УДК 519.6 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2022.6.1

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ КОМПЛЕКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ НА ОСНОВЕ РАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

В.А. Сергеев

Аннотация. Предложен подход, позволяющий существенно снизить вычислительную сложность составляемых оптимизационных задач синтеза механизмов комплексного оценивания (МКО). Введены необходимые для изложения понятия. Приведено доказательство представимости заданной дискретной функции в виде некоторого МКО. Рассмотрен случай декомпозиции для отдельного обучающего примера на некотором разбиении входных параметров. Приведено утверждение и его доказательство о представимости задачи синтеза матрицы МКО для отдельного примера входного набора данных как задачи максимизации некоторого полинома. Приведено следствие и его доказательство об условии реализуемости набора заданных примеров некоторой матрицей МКО. Приведено утверждение и следствие с доказательствами о реализуемости МКО на основе обучающего набора данных в некоторой структуре полного двоичного дерева с помощью метода декомпозиции. Показано, что некоторая дискретная функция реализуется на основе заданной структуры полного бинарного дерева в случае, когда реализуются дискретные функции, представленные матрицами свертки в каждом из узлов рассматриваемой структуры. Приведен пример декомпозиции на основе полного бинарного дерева на трех листьях. Предложен метод поиска МКО, реализующих заданный обучающий набор в пространстве всех возможных структур полных бинарных деревьев, на основе таблицы ветвей. Изложена методика проведения декомпозиции в соответствии с таблицей ветвей для каждого отдельного разбиения входных параметров. Отмечены преимущества предложенного метода.

Ключевые слова: механизмы комплексного оценивания, дискретная функция, оценка, декомпозиция.

ВВЕДЕНИЕ

Обучение моделей на основе прецедентов – широко известная практика [1–3], выходящая за пределы области машинного обучения. В последнее время начал появляться интерес к разработке обучающих процедур для механизмов комплексного оценивания (МКО).

Имеется широкая практика применения МКО в качестве многомерных систем оценки и ранжирования для управления и контроля в организационных и производственных системах [4–9]. Применение подхода комплексного оценивания (КО) к оценке сложных систем, таких как организационные и производственные, позволяет работать с трудностями, типичными для задач оценки сложных объектов [10, 11]. Базовая сфера применения МКО – порядковое ранжирование или классификация с заранее определенным числом классов конечного набора многокритериальных альтернатив [12–14]. Основные компоненты МКО – бинарное дерево и матрицы свертки, которые позволяют получать комплексную оценку, основанную на значениях нескольких входных индикаторов. Недавно было предложено несколько подходов, позволяющих синтезировать или, иначе говоря, идентифицировать матрицы свертки по конкретному двоичному дереву [15, 16]. В данной статье предлагается подход к синтезу, представляющий собой продолжение работы над методом, изложенным в докладе [15]. Рассматриваемый подход призван решить проблемы, возникающие со сложностью решения оптимизационной задачи в ходе синтеза матриц МКО; для этого предлагается применять метод декомпозиции дискретной функции. Актуальной также представляется задача поиска множества МКО, реализующих рассматриваемый набор данных.

Многие исследователи проявляли интерес к возможности декомпозиции функции. Например, А.Н. Колмогоров [17] и В.И. Арнольд [18] исследовали разложимость непрерывных функций. Что касается дискретной функции, то В.С. Выхованец [19] исследовал построение декомпозиции алгебраических функций, а также задачу идентификации дискретной системы с помощью спектрального разложения (см., например, работу [20]). Сложность представления булевых функций исследовалась С.В. Яблонским [21]. В статье [22] А.В. Кузнецовым рассмотрены бесповторные булевы функции. Важно отметить работу из области многокритериальной оценки В.А. Глотова и В.В. Павельева [23] в которой освещается применение декомпозиции для построения критериально-целевой структуры. В.Н. Бурков и И.В. Буркова с коллегами исследовали дихотомическое представление функции [24, 25] с точки зрения решения задач дискретной оптимизации, в том числе и применительно к задаче комплексного оценивания.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть задан конечный набор индикаторов $L \subset \mathbb{N}$, $|L| = l$, на основе их значений должна быть произведена порядковая оценка некоторого объекта или ранжирование нескольких объектов. Для задачи идентификации МКО будем считать, что для каждого индикатора $i \in L$ задан конечный набор $K_i \subset \mathbb{N}$ его возможных значений, $k_i \in K_i$ – оценка отдельного параметра. Вектор $k = (k_1, \ldots, k_l)^{\mathrm{T}}$ – совокупность оценок, описывает любое возможное состояние оцениваемых объектов. Также есть конечный набор $K_L \subset \mathbb{N}$ возможных интегральных значений (рангов или классов) $k_L \in K_L$ для любого k. Таким образом, можно говорить о некоторой дискретной функции $f(\cdot): K_D \to K_L$. Здесь $K_D = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_l$ – область определения, где $\times$ – декартово произведение множеств, а K_L – область значений функции. В рамках данной статьи акцент сделан на работу именно с дискретными шкалами как индикаторов (показателей), так и значений, получаемых в узлах дерева свертки [12]. Функция f, заданная на множестве K_D и принимающая значения на множестве K_L, есть отображение K_D в K_L такое, что каждый элемент x области определения K_D связан с не более чем с одним элементом области значений K_L.

Определение 1. МКО с бинарным деревом и свертками матриц – это функция $f(\cdot): K_D \to K_L$, для которой индикаторы L являются листьями полного бинарного дерева – ориентированного графа $G = (V, E)$:

- $V = L \cup \hat{L}$, $\hat{L} = \{l+1, \ldots, 2l-1\}$.
- $E = \{e_{ij}\} \subseteq V \times V$:

$-\forall i \in V \setminus \{2l-1\}\ \exists!\, j \in \hat{L} \setminus \{i\}:\ e_{ij} = 1,\quad \forall t \in V \setminus j$ $e_{it} = 0$;

$-\forall j \in L\ \forall i \in V\ e_{ij} = 0$;

$-\ \forall j \in \hat{L}\quad \exists! \{r, c\} \in V \setminus \{j\} \times V \setminus \{j\}: e_{rj} = 1, e_{cj} = 1$;

и $\forall j \in \hat{L}$ (внутренняя вершина дерева, включая корень дерева):

- конечный набор $K_j \subset \mathbb{N}$ с возможными значениями $k_j \in K_j$, $K_{2l-1} = K_L$;
- матрица свертки $M_j = [m_{jrc} \in K_j]_{r \in \{0, \ldots, |K_l - 1|\}, c \in \{0, \ldots, |K_r - 1|\}}$, $\{r, c\} \in V \setminus \{j\} \times V \setminus \{j\}: e_{lj} = 1, e_{rj} = 1$ определены. ♦

Потенциально данное определение может быть расширено на нечеткие [26] или непрерывные шкалы. Имея некоторый МКО, обозначим подобно тому, как это сделано в работе [15], набор всех его матриц свертки как $M_f = \{M_j\}_{j \in L}$. В этой работе ограничимся рассмотрением МКО с единой шкалой, таких что $\forall j \in V\ K_j = K_L$. Для $L \subset \mathbb{N}$ обозначим $\Gamma_2(L)$ набор всех полных бинарных деревьев на именованных листьях из набора индикаторов L; $IRM_{L,2}$ – набор всех МКО для любого конкретного бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$; $IRM_{L,G} \subseteq IRM_{L,2}$ – набор всех МКО с таким деревом. Как формально показано в определении 1, в данной работе под определением полного бинарного дерева понимается дерево, в котором каждый узел имеет либо ни одного, либо два дочерних элемента.

