

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ КОНЕЧНО-ЧАСТОТНЫМ МЕТОДОМ

Д.В. Шатов

Предложен подход к определению запаздывания при идентификации параметров одномерных линейных объектов. Объект описывается известной (идентифицированной) передаточной функцией, обладает неизвестным запаздыванием и подвержен действию неизвестных ограниченных внешних возмущений. Отмечено, что подход основан на методе конечно-частотной идентификации, в котором используется испытательный сигнал (в виде полигармонической функции) для определения коэффициентов передаточной функции объекта и запаздывания.

**Ключевые слова:** частотная идентификация, запаздывание, линейные системы, ограниченное возмущение.

## ВВЕДЕНИЕ

Идентификация динамических объектов — важное направление теории управления. За время его развития сложилось много методов и подходов к решению задач идентификации. Перечислим несколько наиболее распространенных из них.

Методы линейной регрессии и наименьших квадратов [1], их основной недостаток заключается в том, что их применение предполагает либо отсутствие внешнего возмущения, либо оно представляет собой белый шум. Метод инструментальных переменных [1] допускает внешние возмущения гораздо более широкого класса при некоторых ограничениях на свойства входного сигнала. В рандомизированных алгоритмах [2] и методе конечно-частотной идентификации [3] класс внешних возмущений описывается неизвестными ограниченными функциями.

Указанные методы могут быть пассивными и активными. При пассивной идентификации используется только информация, получаемая при нормальной работе объекта, когда к нему не прикладывается никаких дополнительных воздействий. В ряде случаев пассивные методы не позволяют осуществлять корректную идентификацию. В таких случаях применяют активные методы и

совместно с управляющим сигналом к объекту прилагают дополнительный испытательный сигнал.

На практике объекты управления часто обладают запаздыванием, тогда их относят к классу специальных объектов и рассматривают задачу идентификации с учетом запаздывания. На основе перечисленных методов идентификации разработан ряд методов [4] оценки параметров таких объектов.

Так, например, предложен поисковый метод идентификации запаздывания, согласно которому используется модель объекта с изменяющимся запаздыванием [5]. Суть метода заключается в процедуре оптимизации с целью минимизации разницы между выходом модели с меняющимся запаздыванием и реального объекта. Передаточная функция объекта предполагается известной, внешние возмущения отсутствуют.

Предложен метод идентификации передаточной функции объекта и запаздывания, основанный на фильтрации входных и выходных сигналов объекта с помощью специальных интегральных фильтров [6]. Испытательным сигналом служит ступенчатое воздействие. Предложены несколько схожих алгоритмов идентификации в зависимости от сложности идентифицируемой модели.



Внешнее возмущение описывается моделью белого шума различной интенсивности.

В статье [7] также применяется фильтрация входных и выходных сигналов объекта. Результаты фильтрации используются в алгоритме идентификации, который представляет собой комбинацию метода наименьших квадратов и итерационного метода инструментальных переменных. Алгоритм позволяет проводить идентификацию в присутствии неизвестных ограниченных внешних возмущений. В работе [8] метод усовершенствован, используются испытательные сигналы в виде синусоид и ступенчатого воздействия.

Задачи идентификации объектов с запаздыванием решались и конечно-частотным методом. Применялась процедура фильтрации и использовался полигармонический испытательный сигнал. Задача адаптивного ПИД-управления объектом с запаздыванием решается в работе [9]. Объект описывается моделью первого порядка, на запаздывание налагаются определенные ограничения. Полученные результаты обобщены на произвольную модель объекта с запаздыванием [10]. При этом задачи идентификации передаточной функции объекта и запаздывания решаются независимо друг от друга. В настоящей работе предлагается альтернативный подход к идентификации запаздывания. Он также основан на идее конечно-частотной идентификации.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается объект управления, описываемый уравнением

$$d_n y^{(n)}(t) + \dots + d_1 \dot{y}(t) + y(t) = k_m u^{(m)}(t - \tau) + \dots + k_0 u(t - \tau) + f(t), \quad m < n, \quad (1)$$

где  $y(t)$  — выход объекта,  $u(t)$  — сигнал управления,  $f(t)$  — внешнее возмущение, которое может быть представлено полигармонической функцией

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \sin(\omega_i^f t + \varphi_i^f),$$

где частоты  $\omega_i^f$  и фазы  $\varphi_i^f$  — неизвестны, а неизвестные амплитуды  $f_i$  удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i| \leq f^*,$$

в котором значение  $f^*$  известно.

