

ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕЖДУ ОКОЛОЗЕМНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ МЕТОДОМ ПЕРЕБОРА ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ВНУТРИ СЕТКИ ДАННЫХ

Е.В. Саввина

Аннотация. Рассматривается задача проектирования оптимальной траектории межорбитального перелета космического аппарата. Приведены алгоритм и результаты реализованного в цикле расчета оптимальных траекторий перелета между околоземными эллиптическими орбитами с различными значениями параметров для космического аппарата с химическим разгонным блоком и фиксированной тягой. Исследование проведено в четыре этапа: формирование первичных диапазонов поиска начальных приближений для типовых оптимизационных задач; интегрирование в цикле с целью нахождения областей сходимости для типовой вариационной задачи; нахождение положения оптимума для каждой постановки задачи внутри принятых диапазонов, реализованное путем расчета невязок конечных условий; анализ полученных результатов. Для решения поставленной задачи применяются численные методы математического анализа, методы математического программирования. Минимизация риска «перешагивания» потенциально оптимального результата достигнута путем варьирования точности на разных этапах расчета. Результатом исследования явилось улучшение первичного решения для «опорного» варианта задачи, выявление областей сходимости, а также наборы векторов начальных приближений, обеспечивающих сходимость, для дальнейшего анализа. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития идеи выстраивания и уточнения алгоритма с целью подбора оптимальных начальных приближений для типовых (оптимизация траектории орбитального перелета космического аппарата) и иных оптимизационных задач.

Ключевые слова: оптимальное управление, оптимизация траектории перелета, принцип максимума, математическое моделирование, нелинейное программирование.

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день существует много методов решения задач оптимального управления, однако одним из самых распространенных подходов в задачах динамической оптимизации остается принцип максимума Понтрягина [1]. Этот метод позволяет получить требуемые условия оптимальности, включая случаи, когда оптимальное управление лежит на границе допустимой области, а также вывести все необходимые условия для задачи вариационного исчисления, сведя поставленную задачу к краевой задаче теории дифференциальных уравнений [1]. Как и другие методы [2], применение принципа максимума требует наличия начального приближения для значений используемых

параметров, и правильный выбор начальных приближений значительно способствует более быстрой сходимости, а также успешному нахождению положения оптимума. В то же время существует проблема такого выбора, которая, в частности, связана с ветвлением оптимальных решений и значительной восприимчивостью невязок краевой задачи к вариациям ее параметров [3]. Более того, согласно, в частности, изложенному в работах [2, 4], несмотря на возможность создавать формализованные алгоритмы оценивания при известном начальном приближении, для выбора хороших приближений рекомендуется в большей степени полагаться на интуицию и априорное знание.

Современная литература предлагает некоторые практические методы, призванные облегчить процесс выбора начальных приближений, такие как

гомтопия максимальной величины тяги [5], нормализация ребер [6], оценка ребер по эталонной траектории [7] и т. д. В частных случаях некоторые разработанные методы оказываются полезными. Такими являются, например, приближенные решения для задачи перефазировки, которые были разработаны для получения начальных приближений для непрямых методов [7–10]. Анализ релевантных работ демонстрирует сфокусированность на конкретных задачах, решение некоторых из них приводит к формированию новых (вспомогательных) методов для поиска начальных приближений для релевантных задач. При этом большинство из современных подходов все еще опирается на метод проб и ошибок, который часто оказывается эффективнее более «тонких» подходов и состоит в выборе начальных приближений с опорой на использование априорного знания и интуиции [2–4, 8].

Таким образом, нахождение алгоритмов, которые будут эффективны в подборе подходящих начальных приближений для задач оптимального управления направляется все больше усилий мирового научного сообщества (см., к примеру, работы [2, 4–6, 8]).

