частотных параметров неравенства (14) будут равенствами, из которых можно найти решение задачи $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{c}_{af}(l)$.



Алгоритм поиска решения задачи линейного программирования формулируется следующим образом.

1. Для всех различных попарных сочетаний оценок частотных параметров вычисляются кандидаты на решение задачи:

$$\tilde{c}_{af}^{[v]}(l) = (\hat{\alpha}(i, \omega) - \hat{\alpha}(j, \omega)) \frac{ij}{i+j},$$

$$\tilde{\alpha}^{[v]}(\omega, l) = \frac{1}{2} \left(\hat{\alpha}(i, \omega) + \hat{\alpha}(j, \omega) - \tilde{c}_{af}^{[v]}(l) \frac{j-i}{ij} \right),$$

$$v = \overline{1, l(l+1)/2}, \quad i = \overline{1, l-1}, \quad j = \overline{i+1, l}.$$

Формулы соответствуют случаю, когда $\hat{\alpha}(i, \omega) \geq \hat{\alpha}(j, \omega)$, иначе получим $\tilde{c}_{af}^{[ij]}(l) < 0$. Чтобы этого избежать, в подобных ситуациях будем менять местами i и j и $\hat{\alpha}(i, \omega)$ и $\hat{\alpha}(j, \omega)$.

2. Среди рассчитанных пар параметров $\tilde{c}_{af}^{[v]}(l)$ и $\tilde{\alpha}^{[v]}(\omega, l)$, $v = \overline{1, l(l+1)/2}$, ищется пара, для которой выполняются условия (14) и у которой параметр $\tilde{c}_{af}^{[v]}(l)$ имеет минимальное значение. Это и будет искомым решением задачи $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{c}_{af}(l)$.

Алгоритм решения носит комбинаторный характер, что в условиях ограниченных вычислительных мощностей технологического процесса может затруднить его применение для больших размерностей l , особенно учитывая, что сам метод конечно-частотной идентификации подразумевает одновременную фильтрацию сразу на нескольких кратных частотах [11], для каждой из которых необходимо решать задачу линейного программирования.

Альтернативой изложенному выше аналитическому методу решения задачи линейного программирования может служить численный метод одномерной минимизации выпуклой функции, например, метод золотого сечения [14]. Покажем, как задача (13) сводится к одномерному поиску. Пусть есть фиксированное значение $\tilde{\alpha}(\omega)$. Соответствующее ему значение \tilde{c}_{af} можно найти как $\tilde{c}_{af}(\tilde{\alpha}(\omega)) = \max[i|\tilde{\alpha}(\omega) - \hat{\alpha}(i, \omega)|], i = \overline{1, l}$, тогда задача сводится к $\min \tilde{c}_{af}(\tilde{\alpha}(\omega))$ при $\tilde{\alpha}(\omega) \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, где $\alpha_{\min} = \min(\hat{\alpha}(\omega))$, $\alpha_{\max} = \max(\hat{\alpha}(i, \omega))$, $i = \overline{1, l}$. Число итераций N метода золотого сечения, необходимое для получения решения (по $\tilde{\alpha}$) с точностью ε_{3c} , определяется формулой:

$$N = \log\left(\frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{\varepsilon_{3c}}\right) / \log\varphi_{3c} - 1,$$

где $\varphi_{3c} = 1,618\dots$ — золотое сечение.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим объект управления (1) с заданными параметрами:

$$(18s^2 + 8,6s + 1)u = (1,5s + 1)u + f.$$

Для экспериментов выберем тестовую частоту равной $\omega = 1/8,6 = 0,116$ с единичной амплитудой. Ей соответствуют значения частотных параметров (3) и испытательный сигнал (4) вида $\alpha(\omega) = 0,592$, $\beta(\omega) = -0,552$ и $u(t) = \sin(0,116t)$. Этому сигналу соответствует период испытательной частоты (8) $T = 54,04$, начало фильтрации сдвинуто на один период ($q = 1$).

Положим, что внешнее возмущение

$$f(t) = \text{sign}[\sin(0,1221t - 18^\circ)] + \text{sign}[\sin(0,1105t - 342^\circ)]$$

представляет собой сумму двух меандров, имеющих соответственно $\eta = [1,05 \ 0,95]$ и $\rho_f = [1 \ 1]$. Фазы выбраны таким образом, что в момент начала фильтрации $t_f = 54,04$ внешнее возмущение $f(t_f) = 0$. В § 2 показано, что при таких η будут наблюдаться значительные ошибки в течение процесса фильтрации. Например, определение длительности фильтрации согласно формулам (7) дает следующие результаты.