Объект управления предполагается полностью управляемым и минимально-фазовым. Коэффици-

циенты  $k_i, i = \overline{0, m}, d_j, j = \overline{0, n}$ , известны (определяемые в процессе идентификации). Запаздывание  $\tau > 0$  неизвестно. Предполагается, что запаздывание ограничено сверху известным значением  $\tau^*$  ( $\tau < \tau^*$ ).

Задача состоит в нахождении оценки запаздывания  $\hat{\tau}$ .

Передаточную функцию объекта (1) можно записать, используя преобразование Лапласа ( $s$  — его символ при нулевых начальных условиях):

$$w_{\tau}(s) = w(s)e^{-\tau s} = \frac{k(s)}{d(s)} e^{-\tau s}, \quad (2)$$

где  $d(s) = \sum_{i=1}^n d_i s^i + 1, k(s) = \sum_{j=0}^m k_j s^j$ .

Для определения оценок коэффициентов полиномов  $d(s)$  и  $k(s)$  известны [10] уравнения, в которые они входят независимо от запаздывания, поэтому считаем, что коэффициенты  $\hat{k}_i, i = \overline{0, m}, \hat{d}_j, j = \overline{0, n}$ , известны.

Для получения этих уравнений к объекту (1) прикладывается испытательный сигнал специального вида:

$$u(t) = \sum_{v=1}^l \rho_v \sin \omega_v t, \quad l = m + n + 1. \quad (3)$$

Его параметрами служат частоты  $\omega_v$  и амплитуды  $\rho_v, v = \overline{1, l}$  гармоник, их выбор описывается в работе [11].

Вводят частотные параметры

$$\alpha_v = \operatorname{Re} w_{\tau}(j\omega_v), \quad \beta_v = \operatorname{Im} w_{\tau}(j\omega_v), \quad v = \overline{1, l}, \quad (4)$$

и

$$\varphi_v = \operatorname{Re} w(j\omega_v), \quad \psi_v = \operatorname{Im} w(j\omega_v), \quad v = \overline{1, l}. \quad (5)$$

Оценки параметров (4) получают экспериментально с помощью фильтров Фурье вида:

$$\hat{\alpha}_v = \frac{2}{\rho_v T} \int_{t_0}^{T+t_0} y(t) \sin \omega_v t dt, \\ \hat{\beta}_v = \frac{2}{\rho_v T} \int_{t_0}^{T+t_0} y(t) \cos \omega_v t dt, \quad v = \overline{1, l}, \quad (6)$$

где  $t_0$  — момент начала фильтрации,  $T$  — длительность фильтрации.

Определение оценки запаздывания  $\hat{\tau}$  с использованием результатов фильтрации (6) на частотах  $\omega_v$ ,  $v = \overline{1, l}$  не единственное.

Из выражения (2) следует

$$e^{j\hat{\tau}\omega_v} = \frac{w(j\omega_v)}{w_\tau(j\omega_v)}, \quad v = \overline{1, l}.$$

Из формул (4) и (5), очевидно,

$$\cos \hat{\tau}\omega_v - j \sin \hat{\tau}\omega_v = \frac{w(j\omega_v)}{w_\tau(j\omega_v)} = \frac{\hat{\alpha}_v + j\hat{\psi}_v}{\hat{\alpha}_v + j\hat{\beta}_v}.$$

Запишем отдельно реальную и мнимую части этого равенства

$$\cos \hat{\tau}\omega_v = \frac{\hat{\alpha}_v \hat{\alpha}_v + \hat{\beta}_v \hat{\psi}_v}{\hat{\alpha}_v^2 + \hat{\beta}_v^2} \quad \text{и} \quad \sin \hat{\tau}\omega_v = \frac{\hat{\alpha}_v \hat{\psi}_v - \hat{\beta}_v \hat{\alpha}_v}{\hat{\alpha}_v^2 + \hat{\beta}_v^2}. \quad (7)$$

Отсюда следует выражение для определения оценки  $\hat{\tau}$ :

$$\hat{\tau}(\omega_v, r) = \frac{1}{\omega_v} \left[ \arctg \left( \frac{\hat{\alpha}_v \hat{\psi}_v - \hat{\beta}_v \hat{\alpha}_v}{\hat{\alpha}_v \hat{\alpha}_v + \hat{\beta}_v \hat{\psi}_v} \right) + \pi r \right],$$

$$v = \overline{1, l}, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

которое дает не единственное решение для каждой из частот  $\omega_v$ ,  $v = \overline{1, l}$ .

