УДК 629.7.036.54-63

К ЗАДАЧЕ СКРЫТНОСТИ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЕРИФЕРИИ ЗОНЫ ЕГО КОНТАКТА С ОБНАРУЖИТЕЛЕМ[1]

М.Е. Шайкин

Рассмотрена задача обеспечения скрытности морского подвижного объекта в условиях эффективного противодействия средств обнаружения противной стороны. За показатель скрытности принимается вероятность необнаружения объекта на траектории его движения. Оптимизация движения осуществляется путем выбора траектории, на которой достигается максимум вероятности необнаружения. Обсуждены различные аспекты задачи необнаружения движущегося объекта и вычисления характеристик необнаружения на заданной траектории.

Ключевые слова: конфликтная среда, прокладка пути, подвижный объект, риск быть обнаруженным, вероятности ложной тревоги и обнаружения, последовательный анализ, оптимальное решение.

ВВЕДЕНИЕ

Обеспечение скрытности кораблей по физическим полям вообще и по гидроакустическим полям в частности во все времена является приоритетной проблемой для ВМФ любой морской державы. Управление скрытностью — сложная наукоемкая проблема [1]. Новые задачи в повышении скрытности надводных кораблей и подводных лодок обусловлены появлением более эффективных средств акустического обнаружения, обеспечиваемых единой сетецентрической системой освещения подводной обстановки [1].

Гидроакустическое поле остается важнейшим демаскирующим и классификационным признаком морского подвижного объекта. Один из способов обеспечения скрытности объекта, помимо управления его гидроакустическим полем и режимами работы его технических средств, состоит в выработке обоснованных рекомендаций по выбору траектории движения объекта на основе комплексного критерия вероятности его обнаружения [2]. Решения, полученные при оптимизации траектории по вероятностному критерию, могут использоваться затем в электронном макете бортового информационно-измерительного комплекса [2, 3].

Ввиду важности задачи обеспечения скрытности морских подвижных объектов, и подводных лодок в особенности, в последние годы оживился интерес к оптимизационным задачам уклонения подвижного объекта от обнаружения как по детерминированному энергетическому [4—6], так и по вероятностному [7, 8] критериям. В детерминированной постановке задача формулируется как задача вариационного исчисления. Оптимальной оказывается траектория, доставляющая минимум функционалу энергии, поступающей в виде сигнала от объекта на приемное устройство гидроакустической станции наблюдения. Непосредственно примыкает к задачам обнаружения по детерминированному критерию рассмотренная в работе [9] задача обнаружения по *статистическому* энергетическому критерию, в которой расстояние между объектом и обнаружителем считается гауссовским случайным вектором. Усредняя энергетический критерий по распределению этого случайного вектора, считая также малым отношение размера эллипсоида рассеяния случайного вектора к среднему расстоянию между объектом и наблюдателем, получают статистический энергетический критерий, равный сумме детерминированного критерия

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-08-00744а, и проекта № 14 Президиума РАН.

и некоторой к нему добавки, обусловленной эффектом случайности расстояния. При этом выясняется, что осредненный критерий существует лишь в трехмерном пространстве, а на плоскости задача вычисления статистического энергетического критерия оказывается некорректно поставленной. Причина некорректности понятна: в плоской задаче некорректна сама модель сигнала, амплитуда которого ослабевает с ростом расстояния так же, как и в трехмерном пространстве, т. е. по закону сферической волны.

Вероятностная постановка задачи обнаружения более приближена к реальности. Поскольку сигнал, излученный движущимся объектом, принимается на фоне шумов моря, то задачу обнаружения естественно ставить как задачу проверки статистических гипотез. Именно, проверяется гипотеза H_1: «принимаемый сигнал порожден шумом моря» против альтернативной гипотезы H_2: «сигнал, принимаемый приемником, является смесью собственного шума объекта и шума моря». Такая двухальтернативная постановка задачи обнаружения более естественна для неподвижного объекта, а перенос ее на случай движущегося объекта приводит к принципиальным затруднениям, обсуждаемым далее в § 4. Один из способов постановки задачи обнаружения движущегося объекта состоит в применении статистической теории потоков случайных событий [10]; см. также статью [11]. Другой способ постановки той же задачи, математически более простой, использует понятия средней частоты ложных тревог и среднего времени от момента появления объекта до момента его обнаружения [12]. Аналогичные понятия употребляются также в статистической теории задач об обнаружении разладки случайного процесса [13]. В настоящей работе рассматривается задача уклонения морского подвижного объекта от обнаружения стационарной гидроакустической станцией по шумовым сигналам, порождаемым объектом в процессе движения. Из двух подзадач, на которые математическая часть проблемы уклонения распадается, а именно — (а) вычисления вероятности обнаружения на заданной траектории и (б) минимизации вероятности путем выбора наилучшей траектории, — здесь рассмотрена исключительно первая. Разумеется, оптимизации вероятности обнаружения путем выбора наилучшего алгоритма обработки сигнала уделяется в этой подзадаче должное внимание. Что касается подзадачи (б) оптимизации путем выбора траектории, то различные ее аспекты исследованы в работах [3, 6, 8].

Сделаем несколько важных замечаний, разъясняющих особенности задачи обнаружения подвижного объекта по сравнению с классической задачей обнаружения объекта неподвижного.

- При практическом синтезе систем обнаружения движущихся объектов удобно разбивать процедуру выработки решения о наличии объекта на этапы первичной и вторичной обработки информации, содержащейся в сигнале, поступившем на вход системы. Весь временной интервал наблюдения за объектом (он может составить несколько часов) разбивается на элементарные акты *единичных* наблюдений длительности порядка минуты каждый[2]. Первичной обработке подвергаются единичные наблюдения. Стандартное устройство первичной обработки решает задачу принятия *предварительных* решений о наличии объекта и включает в себя, помимо частотных фильтров и усилителей, байесовский согласованный фильтр, безынерционный квадратичный детектор, идеальный интегратор и следующий за ними пороговый элемент. Основными характеристиками канала первичной обработки служат вероятности ошибок первого и второго рода, вычисленные по единичным наблюдениям. Надежность обнаружения при первичной обработке невысокая, так как решения принимаются по малым временам наблюдения. Обнаружение за малое время сводится, по существу, к квантованию амплитуды принятого сигнала на два уровня: 1 (сигнал есть) и 0 (сигнала нет).

Вторичной обработке подвергается последовательность сигналов, поступающих с выхода канала первичной обработки. Обычно она носит характер *бинарной* последовательности предварительных решений. Вторичная обработка включает, например, способы *накопления* информации, выработку *итогового* решения о наличии объекта по потоку предварительных решений, реализацию *оптимизации* процесса принятия итогового решения. Именно в процессе вторичной обработки должно получаться окончательное, *надежное* обнаружение. В связи с высокими требованиями к достоверности окончательного решения время анализа в процессе вторичной обработки должно быть достаточно большим.

- Бессмысленно ставить задачу обнаружения *сколь угодно слабого* сигнала. Следует исходить из того практически очевидного положения, что, какой бы совершенной ни была система обнаружения, существуют *минимально* обнаруживаемый ею сигнал и конечная максимальная для нее дальность обнаружения; и что на дальностях, превышающих максимальную, объекту гарантирована наивысшая скрытность, измеряемая вероятностью

---

[2] Некоторые авторы для акта единичного наблюдения употребляют антропоморфический термин «взгляд».

его необнаружения, равной единице. В противном случае любая задача обеспечения скрытности объекта, находящегося на траектории движения достаточно длительное время, будет иметь тривиальное решение, а именно, что вероятность необнаружения объекта равна нулю! Далее в § 4 будет повод вернуться к этому вопросу.