На основе определений, приведенных в работе [15], обозначим $q = (k, k_L)$ отдельный обучающий пример, состоящий из значений оценок по каждому из индикаторов и интегральной оценки для данной совокупности значений индикаторов, $Q \subset K_D \otimes K_L$ – обучающий набор (из предоставленных примеров). Обучающий набор является согласованным, если $\forall \{q, \tilde{q}\} \subseteq Q\quad k \neq \tilde{k}$. Обучающий набор является полным, если $\forall k \in K_D\ \exists q \in Q$: $q = (k, k_L)$. Обучающий набор задан в единой шкале, если $\forall i \in L\quad K_i = K_L$. Для произвольных $\{k, \tilde{k}\} \subseteq K_D$ обозначим $k \succ \tilde{k}$, если $\forall i \in L\quad \tilde{k}_i \le k_i$. Для некоторого произвольного набора $Q \subset K_D \otimes K_L$ можно определить следующие ключевые обозначения, касающиеся проблемы идентификации. Прежде всего, можно формализовать задачу реализуемости обучающего набора.

Определение 2. Функция $f(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует набор Q тогда и только тогда, когда $\forall q \in Q$ $f(k) = k_L$. ♦

Обозначим $IRM_{L,2}(Q)$ множество всех МКО, которые реализуют набор Q, $IRM_{L,G}(Q)$ – множество всех МКО, которые реализуют Q и построены на основе двоичного дерева $G \in \Gamma_2(L)$. Тогда если $IRM_{L,2}(Q) \neq \emptyset$, то набор Q реализуем на основе МКО, если $IRM_{L,G}(Q) \neq \emptyset$; тогда набор Q является реализуемым на основе МКО со структурой G. Определение 2 также может быть сужено до одного конкретного обучающего примера: функция $f(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует некоторый пример $q \in Q$ тогда и только тогда, когда $f(k) = k_L$; так же определяются множества $IRM_{L,2}(q)$ и $IRM_{L,G}(q)$.

Для некоторого конечного набора $K \subset \mathbb{N}$ вводится его нормализованное представление, $\bar{K} = \{0,...,s\}$, $s = |K| - 1$. Тогда $\forall x \in \bar{K}$ введем унитарное представление как $\tilde{x} = (\underbrace{0,...,0}_{x},1,\underbrace{0,...,0}_{s-x})^{\mathrm{T}}$. В этой работе ограничимся рассмотрением МКО с единой шкалой. Тогда для некоторой матрицы свертки $M = [m_{rc} \in K]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$ результат свертки для любой пары $\{x, y\} \in \{0,...,\bar{K}\}^2$, где x определяет выбор столбца матрицы и y – строки, описывается матричным уравнением $\tilde{y}^{\mathrm{T}} M \tilde{x}$. Далее мы также будем использовать так называемую квадратичную форму представления $(M\tilde{x}, \tilde{y})$, упрощая её до $M\tilde{x}\tilde{y}$.

2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДИСКРЕТНОЙ ФУНКЦИИ

В работе [15] был предложен подход к идентификации МКО с применением механизма обучения на дискретных данных, в центре которого находится механизм составления оптимизационного функционала на основе входных данных и предложенной структуры полного бинарного дерева. Такой подход к задаче идентификации сопряжен с трудностями в решении оптимизационной задачи в случае большой размерности входных данных. Степень оптимизационного полинома растет линейно в зависимости от количества входных параметров, а число общих ограничений оптимизационной задачи растет экспоненциально: $Cn = \kappa^{l-2} ex\_num$, где Cn – число общих ограничений; $\kappa = |K|$ – шкала значений индикатора для параметров в единой шкале k_L; ex_num – количество примеров в наборе Q; l – число параметров.

В качестве альтернативы было решено воспользоваться возможностью решения задачи идентификации по шагам с помощью разделительной декомпозиции функции $f(X) = \Sigma(X_1, a(X_2))$, где Σ, a – некоторые функции, а $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ – подмножества, получающиеся в результате разделения множества X (см. работу [19]). Возможность разложения любой непрерывной функции n переменных в суперпозицию непрерывных функций меньшего числа переменных исследовалась А.Н. Колмогоровым и В.И. Арнольдом, в частности для двух переменных она доказана в работах [17, 18]. В статье [17] доказана теорема о том, что любая непрерывная функция n переменных, где $n \geq 3$, представима в виде суперпозиции некоторых непрерывных функций. В.А. Глотовым и В.В. Павельевым в работе [23] доказывается теорема о представимости дискретной функции n переменных в бинарном (разделительном) виде. Для случая МКО, т. е. с использованием полных бинарных деревьев, легко показать (см. приложение), что при условии отсутствия фиксирования шкал значений $k_i \in K_i$ декомпозиция заданной функции возможна в любой структуре полного бинарного дерева, так как в силу конечного k_L шкала значений функций, на которые раскладывается рассматриваемая дискретная функция, тоже конечна, $\forall\, i \in \{1,…, l-1\}$. Таким образом, имеет место последовательный подход к составлению и решению задач идентификации для декомпозиции в каждом из узлов рассматриваемого дерева из набора $\Gamma_2(L)$.

Для любого произвольного дерева $G \in \Gamma_2(L)$, подобно изложенному в работе [27], обозначим его структуру декомпозиции показателей как $\Lambda(G) = \{L_i\}_{i \in \{1,..,l-1\}}$, так что $\forall i \in \{1,...,l-1\}$ $L_i \subseteq L$ – набор листьев (индикаторов) поддерева с корнем в i. Тогда $L_1 = L$, и $\forall i \in \{1,...,l-1\}$ $|L_i| \geq 2$. Пусть дан некоторый полный набор Q и дерево $G \in \Gamma_2(L)$. Тогда для любого набора $L_i \in \Lambda(G)$, такого что $L_i \geq 2$ и его подгруппы $\{L_{ir}; L_{ic}\} \subset \Lambda(G)$: $L_{ir} \bigcup L_{ic} = L_i$. Для любых допустимых значений индикаторов из набора L_{ir} обозначим кортежи $k_{(L_{ir})}, \tilde{k}_{(L_{ir})}$ и из набора L_{ic} – $k_{(L_{ic})}, \tilde{k}_{(L_{ic})}$. Для некоторого подмножества индикаторов $\tilde{L} \subseteq L$ обозначим $\lambda = \left(k_{(\tilde{L})}, k_{(L \setminus \tilde{L})}\right)$ разбиение кортежа индикаторов k для некоторого обучающего примера $q = (k, k_L)$ на два кортежа. Каждому дереву из $G \in \Gamma_2(L)$, в силу структуры полного бинарного дерева, можем сопоставить набор индикаторов L_i, тогда $\lambda_i = \left(k_{(L_{ir})}, k_{(L_{ic})}\right)$ – разбиение кортежа индикаторов в i-м узле дерева G. В каждом из рассматриваемых узлов дерева будем обозначать функции компонент, на которые раскладывается дискретная функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$, в соответствии с разбиением и в соответствии с нумерацией матриц, расположенных в узлах структуры рассматриваемого дерева, на которых реализуются функции, составляющие $\varphi_i(k_{(L_i)})$. Например, для разбиения $\lambda = \left(k_{(1,2)}, k_{(3,4)}\right)$ названия компонент двух подфункций будут записываться так: $\varphi_{i+1}\_k_1k_2$ и $\varphi_{i+2}\_k_3k_4$. Также для удобства изложения можем именовать компоненты дискретной функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$ в соответствии с разбиением λ_i как $\varphi_r(k_{(L_{ir})})$ и $\varphi_c(k_{(L_{ic})})$. В случае, если составляется разбиение, состоящее из отдельного листа и группы: $\lambda = \left(k_{(1)}, k_{(3,4)}\right)$, кодируем только компоненты $\varphi_{i+1}\_k_3k_4$, где $i \in \{1,..., l-1\}$. Рассмотрим пример в контексте предлагаемого подхода.