Длительность идентификации составила $L = 15$ периодов испытательной частоты (общая длительность $\tau = (q + L)T = 864,64$ с), а сами значения оценок параметров составили: $\hat{\alpha}(L, \omega) = 0,327$ (ошибка 44,8 %), $\hat{\beta}(L, \omega) = -0,222$ (ошибка 59,7 %).

Такой результат фильтрации можно объяснить, если взглянуть на графики изменения $\hat{\alpha}(i, \omega)$ и $\hat{\beta}(i, \omega)$, изображенные на рис. 1, где они выделены точками, для наглядности соединенными между собой. По ним видно, что при $L = 15$ оценки $\hat{\alpha}(L, \omega)$ и $\hat{\beta}(L, \omega)$ мало меняют свои значения по сравнению с предыдущим периодом фильтрации, хотя сами значения оценок при этом лежат довольно далеко от истинных значений.

Теперь будем применять предложенный в статье способ определения длительности фильтрации. Ширину окна, на котором будем анализировать изменение \tilde{c}_{af} и \tilde{c}_{bf} , выберем как $D = 5$. Длительность эксперимента при этом составила $L = 18$ периодов частоты ω (соответственно $\tau = 1026,76$ с) и были получены значения оценок частотных параметров: $\tilde{\alpha}(\omega, L) = 0,586$ (ошибка 1,12 %), $\tilde{\beta}(\omega, L) = -0,572$ (ошибка 3,66 %), при этом $\tilde{c}_{af}(L) = 3,88$ и $\tilde{c}_{bf}(L) = 5,25$. На рис. 1 сплошными линиями изображены соответствующие кривые $\pm \tilde{c}_{af}(L)/i + \tilde{\alpha}(\omega, L)$ и $\pm \tilde{c}_{bf}(L)/i + \tilde{\beta}(\omega, L)$, также прерывистыми прямыми отдельно показаны $\tilde{\alpha}(\omega, L)$, $\alpha(\omega)$ и $\tilde{\beta}(\omega, L)$, $\beta(\omega)$ (на обоих рисунках они практически совпадают).

На рис. 2 изображены графики изменения решений задачи (13): $\tilde{c}_{af}(l)$, $\tilde{\alpha}(\omega, l)$ и $\tilde{c}_{bf}(l)$, $\tilde{\beta}(\omega, l)$ по мере увеличения числа периодов фильтрации. Сплошными линиями изображены точные аналитические решения задачи

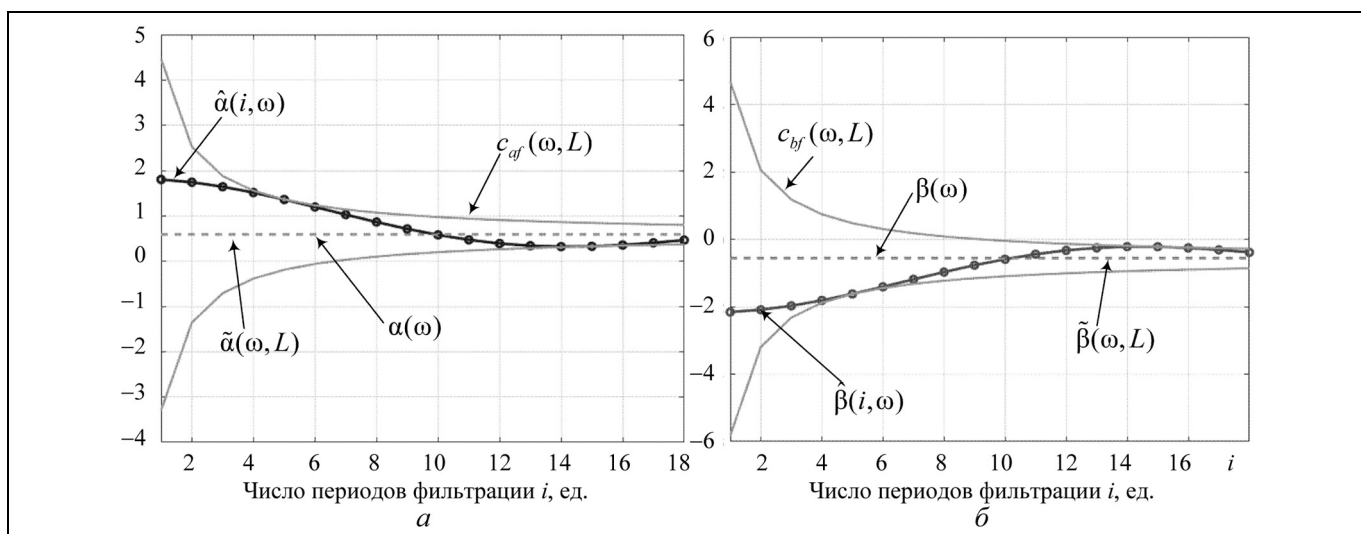


Рис. 1. Результаты фильтрации: a — параметр $\alpha(\omega)$, b — параметр $\beta(\omega)$