Предлагается способ определения оценки запаздывания, также основанный на использовании дополнительного испытательного сигнала, представляющего собой синусоиду вида:

$$u = \rho_q \sin[\omega_q t], \quad \rho_q = \text{const}, \quad \omega_q = \text{const} \\ \text{для } t \in T_q, \quad q = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где  $\rho_q$  и  $\omega_q$  — амплитуды и частоты испытательного сигнала, который прилагается к объекту последовательно в процессе идентификации запаздывания,  $T_q$  — интервалы времени, на которых будем проводить фильтрацию согласно формулам (6), для соответствующих  $\rho_q$  и  $\omega_q$ . Опишем, как с помощью сигнала (8) можно однозначно найти оценку запаздывания.

### 3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

#### 3.1. Идея подхода

Оценки полиномов  $\hat{d}(s)$  и  $\hat{k}(s)$  известны, далее для простоты опустим символы оценок в обозначениях. Для некоторой произвольной частоты  $\omega_q$  в

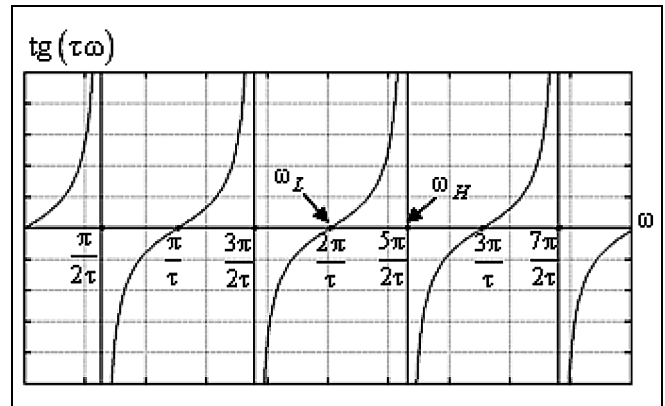


Рис. 1. График функции  $\text{tg}(\tau\omega)$

выражении (7) поделим одно равенство на другое и получим

$$\text{tg}(\tau\omega_q) = \frac{\alpha_q \psi_q - \beta_q \varphi_q}{\alpha_q \varphi_q + \beta_q \psi_q} = b(\omega_q), \quad (9)$$

где  $\alpha_q$ ,  $\beta_q$ ,  $\varphi_q$ ,  $\psi_q$  — значения оценок выражений (4) и (5) для  $j\omega_q$ . Обозначим правую часть (9) как  $b(\omega_q)$ . Тогда, учитывая, что значения  $\alpha_q$  и  $\beta_q$  находятся экспериментально с помощью фильтров Фурье, а  $\varphi_q$  и  $\psi_q$  вычисляются как  $\frac{k(j\omega_q)}{d(j\omega_q)}$ , можно определить  $b(\omega_q)$  для любой частоты  $\omega_q$ .

Рассмотрим теперь левую часть выражения (9), она представляет собой функцию  $\text{tg}(\tau\omega)$ , у которой неизвестен параметр  $\tau$ . Если рассматривать  $\omega$  как ее аргумент, то это будет функция тангенса, но с неизвестным периодом, равным  $\pi/\tau$ . Эта функция обращается в 0 на частотах  $\omega = \pi r/\tau$  и претерпевает разрывы в точках  $\omega = \pi(2r-1)/(2\tau)$ ,  $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Задача состоит в определении полупериода функции  $\text{tg}(\tau\omega)$ , используя набор частот  $\omega_q$  и значения  $b(\omega_q)$ ,  $q = 1, 2, 3, \dots$

Для однозначного определения запаздывания достаточно определить две положительные частоты  $\omega_L$  и  $\omega_H$ , ( $\omega_H > \omega_L > 0$ ), которые являются «соседними» нулем и точкой разрыва функции  $\text{tg}(\tau\omega)$  (или наоборот). Понятие «соседний» означает, что интервал частот между  $\omega_L$  и  $\omega_H$  не содержит ни одного нуля и ни одной точки разрыва функции  $\text{tg}(\tau\omega)$ .

На рис. 1 приведен график  $\text{tg}(\tau\omega)$  для нескольких периодов и показан пример двух «соседних» частот  $\omega_L$  и  $\omega_H$ .



После нахождения этих частот легко вычислить оценку запаздывания как:

$$\tau = \frac{\pi}{2\Delta\omega}, \quad (10)$$

где  $\Delta\omega = \omega_H - \omega_L$ .

Если не делать никаких предположений о запаздывании, то задача о нахождении «соседних» частот  $\omega_L$  и  $\omega_H$  принципиально неразрешима. Запаздывание предполагается ограниченным сверху  $\tau^*$ , тогда можно записать:  $\tau < \tau^* \leq \pi/2\delta$ , где  $\delta$  — выбираемое малое число.