Пример 1. Рассмотрим случай $|L| = 3$ $|K_L| = 2$ и обучающий пример $q = ((0, 0, 0), 0)$, унитарное представление: $\tilde{q} = \left(\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Рассмотрим прежде всего реализуемость некоторой дискретной функции $\varphi_1(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3)$. Для именования функций декомпозиции используем разбиение $\lambda_1 = \left(k_{(1)}, k_{(2,3)}\right)$

$$\left(\begin{pmatrix}\varphi^0_{2\_00}\\ \varphi^1_{2\_00}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}m1^0_{00}\\ m1^1_{00}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{01}\\ m1^1_{01}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m1^0_{10}\\ m1^1_{10}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{11}\\ m1^1_{11}\end{pmatrix}\end{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

с унитарными условиями: $\forall\{i, j\} \in \{0, 1\}^2$ $m1^0_{ij} + m1^1_{ij} = 1$ $m1^t_{ij} \in \{0,1\}$, $\varphi^0_{2\_00} + \varphi^1_{2\_00} = 1$, $\varphi^t_{2\_00} \in \{0, 1\}$, $\forall t \in \{0,1\}$. В результате несложных преобразований получим систему

$$\varphi^0_{2\_00} m1^0_{00} + \varphi^1_{2\_00} m1^0_{10} = 1, \quad (1)$$

$$\varphi^0_{2\_00} m1^1_{00} + \varphi^1_{2\_00} m1^1_{10} = 0. \quad (2)$$

Решение системы (1), (2) легко найти, используя ограничения бинарности: например, $\varphi^0_{2\_00} = 1$, $m1^0_{00} = 1$. Имеем часть оптимизационной задачи, соответствующую примеру $q = ((0, 0, 0), 0)$. ♦

Обозначим $P(\lambda_i, q)$ функцию, которая находится в левой части уравнения (1). Вследствие унитарного подхода есть только одна такая функция для любого примера q. Q_i – набор данных, полученный из исходного набора Q путем выделения только тех столбцов, на которых определена функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$.

Утверждение 1. *Для любых наборов* $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ *и любого возможного примера* q *в единой шкале существует* $P(\lambda_i, q)$ – *однородный полином, степень которого меньше или равна трем и который может быть представлен как сумма* k^{φ_num} *уникальных компонент*:

$$P(\lambda_i, q) = \sum_{j=1}^{\kappa^{\varphi\_num}} p_j, \ \forall j \in \{1,..., \kappa^{\varphi\_num}\},$$

$$p_j = m_j \prod_{d=1}^{\varphi\_num} \varphi_d, \ \forall d \in \{1,..., \varphi\_num\},$$

где φ_d *– обозначение компонент функций, на основе которых декомпозируется* функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$; m_j *– одна компонента кортежа в некоторой ячейке унитарно закодированной матрицы* $\tilde{M}_i$; q – *пример из* Q_i; $\varphi\_num = 1$ *при подсоединении к матрице ветви и листа;* $\varphi\_num = 2$ *при подсоединении к матрице пары ветвей;*

$P(\lambda_i, q) \in \{0, 1\}$;

$\varphi_i(k_{(L_i)})$ *реализует* $q \Leftrightarrow P(\lambda_i, q) = 1$.

Доказательство утверждения 1 приведено в приложении.

Для функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$ на каждом шаге декомпозиции формируем из набора Q соответствующий ей набор Q_i, основанный на листьях, соответствующих разбиению λ_i.

Пример 2. Добавим к рассмотренному в примере 1 еще один обучающий пример $q_2 = ((0, 1, 0), 1)$ на основе того же разбиения $\lambda_1 = \left(k_{(1)}, k_{(2,3)}\right)$, унитарное представление которого: $q_2 = \left(\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$. Тогда имеем набор операций

$$\left(\begin{pmatrix}\varphi^0_{2\_00}\\ \varphi^1_{2\_00}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}m1^0_{00}\\ m1^1_{00}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{01}\\ m1^1_{01}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m1^0_{10}\\ m1^1_{10}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{11}\\ m1^1_{11}\end{pmatrix}\end{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{pmatrix}\varphi^0_{2\_00}\\ \varphi^1_{2\_00}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}m1^0_{00}\\ m1^1_{00}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{01}\\ m1^1_{01}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m1^0_{10}\\ m1^1_{10}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{11}\\ m1^1_{11}\end{pmatrix}\end{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

с унитарными условиями: $\forall\{i, j\} \in \{0,1\}^2$ $m1_{ij}^0 + m1_{ij}^1 = 1$ $m1_{ij}^t \in \{0,1\}$, $\varphi_{2\_00}^0 + \varphi_{2\_00}^1 = 1$, Из сопоставления уравнений, составленных для первого и второго обучающих примеров, следует необходимость согласования значений φ_{2_00} и φ_{2_01}. Поэтому при составлении функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$, реализующей одновременно примеры q_1 и q_2, требуем $\varphi_{2\_00}{}^{\mathrm{T}}\varphi_{2\_01} = 0$. ♦

Следствие 1. *Для любых наборов $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ и любого возможного $Q_i \subset K^{l+1}$ с единой шкалой* дискретная функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$ *реализует набор Q_i, когда* $\sum\limits_{q \in Q_i} P(\lambda_i, q) = |Q_i|$ *для любого возможного примера q в единой шкале с учетом ограничений согласования значений функций $\varphi_r(k_{(L_{ir})})$ и $\varphi_c(k_{(L_{ic})})$ для всех примеров из набора Q_i.*

Доказательство следствия 1 приведено в приложении.

Если к рассматриваемой матрице присоединяются две ветви, то $\varphi\_num = 2$ и следует рассмотреть согласованность функций $\varphi_r(k_{(L_{ir})})$ и $\varphi_c(k_{(L_{ic})})$ для каждой из ветвей.

Утверждение 2. *Для любых наборов $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ $IRM_{G,2}(q)$ представлен как декомпозиция функции $f(\tilde{k}_1,..., \tilde{k}_l)$ и реализует набор $Q \subset K^{l+1}$, если функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$ для некоторой последовательности разбиений $\Lambda(G)$, соответствующей дереву G, реализует набор Q_i, для $i \in \{1,..., l-1\}$.*

Следствие 2. *Если* $\sum\limits_{q \in Q_i} P(\lambda_i, q) < |Q_i|$, $\forall\ i \in \{1,…, l-1\}$, *то $IRM_{G,2}(Q) = \varnothing$.*

Доказательства утверждения 2 и следствия 2 приведены в приложении.