- При обнаружении неподвижного объекта стандартным является допущение, что объект или отсутствует в точке наблюдения, или присутствует в ней *постоянно* в течение всего интервала наблюдения. Для движущегося объекта задача обнаружения ставится несколько иначе. Именно, допускается, что в течение интервала наблюдения (t_0, T) объект может войти в зону наблюдения в какой-то начальный момент времени $t_н > t_0$ и покинуть ее в конечный момент $t_к < T$. Объект может много раз входить в зону и покидать ее до окончания момента наблюдения. Ясно, что в этом случае подход к задаче обнаружения должен быть иным, чем для неподвижного объекта. В частности, должна быть предложена некоторая модель движения объекта (например, марковская, см. далее), а модель принятия решений об обнаружении должна носить характер п*оследовательной* процедуры [14]. Такого рода процедура обсуждается далее в § 5.
- Должна, на наш взгляд, быть скорректирована сама постановка задачи обнаружения объекта на траектории. Оценка вероятности необнаружения должна выноситься не в конечный момент пути T, а в каждый текущий момент $t < T$ пребывания объекта на траектории. Выдача вероятности обнаружения в конце пути фактически равноценна введению недопустимого *запаздывания* в процесс принятия решения. Решение об обнаружении должно выноситься в тот момент, когда произошло *первое* обнаружение, а интервал времени до первого обнаружения и вероятностное распределение этого интервала следует признать информативными признаками, наряду с другими, успешности решения задачи о скрытности. Кроме того, *текущая* вероятность обнаружения может выполнять функцию сигнала *оперативного* управления траекторией движения объекта.
- Наконец, скрытность объекта, т. е. вероятность его необнаружения, не обязательно должна монотонно убывать во времени, если в процесс *накопления* поступающей от объекта информации ввести полезное свойство ее *устаревания* или даже *сброса* давней информации, как это предлагается делать, например, далее в § 7.

Сделанные замечания об особенностях задачи обнаружения подвижного объекта определяют и круг задач, которые будут рассмотрены в этой работе.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СТРУКТУРА РАБОТЫ

Постановку вероятностной задачи удобно давать, отправляясь от постановки задачи детерминированной. Согласно работе [4] имеем станцию наблюдения, расположенную в начале выделенной декартовой системы координат, и пару фиксированных точек A и B. Подвижный объект перемещается из точки A в точку B, имея целью минимизировать функционал энергии шумового сигнала, поступающего от объекта на приемную антенну станции наблюдения. Вариационная задача минимизации решается в предположении, что вектор состояния $(x_t, \dot{x}_t)$ объекта точно известен в каждый момент времени t на пути от точки A до точки B.

Мощность принимаемого сигнала зависит от $(x_t, \dot{x}_t)$ заданным образом, но сам случайный сигнал и какие-либо его измерения в детерминированной задаче отсутствуют. Не предполагается также какой-либо возможности для приемной станции влиять на функционал, минимизируемый объектом.

С другой стороны, в вероятностной постановке задачи появляется новый фигурант, а именно — случайный сигнал, вероятностные характеристики которого зависят от $(x_t, \dot{x}_t)$ в каждый момент времени t. Это обстоятельство дополняет предыдущую постановку задачи уклонения. Ибо появляется приемник случайного сигнала, структуру которого на приемном конце можно оптимизировать. В частности, можно оптимизировать выбор порога в пороговом устройстве, стремясь *максимизировать* вероятность обнаружения объекта. Возникает нечто вроде теоретико-игровой ситуации, так как налицо конфликт интересов объекта и его обнаружителя.

В настоящей работе, как и в работе [7], решается задача максимизации вероятности обнаружения, но при менее ограничительных предположениях. Именно:

— последовательные отсчеты принимаемого сигнала предполагаются здесь *коррелированными*;

— обеспечена возможность *накопления* информации, содержащейся в серии последовательных актов единичного наблюдения;

— предложена марковская *модель движения* объекта, соединяющая в единый процесс отдельные состояния объекта, прежде ничем не связанные,

— предложена *последовательная схема* принятия единичных решений, объединяемых затем апостериорным анализом для выработки надежного итогового решения (в работе [7] это осуществлялось *перемножением* вероятностей единичных необнаружений, что давало близкую к нулю итоговую вероятность необнаружения).

Наконец, учитывается факт существования *максимальной дальности* обнаружения, который, будь он принят в алгоритме перемножения, давал бы более высокую итоговую вероятность необнаружения объекта, т. е. более оптимистичную, для объекта, оценку.

Формализованные постановки перечисленных задач даются далее в соответствующих разделах работы. Для ориентировки читателя дадим сведения о структуре работы. Заметим, прежде всего, что общую процедуру преобразования поступающей от объекта и от окружающей обстановки информации полезно разделять на этапы первичной и вторичной ее обработки. Необходимо рассмотреть сначала структуру канала первичной обработки в менее ограничительных, чем, например, в работах [7, 8], предположениях о *коррелированности* дискретных отсчетов принимаемого сигнала в случае дискретного отбора информации или в общем случае непрерывного съема данных. Информация об оптимальной структуре первичного канала нужна здесь только для случая слабого полезного сигнала, т. е. для малого отношения сигнал/помеха, в литературе она хорошо известна и приводится в § 3. Комментарии к алгоритму обработки некоррелированных наблюдений в работах [7, 8] содержатся в § 4.

Затем излагаются способы выработки решений (об обнаружении) в канале вторичной обработки информации. Есть несколько подходов к *агрегированию* в этом канале предварительных решений об обнаружении, поступающих с выхода первого канала, но не все они были подвергнуты серьезному анализу. Поэтому пока еще рано говорить о структуре канала вторичной обработки. Трудности возникают вследствие многообразия способов выбора модели движения подвижного объекта, без которой не обойтись. В § 5 излагается простая марковская модель движения объекта и последовательная модель принятия решений во вторичном канале, этой простой модели отвечающая.

В § 6 описана модель принятия решений, трактующая задачу обнаружения как задачу о серии разладок марковского случайного процесса. В качестве иллюстративного примера в § 7 излагается простой алгоритм обнаружения подвижного объекта.

В § 8 обращается внимание на важность теории распределений для *больших уклонений* в задаче обеспечения высокой надежности принимаемых решений, особенно если последние касаются объектов особой значимости. При вычислении вероятностей ошибочных решений обычно ограничиваются применением центральной предельной теоремы, что допустимо в зоне «нормальных уклонений» [15], но бесполезно в задаче о точном асимптотическом поведении вероятностей ошибок обнаружения, а, следовательно, и в задаче обеспечения скрытности.

Вообще, желательно избегать чрезмерного увлечения математическими построениями, при почти полном игнорировании тех реальных ограничений, которые накладываются неполнотой и/или неточностью исходных данных, условностью или ограниченностью упрощающих анализ допущений при решении любой сложной практической задачи. Нельзя, например, считать, что если принято допущение о гауссовском законе распределения некоторой случайной величины, то оно останется непреложно справедливым и при вычислениях на сколь угодно далеких хвостах распределения. А ведь именно из этого исходят при вычислении, например, вероятностей ошибок обнаружения. Также игнорируется тот факт, что имеется минимально обнаруживаемый сигнал, максимальная дальность обнаружения.

Информация с канала обнаружения поступает далее на вычислительный блок оптимизации траектории объекта по вероятностному критерию. Как уже отмечалось, вопросы оптимизации траектории (см. об этом в работах [3, 6, 8]) здесь не рассматриваются.