Это предположение гарантирует, что интервал между соседними частотами не меньше  $\delta$ . При определении  $\omega_L$  и  $\omega_H$  будем также использовать  $\delta$  в качестве показателя точности, с которой необходимо определить эти частоты, при этом очевидно, что выполняется неравенство

$$\delta < \pi/2\tau. \quad (11)$$

Алгоритм поиска частот  $\omega_L$  и  $\omega_H$  основан на том, что при переходе через них функция  $\text{tg}(\tau\omega)$  меняет свой знак.

### 3.2. Алгоритм определения запаздывания

Естественный способ определения частот  $\omega_L$  и  $\omega_H$  заключается в поиске по частотной сетке с шагом  $\delta$ . Для такого поиска зададимся начальной частотой  $\omega_0$  (для простоты можно выбрать  $\omega_0 = \min(\omega_v), v = \overline{1, l}$ ), для этой частоты значение  $b(\omega_0)$  известно. Далее будем искать значения  $b(\omega_q)$  для частот  $\omega_q = \omega_0 + q\delta, q = 1, 2, 3, \dots$ , до тех пор, пока при некотором значении  $q = q^*$   $b(\omega_{q^*-1})$  и  $b(\omega_{q^*})$  не окажутся разных знаков. Тогда приближением для частоты  $\omega_L$  будем считать середину этого отрезка:  $\hat{\omega}_L = (\omega_{q^*-1} + \omega_{q^*})/2$ .

Для найденной частоты  $\hat{\omega}_L$  выполняется требование к точности:  $|\hat{\omega}_L - \omega_L| < \delta/2$ .

Частоту  $\omega_H$  будем искать аналогично, приняв в качестве начальной частоту  $\omega_{q^*}$ , после чего определим запаздывание согласно формуле (10).

Однако при малых  $\delta$  такой способ определения  $\omega_L$  и  $\omega_H$  может быть не эффективен (при небольших запаздываниях значение  $\pi/(2\tau)$  может быть большим, и для поиска искомым частот может потребоваться фильтрация на большом наборе частот, что существенно увеличит длительность идентификации).

Покажем, что можно существенно сократить число частот, на которых необходимо вычислять

$b(\omega)$ , если при поиске частот  $\omega_L$  и  $\omega_H$  использовать переменный шаг.

**Утверждение 1.** Дана периодическая функция  $b(\omega)$  с периодом  $T$  такая, что для произвольного периода с начальной частотой  $\omega^*$  выполняются неравенства:

$$b(\omega) < 0, \quad \omega \in (\omega^*, \omega^* + T/2) = T^-,$$

$$b(\omega) \geq 0, \quad \omega \in [\omega^* + T/2, \omega^* + T) = T^+. \quad (12)$$

Пусть задан интервал  $[\omega_0, \omega_0 + \delta]$ , для которого выполняется неравенство (11), имеющее вид  $\delta < T/2$ , тогда, если выполняется условие

$$\omega^* \leq \omega_0 < \omega_0 + \delta \leq \omega^* + T/2, \quad (13)$$

то существует натуральное  $q^*$  такое, что

$$\omega^* < \omega_0 + 2^{q^*-1}\delta \leq \omega^* + T/2,$$

$$\omega^* + T/2 < \omega_0 + 2^{q^*}\delta \leq \omega^* + T. \quad \blacklozenge \quad (14)$$

Иными словами, в какой-то момент правая граница кратно увеличивающегося интервала  $[\omega_0, \omega_0 + 2^q\delta]$  попадет в интервал  $T^+$ . Частота  $\omega^*$  может быть выбрана произвольно, только чтобы выполнялось условие (13).

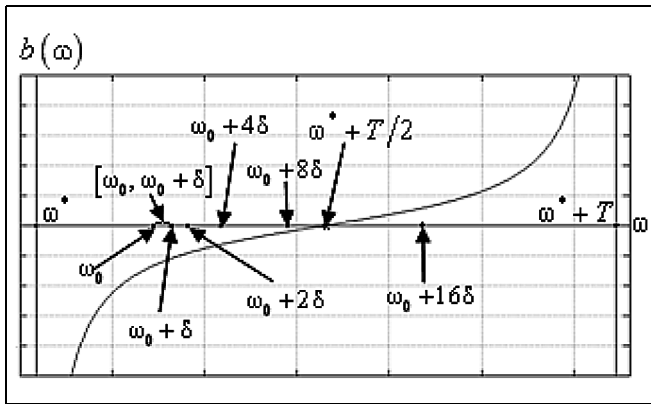
**Доказательство.** Рассмотрим произвольный период  $[\omega^*, \omega^* + T]$  функции  $b(\omega)$ . Примем, что для интервала  $[\omega_0, \omega_0 + \delta]$  выполнено условие (13).