Таким образом, если для матрицы верхнего уровня удается найти решение оптимизационной задачи $\underset{m_{rc}, \varphi_r, \varphi_c}{\operatorname{Arg\,max}} \sum\limits_{q \in Q_1} P(\lambda_1, q)$, такое что $\sum\limits_{q \in Q_1} P(\lambda_1, q) = |Q_1|$, можно продолжить декомпозицию на следующий узел структуры, в качестве функции теперь используя найденные значения компонент дискретной функции $\varphi_1(k_{(L_1)})$. При этом $\varphi_1(k_{(L_1)})$ и найденные значения матрицы M_1 можно использовать для декомпозиции на поддеревьях $\{L_{1r}; L_{1c}\} \subset \Lambda(G)$ на значениях индикаторов $k_{(L_{1r})}$, $k_{(L_{1c})}$ соответственно. Применяя данный подход, последовательно для структуры $\Lambda(G)$ можно найти векторы $\varphi_i(k_{(L_i)})$ и матрицы M_i, $\forall\ i \in \{1,…, l-1\}$.

Пример 3. Рассмотрим данные, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для задачи декомпозиции

q	k_1	k_2	k_3	k_4	k_L
1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1
3	1	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	1	1	1	0	1
6	0	1	0	1	1
7	1	0	1	1	0
8	1	1	1	1	0

Рассмотрим сначала реализуемость функции $f = \varphi_1(\tilde{k}_1, \varphi_2(\tilde{k}_2, \tilde{k}_3, \tilde{k}_4))$ и в случае, если $\varphi_1(k_{(L_1)})$ доступна в заданной шкале k_L, то перейдем к поиску реализации дискретной функции $\varphi_2(k_{(L_2)})$. Положим разбиение первого уровня $\lambda_1 = \left(k_{(1)}, k_{(2,3,4)}\right)$. Составим уравнения для первого примера первой ступени

$$\left(\begin{pmatrix} \varphi_{2\_000}^0 \\ \varphi_{2\_000}^1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m1_{00}^0 \\ m1_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m1_{01}^0 \\ m1_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m1_{10}^0 \\ m1_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m1_{11}^0 \\ m1_{11}^1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с унитарными условиями $\forall\{i, j\} \in \{0,1\}^2$ $m1_{ij}^0 + m1_{ij}^1 = 1$, $m1_{ij}^t \in \{0, 1\}$, $\varphi_{2\_000}^0 + \varphi_{2\_000}^1 = 1$, $\varphi_{2\_000}^t \in \{0,1\}$, $\forall t \in \{0,1\}$:

$$\varphi_{2\_000}^0 m1_{00}^0 + \varphi_{2\_000}^1 m1_{10}^0 = 1,$$

$$\varphi_{2\_000}^0 m1_{00}^1 + \varphi_{2\_000}^1 m1_{10}^1 = 0.$$

Далее по схеме, описанной в примере 1, получаем набор уравнений для всех примеров:

$$\varphi_{2\_000}^0 m1_{00}^0 + \varphi_{2\_000}^1 m1_{10}^0 = 1;\ \varphi_{2\_100}^0 m1_{00}^1 + \varphi_{2\_100}^1 m1_{10}^1 = 1;$$

$$\varphi_{2\_100}^0 m1_{01}^0 + \varphi_{2\_100}^1 m1_{11}^0 = 1;\ \varphi_{2\_010}^0 m1_{00}^1 + \varphi_{2\_010}^1 m1_{10}^1 = 1;$$

$$\varphi_{2\_110}^0 m1_{10}^1 + \varphi_{2\_110}^1 m1_{11}^1 = 1;\ \varphi_{2\_101}^0 m1_{00}^1 + \varphi_{2\_101}^1 m1_{10}^1 = 1;$$

$$\varphi_{2\_011}^0 m1_{01}^0 + \varphi_{2\_011}^1 m1_{11}^0 = 1;\ \varphi_{2\_111}^0 m1_{01}^0 + \varphi_{2\_111}^1 m1_{11}^0 = 1.$$

Из них составляем оптимизационную задачу:

$$\varphi^0_{2\_000}m1^0_{00}+\varphi^1_{2\_000}m1^0_{10}+\varphi^0_{2\_100}m1^1_{00}+$$
$$+\varphi^1_{2\_100}m1^1_{10}+\varphi^0_{2\_100}m1^0_{01}+$$
$$+\varphi^1_{2\_100}m1^0_{11}+\varphi^0_{2\_010}m1^1_{00}+\varphi^1_{2\_010}m1^1_{10}+\varphi^0_{2\_110}m1^1_{10}+ \quad (3)$$
$$+\varphi^1_{2\_110}m1^1_{11}+\varphi^0_{2\_101}m1^1_{00}+\varphi^1_{2\_101}m1^1_{10}+\varphi^0_{2\_011}m1^0_{01}+$$
$$+\varphi^1_{2\_011}m1^0_{11}+\varphi^0_{2\_111}m1^0_{01}+\varphi^1_{2\_111}m1^0_{11}\to\max.$$

Кроме того, имеем ограничения, выписанные на основе анализа конфликтов между уравнениями, составленными для разных ступеней. Например, из выражения

$$\left(\begin{pmatrix}\varphi^0_{2\_000}\\ \varphi^1_{2\_000}\end{pmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}m1^0_{00}\\ m1^1_{00}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{01}\\ m1^1_{01}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m1^0_{10}\\ m1^1_{10}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{11}\\ m1^1_{11}\end{pmatrix}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

для первого примера и

$$\left(\begin{pmatrix}\varphi^0_{2\_100}\\ \varphi^1_{2\_100}\end{pmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}m1^0_{00}\\ m1^1_{00}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{01}\\ m1^1_{01}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m1^0_{10}\\ m1^1_{10}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m1^0_{11}\\ m1^1_{11}\end{pmatrix}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

для второго выпишем $\begin{pmatrix}\varphi^0_{2\_000}\\ \varphi^1_{2\_000}\end{pmatrix}^{\mathrm T}\begin{pmatrix}\varphi^0_{2\_100}\\ \varphi^1_{2\_100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ или $\varphi_{2\_000}\varphi_{2\_100}=0$; $\varphi_{2\_000}\varphi_{2\_010}=0$; $\varphi_{2\_110}\varphi_{2\_100}=0$; $\varphi_{2\_000}\varphi_{2\_101}=0$; $\varphi_{2\_110}\varphi_{2\_011}=0$; $\varphi_{2\_110}\varphi_{2\_111}=0$.

Решение задачи (3): $\tilde M_1=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{bmatrix}$ и вектор $\tilde\varphi_2=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$. На основе полученных значений дискретной функции $\varphi_2(k_{(L_2)})$ составляем таблицу данных для второй ступени декомпозиции функции $f=\varphi_2(\tilde k_3,\ \varphi_3(\tilde k_1,\ \tilde k_2))$, в столбец $\tilde k_L$ помещаем значения функции $\varphi_2(k_{(L_2)})$, см. табл. 2.