2. МИНИМАЛЬНО ОБНАРУЖИВАЕМЫЙ СИГНАЛ, МАКСИМАЛЬНАЯ ДАЛЬНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ

Хотя эффективность обнаружения цели по акустическому полю принято оценивать вероятностью правильного ее обнаружения, она в конечном итоге зависит от уровня *энергии* принимаемого сигнала. При заданной мощности энергия сигнала определяется длительностью его приема, а мощность зависит от акустической силы цели и от расстояния до цели. В однородной среде мощность принимаемого сигнала ослабляется приблизительно по закону обратного квадрата расстояния до цели. Пусть a_0^2 — отношение сигнал/помеха, энергетическое или по мощности. Первое определяется формулой $a_0^2 = 2E/N_0$, где E — энергия сигнала, $N_0/2$ — спектральная плотность помехи; второе — формулой $a_0^2 = \psi_S/\psi_N$, где ψ_S и ψ_N — средние мощности сигнала и помехи соответственно. При заданной вероятности ложной тревоги F вероятность D правильного обнаружения[3] возрастает с увеличением a_0^2, а a_0^2 монотонно убывает с ростом расстояния r до цели. Задаваясь минимально обнаруживаемым сигналом, т. е. минимальным значением $(a_0^2)_{\min}$, можно найти *максимальную дальность* обнаружения $r_{\max}$. При $r \geqslant r_{\max}$ цель не может быть

[3] F и D — от False alarm (ложная тревога) и Detection (обнаружение).

обнаружена с заданной выбором $(a_0^2)_{\min}$ вероятностью D, а при $r \leqslant r_{\max}$ обнаружение осуществится с вероятностью, не меньшей D при заданном значении F. Если учитывать также и поглощение в среде распространения сигнала, то требуемое значение $(a_0^2)_{\min}$ следует несколько увеличить для компенсации ослабления сигнала вследствие поглощения.

Значение $r_{\max}$ выбирается из условия обеспечения надлежащей *надежности* обнаружения. Обнаружение считается надежным, если цель обнаруживается не менее чем в половине одноактных периодов принятия частных решений. Это соответствует требованию $D \geqslant 0,5$. Если цель обнаруживается в 8—9 периодах из 10, обнаружение считается очень надежным. Поскольку дальность обнаружения $r_{\max}$ сравнительно мало изменяется в пределах $0,5 \leqslant D \leqslant 0,9$, то именно в этих пределах следует выбирать D, когда определяют дальность $r_{\max}$ надежного обнаружения.

Вероятность ложной тревоги F зависит от спектральной плотности шума $N_0/2$ и от уровня порога порогового устройства. Выбирая требуемые значения D и F (например, $D = 0,5$, $F = 10^{-6}$), по рабочим характеристикам обнаружения находим требуемое значение параметра $(a_0^2)_{\min}$.

Таким образом, объект следует считать видимым лишь в зоне контакта, а вне зоны — полагать скрытность объекта максимальной ($D = 0$). Отсюда вытекает простой способ маневрирования: если позволяет время, отпущенное на прохождение всего пути, то двигаться следует по периферии зоны, не заходя в нее; в противном случае следует «спрямлять» траекторию движения, заходя в зону лишь на тех участках пути, которые в совокупности минимизируют вероятность обнаружения.

3. СТРУКТУРА АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ СЛУЧАЕ[4]

Небольшой экскурс в стандартные руководства по теории обнаружения позволяет рассмотреть случай дискретного отбора данных с коррелированными[5] компонентами $V(t_k)$ вектора наблюдений V, а затем и случай непрерывного отбора данных. Пусть $k_N = \psi_N^{-1} K_N$, $k_S = \psi_S^{-1} K_S$ — нормированные ковариационные матрицы векторов N и S, где ψ_N и ψ_S — средние мощности помехи и сигнала соответственно. Пусть, далее, Λ_n — отношение правдоподобия, $\mu = p/q$, где q и p — априорные вероятности гипотез H_0 и H_1; $a_0^2 = \psi_S/\psi_N$ — отношение сигнал/шум по мощности на входе детектора, $v = V/\sqrt{\psi_N}$ — нормированный вектор входа. Обозначив $D = k_S k_N^{-1}$, получим

$$x = \log\Lambda_n(v) = \log\mu + \log\frac{w_n(v)_{S+N}}{w_n(v)_N} = \\ = \Gamma_0 + \frac{1}{2}\Psi_n(v,\ a_0^2), \qquad (1)$$

где w_{S+N}, w_N — гауссовские плотности, и $\Gamma_0 = \log\mu - \frac{1}{2}\log\det(I + a_0^2 D)$, $\Psi_n(v,\ a_0^2) = V'\psi_N^{-1} FV$,

$$\psi_N^{-1} F := K_N^{-1} - (K_N + K_S)^{-1}. \qquad (2)$$

Матрица F — симметрическая и положительно определенная, поэтому форму Ψ_n можно привести к каноническому виду $\sum_{i=1}^{n} (V_F)_i^2$, где $V_F := QV$ и Q выбирается так, чтобы $(Q')^{-1}FQ^{-1} = I$, где I — единичная матрица. Преобразование Q интерпретируется как дискретный фильтр, включаемый перед квадратичным детектором. Фильтр можно выбрать физически реализуемым, он служит аналогом согласованного фильтра в когерентных системах обнаружения [16].

При заданной матрице F матрица Q удовлетворяет нелинейному матричному уравнению $Q'Q = F$. Так как из выражения (2) следует уравнение $(K_S + K_N)\psi_N^{-1} F = K_S K_N^{-1}$, то, введя обозначение $L = K_S K_N^{-1}$, получим пару уравнений

$$(K_S + K_N)\psi_n^{-1} F = L, \quad LK_N = K_S. \qquad (3)$$

Из второго уравнения можно найти L, затем из первого уравнения — матрицу F и, следовательно, матрицу Q.

Уравнения (3) удобны при обобщении их на случай непрерывного отбора данных. Опуская подробный вывод, приведем лишь окончательные результаты. Структура системы обнаружения определяется выражением

$$x = \log\Lambda_n(V) = \log\mu - \frac{1}{2}\log D_T(a_0^2) + \\ + \frac{1}{2}\iint_{R^2} V(t)\rho_F(t,\ s)V(s)dtds, \qquad (4)$$

[4] Материал излагается в соответствии с работой [16] с незначительными отклонениями от принятых в ней обозначений. В частности, сохранено обозначение $D = k_S k_N^{-1}$.

[5] Это важно для обобщения результатов, полученных в работах [7, 8].

где $D_T(a_0^2) = \lim_{n\to\infty} \det(I + a_0^2 D)$ — определитель Фредгольма. Его удобно вычислять, используя

$$D_T(a_0^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m} a_0^{2m} B_m^{(T)}, \qquad (5)$$

через итерированные ядра

$$B_m^{(T)} = \int_0^T \dots \int_0^T D(t_1, t_2) D(t_2, t_3) \dots D(t_m, t_1) dt_1 \dots dt_m, \quad m \geqslant 1,$$

основного ядра $D(t, s)$, при непрерывном отборе данных являющегося аналогом следа $\mathrm{tr}D$ матрицы $D = k_S k_N^{-1}$. В теории *порогового* обнаружения *слабых* сигналов значение a_0^2 достаточно мало, и ряд (5) сходится абсолютно, при этом основное значение в представлении (5) имеют лишь несколько первых итерированных ядер. По этой причине формула (5) имеет большое практическое значение в приближенных вычислениях. С другой стороны, при дискретном отборе чаще применяется метод собственных значений, в соответствии с которым предварительно вычисляется спектр $\mathrm{spec}(D)$ $n \times n$-матрицы D и затем находится

$$D_T(a_0^2) = \det(I + a_0^2 D) = \prod_{j=1}^{n} (1 + a_0^2 \lambda_j^{(n)}), \quad \lambda_j^n \in \mathrm{spec}(D). \qquad (6)$$

Такой метод дает точные результаты при любых a_0^2 и n, но требует вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы $D = k_S k_N^{-1}$ (см., например, работу [17]).

Определения понятий итерированного ядра и определителя Фредгольма можно найти в книге [18]. Функция $\rho_F(t, s)$ находится как решение интегрального уравнения

$$\int_0^T (K_S(t, s) + K_N(t, s)) \rho_F(s, \tau) ds = L_T(t, \tau;\, a_0^2), \quad 0 \leqslant t,\ \tau \leqslant T, \qquad (7)$$

если предварительно решить относительно L_T интегральное уравнение

$$\int_0^T L_T(t, s;\, a_0^2) K_N(s, \tau) ds = K_S(t, \tau), \quad 0 \leqslant t,\ \tau \leqslant T. \qquad (8)$$

Уравнения (7) и (8) являются непрерывными аналогами матричных уравнений (3).