Данная статья демонстрирует реализацию первого этапа исследования, направленного на выявление закономерностей, существующих между компонентами векторов, обеспечивающих сходимость для типовых задач построения оптимальной траектории перелета между околоземными орбитами. Представленная первая часть работы в рамках сформированных диапазонов выявляет области сходимости для типовых оптимизационных задач и сводится к формированию векторов начальных приближений, обеспечивающих лучшие решения внутри исследуемой сетки данных. Ожидается, что данная работа в дальнейшем будет способствовать уточнению алгоритмов выбора начальных приближений для типовых задач.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках данной работы рассмотрена задача проектирования оптимальной траектории межорбитального перелета.

1.1. Общая формулировка и параметры оптимизационной задачи

Космический аппарат (КА) находится на некоторой начальной заданной орбите в окрестности

Земли. В составе КА есть химический разгонный блок (некоторые характеристики его известны). Этот разгонный блок должен обеспечить перелет КА на рабочую околоземную орбиту с заданными характеристиками.

Требуется найти рациональную схему перелета между орбитами. В качестве критерия оптимизации рассматривается масса космического аппарата, выводимая на рабочую орбиту, эта масса максимизируется. Время перелета не ограничено.

Фиксированные для всех рассмотренных случаев параметры оптимизационной задачи таковы: масса КА на начальной орбите 5000 кг; тяга ракетного нерегулируемого двигателя 5 кН, допускается произвольное число его включений; удельный импульс 330 с; схема перелета аппарата ограничена одним витком; орбиты принадлежат одной плоскости, линии апсид орбит совпадают; гравитационное поле ньютоновское.

Рассмотрены следующие вариативные параметры: высота перигея начальной орбиты и высота ее апогея; высота перигея конечной орбиты и высота ее апогея.

Выбранные характеристики схемы перелета:

- точка старта КА с начальной орбиты,
- число активных и пассивных участков на траектории перелета,
- длительности активных и пассивных участков траектории и их расположение на траектории перелета (иначе – моменты включения и выключения двигателя),
- программа угла тангажа на каждом активном участке,
- точка конечной орбиты, в которой оканчивается перелет.

1.2. Математическая модель, описывающая перелет КА

Выбрана математическая модель, описывающая движение КА с использованием вектора фазовых координат КА со следующими компонентами: радиальная скорость V_r , нормальная скорость V_n , величина радиуса r и величина полярного угла β . Так как последовательность активных и пассивных участков не фиксирована, а происходит поиск оптимального закона включения и выключения двигателя, то к перечисленным переменным целесообразно добавить массу космического аппарата m . Таким образом, конечный вектор рассматриваемых фазовых координат имеет вид



$$z = \begin{pmatrix} V_r \\ V_n \\ r \\ \beta \\ m \end{pmatrix}. \quad (1)$$

При этом движение космического аппарата может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \frac{P \sin(\vartheta)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r}, \\ \dot{V}_n &= \frac{P \cos(\vartheta)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r}, \\ \dot{r} &= V_r, \\ \dot{\beta} &= \frac{V_n}{r}, \\ \dot{m} &= -q\delta. \end{aligned} \quad (2)$$

В этой системе:

P – величина тяги двигателя (считаем ее нерегулируемой, ее значение известно);

ϑ – истинная аномалия;

μ – гравитационный параметр Земли;

q – массовый расход двигателя, его значение известно;

δ – функция тяги, она принимает всего два значения (0 и 1): когда $\delta = 1$, двигатель включен, когда $\delta = 0$, двигатель выключен;

φ – угол тангажа КА (угол между направлением вектора тяги и местным горизонтом);

$\delta(t)$ и $\varphi(t)$ – оптимизируемые управления движением КА.

На первом этапе анализа в качестве начальных условий можно зафиксировать условия движения в перигее начальной орбиты:

$$\begin{aligned} V_r(t_0) &= 0, \\ V_n(t_0) &= \sqrt{\frac{\mu}{p_0}(1+e_0)}, \\ r(t_0) &= \frac{p_0}{1+e_0}, \\ \beta(t_0) &= 0, \\ m(t_0) &= m_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь t_0 – это время старта, которое можно положить равным нулю (время отсчитывать от момента старта); p_0 и e_0 – фокальный параметр и эксцентриситет начальной орбиты; используемый в соотношениях индекс f обозначает принадлежность конечным условиям движения. Угловую дальность

(полярный угол) предлагается отсчитывать от линии апсид начальной орбиты.