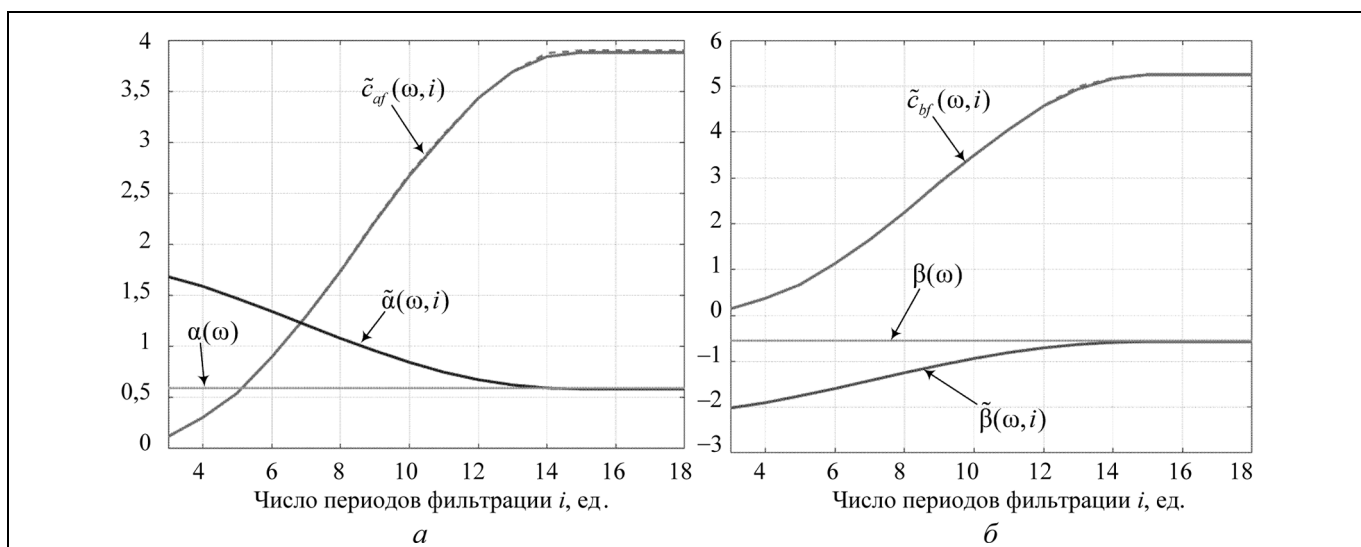


Рис. 2. Динамика изменения решений задачи (13): a — параметр $\alpha(\omega)$, b — параметр $\beta(\omega)$

(13), а прерывистыми — приближенные, полученные описанным методом золотого сечения. Также сплошными линиями показаны истинные значения частотных параметров. По графикам заметно, что \tilde{c}_{af} и \tilde{c}_{bf} ведут себя монотонно, а при приближении l к $L = 18$ они практически перестают меняться, что соответствует завершению процесса фильтрации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуется процесс фильтрации, применяемый при конечно-частотной идентификации, для определения оценок частотных параметров идентифицируемого объекта управления. С помощью решения специальной задачи линейного програм-

мирования находятся значения двух параметров: оценки частотного параметра и коэффициента, характеризующего динамику ошибки фильтрации. Сформулирован алгоритм фильтрации с определением ее длительности на основе изменения второго параметра. Даны некоторые соображения по оценке точности найденных частотных параметров. Приводится численный пример, который демонстрирует эффективность предложенного алгоритма по сравнению с использовавшимся ранее способом определения длительности фильтрации.

Основная идея предложенного подхода проста и естественна, поэтому, хотя статья и посвящена его применению в конечно-частотной идентификации, описанный алгоритм может применяться



в любой схожей задаче, когда необходимо оценить динамику сходимости некоторого немонотонно сходящегося процесса.