В непрерывном случае, как и при дискретном отборе, существует физически реализуемый (не инвариантный во времени) линейный фильтр с переходной функцией $h_F(t - s|T)$, такой, что его выходной сигнал $v_F(t, T)$ представляется в виде[6] $\int_0^t h_F(t - s|T) v(s) ds$, а квадратичный функционал в выражении (4) записывается в виде интеграла

$$\Psi_T(V(t);\, a_0^2) = \int_0^T v_F^2(t, T) dt.$$

В случае, когда $N(t)$ — белый шум[7], его ковариационная функция имеет вид $K_N(t, s) = (W_0/2)\delta(t - s)$, где $W_0/2$ — спектральная плотность шума, из уравнения (8) получаем $L_T(t, s;\, a_0^2) = \frac{2}{W_0} K_S(t, s)$, и уравнение (7) упрощается:

$$\int_0^T \left(K_S(t, s) + \frac{W_0}{2}\delta(t - s)\right) \rho_F(s, \tau) ds = \frac{2}{W_0} K_S(t, \tau), \quad 0 \leqslant t,\ s \leqslant T. \qquad (9)$$

Относительно сигнала $S(t)$ предположим, что его спектральная плотность отлична от нуля в полосе частот $-\omega_F < \omega < \omega_F$, где $\omega_F < \infty$. Поскольку $\int_{-\omega_F}^{\omega_F} W_0/2 df = W_0 \omega_F$ есть средняя мощность шума в полосе частот $(-\omega_F, \omega_F)$, то дробь $a_e^2 = \psi_S / W_0 \omega_F$ (с нижним индексом e при a) имеет смысл *эффективного* отношения сигнал/шум по мощности на входе системы обнаружения. Умножив числитель и знаменатель на T, можем записать $a_e^2 = \frac{\psi_S T}{W_0} \cdot \frac{1}{\omega_F T} = \rho/\lambda$, где безразмерный параметр $\lambda = \omega_F T$ имеет смысл нормированного времени наблюдения, а $\rho = \psi_S T / W_0$ есть «энергетическое» отношение сигнал/шум.

Для решения уравнения (9) и вычисления детерминанта $D_T(a_0^2)$ удобно[8] применить теорему

---

[6] Символ T в аргументе функции напоминает, что структура фильтра зависит от интервала наблюдения.

[7] Обращение к *белому шуму* упрощает выкладки.

[8] Но не всегда корректно из-за возможного наличия δ-функций на концах интервала наблюдения.

Мерсера [18]. Именно, функцию ρ_F отыскивают в виде

$$\rho_F(t, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \varphi_m(t)\varphi_m(s), \quad 0 \leqslant s, \ t \leqslant T,$$

где $\{\varphi_m\}$ — полная ортонормированная система функций, удовлетворяющих однородному интегральному уравнению

$$\int_0^T k_S(t, s)\varphi_m(s)ds = \lambda_m \varphi_m(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

(все собственные числа λ_m вещественны и положительны). Поскольку в данном случае $D_T(a_0^2) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{2\psi_S}{W_0}\lambda_j^{(T)}\right)$, где $\lambda_j^{(T)} = \lim_{n\to\infty} T\lambda_j^{(n)}/n$ и $2\psi_S/W_0 = 2a_e^2\lambda/T$, то, применяя формулу (5), находим

$$D_T(a_0^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} 2^{m-1} a_e^2 \lambda^m T^{-m} B_m^{(T)},$$

где на этот раз $B_m^{(T)}$ — итерированные ядра основного ядра $k_S(t, s)$.

В заключение параграфа приведем формулы для вычисления вероятностей ошибок обнаружения. Как известно, в теории проверки гипотез решение принимается по пороговому принципу. Согласно этому принципу, если V — наблюденный случайный сигнал, Λ_T — функционал правдоподобия, K — порог, то принимается решение о наличии цели, если $\Lambda_T(V) > K$, и об ее отсутствии в противном случае. При дискретном отборе данных вероятности $\alpha_1 = F$, $\alpha_2 = 1 - D$ ошибок первого и второго рода определены формулами

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\log K} Q_n(x)dx, \quad \alpha_2 = \int_{-\infty}^{\log K} P_n(x)dx,$$

где $P_n(x)$ — плотность распределения случайной величины $x = \log\Lambda_n(V)$ при гипотезе H_2: цель есть, а $Q_n(x)$ — то же при гипотезе H_1: цели нет. При обнаружении слабых сигналов вероятности α_1 и α_2 можно получить в явном виде:

$$2\alpha_1 \approx 1 - \Psi\left(\frac{a_0^2\sqrt{trD^2}}{4} + \frac{\log(K/\mu)}{a_0^2\sqrt{trD^2}}\right),$$

$$2\alpha_2 \approx 1 - \Psi\left(\frac{a_0^2\sqrt{trD^2}}{4} - \frac{\log(K/\mu)}{a_0^2\sqrt{trD^2}}\right), \qquad (10)$$

где $\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du$. При непрерывном отборе данных используются те же формулы, но с заменой $a_0^4\, trD^2$ на $\lim_{n\to\infty} a_0^4\, trD^2 = \int_0^T\int_0^T L_T^2(t, s;\ a_0^2)dtds$, что получается в силу до-предельного соотношения $a_0^2 D = K_S K_N^{-1} = L$, см. выше. При фоне в виде белого шума имеем $\lim_{n\to\infty} a_0^4\, trD^2 = \frac{4}{W_0^2}\iint_{(0,\,T)^2} K_S^2(t, s)dtds.$

Приведенных формул (1)—(10) достаточно, чтобы составить представление о структуре канала *оптимальной* первичной обработки *порогового* гидроакустического сигнала и о способах вычисления основных характеристик канала. Структура включает в себя байесовский согласованный фильтр, безынерционный квадратичный детектор, идеальный интегратор и следующий за ними пороговый элемент. Вероятности ошибок первого и второго рода α_1 и α_2 заданы приближенными формулами (10), справедливыми только для *порогового* сигнала, т. е. для случая движения объекта на периферии зоны его контакта с обнаружителем. В этом случае параметру a_0^2 отношения сигнал/шум предписывается его значение $(a_0^2)_{\min}$ для *минимально* обнаруживаемого сигнала.

4. ПРИМЕР

В работах [7, 8] менее общая задача обнаружения при независимых наблюдениях ставилась как задача проверки простой гипотезы $H_1 : \sigma = \sigma_0$ против сложной альтернативы $H_2 : \sigma > \sigma_0$, где $\sigma^2 = \psi_{S+N}$ — средняя мощность смеси сигнала $S(t)$ и помехи $N(t)$, $\sigma_0^2 = \psi_N$ — средняя мощность помехи. Наблюдаемый случайный процесс, равный сумме $V(t) = S(t) + N(t)$, $t \in [0, T]$, при гипотезе H_2 и $V(t) = N(t)$ при гипотезе H_1, предполагался нормальным с нулевым средним. Отбор данных осуществлялся дискретно в моменты $t_k = k\Delta$, $k = 1, 2, ..., n$, где Δ — шаг дискретизации. Компоненты $V(t_k)$ n-вектора V предполагались независимыми, они поступали на квадратичный детектор и идеальный интегратор, и сумма $\sum_{k=1}^{n} V^2(t_k)$ использовалась в пороговом устройстве принятия решений в канале первичной обработки информации. Структура оптимальной системы обнаружения в этом случае определяется выражением

$$x = \log\Lambda_n(V) = \log\mu - \frac{n}{2}\log(1 + a_0^2) + \frac{1}{2}\frac{a_0^2}{1 + a_0^2} v'v. \qquad (11)$$

В отличие от формул (10), предлагаемые в работе [8] формулы справедливы не только для порогового значения $(a_0^2)_{\min}$, но и для любого значения параметра a_0^2. Более того, порог в работе [8] вообще от *сигнала* не зависит и вычисляется только по распределению шума. Столь замечательное свойство обеспечивается сильным априорным ограничением, состоящим в том, что матрица квадратичной формы от наблюдений $V(t_k)$ в формуле (11) — единичная, и $v'v$ имеет распределение $\chi^2(n)$. Условие независимости наблюдений еще можно принять при достаточно большом шаге дискретизации Δ. Но *равенства дисперсий* невозможно предположить даже для соседних интервалов одноактных наблюдений. Действительно, взвешенная сумма $\chi^2(n)$-величин уже не является распределенной по закону χ^2. Следовательно, накопление информации путем объединения в один нескольких соседних интервалов оказывается невозможным, а это такая потеря, которую не скомпенсирует выигрыш иметь универсальный порог, от параметра a_0^2 не зависящий.