Транспортная задача первого этапа такова: для набора начальных условий (3) найти такие управляющие функции ($\delta(t)$ и $\varphi(t)$) и такое время перелета t_f , чтобы КА с минимальными затратами топлива $m(t_f) \rightarrow \max$ попал в точку фазового пространства

$$\begin{aligned} V_r(t_f) &= 0, \\ V_n(t_f) &= \sqrt{\frac{\mu}{p_f}(1-e_f)}, \\ r(t_f) &= \frac{p_f}{1-e_f}, \\ \beta(t_f) &= \pi. \end{aligned}$$

1.3. Формулировка оптимизационной математической проблемы

Вводится вспомогательная функция (гамильтониан). Его вид можно рассматривать как скалярное произведение вектора правых частей уравнений, описывающих движение КА на вводимый вектор сопряженных переменных. Размерность последнего вектора равна размерности принятого фазового вектора, а каждый элемент сопряженного вектора соответствует определенной фазовой переменной. То есть вектор фазовых переменных имеет размерность, равную пяти (1).

Вводимый вектор сопряженных переменных имеет вид

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda V_r \\ \lambda V_n \\ \lambda r \\ \lambda \beta \\ \lambda m \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \lambda V_r \left(\frac{P \sin(\vartheta)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \right) + \\ &+ \lambda V_n \left(\frac{P \cos(\vartheta)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r} \right) + \lambda r V_r + \lambda \beta \frac{V_n}{r} - \lambda m q \delta. \end{aligned}$$

По принципу максимума выбираемый закон управления обеспечивает максимум гамильтониана, т. е. оптимальные управления ($\delta(t)$ и $\varphi(t)$) можно искать, исходя из условия максимума гамильтониана.

При этом удается показать, что

$$\cos(\vartheta_{\text{opt}}) = \frac{\lambda V_n}{\lambda V}, \quad \sin(\vartheta_{\text{opt}}) = \frac{\lambda V_r}{\lambda V},$$

где

$$\lambda V = \sqrt{\lambda V_r^2 + \lambda V_n^2},$$

$$\delta_{\text{opt}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi < 0, \end{cases}$$

$$\Psi = \frac{P}{m} \lambda V - \lambda m q \quad \text{или} \quad \Psi = \frac{W}{m} \lambda V - \lambda m.$$

Здесь Ψ – функция переключения двигателя; W – скорость истечения двигателя. Используемый индекс opt обозначает, что соотношения с параметрами, где он фигурирует, получены из условия максимума гамильтониана.

Полученная программа угла тангажа такова:

$$\text{tangag} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\lambda V_n}{\sqrt{(\lambda V_n)^2 + (\lambda V_r)^2}}\right), & \text{если } \lambda V_r > 0 \\ -\arccos\left(\frac{\lambda V_n}{\sqrt{(\lambda V_n)^2 + (\lambda V_r)^2}}\right), & \text{если } \lambda V_r \leq 0 \end{cases}.$$