Будем увеличивать ширину интервала как  $2^q\delta, q = 1, 2, 3, \dots$ . Для  $q = 1$  получим интервал  $[\omega_0, \omega_0 + 2\delta]$ , найдем значение на правой границе интервала  $b(\omega_0 + 2\delta)$ . Возможны два случая:  $b(\omega_0 + 2\delta) > 0$ , это значит, что  $2\delta > T/2$  и условия утверждения (14) выполнены. Это справедливо, так как если  $\delta < T/2$ , то  $2\delta < T$ , и тогда  $T/2 < 2\delta \leq T$ , что означает выполнение неравенства  $\omega^* + T/2 < \omega_0 + 2\delta \leq \omega^* + T$ .

В другом случае  $b(\omega_0 + 2\delta) < 0$ , что значит  $2\delta < T/2$ , при этом  $\omega^* < \omega_0 + 2\delta \leq \omega^* + T/2$ . В таком случае будем продолжать увеличивать  $q$ , пока не выполнится  $b(\omega_0 + 2^q\delta) > 0$ , тогда это и есть  $q^*$ , для которого выполняется условие (14).  $\blacklozenge$

На рис. 2 приведен график  $b(\omega)$  на одном периоде  $(\omega^*, \omega^* + T)$  и обозначены частоты, графически поясняющие суть утверждения 1. Изображенной на рисунке ситуации соответствует выполнение неравенства  $\omega_0 + 8\delta < \omega^* + T/2 < \omega_0 + 16\delta < \omega^* + T$ , которое удовлетворяет условиям (14) для  $q^* = 4$ .

**Утверждение 2.** Пусть дана периодическая функция  $b(\omega)$  с периодом  $T$ , для которой выполняются неравенства (12) и задан интервал  $[\omega_0, \omega_0 + \delta]$ , для которого выполняется неравенство (11). Тогда, если


 Рис. 2. График функции  $b(\omega)$  на периоде  $(\omega^*, \omega^* + T)$ 

выполняется условие  $\omega^* + T/2 \leq \omega_0 < \omega_0 + \delta \leq \omega^* + T$ , то существует натуральное  $q^*$  такое, что

$$\begin{aligned} \omega^* + T/2 < \omega_0 + 2^{q^*-1}\delta \leq \omega^* + T, \\ \omega^* + T < \omega_0 + 2^{q^*}\delta \leq \omega^* + 3T/2. \quad \blacklozenge \end{aligned} \quad (15)$$

Это утверждение означает, что в какой-то момент правая границакратно увеличивающегося интервала  $[\omega_0, \omega_0 + 2^q\delta]$ , лежащего в интервале  $T^+$  периода  $(\omega^*, \omega^* + T)$ , попадет в интервал  $T^-$  периода  $(\omega^* + T, \omega^* + 2T)$  или, что аналогично, захватит точку  $\omega^* + T$ . Утверждение доказывается аналогично утверждению 1.

**Замечание.** Следствие утверждений 1 и 2 состоит в том, что  $b(\omega_{q^*-1})$  и  $b(\omega_{q^*})$  имеют разные знаки.  $\blacklozenge$

Опишем алгоритм поиска частот  $\omega_L$  и  $\omega_H$  с переменным шагом. Для  $b(\omega) = \text{tg}(\tau\omega)$  выполняется условие (12). Тогда утверждение 1 используется для поиска нуля функции  $b(\omega)$ , а утверждение 2 — для поиска границы периода  $b(\omega)$  (частоты, на которой  $\text{tg}(\tau\omega)$  претерпевает разрыв).

Как и при поиске с постоянным шагом, зададимся начальной частотой  $\omega_0 = \min(\omega_v)$ ,  $v = \overline{1, l}$ , для которой известно значение  $b(\omega_0)$ . Найдем  $b(\omega_1)$  для  $\omega_1 = \omega_0 + \delta$ , если  $b(\omega_0)$  и  $b(\omega_1)$  одного знака, то имеется интервал, удовлетворяющий условиям (14) или (15) (в противном случае  $\hat{\omega}_L$  — середина интервала  $[\omega_0, \omega_1]$ ). Будем вести поиск  $\omega_L$  с переменным шагом, выбирая частоты для определения  $b(\omega_q)$  как  $\omega_q = \omega_0 + 2^q\delta$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда, согласно замечанию к утверждениям 1 и 2, при некотором  $q = q^*$  получим  $b(\omega_{q^*-1})$  и  $b(\omega_{q^*})$  — разных знаков, и искомая частота  $\omega_L$  лежит внутри интер-

вала  $[\omega_{q^*-1}, \omega_{q^*}]$ . Однако при  $q^* > 1$  ширина этого интервала

$$\Delta = 2^{q^*-1}\delta > \delta, \quad (16)$$

необходимо уменьшить ее до  $\delta$ . Для этого воспользуемся вариантом метода дихотомии.