Используем разбиение второго шага в виде $\lambda_2=\left(k_{(4)},k_{(2,3)}\right)$. Составим для него уравнение

$$\left(\begin{pmatrix}\varphi^0_{3\_00}\\ \varphi^1_{3\_00}\end{pmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}m2^0_{00}\\ m2^1_{00}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m2^0_{01}\\ m2^1_{01}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m2^0_{10}\\ m2^1_{10}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m2^0_{11}\\ m2^1_{11}\end{pmatrix}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Таблица 2

Данные на второй ступени декомпозиции

q	k_2	k_3	k_4	k_L
1	0	0	0	0
2	1	0	0	1
3	0	1	0	1
4	1	1	0	0
5	1	0	1	1
6	0	1	1	1
7	1	1	1	1

с унитарными условиями $\forall\{i,\ j\}\in\{0,1\}^2\quad m2^0_{ij}+m2^1_{ij}=1$ $m2^t_{ij}\in\{0,1\}$, $\varphi^0_{3\_00}+\varphi^1_{3\_00}=1$, $\varphi^t_{3\_00}\in\{0,1\}$, $\forall t\in\{0,1\}$:

$$\varphi^0_{3\_00}m2^0_{00}+\varphi^1_{3\_00}m2^0_{10}=1,$$
$$\varphi^0_{3\_00}b^1_{00}+\varphi^1_{3\_00}b^1_{10}=0.$$

Далее получаем набор уравнений

$$\varphi^0_{3\_00}m2^0_{00}+\varphi^1_{3\_00}m2^0_{10}=1;\ \varphi^0_{3\_10}m2^1_{00}+\varphi^1_{3\_10}m2^1_{10}=1;$$
$$\varphi^0_{3\_01}m2^1_{00}+\varphi^1_{3\_01}m2^1_{10}=1;\ \varphi^0_{3\_11}m2^0_{00}+\varphi^1_{3\_11}m2^0_{10}=1;$$
$$\varphi^0_{3\_10}m2^1_{10}+\varphi^1_{3\_10}m2^1_{11}=1;\ \varphi^0_{3\_01}m2^1_{10}+\varphi^1_{3\_01}m2^1_{11}=1;$$
$$\varphi^0_{3\_11}m2^1_{01}+\varphi^1_{3\_11}m2^1_{11}=1.$$

Из них составляем оптимизационную задачу:

$$\varphi^0_{3\_00}m2^0_{00}+\varphi^1_{3\_00}m2^0_{10}+\varphi^0_{3\_10}m2^1_{00}+$$
$$+\varphi^1_{3\_10}m2^1_{10}+\varphi^0_{3\_01}m2^1_{00}+\varphi^1_{3\_01}m2^1_{10}+$$
$$+\varphi^0_{3\_11}m2^0_{00}+\varphi^1_{3\_11}m2^0_{10}+\varphi^0_{3\_10}m2^1_{10}+ \quad (4)$$
$$+\varphi^1_{3\_10}m2^1_{11}+\varphi^0_{3\_01}m2^1_{10}+\varphi^1_{3\_01}m2^1_{11}+$$
$$+\varphi^0_{3\_11}m2^1_{01}+\varphi^1_{3\_11}m2^1_{11}\to\max.$$

Кроме того, имеем ограничения, выписанные на основе анализа конфликтов между уравнениями, составленными для разных примеров:

$$\varphi_{3\_10}\varphi_{3\_00}=0;\ \varphi_{3\_01}\varphi_{3\_00}=0;\ \varphi_{3\_00}=\varphi_{3\_11}.$$

Решение задачи (4): $\tilde M_2=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}$ и вектор $\tilde\varphi_3=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Очевидно, что дискретная функция $\varphi_3(\tilde k_1,\ \tilde k_2)$ в дальнейшей декомпозиции не нуждается, в результате чего получаем $\tilde M_3=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{bmatrix}$.♦

3. ТАБЛИЦА ВЕТВЕЙ

В случае, если стоит задача поиска всех структур на l листьях из набора $\Gamma_2(L)$, следует воспользоваться механизмом проверки групп эквивалентности (см. работу [27]). На основе результатов анализа число разбиений на каждом уровне можно уменьшить, отсеяв комбинации листьев, заведомо не реализующиеся в заданной шкале k_L. Полученные результаты удобно свести в таблицу ветвей. Это компактная поуровневая запись комбинаций листьев для исследования на реализуемость в рамках алгоритма декомпозиции.

Если в результате анализа групп эквивалентности оказались допущенными некоторые комбинации листьев, то сборку таблицы ветвей начинаем с групп, состоящих из двух листьев $|L_i|=2$. Использование только разрешенных комбинаций листьев сокращает количество рассматриваемых структур. Таким образом, мы составляем список проверенных групп из трех листьев. Если групп, состоящих из двух листьев, нет среди разрешенных, то проводить дальнейший синтез не имеет смысла, так как это означает, что в рамках заданной шкалы невозможен синтез ни одной терминальной матрицы, т. е. матрицы, принимающей значения двух листьев.

Допущенные группы заносим в таблицу ветвей. На основе разрешенных групп, состоящих из двух и отдельных листьев, составляем комбинации из трех листьев $|L_i|=3$, полученные ветви заносим в таблицу в колонку, соответствующую названию группы, которую составляют рассмотренные ветви. На основе разрешенных групп, состоящих из трех, двух и отдельных листьев, составляем комбинации с $|L_i|=4$, так получаем синтезированные ветви, состоящие из четырех листьев $|L_i|=4$. Отметим, что начиная с $|L_i|=4$ в рассмотрение попадают те ветви, которые попали в результаты анализа групп эквивалентности и были внесены в таблицу ветвей, т. е. говоря о ветвях $|L_i|>2$, были синтезированы на основе допущенных ветвей с меньшим количеством листьев. Полученные ветви заносим в колонку таблицы, соответствующую названию группы, которую составляют рассмотренные ветви. Процедура продолжается до достижения корня дерева $|L_i|=l$. В результате любая структура дерева $G\in\Gamma_2(L)$, такая что ее структура $\Lambda(G)$ входит в список разрешенных групп листьев, должна рассматриваться в задаче идентификации МКО для этого обучающего множества Q.

Рассмотрение некоторой структуры дерева $G\in\Gamma_2(L)$, состоящей из допущенных подветвей, производится на основе таблицы ветвей следующим образом. Из столбца таблицы с наибольшим номером последовательно берутся разбиения λ_i. На основе набора Q и каждого разбиения λ_i составляется оптимизационная задача $\operatorname*{Arg\,max}_{m_{rc},\varphi_r,\varphi_c}\sum_{q\in Q_1}P(\lambda_i,q)$. В случае, если удается найти решение в рамках допустимой шкалы, матрица M_i сохраняется, а полученные значения функций $\varphi_r(k_{(L_{ir})})$ и $\varphi_c(k_{(L_{ic})})$ используются для поиска решения для ветвей, на которые разбиваются рассмотренные λ_i. После рассмотрения всех разбиений λ_i в столбце с наибольшим номером рассмотрение переходит в столбец с меньшим номером.