С учетом полученных законов оптимального управления (программы угла тангажа и оптимальной функции тяги) уравнения, описывающие изменение фазовых переменных на оптимальной траектории, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \frac{P \lambda V_r}{m \lambda V} \delta_{\text{opt}} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r}, \\ \dot{V}_n &= \frac{P \lambda V_n}{m \lambda V} \delta_{\text{opt}} - \frac{V_r V_n}{r}, \\ \dot{r} &= V_r, \\ \dot{\beta} &= \frac{V_n}{r}, \\ \dot{m} &= -q \delta_{\text{opt}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из принципа максимума следует, что сопряженные переменные должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} H &= \lambda V_r \left(\frac{P \sin(\vartheta)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \right) + \\ &+ \lambda V_n \left(\frac{P \cos(\vartheta)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r} \right) + \lambda r V_r + \lambda \beta \frac{V_n}{r} - \lambda m q \delta, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda V_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V_r} = \lambda V_n \frac{V_n}{r} - \lambda r, \\ \frac{d\lambda V_n}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V_n} = -\lambda V_r \frac{2V_n}{r} + \lambda V_n \frac{V_r}{r} - \lambda \beta \frac{1}{r}, \\ \frac{d\lambda r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \lambda V_r \left(-\frac{2\mu}{r^3} + \frac{V_n^2}{r^2} \right) + \\ &+ \lambda V_n \left(-\frac{V_r V_n}{r^2} \right) + \lambda \beta \frac{V_n}{r^2}, \\ \frac{d\lambda \beta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулировка краевой задачи принципа максимума принимает вид: найти такие значения компонент сопряженного вектора в начальной точке траектории $\lambda V_r(t_0)$, $\lambda V_n(t_0)$, $\lambda r(t_0)$, $\lambda \beta(t_0)$, $\lambda m(t_0)$ и такое время перелета t_f (всего шесть неизвестных), при которых выполняются шесть условий:

$$\begin{aligned} H(t_0) &= 0; \\ V_r(t_f) &= 0; \\ V_n(t_f) &= \sqrt{\frac{\mu}{P_f}} (1 - e_f); \\ r(t_f) &= \frac{P_f}{1 - e_f}; \\ \beta(t_f) &= \pi; \\ \lambda m(t_f) &= 1. \end{aligned}$$

Второй этап анализа требует отказа от фиксации начальной и конечной точек перелета. Для того, чтобы можно было это реализовать, требуется ввести условия трансверсальности.

1.4. Условия трансверсальности в начальной и конечной точках траектории перелета

Условие трансверсальности есть условие перпендикулярности вектора сопряженных переменных всем касательным векторам граничного многообразия.

Для варианта, когда значения фазовых переменных в граничной точке (сначала рассматривается начальная точка) есть функция некоторого выбираемого параметра (в рассматриваемом случае истинной аномалии точки начальной орбиты ν_0), касательный вектор начального многообразия имеет компоненты



$$\left[\frac{d}{dv_0}(V_{r0}), \frac{d}{dv_0}(V_{n0}), \frac{d}{dv_0}(r_0), \frac{d}{dv_0}(\beta_0), \frac{d}{dv_0}(m_0) \right].$$

Находя производные, получим компоненты вектора в виде

$$\left[\frac{e_0 \cos(v_0)}{\sqrt{p_0}}, \frac{-e_0 \sin(v_0)}{\sqrt{p_0}}, \frac{p_0 e_0 \sin(v_0)}{(1 + e_0 \cos(v_0))^2}, 1, 0 \right].$$

Условия оптимальности точки старта с начальной орбиты представляют собой условия перпендикулярности вектора сопряженных переменных и записанного касательного вектора. Условие перпендикулярности можно записать в виде:

$$\lambda V_r(t_0) \frac{e_0 \cos(v_0)}{\sqrt{p_0}} - \lambda V_n(t_0) \frac{e_0 \sin(v_0)}{\sqrt{p_0}} + \lambda r(t_0) \frac{p_0 e_0 \sin(v_0)}{(1 + e_0 \cos(v_0))^2} + \lambda \beta(t_0) \cdot 1 + \lambda m(t_0) \cdot 0 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda \beta(t_0) = -\lambda V_r(t_0) \frac{e_0 \cos(v_0)}{\sqrt{p_0}} + \lambda V_n(t_0) \frac{e_0 \sin(v_0)}{\sqrt{p_0}} - \lambda r(t_0) \frac{p_0 e_0 \sin(v_0)}{(1 + e_0 \cos(v_0))^2}.$$