Еще одно замечание к работам [7, 8] касается способа вычисления «суммарной» вероятности необнаружения движущегося объекта по частным вероятностям его обнаружения в серии элементарных одноактных эпизодов наблюдения. Рассмотрим последовательность длины N испытаний Бернулли с вероятностью успеха (успех есть необнаружение) $1 - D_k$, $k = 1, ..., N$. Вероятность необнаружения цели в N испытаниях равна произведению $\prod_{k=1}^{N}(1 - D_k)$, и так как $1 - D_k \approx e^{-D_k}$ при малых D_k, то суммарная вероятность D обнаружения объекта на траектории $D \approx 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{N} D_k\right)$, т. е. $D \geqslant 1 - e^{-NF}$, если $D_k \geqslant F$ (свойство несмещенности процедуры). Таким образом, вероятность обнаружения на траектории стремится к единице с ростом N. Получается, что задача скрытности не имеет положительного решения при подходе, предложенном в работах [7, 8].

5. МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Поскольку обнаруживаемый объект движется, должна быть принята какая-то модель его движения. Простейшей является марковская цепь с двумя возможными состояниями 0 и 1. В связи с этим рассмотрим марковский процесс $\theta(t)$, определенный в дискретные моменты времени $t_k = kT_0$, $k = 1, 2, ...$, где T_0 — длительность одного элементарного такта наблюдения (длительности порядка одной минуты). Состояния 0 и 1 означают, что объект находится соответственно *вне* или *внутри* зоны контакта с наблюдателем. Переходы из одного состояния в другое задаются (2×2)-*матрицей переходов* π, т. е. матрицей условных вероятностей π_{ij} того, что система из состояния i в текущий момент времени t_k переходит в состояние j в следующий момент t_{k+1}. Матрицу π принимаем не зависящей от t_k. Интерпретация величин π_{ij} очевидна. Например, $\pi_{01} = P(\theta(t_{k+1}) = 1|(\theta(t_k) = 0)$ задает вероятность войти в зону, т. е. вероятность того события, что в момент t_k объекта в зоне не было, а в момент t_{k+1} он там появился. Аналогично, вероятность π_{10} описывает событие выхода из зоны, и т. д.

Наблюдения описываются процессом $z(t)$. Поясним, о каком процессе идет речь. Пусть $x(t)$ — процесс, поступающий на вход порогового устройства в канале первичной обработки информации. При условии $\theta(t) = 1$ амплитуда x сигнала с вероятностью D превышает порог K и сигнал $z(t) = x(t) - K$ появляется на входе канала вторичной обработки информации. Конечно, с вероятностью $1 - D$ возможен и пропуск полезного сигнала. Если объекта в зоне контакта нет (т. е. $\theta(t) = 0$), то превышение порога K происходит с вероятностью F и не происходит с вероятностью $1 - F$. В простейшем случае амплитуды x не измеряют, а фиксируют лишь факт превышения порога K, и тогда $z(t)$ становится бинарной последовательностью, составленной из нулей и единиц.

Итак, в любой момент времени $t = t_k$ случайная величина $z = z(t_k)$ имеет плотность вероятности $f_i(z) = f(z|\theta_k = i)$, $i = 0, 1$, если объект находится в состоянии i. При $\theta_k = 1$ плотность $f_1(z)$ задает распределение смеси сигнал + шум, при $\theta_k = 0$ — распределение $f_0(z)$ одного только шума. В простейшем случае величины z_k независимы или образуют марковскую цепь.

Рассмотрим пару процессов $(\theta(t_k), z(t_k))$, $k = 1, 2, ...$ Процесс $\theta(t_k)$ непосредственно не наблюдаем, но он статистически связан с наблюдаемыми величинами $z_1, z_2, ..., z_k$, по реализациям которых и следует принимать решение $\hat{\theta}(t_k) = 0$ (объекта в зоне нет) или $\hat{\theta}(t_k) = 1$ (объект в зоне), по возможности близкое к истинному значению $\theta(t_k) = 0$ или $\theta(t_k) = 1$ соответственно. Опишем алгоритм принятия решений $\hat{\theta}(t_k)$. Решение $\hat{\theta}(t_k)$принимается по результатам предыдущих наблюдений $z(t_i)$, $i \leqslant k$, поэтому процесс $\hat{\theta}(t_k)$, $k = 1, 2, ...$ не является последовательностью независимых случайных величин. Чтобы найти зависимость функционала $\hat{\theta}(t_k)$ от последовательности наблюдений ..., z_{k-2}, z_{k-1}, z_k, определим (2×2)-матрицу α условных вероятностей $\alpha_{ij} = P(\hat{\theta} = j|\theta = i)$, задающих вероятности решений, правильных при $i = j$ и ошибочных при $i \neq j$. Случайное событие $\{\theta = 0,\ \hat{\theta} = 1\}$, означающее, что объекта нет, а принимается решение, что он есть, является ошибкой первого рода или ложной тревогой, его вероятность обозначалась выше символом F. Событие $\{\theta = 1,\ \hat{\theta} = 0\}$, ошибка второго рода, имеет вероятность $\alpha_{10} = 1 - D$. Вычисляя последовательно элементы $\hat{\theta}(t_k)$, $k = 1, 2, ...$ получаем *последовательную процедуру* принятия решений, она представляет собой по существу разновидность задачи *фильтрации* случайной последовательности $\theta(t_k)$, $k = 1, 2, ...$ по предыдущим наблюдениям статистически связанной с ней последовательности наблюдений $z(t_k)$.

В отличие от решения в работе [8], которое вычисляется по единичному наблюдению и потому не может быть признано достаточно надежным и/или окончательным, предложенные здесь решения основаны на анализе *всей последовательности* прошлых наблюдений. Интуитивно ясно, что в последовательности наблюдений содержится больше информации, чем в элементарном одноактном наблюдении.

Продолжим рассмотрение последовательной процедуры принятия решений. Опишем общую структуру оптимального алгоритма. Как известно, синтез оптимального алгоритма осуществляется в два этапа. На первом этапе по априорным данным и реализациям принятых сигналов вычисляется апостериорное распределение вероятностей ненаблюдаемого процесса. На втором этапе принимаются решения, минимизирующие средний риск, суммарную вероятность ошибок или иную целевую функцию. Рассмотрим задачу формирования апостериорного распределения. С целью разгрузки памяти вычислительного устройства алгоритму придают обычно *рекуррентный* характер, т. е. по апостериорной плотности, полученной на $(n - 1)$-м шаге и по наблюдению x_n вычисляют апостериорную плотность на n-м шаге. Для обеспечения рекуррентности необходимо сделать упрощающие предположения. Первое предположение было уже сделано выше: матрицу переходов π для процесса $\theta(t)$ считаем стационарной, так что вероятность $\pi_{ij}(t, s) = P(\theta(t) = j|\theta(s) = i)$, $t > s$, зависит лишь от разности $t - s = \tau$. Второе предположение касается вероятностных свойств процесса $z(t)$. Здесь ограничимся предположением, что условная плотность f^n процесса $z(t)$ удовлетворяет условию[9]

$$f^n(z_n|z_1, ..., z_{n-1}; \theta_1, ..., \theta_n) = f^n(z_n|\theta_n).$$

Кроме того, функция f^n считается не зависящей от номера шага n и обозначается f.