Предложенный подход обладает тем преимуществом, что в случае, когда не удалось найти решение задачи $\operatorname*{Arg\,max}_{m_{rc},\varphi_r,\varphi_c}\sum_{q\in Q_1}P(\lambda_i,q)$, можно исключить из дальнейшего рассмотрение целое семейство подветвей, порождаемых разбиением λ_i. Например, если нет решения в шкале k_L для $\lambda_1=\left(k_{(1)},k_{(2.3.4)}\right)$ (см. табл. 3), это значит, что из рассмотрения можно удалить структуры $M1l1M2l4M3l2l3$ и $M1l1M2l2M3l3l4$ (см. работу [27]), т. е. не рассматривать декомпозиции $\lambda_2=\left(k_{(3)},k_{(1,2)}\right)$ и $\lambda_2=\left(k_{(1)},k_{(2,3)}\right)$.

Таблица 3

Пример таблицы ветвей

#	0	1	2	3	4	5
L_i	1 2	2 3	3 4	1 2 4	2 3 4	1 2 3 4
λ_i	1 2	2 3	3 4	4, 1 2	4, 2 3 2, 3 4	3, 1 2 4 1, 2 3 4 1 2, 3 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен подход к синтезу механизмов комплексного оценивания на основе разделительной декомпозиции МКО. В качестве схемы декомпозиции предлагается использовать таблицу ветвей. В отличие от подхода, рассмотренного в работе [15], предлагается последовательное составление и решение оптимизационных задач для каждого отдельного узла МКО, что, как видно из формулы, приведенной в утверждении 1, позволяет избежать зависимости оптимизационного полинома от количества входных параметров. В каждом из рассматриваемых узлов полного бинарного дерева степень полинома не превышает трех. Перечисленные свойства позволяют быстро решать составляемые оптимизационные задачи средствами оптимизатора. Например, модуль Gurobi 9.5.0 [28] решает оптимизационную задачу (8 квадратичных ограничений и 16 общих ограничений) первой ступени второго примера за 30 мс на компьютере с процессором AMD Ryzen 7 4800H и 16Гб оперативной памяти. Еще одно преимущество предлагаемого подхода состоит в том, что в случае отсутствия решений на некотором шаге декомпозиции дискретной функции в заданной шкале нет необходимости рассматривать продолжение декомпозиции ввиду отсутствия решения задачи в заданной шкале. Для дальнейшего исследования оставлен вопрос сортировки наиболее перспективных решений из общего пула решений для рассматриваемой функции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Д о к а з а т е л ь с т в о представимости некоторой дискретной функции n переменных в разделительном виде при условии отсутствия фиксирования шкал значений параметров.

Как было сказано выше, в некоторой структуре полного бинарного дерева МКО определяется через набор матриц свертки $M_f = \{M_j\}_{j \in L}$. В структуре МКО на основе каждой матрицы M_i выполняется операция свертки: $\tilde{M}_i \tilde{x}_i \tilde{y}_j$. Каждая отдельная матрица M_i реализует некоторую дискретную функцию $\varphi_i(k_{(L_i)})$. Для любого произвольного дерева $G \in \Gamma_2(L)$ структура декомпозиции его показателей состоит из $\Lambda(G) = \{L_i\}_{i \in \{1,..,l-1\}}$, так что $\forall i \in \{1,...,l-1\}$ $L_i \subseteq L$ – набор листьев (индикаторов) поддерева с корнем в i. Набор L_i имеет некоторые подгруппы $\{L_{ir}; L_{ic}\} \subset \Lambda(G): L_{ir} \cup L_{ic} = L_i$. В общем случае неизвестно, какая размерность матрицы $\tilde{M}_i$ потребуется для реализации дискретной функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$ на разбиении $\lambda_i = \left(k_{(L_{ir})}, k_{(L_{ic})}\right)$. Основываясь на описании групп эквивалентности, изложенном в работе [27], число групп эквивалентности для разбиения λ_i, а значит, и соответствующая размерность матрицы $\tilde{M}_i$ не может быть больше, чем число комбинаций, кодируемое индикаторами подмножества $K_{(L_{ir})} = \prod_{j \in L_{ir}} K_j$, $K_{(L_{ic})} = \prod_{j \in L_{ic}} K_j$ для подмножеств индикаторов строк и столбцов соответственно. Может потребоваться разместить в матрице M_i по различным ячейкам примеры, каждый из которых соответствует отдельной группе эквивалентности данного шага декомпозиции. То есть в худшем случае для каждого из обучающих примеров необходимо предусмотреть отдельную ячейку матрицы. Иначе говоря, любое подмножество переменных для дискретной функции содержит конечное число комбинаций значений переменных, это число является оценкой максимального значения числа строк или столбцов матрицы. Учитывая сказанное, размерность некоторой дискретной функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$ будет не больше, чем $K_{(L_i)}$, $L_{ir} \cup L_{ic} = L_i$. Таким образом, на каждой из ступеней декомпозиции функции f размерность матрицы $\tilde{M}_i$, $i \in \{1,\ldots,l-1\}$, достаточна для реализации функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$ по построению. Такой подход к синтезу матриц гарантирует, что МКО, построенная на основе любой из разрешенных структур полных двоичных деревьев, будет реализовывать заданную функцию f. ♦

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 1.

С учетом введенной унитарной записи операция в рамках МКО с отдельным набором значений индикаторов представляется как некоторая пошагово декомпозируемая в соответствии с некоторым набором разбиений $\Lambda(G)$ функция $f(\tilde{k}_0,...,\tilde{k}_{l-1})$. На каждом шаге декомпозиции, т. е. в каждом из узлов рассматриваемого дерева G, дискретная функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$ определена на подмножестве листьев L_i, в соответствии с разбиением λ_i, на основе набора примеров Q_i, составленного из набора Q путем отбора листьев соответствующих подмножеств L_i. Соответственно, размерность $k_{(L_i)}$ определяется исходя из подмножества L_i, на котором определена функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$. Функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$ представляет из себя матричную операцию на отдельно взятой матрице, $\tilde{y}^{\mathrm{T}} \tilde{M} \tilde{x}$, где векторы $\tilde{x}, \tilde{y}$ имеют размерность κ, матрица $\tilde{M}$ – размерность $\kappa \times \kappa$. Очевидно, что каждая такая операция в качестве результата возвращает вектор компонент отдельной ячейки матрицы размерности $\kappa \in \mathbb{N}$. Пример операции на матрице M_i:

$$\begin{pmatrix} y^0(q^i) \\ y^1(q^i) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m1^0_{00} \\ m1^1_{00} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m1^0_{01} \\ m1^1_{01} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m1^0_{10} \\ m1^1_{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m1^0_{11} \\ m1^1_{11} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0(q^i) \\ x^1(q^i) \end{pmatrix}.$$

То есть итоговым значением операции $\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{M}\tilde{x}$ будет также вектор размерности κ. При этом каждая компонента этого вектора будет представима однородным полиномом третьей степени, так как на каждом шаге рассматривается присоединение к матрице двух ветвей. Учитывая, что векторы $\tilde{x}, \tilde{y}$ могут быть как некоторыми функциями – компонентами $\varphi_i(k_{(L_i)})$ – так и листьями, а значения всех листьев заданы унитарными векторами, то итоговая степень полинома будет не больше трех – в нем сохранятся только те слагаемые, которые не умножаются на нулевые значения компонент векторов листьев. Каждое слагаемое полинома будет иметь вид $m_j \prod_{d=1}^{\varphi\_num} \varphi_d$, где m_j – одна компонента кортежа в некоторой ячейке унитарно закодированной матрицы $\tilde{M}$. Уникальность каждого слагаемого также следует из сути описанной операции.