Рассмотрим уменьшающийся интервал вида  $[\omega_q, \omega_q + 2^{q^*-1-q}\delta]$ ,  $q = \overline{1, q^*-1}$ , где  $\omega_q$  выбираются как

$$\omega_q = \begin{cases} \omega_{q-1}, & \text{если } b(\omega_{q-1})b(\omega_{q-1} + 2^{q^*-1-q}\delta) < 0, \\ \omega_{q-1} + 2^{q^*-1-q}\delta, & \\ \text{если } b(\omega_{q-1})b(\omega_{q-1} + 2^{q^*-1-q}\delta) > 0, \end{cases}$$

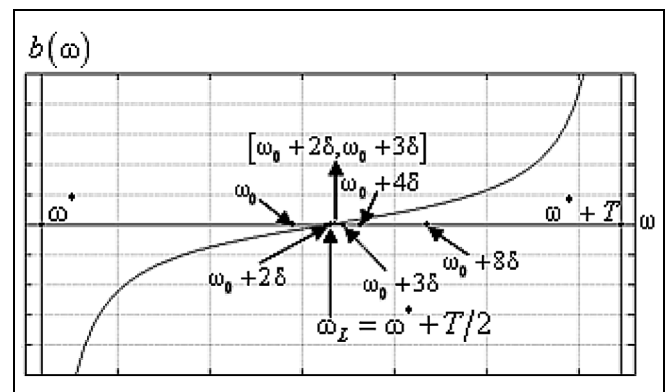
$$\omega_0 = \omega_{q^*-1}, \quad q = \overline{1, q^*-1},$$

тогда последний интервал и будет искомым интервалом шириной  $\delta$ .

Иными словами, на каждой итерации метода дихотомии  $q$  имеется интервал шириной  $2^{q^*-q}$ . Пусть  $\omega_M$  — середина такого интервала, определим знак  $b(\omega_M)$  и сдвинем границу интервала, совпадающую по знаку с  $b(\omega_M)$ , до частоты  $\omega_M$ . Повторим эти операции на каждой итерации вплоть до  $q = q^* - 1$ , при которой получим интервал шириной  $\delta$ , середина которого и есть  $\hat{\omega}_L$ .

Рис. 3 иллюстрирует поиск частоты  $\hat{\omega}_L$ . Найденный интервал  $[\omega_0 + 8\delta, \omega_0 + 16\delta]$  (см. рис. 2) переобозначим как  $[\omega_0, \omega_0 + 8\delta]$ . Показано, как методом дихотомии ширина этого интервала сокращается с  $8\delta$  до  $\delta$ .

После определения частоты  $\omega_L$  необходимо найти частоту  $\omega_H$ . Поиск будем вести аналогично,


 Рис. 3. Пояснение метода дихотомии при определении  $\omega_L$





но его можно немного ускорить, используя результаты поиска частоты  $\hat{\omega}_L$ .

Тогда при поиске  $\omega_H$  примем  $\omega_0 = \omega_{q^* - 1}$ , где  $|\hat{\omega}_L - \omega_{q^* - 1}| < \delta < \pi/2\tau$  (т. е.  $\omega_{q^*}$  — правая граница интервала, полученного на последней итерации при поиске  $\hat{\omega}_L$  методом дихотомии), а начальный шаг для поиска  $\Delta < \pi/(2\tau)$  из формулы (16). Это справедливо, так как для найденного значения  $\omega_L$  выполняются неравенства (14) или (15). После нахождения частоты  $\hat{\omega}_H$ , воспользовавшись формулой (10), вычислим оценку запаздывания как  $\hat{\tau} = \frac{\pi}{2(\hat{\omega}_H - \hat{\omega}_L)}$ .