Дальнейшие перспективы развития данного подхода заключаются в получении гарантированных оценок точности частотных параметров для фиксированных классов возмущений и анализе связи ошибок фильтрации с итоговыми результатами идентификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ljung, L.* Perspectives on System Identification // Annual Reviews in Control. — 2010. — Vol. 34. — P. 1–12.
2. *Keesman, K.J.* System Identification. An Introduction. — London: Springer-Verlag. — 2011. — 334 p.
3. *Isermann, R., Münchhof, M.* Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Application. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. — 2011. — 705 p.
4. *Pintelon, R., Guillaume, P., Rolain, Y., et al.* Parametric Identification of Transfer Functions in the Frequency Domain — Survey // IEEE Trans. Automat. Control. — 1994. — Vol. AC-39. — No. 11. — P. 2245–2260.
5. *Vakilzadeh, M.K., Yaghoubi, V., McKelvey, T., et al.* Experiment Design for Improved Frequency Domain Subspace System Identification of Continuous-Time Systems // Proc. of the 17-th IFAC Symposium on System Identification. — Beijing, 2015. — P. 886–891.
6. *Li, X.-F., Chen, G., Wang, Y.-G.* IMC-PID Controller Design for Power Control Loop Based on Closed-loop Identification in the Frequency Domain // Proc. of the 14-th IFAC Symposium on Large Scale Complex Systems: Theory and Applications. — Riverside, 2016. — P. 79–84.
7. *Alexandrov, A.G.* Finite-Frequency Method of Identification // Preprints of the 10-th IFAC Symposium on System Identification. — Copenhagen, 1994. — Vol. 2. — P. 523–527.
8. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Конечно-частотная идентификация: динамический алгоритм // Проблемы управления. — 2009. — № 4. — С. 2–8. [*Alexandrov, A.G., Orlov, Yu.F.* Finite-Frequency Identification: Dynamic Algorithm // Control Sciences. — 2009. — No. 4. — P. 2–8. (In Russian)]
9. *Орлов Ю.Ф.* Конечно-частотная идентификация многомерных объектов при почти произвольных ограниченных возмущениях // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42. — № 2. — С. 280–281. [*Orlov, Yu.F.* Finite-Frequency Identification of Multidimensional Objects under Almost Arbitrary Bounded Variations // Differential Equations. — 2006. — Vol. 42, no. 2. — P. 300–302.]
10. *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: определение границ испытательных частот // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 11. — С. 3–14. [*Alexandrov, A.G.* Finite-Frequency Identification: Test Frequency Bounds // Automation and Remote Control. — 2001. — Vol. 62, iss. 11. — P. 1759–1769.]
11. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Сравнение двух методов идентификации при неизвестных ограниченных возмущениях // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 10. — С. 128–147. [*Alexandrov, A.G., Orlov, Yu.F.* Comparison of the Two Methods of Identification under Unknown-but-Bounded Disturbances // Automation and Remote Control. — Vol. 66, iss. 10. — P. 1647–1665.]
12. *Alexandrov, A.G.* Finite-Frequency Identification: Self-tuning of Test Signal // Preprints of the 16th IFAC World Congress. — Prague, 2005. — P. 295–301.
13. *Alexandrov, A.G., Palenov, M.V.* Self-Tuning PID-I Controller // Proceedings of the 18th IFAC World Congress. — Milano, 2011. — P. 3635–3640.
14. *Kiefer, J.* Sequential Minimax Search for a Maximum // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1953. — Vol. 4, no. 3. — P. 502–506.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтмадзе.

Поступила в редакцию 23.07.2018, после доработки 10.02.2020.
Принята к публикации 31.07.2020.

Шатов Дмитрий Владимирович — канд. техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ dvshatov@gmail.com.

DURATION OF FILTRATION PROCESS DURING FINITE-FREQUENCY IDENTIFICATION

D.V. Shatov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ dvshatov@gmail.com

Abstract. A linear control plant subjected to an external disturbance is considered. The disturbance is assumed to be an unknown bounded function. The finite-frequency identification allows us to find estimates of this control plant's parameters. It uses special integral filters (Fourier filters), that find estimates of the plant frequency response at a specific set of frequencies. A system of linear equations is formed from the set of the plant frequency response points. The solution of this system provides desired estimates of the plant parameters. Error dynamics of filtration process is studied. The research is based on known results that describe asymptotic characteristic of the Fourier filters errors in presence of unknown-but-bounded external disturbances. A new approach to determine the filtration duration is proposed, estimation of the filtration accuracy is described. The proposed approach is based on a special linear programming problem, the solution of which gives us an estimate of the filter value and a value of parameter that describes the rate of the filter error convergence. The last one is used for duration determination. The appropriate filtration algorithm is developed. Numerical experiments that prove efficiency of the proposed approach were carried out.

Keywords: finite-frequency identification, Fourier filter, linear programming, identification duration, estimation accuracy.