Учитывая, что в ячейках всех матриц должны стоять унитарные векторы, получаем, что каждая компонента вектора, определяемого операцией $\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{M}\tilde{x}$, может принимать значения либо 0, либо 1. На основе схемы $\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{M}\tilde{x}$ и заданных значений функции f получаем уравнения

$$\begin{pmatrix} y^0(q^i) \\ y^1(q^i) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m1^0_{00} \\ m1^1_{00} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m1^0_{01} \\ m1^1_{01} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m1^0_{10} \\ m1^1_{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m1^0_{11} \\ m1^1_{11} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0(q^i) \\ x^1(q^i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^0(q^i) \\ K^1(q^i) \end{pmatrix}.$$

То, что функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$ реализует отдельно взятый пример q из набора Q_i, означает, что $\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{M}_i\tilde{x} = \varphi_i(q)$. Так как вектор $\varphi_i(q)$ является унитарным, то у вектора результата операции $\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{M}\tilde{x}$ только одна компонента должна быть равна единице – та же, что и у вектора $\varphi_i(q)$, все остальные должны быть равны нулю. То есть $\varphi_i(q)^{\mathrm{T}}\, \tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{M}\tilde{x} = 1$.

Поэтому, обозначив через $P(\lambda_i, q)$ полином, соответствующий компоненте вектора, которая определяется функцией $\varphi_i(q)$ и должна равняться единице, получаем всю совокупность пунктов данного утверждения. ♦

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1.

Как показано в доказательстве утверждения 1, функция $\varphi_i(k_{(L_i)})$ реализует некоторый обучающий пример $q \Leftrightarrow P(\lambda_i, q) = 1$. Следовательно, если реализуются все $|Q_i|$ примеров, то $\sum_{q\in Q_i} P(\lambda_i, q) = |Q_i|$.♦

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 2.

Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ любой набор $Q \subset K^{l+1}$, в соответствии с некоторой последовательностью разбиений $\Lambda(G)$ на дереве G из множества полных бинарных деревьев $\Gamma_2(L)$, функция $f(\tilde{k}_1,..., \tilde{k}_l)$ может быть представлена как суперпозиция функций меньшего числа переменных $\varphi_i(k_{(L_i)})$, $\forall\, i \in\{1,…, l – 1\}$, определенных на наборах данных Q_i, полученных из набора Q, так как все компоненты функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$: $\varphi_r(k_{(L_{ir})})$ и $\varphi_c(k_{(L_{ic})})$ формируются на основе функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$, $\forall\, i \in\{1,…, l – 1\}$ по построению, а значения функции $\varphi_1(k_{(L_1)})$ задаются через набор Q. ♦

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2.

Из утверждения 2 следует, что задача получения функции $f(\tilde{k}_1,...,\tilde{k}_l)$ как суперпозиции функций меньшего числа переменных $\varphi_i(k_{(L_i)})$, $\forall\, i \in\{1,…, l – 1\}$, может быть выражена последовательностью шагов max $\sum_{q\in Q_i} P(\lambda_i, q)$ с нахождением функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$, $\forall\, i \in\{1,…, l – 1\}$. Значения функции $\varphi_1(k_{(L_1)})$ имеем из набора Q, а функций $\varphi_r(k_{(L_{ir})})$ и $\varphi_c(k_{(L_{ic})})$, $\forall\, i \in\{2,…, l – 1\}$, находим для каждой из декомпозируемых функций на основе функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$.Соответственно, если задача не решается на каком-то шаге i для некоторых из $|Q_i|$ примеров, это значит, что она не решается и для компонент функции $\varphi_i(k_{(L_i)})$. Следовательно, $IRM_{G,2}(Q) = \varnothing$. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Raschka, S.* Python Machine Learning. – Packt Publishing, 2015. – 454 p.
2. *Knaeble, M., Nadj, M., Maedche, A.* Oracle or Teacher? A Systematic Overview of Research on Interactive Labeling for Machine Learning / In: WI2020 Zentrale Tracks. – 2020. – P. 2–16. – DOI:10.30844/wi_2020_a1-knaeble
3. *Simard, P., Amershi, S., Chickering, M.,* et al. Machine Teaching: A New Paradigm for Building Machine Learning Systems // ArXiv. – 2017. – arXiv:1707.06742
4. *Гореликов Н.И.* Проблемы совершенствования отраслевого механизма управления разработкой и производством новой продукции // Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 5. – С. 63–70. [*Gorelikov, N.I.* Problemy sovershenstvovaniya otraslevogo mekhanizma upravleniya razrabotkoi i proizvodstvom novoi produktsii // Automation and Remote Control. – 1984. – No. 5. – P. 63–70. (In Russian)]
5. *Бурков В.Н., Новиков Д.А., Щепкин А.В.* Механизмы управления эколого-экономическими системами / Под ред. академика С.Н. Васильева. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры,

2008. – 244 с. [*Burkov, V.N., Novikov, D.A., Shchepkin, A.V.* Mekhanizmy upravleniya ehkologo-ehkonomicheskimi sistemami / Pod red. akademika S.N. Vasil'eva. – Moscow, Izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 2008. – 244 p. (In Russian)]