Такой алгоритм сходится за конечное число шагов, зависящее от  $\omega_0$ ,  $\delta$  и истинного значения  $\tau$ . Даже в случае наихудшего выбора  $\omega_0$  это число не превысит

$$N = 3 \log_2 \frac{\pi}{\tau \delta}.$$

При этом точность найденной оценки запаздывания

$$|\hat{\tau} - \tau| \leq \frac{\pi \delta}{(\hat{\omega}_H - \hat{\omega}_L)^2 - \delta^2}.$$

### 3.3. Выбор параметров алгоритма, сходимост

Описанный алгоритм идентификации запаздывания требует выбора нескольких параметров:  $\delta$ ,  $\omega_0$ ,  $\rho_q$ ,  $q = 1, 2, 3, \dots$ . Рассмотрим, как их выбор влияет на точность и длительность идентификации.

Выбор числа  $\delta$  влияет как на точность, так и на длительность идентификации. При  $\delta \rightarrow 0$  точность идентификации растет, но при этом увеличивается и ее длительность, так как требуется определение значений  $b(\omega)$  на большом числе частот. Также число  $\delta$  связано с заданной верхней границей запаздывания (очевидно, что нужно выбрать  $\delta < 2\pi/\tau^*$ ).

Выбор значения  $\omega_0$  может быть произвольным, но он влияет на длительность идентификации. В зависимости от расположения  $\omega_0$  по отношению к ближайшему нулю или точке разрыва функции  $b(\omega)$  длительность может увеличиваться или уменьшаться. Однако конструктивно использовать этот факт можно только, обладая дополнительной информацией об объекте, например, зная оценку запаздывания снизу.

Выбор амплитуд  $\rho_q$ ,  $q = 1, 2, 3, \dots$  сигнала (8) влияет на точность идентификации. Будем выби-

рать  $\rho_q$  такими, чтобы вклад испытательного сигнала (8) в выход объекта (1) оставался постоянным для всех  $q = 1, 2, 3, \dots$ . Запишем это требование в виде:

$$\rho_q |w(\omega_q)| = \text{const} = \rho_Y, \quad q = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\rho_Y$  — заданное положительное число, равное вкладу испытательного сигнала в выход объекта. Отсюда легко получить выражение для определения  $\rho_q$ :

$$\rho_q = \frac{\rho_Y}{|w(\omega_q)|}, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Константу  $\rho_Y$  можно выбирать несколькими путями. При этом разумно учитывать свойства конкретного объекта. Например, если проводилась идентификация передаточной функции объекта с использованием испытательного сигнала (3), который настраивался в соответствии с работой [11], то можно воспользоваться его параметрами. При  $\omega_0 = \min(\omega_v)$ ,  $v = \overline{1, l}$ ,

$$\rho_Y = \sum_{v=1}^l \rho_v |w(\omega_v)|, \quad (17)$$

где  $\rho_v$  и  $\omega_v$ ,  $v = \overline{1, l}$  — параметры испытательного сигнала (3).

Если известна граница внешнего возмущения  $f^*$ , то  $\rho_Y$  можно выбирать как  $\rho_Y = \eta f^*$ , где  $\eta < 1$  — достаточно малое число.

На практике в алгоритме идентификации используются не точные значения периодической функции  $\text{tg}(\tau\omega)$ , а их приближения  $b(\omega)$  из формулы (9), поэтому точность идентификации запаздывания неявно зависит от качества определения частотных параметров (4) и (5), т. е. от близости определяемых экспериментально оценок частотных параметров к истинным значениям, т. е.:

$$\hat{\alpha}_q \rightarrow \alpha_q \text{ и } \hat{\beta}_q \rightarrow \beta_q \text{ для } \omega_q \text{ при } T_q \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Такая сходимост доказана в статье [10]. Условием выполнения соотношений (18) является отсутствие (или малая амплитуда) частот сигналов (3) и (8) в спектре внешнего возмущения:

$$\omega_i^f \notin [\omega_v, \omega_q], \quad i = \overline{1, \infty}, \quad v = \overline{1, l}, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Алгоритм выбора частот испытательного сигнала, позволяющий обеспечить это неравенство, описан в работе [11].

#### 4. ПРИМЕР

Рассмотрим объект (1) вида

$$0,7\ddot{y}(t) + 0,8\dot{y}(t) + 1y(t) = 0,4\dot{u}(t - 3) + 1u(t - 3) + f(t),$$

для которого  $k(s) = 0,4s + 1$ ,  $d(s) = 0,7s + 0,8s + 1$ ,  $\tau = 3$ .

Внешнее возмущение  $f(t) = 2\text{sign}[\sin(5t)]$ .