В силу сделанных предположений алгоритм пересчета апостериорных вероятностей $w_n^{as}(1) := P(\theta_n = 1|z_1, ..., z_n)$ принимает вид [19]

$$w_n^{as}(1) = \frac{w_n^+(1)f(z_n|1)}{w_n^+(1)f(z_n|1) + (1 - w_n^+(1))f(z_n|0)}, \quad (12)$$

где $w_n^+(1) = w_{n-1}^{as}(1)\pi_{11}(\tau) + (1 - w_{n-1}^{as}(1))\pi_{01}(\tau)$ есть экстраполяция (без использования наблюдений) плотности $w_{n-1}^{as}(1)$ на время τ вперед к моменту $t_n = t_{n-1} + \tau$. Видим, что роль априорной по отношению к апостериорной вероятности на n-м шаге играет *экстраполированная* вероятность на $n - 1$-м шаге. Это объясняется тем, что объект движется, и вместе с его движением пересчитывается вероятность, выступающая в роли априорной.

При выводе алгоритма (12) не предполагалось, что *наблюдения* z_n образуют бинарную последовательность. Теперь рассмотрим частный случай бинарной последовательности наблюдений. Повторим еще раз, что $z_n = 1$, если последетекторный сигнал канала первичной обработки информации превысил порог K, и $z_n = 0$ в противном случае. Ясно, что при гипотезе $\theta_n = 0$ условная вероятность значения $z_n = 1$ равна F, вероятности ложной тревоги, а условная вероятность значения $z_n = 0$ равна $1 - F$. При гипотезе $\theta_n = 1$ вероятности равны D и $1 - D$ соответственно. Нетрудно убедиться, что рекуррентная формула вычисления апостериорной вероятности в дискретном случае принимает вид [12]

$$w_n^{as}(1) = \frac{w_n^+(1)D/F}{1 + w_n^+(1)(D/F - 1)},$$

$$w_n^{as}(1) = \frac{w_n^+(1)(1-D)/(1-F)}{1 + w_n^+(1)((1-D)/(1-F) - 1)}$$

при $z_n = 1$ и $z_n = 0$ соответственно. Здесь $w_n^+(1) := w_{n-1}^{as}(1)D + (1 - w_{n-1}^{as}(1))(1 - D)$.

[9] Случай общей зависимости членов последовательности z_n рассмотрен в книге [19].

6. ОБНАРУЖЕНИЕ КАК ЗАДАЧА О СЕРИИ РАЗЛАДОК

Прежде чем давать постановку задачи обнаружения движущегося объекта, напомним, как формулируется более простая задача обнаружения *единственной* разладки случайного процесса. Рассматривается марковский процесс с двумя состояниями 0 и 1. Вероятность перехода из 0 в 1 за малое время dt равна adt. Наблюдается сумма $s(t)$ этого процесса с белым шумом интенсивности $W_0/2$. Апостериорная вероятность $w^{as}(0, t)$ состояния 0 удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению[10]. Правило обнаружения разладки (в данном случае — скачка из состояния 0 в состояние 1) состоит в сравнении $w^{as}(1, t) = 1 - w^{as}(0, t)$ с некоторым порогом.

Задача о разладке является прообразом задачи обнаружения движущегося объекта, а последняя — ее обобщением на случай *серии* разладок. В марковском случае обе задачи относятся к теории оптимальной нелинейной фильтрации и, в частности, к теории построения переключающихся фильтров для сглаживания измерений координат движущегося объекта, закон движения которого изменяется скачками в неизвестные наблюдателю моменты времени [14].

Рассмотрим вопрос о показателях *качества* обнаружения подвижного объекта. В случае неподвижного объекта такими показателями, как известно, служат вероятности α_1 и α_2 ошибок первого и второго рода. Чем одновременно меньше α_1 и α_2, тем выше качество алгоритма обнаружения. Для подвижного объекта, на первый взгляд, показателей больше. Действительно [12], представим, что объект появился в зоне контакта в случайный момент времени $t = n$, а решение об обнаружении принято в момент $t = m$. Если $m < n$, то произошло ложное обнаружение, а если $m \geqslant n$, то объект обнаружен правильно, но с задержкой на величину $m - n$. Вероятности $p_{m|n}$ соответствующих событий полностью характеризуют качество обнаружения, но их очень много. На самом же деле и здесь можно предложить всего лишь два показателя качества. Ими служат средняя частота ложных тревог (в расчете, например, на единицу времени) и среднее время запаздывания в принятии решения (время до обнаружения). Их обозначают символами $f_{\text{л.т}}$ и $T_{\text{обн}}$. Чем одновременно меньше $f_{\text{л.т}}$ и $T_{\text{обн}}$, тем выше качество алгоритма обнаружения. Далее в § 7 рассмотрен пример, показывающий, как работают оба показателя в простой задаче *накопления* информации при обнаружении движущегося объекта.

[10] А именно, уравнению $\frac{dw^{as}(0,t)}{dt} = -aw^{as}(0, t) - \frac{2}{W_0} \times w^{as}(0, t)(1 - w^{as}(0, t))(s(t) - 1/2)$ [13].

7. ОДИН ПРОСТОЙ НЕОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ

Известен простой способ улучшения *надежности* принимаемых решений (способ накопления информации) в задаче обнаружения[11]. Он состоит в следующем [15]. Пусть $D > 0{,}5$ — вероятность достаточно надежного правильного обнаружения по одному акту наблюдения. Для повышения надежности применим простую схему голосования по большинству. Именно, рассмотрим цикл из $n = 2m + 1$ элементарных актов наблюдения. Обозначим через D_σ вероятность правильного решения, принимаемого большинством, т. е. вероятность $D_\sigma = P(S_n > m)$, где S_n — число тех актов наблюдения, в которых принято решение о наличии объекта. Зададимся вопросом о том, возможно ли существенно увеличить вероятность D_σ по сравнению с вероятностью D, и если возможно, то при каком *минимальном* n будет выполнено *жесткое* требование $D_\sigma = 0{,}99$, например? Ясно, что удовлетворить такому требованию возможно только при достаточно большом n. В работе [15] вычислена суммарная вероятность правильного обнаружения $D_\sigma = P(S_n > m)$ при большом n в предположении, что последовательность правильных решений является потоком Бернулли. Это означает, что при заданном n имеется схема испытаний Бернулли с вероятностью успеха D, испытания *независимы* и вероятность события $S_n = k$, где S_n — число успехов в n испытаниях[12], равна $C_n^k(1 - D)^{n-k}$. Как показывает пример в работе [15], если $D = 0{,}7$, то итоговая вероятность правильного обнаружения $D_\sigma = 0{,}99$ достигается при значениях $n \geqslant 33$.

Возможен ли такой способ накопления при ненадежных наблюдениях (при вероятностях обнаружения $D < 1/2$? Почти очевидно, что — нет, и нетрудно привести соответствующее доказательство. При $D < 0{,}5$ и больших значениях n справедлива приближенная формула (см. далее формулу (17) для случая $n = 2m + 1$)

$$P(S_n \geqslant m) \approx \frac{1-D}{1-2D}\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-nH(D,\,D^*)}, \qquad (13)$$

где

$$H(p, x) = x\ln(x/p) + (1 - x)\ln((1 - x)/(1 - p)),$$
$$0 < x, \quad p < 1.$$

[11] Понятие надежного обнаружения определено в § 2.

[12] Заметим тут же, хотя это нам и не понадобится, что последовательность ложных тревог, когда объект отсутствует, образует поток Пуассона. См., например, работу [11].