6. *Korgin, N.A., Rozhdestvenskaya, S.M.* Concordant Approach for R&D Projects' Evaluation and Ranking For Formation of Programs for the Creation of Scientific and Technological Potential // Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Application of Information and Communication Technologies: AICT2017, Moscow. – Moscow, IEEE, 2017. – Vol. 2. – P. 358–362.
7. *Shchepkin, A.* Application of Integrated Mechanism in Financing Project Works // Proceedings of the 13th International Conference Management of Large-Scale System Development: MLSD. – Moscow, IEEE, 2020. – P. 1–4.
8. *Zheglova, Y., Titarenko, B.* Methodology for the Integrated Assessment of Design Solutions for Foundation Pit Fences Based on the Theory of Active Systems // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – IOP Publishing, 2020. – Vol. 869, art. no. 052012.
9. *Burkov V.* et al. Models and Management Structure for the Development and Implementation of Innovative Technologies in Railway Transportation. I. Mechanisms of Priority Projects Selection and Resource Allocation // Automation and Remote Control. – 2020. – Vol 81. – P. 1316-1329.
10. *Фирсова Е.А., Фирсов С.С., Майорова А.Н.* Оценка эффективности организационной реструктуризации предприятия // Азимут научных исследований: экономика и управление. – 2017. – Т. 6. – № 2(19). [*Firsova, E.A., Firsov, S.S., Maiorova, A.N.* Otsenka ehffektivnosti organizatsionnoi restrukturizatsii predpriyatiya // Azimut nauchnykh issledovanii: ehkonomika i upravlenie. – 2017. – Vol. 6, no. 2(19). (In Russian)]
11. *Андронникова Н.Г., Бурков В.Н., Леонтьев С.В*. Комплексное оценивание в задачах регионального управления. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 58 с. [*Andronnikova, N.G., Burkov, V.N., Leont'ev, S.V.* Kompleksnoe otsenivanie v zadachakh regional'nogo upravleniya. – M.: IPU RAN, 2002. – 58 p. (In Russian)]
12. *Бурков В.Н., Гореликов Н.И., Черкашин А.М.* Методические основы комплексной оценки результатов деятельности предприятий с учетом их прогрессивности в ВПО «Союзэлектроприбор» // Приборы и системы управления. – 1982. – № 11. – С. 21. [*Burkov, V.N., Gorelikov, N.I., Cherkashin, A.M.* Metodicheskie osnovy kompleksnoi otsenki rezul'tatov deyatel'nosti predpri-yatii s uchetom ikh progressivnosti v VPO «SoyuzehlektropriboR» // Pribory i sistemy upravleniya. – 1982. – No. 11. – P. 21. (In Russian)]
13. *Блачев Р.Н.* Особенности процедуры бинарной агрегации многокритериальных экспертных оценок // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 5. – С. 126–132. [*Blachev, R.N.* Specific Features of the Binary Aggregation Procedure for Multicriterial Expert Estimates // Automation and Remote Control. – 1997. – No. 5. – P. 126–132. (In Russian)]
14. *Mariel, P., Hoyos, D.,Meyerhoff, J.,* et al. Environmental Valuation with Discrete Choice Experiments: Guidance on Design, Implementation and Data Analysis. – Berlin, Springer Nature, 2021. – 136 p.
15. *Burkov V., Korgin N., Sergeev V.* Identification of Integrated Rating Mechanisms as Optimization Problem // Proceedings of the 13th International Conference "Management of Large-Scale System Development": MLSD. – Moscow, IEEE, 2020. – P. 1-5.
16. *Alekseev A.* Identification of Integrated Rating Mechanisms Based on Training Set // Proceedings of the 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency: SUMMA. – IEEE, 2020. – P. 398-403.
17. *Колмогоров А.Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // ДАН СССР. – 1956. – Т. 108. – № 2. [*Kolmogorov, A.N.* O predstavlenii nepreryvnykh funktsii neskol'kikh peremennykh superpozitsiyami nepreryvnykh funktsii men'shego chisla peremennykh. DAN SSSR, – 1956. – Vol. 108. – No. 2. (In Russian)]
18. *Арнольд В.И.* О функции трех переменных // ДАН СССР. – 1957. – Т. 114, № 4. – С. 679–681. [*Arnol'd, V.I.* O funktsii trekh peremennykh. DAN SSSR. – 1957. – Vol. 114, no. 4. – P. 679–681. (In Russian)]
19. *Выхованец В.С.* Алгебраическая декомпозиция дискретных функций // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №3. – С. 20–56. [*Vykhovanets, V.S.* Algebraic decomposition of discrete functions // Automation and Remote Control. – 2006. – Vol. 67, no. 3. – P. 361–392.]
20. *Выхованец В.С.* Спектральная идентификация дискретных систем // Труды VIII-й Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»: SICPRO 2009. – М.: ИПУ РАН, 2009. – С. 1500–1517. [*Vykhovanets, V.S.* Spektral'naya identifikatsiya diskretnykh sistem // Trudy VIII-i Mezhdunarodnoi konferentsii «Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniYA» (SICPRO'2009, Moskva). – M.: IPU RAN, 2009. – P. 1500–1517. (In Russian)]
21. *Яблонский С.В*. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз. – 1959. – No. 2. – С. 75–121. [*Yablonskii, S.V.* Ob algoritmicheskikh trudnostyakh sinteza minimal'nykh kontaktnykh skhem // Problemy kibernetiki. – 1959. – Vol. 2. – P. 75–121. (In Russian)]
22. *Кузнецов А.В.* О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1958. – Т. 51. – С. 186–225. [Kuznetsov A.V. O bespovtornykh kontaktnykh skhemakh i bespovtornykh superpozitsiyakh funktsii algebry logiki // Tr. Matem. in-ta im. V.A. Steklova AN SSSR. – 1958. – Vol. 51. – P. 186–225. (In Russian)]
23. *Глотов В.А., Павельев В.В*. Векторная стратификация. – М.: Наука. – 1984. – С. 132. [*Glotov, V.A., Pavel'ev, V.V.* Vektornaya stratifikatsiya. – M.: Nauka. – 1984. – P. 132. (In Russian)]
24. *Буркова И. В., Дранко О. И., Крюков С. В., Струков А. Ю.* Дихотомическое представление при комплексной оценке предприятий // Вестник ВГТУ. – 2010. – № 11. [*Burkova, I. V., Dranko, O. I., Kryukov, S.V., Strukov, A. Yu.* Dikhotomicheskoe predstavlenie pri kompleksnoi otsenke pred-priyatii // Vestnik VGTU. – 2010. – No. 11. (In Russian)]
25. *Бурков В.Н., Буркова И.В., Попок М.В.* Метод дихотомического программирования // Управление большими системами. – 2004. – № 9. – С. 57–75. [*Burkov, V.N., Burkova, I.V., Popok, M.V.* Metod dihotomicheskogo programmirovaniya // Large-Scale Systems Control. – 2004. – No. 9. – P. 57–75. (In Russian)]
26. *Алексеев А.О., Калентьева А.С., Вычегжанин А.В., Климец Д.В.* Алгоритмические основы нечеткой процедуры комплексного оценивания объектов различной природы // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 3-3. – С. 469–474. [*Alekseev, A.O. Kalentyeva, A.S.,*

Vychegzhanin, A.V., Klimets, D.V. Algorithmic Basics of Fuzzy Procedure of Integrated Assessment of Different Nature Objects // Fundamental'nye issledovaniya. – 2014. – No. 3-3. – P. 469–474. (In Russian)]

27. *Коргин Н.А., Сергеев В.А.* Identification of Integrated Rating Mechanisms on Complete Data Sets / Advances in Production Management Systems. Artificial Intelligence for Sustainable and Resilient Production Systems: Proceedings of IFIP WG 5.7 International Conference. – Berlin: Springer, 2021. – Vol. 630. – P. 610–616.

28. *Gurobi* Optimizer Reference Manual. – Gurobi Optimization, LLC, 2020. – URL: https://www.gurobi.com

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Поступила в редакцию 23.11.2022,
после доработки 14.12.2022.
Принята к публикации 26.12.2022.

Сергеев Владимир Александрович – науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ sergeev.bureau@gmail.com.

DESIGN OF INTEGRATED RATING MECHANISMS BASED ON SEPARATING DECOMPOSITION

V.A. Sergeev

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ sergeev.bureau@gmail.com

Abstract. This paper proposes an approach to reducing significantly the computational complexity of optimization problems in the design of integrated rating mechanisms (IRMs). The background concepts are introduced. The representability of a given discrete function as some IRM is proved. The decomposition procedure for a particular training example on some partition of input parameters is considered, and the following results are established under some restrictive conditions. First, an IRM matrix for a particular example of an input data set can be designed by maximizing a certain polynomial. Second, a set of given examples can be implemented by some IRM matrix. Third, an IRM can be implemented on a training data set in a certain complete binary tree based on the decomposition method. Fourth, some discrete function is implemented through a given complete binary tree if the discrete functions represented by convolution matrices are implemented in each node of this tree. All these results are rigorously formulated and proved. An illustrative example of the decomposition procedure based on a complete binary tree on three leaves is given. We propose a method for finding IRMs that implement a given training set in the space of all possible complete binary trees based on the branch table. In addition, we describe the decomposition procedure according to the branch table for each partition of input parameters. Finally, the advantages of the proposed method are outlined.

Keywords: integrated rating mechanism, discrete function, assessment, decomposition.