Аналогично условие оптимальности точки окончания перелета (оптимальности конечной угловой дальности) имеет вид

$$\lambda \beta(t_f) = -\lambda V_r(t_f) \frac{e_f \cos(\beta_f)}{\sqrt{p_f}} + \lambda V_n(t_f) \frac{e_f \sin(\beta_f)}{\sqrt{p_f}} - \lambda r(t_f) \frac{p_f e_f \sin(\beta_f)}{(1 + e_f \cos(\beta_f))^2}.$$

2. ФОРМИРОВАНИЕ СЕТКИ ДАННЫХ ДЛЯ ПОИСКА НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Алгоритм дальнейшего исследования состоит из четырех этапов:

- Выполнение расчета оптимальных траекторий перелета между околоземными эллиптическими орбитами с разными параметрами для аппарата с химическим разгонным блоком и фиксированной тягой с целью выявления и уточнения диапазонов поиска начальных приближений для типовых задач. Результат – сетка данных для перебора в качестве входных в векторе начальных значений.

- Интегрирование в цикле с целью нахождения областей сходимости и достижения положения оптимума вариационной задачи.

- Нахождение положения оптимума для каждой постановки задачи внутри принятых диапазонов, реализованное путем расчета невязок конечных условий.

- Анализ полученных результатов.

Для первичного выбора диапазона поиска начальных приближений для рассмотренных задач была решена оптимизационная задача со следующими данными орбиты: высота перигея начальной орбиты 500 км. Высота ее апогея 1500 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2000 км, высота апогея 10 000 км. С использованием метода по Й. Барду [2] были найдены следующие начальные приближения, обеспечившие массу на конечной орбите в 3203,788 кг:

$$\begin{pmatrix} \lambda m(t_0) \\ \lambda V_r(t_0) \\ \lambda V_n(t_0) \\ \lambda r(t_0) \\ t_f \\ v_o \\ \beta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,065851324495908 \\ 1,3618066619686777 \\ 1,4193211140743078 \\ 6,803580030230557 \\ -0,6054269338992805 \\ 3,14159265358979 \end{pmatrix}.$$

Схема перелета после расчета невязок показана на рисунке, где $r t t_{j1}^1$ – полученная ходе интегрирования методом Рунге – Кутты четвертого порядка с переменным шагом траектория перелета; βt_{j1}^1 – изменение величины полярного угла βt^1 на полученной траектории.

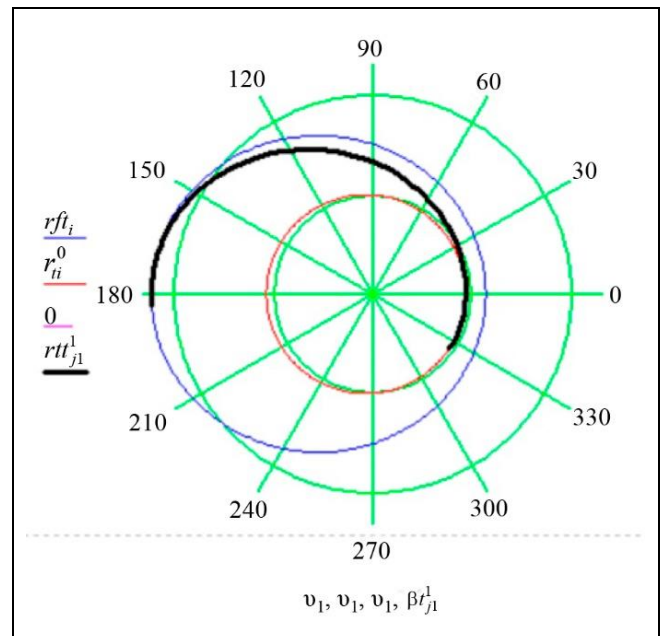


Схема оптимального перелета (подбор начальных значений)

Полученное решение принято в качестве опорного для последующего формирования диапазона значений для каждой из неизвестных переменных. Для определения этого диапазона в начальный момент времени добавлены значения по левой и правой границам, рассчитанные таким образом, чтобы по сформированным векторам начальных данных размеров областей сходимости было достаточно для последующего анализа на предмет выявления закономерностей между значениями параметров и степенью сходимости результатов. При этом диапазоны строились не слишком широкими, чтобы величина шага не оказалась критичной, т. е. чтобы снизить риск «перешагивания» возможного решения в процессе интегрирования.