Проведем идентификацию коэффициентов его передаточной функции, воспользовавшись методом, описанным в статье [10]. Испытательный сигнал (3) для идентификации коэффициентов полиномов  $k(s)$  и  $d(s)$ :

$$u(t) = 0,05\sin(0,707t) + 0,075\sin(1,41t) + 0,1\sin(2,12t) + 0,15\sin(2,83t). \quad (19)$$

Отметим, что частота такого внешнего возмущения  $\omega_f = 5$  лежит далеко от частот испытательного сигнала и, следовательно, выполнено условие для сходимости оценок частотных параметров (4) к истинным значениям согласно соотношениям (18).

В результате идентификации получены оценки полиномов:

$$\hat{k}(s) = 0,28s + 1,07 \quad \text{и} \quad \hat{d}(s) = 0,63s^2 + 0,83s + 1.$$

Длительность этого этапа идентификации составила 177,58 с.

Для определения запаздывания зададим параметры алгоритма: стартовая частота  $\omega_0 = 0,707$  — это наименьшая частота испытательного сигнала (19), точность выбрана  $\delta = 0,01$  (при этом соответствующая верхняя граница запаздывания  $\pi/(2\delta) = 157$  больше истинного значения запаздывания, и метод применим). Значение  $\rho_Y = 0,22$  выбрано согласно формуле (17).

Всего в процессе идентификации было 19 итераций (столько раз менялись параметры сигнала (8)). Длительность идентификации запаздывания составила 687,24 с. В результате идентификации получены частоты:  $\hat{\omega}_L = 1,063$  и  $\hat{\omega}_H = 1,58$ , согласно формуле (10) получим  $\tau = 3,02$ .

Окончательно идентифицированный объект имеет вид:

$$0,63\ddot{y}(t) + 0,83\dot{y}(t) + 1y(t) = 0,28\dot{u}(t - 3,02) + 1,07u(t - 3,02) + f(t).$$

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод идентификации запаздывания для линейных одномерных объектов с запаздыванием. Рассматриваемый объект подвержен действию неизвестного ограниченного внешнего возмущения, коэффициенты его передаточной функции считаются известными или ищутся известным способом. Идентификация запаздывания основана на конечно-частотном методе: использу-

ется испытательный сигнал в виде синусоиды, у которой в процессе идентификации меняются амплитуда и частота, ищутся частотные параметры объекта, которые используются для определения запаздывания. Идентификация представляет собой итерационный поиск двух характерных частот, которые позволяют найти оценку запаздывания. Алгоритм определения запаздывания сходится за конечное число шагов, и для него дана оценка погрешности полученного значения запаздывания. Дальнейшим направлением исследований может быть обобщение подхода на многомерный случай, повышение точности полученной оценки запаздывания и сокращение числа шагов алгоритма (длительности идентификации).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Льонг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. — М.: Наука, 1991.
2. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. — М.: Наука, 2003.
3. *Alexandrov A.* Finite-frequency method of identification // Proc. of 10 IFAC Sympos. Syst. Identification / Preprints. — Copenhagen, Denmark, 1994. — Vol. 2. — P. 523–527.
4. *Bjorklund S., Ljung L.* A review of time-delay estimation techniques // Proc. of 42nd IEEE Conf. Decision and Control. — Hawaii, USA, 2003.
5. *Herrera J., Ibeas A., Alcántara S., M. de la Sen, Serna-Garcés S.I.* Identification and control of delayed SISO systems through pattern search methods // Journal of the Franklin Institute. — 2013. — Vol. 350, iss. 10. — P. 3128–3148.
6. *Tao Liu, Furong Gao* A frequency domain step response identification method for continuous-time processes with time delay // Journal of Process Control. — 2010. — Vol. 20, iss. 7. — P. 800–809.
7. *Ahmed S., Huang B., Shah S.* Parameter and delay estimation of continuous-time models using a linear filter // Journal of Process Control. — 2006. — Vol. 16, iss. 4. — P. 323–331.
8. *Ahmed S., Huang B., Shah S.* Process identification from sinusoidal test data by estimating step response // Preprints IFAC Sympos. Syst. Identificat. — Saint-Malo, France, 2009. — P. 396–401.
9. *Александров А.Г.* Адаптивное управление объектом с запаздыванием // Тр. IX междунар. Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». — Иркутск, 2007. — Т. 3. — С. 6–13.
10. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф., Паленов М.В.* Конечно-частотная идентификация объектов с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 2. — С. 5–15.
11. *Alexandrov A. G.* Finite-frequency identification: self-tuning of test signal // Proc. of 16 World Congress IFAC. Preprints. — Prague, Czech Republic, 2005. — P. 295–301.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

**Шатов Дмитрий Владимирович** — мл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ dvshatov@gmail.com.