Поскольку [15]

$$H\left(D, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln 4D(1 - D), \quad H'_x\left(D, \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1 - D}{D},$$

$$D^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$

получаем

$$H(D, D^*) \approx -\frac{1}{2}\ln 4D(1 - D) - \frac{1}{2n}\ln\frac{1 - D}{D},$$

и уравнение (13) относительно n при заданном значении $D = 0,2$, выбранном для примера, принимает вид $2,114(0,8)^n/\sqrt{n} = D_\sigma$. Функция в правой части уравнения монотонно убывает к нулю при возрастании n и, следовательно, никакое улучшение надежности обнаружения невозможно при выбранной схеме голосования по большинству.

В работе [12] проанализирован ряд неоптимальных алгоритмов обнаружения, таких как алгоритм с накоплением, алгоритм со сбросом, алгоритм скользящего суммирования, приводящих к улучшению итоговых показателей обнаружения путем разумной вторичной обработки результатов предварительных обнаружений. Здесь рассмотрим простейший из них — алгоритм с накоплением. Суть его состоит в том, что суммарная статистика для принятия решения накапливается в течение фиксированного числа n элементарных актов наблюдения, и ее значение сравнивается с порогом. Если порог обнаружения превышен, принимается решение о наличии цели. В противном случае суммарная статистика *обнуляется* и начинается новый цикл накопления длительности n. Таким образом, решения принимаются только в моменты времени nk, где $k = 1, 2, ...$ Суммарная статистика отношения правдоподобия имеет вид $s_k = \sum\limits_i \ln\frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)}$ (суммирование ведется по i от $n(k - 1) + 1$ до nk). Порог, с которым она сравнивается, выбирается из условия оптимизации алгоритма по суммарным параметрам

$$D_\sigma = P(s_1 \geqslant C|\theta = 1), \quad F_\sigma = P(s_1 \geqslant C|\theta = 0)$$

правильного обнаружения и ложных тревог, что равносильно оптимизации по параметрам $f_{\text{л.т}} = F_\sigma/n$ и $T_{\text{обн}} = n\sum\limits_{i\geq 1} i(1 - D_\sigma)^{i-1}D_\sigma = n/D_\sigma$ — частоты ложных тревог и среднего времени обнаружения соответственно[13]. Ниже ограничимся случаем бинарного наблюдаемого сигнала, для которого статистика s_k принимает вид

$$s_1 = k\ln\frac{D}{F} + (n - k)\ln\frac{1 - D}{1 - F},$$

где k — число единиц среди n наблюдений $x_1, x_2, ..., x_n$. Сравнение этой статистики с порогом C равносильно сравнению числа k с порогом m, определяемым из уравнения

$$m\left(\ln\frac{D}{F} - \ln\frac{1 - D}{1 - F}\right) = C - n\ln\frac{1 - D}{1 - F}.$$

Определив значение параметра m из этого уравнения, вероятности F_σ и D_σ можно записать в виде $F_\sigma = \sum\limits_{k=m}^{n} C_n^k F^k(1 - F)^{n-k}$, $F_\sigma = \sum\limits_{k=m}^{n} C_n^k D^k(1 - D)^{n-k}$ с этим значением m в качестве нижнего предела суммирования.

Как наилучшим образом выбрать порог m? Поскольку из существа задачи обнаружения вытекает требование, чтобы величина $f_{\text{л.т}} = F_\sigma/n$ была мала, необходимо выбирать $n \gg 1$. Но этого совершенно недостаточно. Действительно, случайная величина k, равная числу единиц в схеме n испытаний Бернулли, имеет математическое ожидание nF при гипотезе $\theta = 0$ отсутствия сигнала, и если положить порог m равным, например, nF, т. е. положить вероятность F_σ приблизительно равной 1/2, то получим всего-навсего $f_{\text{л.т}} \approx 1/2n$, так что ни при каком реальном значении n не удастся добиться значения $f_{\text{л.т}}$, близкого, скажем, к 10^{-6}. Таким образом, порог m следует выбирать значительно бóльшим, чем среднее значение $E(k|\theta = 0) = nF$. С другой стороны, как следует из формулы $T_{\text{обн}} = n/D_\sigma$, чтобы время обнаружения не было чрезмерно большим, значение D_σ надо брать как можно ближе к своему наибольшему значению 1. Налицо конфликт интересов при выборе удовлетворительных значений $f_{\text{л.т}}$ и $T_{\text{обн}}$. Какому из этих показателей отдать предпочтение при выборе порога m? Предпочтение следует отдать частоте ложной тревоги $f_{\text{л.т}}$. Действительно, выбор $D_\sigma \approx 1/2$ вместо $D_\sigma = 1$, т. е. выбор $m = E(k|\theta = 0) = nD$, вполне удовлетворителен в смысле обоих показателей, поскольку значение $T_{\text{обн}} = n/D_\sigma$ при таком выборе только в два раза хуже наилучшего возможного, зато частота $f_{\text{л.т}}$ уменьшится весьма значительно.

Итак, заключаем: порог m желательно брать меньше nD, чтобы увеличить значение D_σ; и в то же время m желательно брать больше nF, чтобы уменьшить значение F_σ. Выбираем, таким образом, $nF < m < nD$ или $F < h < D$, где обозначено $h = m/n$.

8. О ВАЖНОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ

Специфика задачи обнаружения движущегося объекта на периферии зоны контакта с обнаружителем состоит в назначении чрезвычайно малого значения для вероятности ложных тревог F. Вероятность правильного обнаружения D на периферии зоны контакта тоже мала. Как отмечалось в § 7, поток сигналов на выходе канала первичной обработки информации полагается для простоты

[13] Формула для $T_{\text{обн}}$ доказывается так: дифференцируя по x сходящийся ряд $\sum\limits_{i\geq 0} x^i = (1 - x)^{-1}$, получаем $(1 - x)^{-2} = \sum\limits_{i\geq 1} ix^{i-1}$ или $(1 - x)^{-1} = \sum\limits_{i\geq 1} ix^{i-1}(1 - x)$, и остается положить $x = 1 - D_\sigma$.

бернуллиевским или пуассоновским. Для вычисления вероятностей F_σ и D_σ обычно прибегают к гауссовской аппроксимации распределений Бернулли и уже по таблицам гауссовского распределения вычисляют суммы, которыми вероятности F_σ и D_σ заданы. При этом часто игнорируется тот факт, что аппроксимации не имеют теоретического обоснования на *удаленных* от центральной части *хвостах* распределений и что корректнее было бы применять в этом случае теорию предельных теорем *для больших уклонений* или теорию редких событий. Один пример из теории больших уклонений был приведен ранее: это формула (13) вычисления вероятности $P(S_n \geqslant m)$ при больших m. Численные результаты, полученные по этой формуле, существенно отличаются от тех, что дает «простая» гауссовская аппроксимация. По этой причине приведем здесь некоторые сведения из теории вероятностей больших уклонений.

Если S_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p, то $P(S_n = m) = C_n^m p^m(1 - p)^{n-m}$. Аппроксимация этой вероятности осуществляется для случая фиксированного p и большого n с использованием формулы Стирлинга $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$, где тильда — знак *асимптотической эквивалентности*: $\psi_1(n) \sim \psi_2(n)$ означает, что мала *относительная* разность $|\psi_1 - \psi_2|/\psi_2$, а не только абсолютная $\psi_1 - \psi_2$. *Локальная* теорема для схемы Бернулли утверждает [15], что при условиях $m \to \infty$, $n - m \to \infty$

$$P(S_n = m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^*(1-p)^*}} e^{-nH(p,\, p^*)},$$
$$p^* = \frac{m}{n}, \qquad (14)$$

где обозначение $H(p, x)$ объяснено в § 7. Так как $H(p, p) = H'_x(p, p) = 0$, то $H(p, p^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \times (p^* - p)^2 + O(|p^* - p|^3)$ при $p^* - p \to 0$. Таким образом, лишь для $p^* \sim p$ и $n(p^* - p) \to 0$ из формулы (14) следует нормальное приближение

$$b(m;\, n,\, p) := P(S_n = m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-n\frac{(p^*-p)^2}{2pq}}. \qquad (15)$$

Приближение (15) следует применять с осторожностью; и в случае, когда p^* существенно отличается от p, оценка вероятности $P(S_n = m)$ должна производиться по формуле (14).

Формула (14) находит применение и при оценке вероятностей событий $\{S_n \leqslant m\}$. Именно, если $m < (n + 1)p$, то [15]

$$B(m;\, n,\, p) := P(S_n \leqslant m) < \frac{(n+1-m)p}{(n+1)p-m} P(S_n = m). \qquad (16)$$

Если же $m > (n + 1)p$, то надо рассмотреть схему Бернулли с вероятностью успеха q и воспользоваться очевидным соотношением

$$P(S_n = m) = b(m;\, n,\, p) = b(n - m;\, n,\, q) = \\ = P(S_n = n - m);$$

тогда, обозначив $\bar{m} = n - m$, получим

$$1 - B(m;\, n,\, p) := P(S_n > m) < \\ < \frac{(n+1-\bar{m})q}{(n+1)q-\bar{m}} P(S_n = m), \qquad (17)$$

при этом, очевидно, $(n + 1)q - \bar{m} > 0$. Вероятность $P(S_n = m)$ в формулах (16) и (17) вычисляется по формуле (14).

Полагая приближенно $p^* \approx m/(n + 1)$, $q^* \approx \bar{m}/(n + 1)$, формулы (16) и (17) можно записать и в виде [15]

$$P(S_n \leqslant m) \approx \frac{(1-p^*)p}{p-p^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^*(1-p^*)}} e^{-nH(p,\, p^*)} \\ \text{при } p^* < p, \qquad (18)$$

$$P(S_n \leqslant m) \approx 1 - \frac{p^*(1-p)}{p^*-p} \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^*(1-p^*)}} e^{-nH(p,\, p^*)} \\ \text{при } p^* > p. \qquad (19)$$

Неравенства в формулах (16) и (17) заменены приближенными равенствами в выражениях (18) и (19), что допустимо, если n и m велики, а отношение m/np не очень близко к 1.

Сделаем также замечание к приближенным вычислениям, обоснованным *якобы* предельной теоремой Муавра — Лапласа, согласно которой

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx, \\ a < b. \qquad (20)$$

Эта теорема не содержит никакой оценки погрешности *допредельного* соотношения, поэтому она бесполезна для *численных* расчетов. Тем не менее, в приложениях утверждение (20) часто, игнорируя возникающую погрешность, превращают в приближенную формулу

$$P(a\sqrt{npq} < S_n - np \leqslant b\sqrt{npq}) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

или даже, беря неограниченный интервал (a, ∞), в формулу

$$P(S_n - np > a\sqrt{npq}) \approx 1 - \Phi(a). \qquad (21)$$

Последней формулой пользуются, например, при расчете порогового устройства принятия решений, желая обеспечить очень малые, порядка 10^{-5}—10^{-7} вероятности ошибочных решений. Между тем, пользоваться формулой (21) при больших n и a можно лишь в случае, если отношение $a^3/\sqrt{npq}$ близко к нулю [20]. В противном случае возможны значительные ошибки. Приведем пример ошибочных вычислений. Пусть сначала, например, $n = 100$, $p = 0{,}25$, тогда $\sqrt{npq} \approx 4{,}34$. Потребуем, чтобы было $a^3/4{,}34 = 0{,}02$, т. е. $a \approx 0{,}4414$. Здесь использование формулы (21) вполне корректно и она дает следующий результат: $P(S_n - 25 > 0{,}4414 \cdot 4{,}34) \approx$ $\approx 1 - \Phi(0{,}4414) \approx 0{,}3296$.

Потребуем теперь $1 - \Phi(a) \approx 10^{-6}$, т. е. $a = 4{,}7$. Левая часть формулы (21) в этом случае дает результат [21]: $P(S_n - np > a\sqrt{npq}) \approx 0{,}04315$. Близкое к этому значение дает и применение формулы (19). Отсюда видно, к каким нелепым выводам можно прийти, вычисляя уровень порога системы обнаружения по аппроксимациям, не имеющим солидного обоснования и, в частности, по гауссовским аппроксимациям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная работа носит по существу обзорный характер. В ней приведены результаты нескольких работ по теории обнаружения движущихся объектов, и особенное внимание обращается на принципиальное отличие этой теории от классической теории обнаружения неподвижных целей. В работе содержатся лишь общие соображения о том, в каком направлении следует двигаться при решении сложной конкретно поставленной практической проблемы. Однако многие из идей, кратко в работе изложенные, могут, кажется, дать импульс к созданию практически значимых алгоритмов и углубленному их исследованию как в теоретическом плане, так и с помощью компьютерного моделирования. Автор надеется, что работа будет полезна инженерам и программистам, работающим над созданием для флота бортового комплекса управления скрытностью подводных объектов. Тема, затронутая в работе, оказалась очень многоплановой, и выработка воззрений на то, как следует переводить на формальный язык проблему обеспечения скрытности, давалась не легко.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алферов Ж.И., Лаверов Н.П., Саркисов А.А.* Роль Академии наук в обеспечении защиты и скрытности кораблей ВМФ // Вестник РАН. — 2012. — Т. 82, № 7. — С. 628—647.
2. *Якушенко Е.И.* и др. Бортовой комплекс управления скрытностью морских подводных объектов с оперативно-советующей системой / Е.И. Якушенко, Ю.В. Гурьев, В.И. Эйдук, С.Н. Васильев, А.В. Добровидов, Е.Л. Кулида, Е.П. Маслов, И.В. Ткаченко, А.М. Вишневский, Ю.Ф. Шлемов // Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2012. — № 10. — С. 9—16.
3. *Добровидов А.В., Кулида Е.Л., Рудько И.М.* Выбор траектории движения объекта в конфликтной среде // Проблемы управления. — 2011. — № 3. — С. 64—75.
4. *Галяев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 3. — С. 134—140.
5. *Галяев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 4. — С. 52—62.
6. *Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Яхно В.П.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей // Проблемы управления. — 2010. — № 5. — С. 73—79.
7. *Сысоев Л.П.* Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Проблемы управления. — 2010. — № 6. — С. 64—70.
8. *Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рудько И.М., Яхно В.П.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей при малых отношениях сигнал/помеха // Информационно-управляющие системы. — 2011. — № 2. — С. 2—7.
9. *Шайкин М.Е.* О статистическом функционале риска в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 1. — С. 21—29.
10. *Большаков И.А.* Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума. — М.: Советское радио, 1969.
11. *Шайкин М.Е.* Применение теории случайных потоков к задачам обнаружения группы целей // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 6. — С. 52—72.
12. *Бакут П.А., Жулина Ю.В., Иванчук Н.А.* Обнаружение движущихся объектов. — М.: Советское радио, 1980.
13. *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. — М.: Наука, 1969.
14. *Хазен Э.М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. — М.: Советское радио, 1968.
15. *Боровков А.А.* Математическая статистика. — М.: Наука, 1984.
16. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. В 2-х т. — М.: Советское радио, 1961, т. 1; 1962, т. 2.
17. *Шайкин М.Е.* Эффективный алгебраический формализм в задаче вычисления моментов распределений квадратичных форм // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 3. — С. 76—84.
18. *Ловитт У.В.* Линейные интегральные уравнения. — М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1957.
19. *Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1966.
20. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. — М.: Мир, 1964, т. 1; 1967, т. 2.
21. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Г. Лебедевым.

Михаил Ермолаевич Шайкин — канд. техн. наук,
ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-91-61, ✉ shaikin@ipu.ru.