Таким образом, выбраны следующие диапазоны для поиска хороших приближений для неизвестных переменных в начальный момент времени:

$$\lambda V_{r_0} = -0,079, \dots, -0,058,$$

$$\lambda V_{n_0} = 1,291, \dots, 1,431,$$

$$\lambda r_0 = 1,361, \dots, 1,491,$$

$$\lambda m_0 = 0,3, \dots, 0,7,$$

$$v_0 = -0,61, \dots, -0,60405.$$

С целью выявления взаимосвязей между значениями параметров и сходимостью было проверено более 4 145 000 вариаций векторов начальных

приближений для каждой из пяти задач в выбранном диапазоне.

Сетка данных загружена в Python и имеет вид, представленный в табл. 1.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НАБОРА ТИПОВЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ЦИКЛЕ

3.1. Алгоритм решения оптимизационной задачи в цикле

Алгоритм реализуется в два этапа в среде математического программирования Mathcad.

На первом этапе решения оптимизационной задачи цель состоит в предварительном нахождении областей, внутри которых обеспечивается сходимость, что достигается путем поиска внутри сетки данных. При этом точность решения устанавливается невысокой – 10^{-3} . Данный шаг предпринимается для минимизации риска «перешагивания» потенциального решения и ввиду наличия трудностей при исследовании всего набора возможных значений параметров с количеством знаков после запятой более трех в принятом диапазоне, так как это приведет к многократному увеличению количества векторов, которые требуется проверить в цикле. На втором этапе происходит возвращение к требуемой точности в 10^{-14} и уточнение предварительного решения путем расчета невязок.

Ниже подробно рассмотрен каждый из этапов.

Таблица 1

Общий вид сформированной сетки данных для построчного перебора при интегрировании методом Рунге – Кутты четвертого порядка

V_r	V_n	R	λV_r	λV_n	λr	v_0	λm
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,3
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,4
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,5
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,6
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,7
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,3
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,4
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,5
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,6
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,7
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,3
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,4
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,5
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,6
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,7



3.1.1. Первый этап – предварительное решение

Первый шаг в выстраивании алгоритма – ввод данных и приведение их к общему безразмерному виду. Для демонстрации работы алгоритма выбраны все пять наборов вводных параметров:

1. Высота перигея начальной орбиты 400 км. Высота ее апогея 1 400 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 1 900 км, высота апогея 9900 км.

2. Высота перигея начальной орбиты 400 км. Высота ее апогея 1 400 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2 000 км, высота апогея 10 000 км.

3. Высота перигея начальной орбиты 400 км. Высота ее апогея 1 400 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2 100 км, высота апогея 10 100 км.

4. Высота перигея начальной орбиты 500 км. Высота ее апогея 1 500 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2 000 км, высота апогея 10 000 км.

5. Высота перигея начальной орбиты 600 км. Высота ее апогея 1 600 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2 000 км, высота апогея 10 000 км.

Все варьируемые характеристики вводятся в виде цикла со счетчиком от 0 до 4 (пять задач). Ввиду значительно увеличенной (в связи с большим перебором внутри сетки данных и введением расчетов в цикле) нагрузкой на систему расчета принято решение разбить программу по этапам на следующие подпрограммы:

- программа с предварительными расчетами, которая записывает результат своей работы в отдельный файл (Excel);
 - программа с основными расчетами в цикле;
 - программа, визуализирующая результаты.
- Вводимые данные для задачи включают:
- значение гравитационного параметра Земли ($398\,600 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$) и радиуса Земли (6 371 км);
 - значение начальной массы КА (5 000 кг), тяга химического ракетного двигателя (5 000 Н) и его удельный импульс (330 с·г);
 - высоты перигея и апогея начальной и конечной орбит, а также величину угла между их линиями апсид;
 - элементы начальной и конечной орбит (радиусы перигея r_p и апогея r_a , большую полуось A , константу энергии h , эксцентриситет e , фокальный параметр p);
 - уравнение орбиты – длину радиуса вектора КА как функцию истинной аномалии:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\vartheta)}$$

Далее введенные размерные величины приводятся к безразмерному виду. Безразмерные величины позволяют снизить нагрузку на вычислительный процессор путем замены «тысячи километров» на нормированные величины. При этом уменьшается число входных аргументов.

Математическая модель плоского движения КА представляет собой уравнения движения КА. Используется орбитальная система координат для анализа скорости КА (радиальная V_r и трансверсальная V_n компоненты скорости КА). Положение КА рассматривается в полярной системе координат, основная ось которой x направлена вдоль радиуса вектора апсидальной точки начальной орбиты, из которой реализуется оптимальный импульсный перелет. При этом r – длина радиуса вектора, b – полярный угол.

Угол θ в уравнениях – угол тангажа КА, отмеренный от линии местного горизонта. Все переменные в рассматриваемой системе дифференциальных уравнений безразмерные.

Начальная математическая модель приведена в § 1, см. систему (2). Окончательная модель с применением принципа максимума представлена системой из десяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (4) и (5).

Для интегрирования используется функционал среды математического программирования MathCad – Rkadapt. Поиск начальных приближений для применения Rkadapt осуществляется путем перебора внутри сетки данных, сформированной и обоснованной в § 2. Сетка данных представлена в табл. 1. На данном этапе расчета точность решения устанавливается на уровне 10^{-3} .

Предварительная проверка решений на предмет попадания на заданную конечную орбиту на первой стадии является визуальной, в соответствии с графиками представления результатов, так как конечные условия не учтены и требуемая точность не соблюдается. Фиксируются все наборы векторов, не обеспечивающих сходимость, а также все решения, обеспечивающие сходимость, распределяются по трем группам для дальнейшего анализа:

- попадание на заданную (для каждого случая) орбиту,
- попадание на орбиту выше заданной,
- попадание на орбиту ниже заданной.

При этом, конечная масса на орбите (критерий оптимальности перелета) на данном этапе отмечается, но не учитывается ввиду недостаточной точности.

Таким образом, основным результатом первого этапа включает в себя набор векторов начальных значений, обеспечивающих попадание на заданную (для каждого конкретного случая) орбиту и наборы векторов начальных значений для дальнейшего анализа.

3.1.2. Второй этап – оптимальное решение

На втором этапе происходит возвращение к требуемой точности 10^{-14} и работа с наборами векторов, предварительно продемонстрировавших соответствие искомым, т. е. ведущих к попаданию на заданную конечную орбиту.

Для нахождения точного решения и затем положения оптимума строится программа расчета невязок конечных условий при произвольной (заранее не фиксированной) точке выхода на конечную орбиту. Для работы программы в том числе требуются выведенные в § 2 условия трансверсальности.

Результат работы программы – вектор невязок, позволяющий найти действительное решение путем приравнивания величин невязок к нулю и вывода на этой основе фактических начальных значений переменных, а также конечного времени перелета и величины полярного угла, характеризующей точку окончания перелета.

На этом этапе анализируется масса космического аппарата в конце перелета, в соответствии с ее значением выявляется положение оптимума, которое и является решением задачи. Дополнительно оценивается влияние колебаний точки старта в рамках выбранной сетки на величину массы на конечной орбите.

Полученный в рамках выбранной сетки данных результат – это найденные векторы значений,

обеспечивающих оптимальный перелет между рассмотренными орбитами, для постановок 1–5 они приведены в табл. 2, где T_F – полученное время перелета; β_F – полярный угол, характеризующий точку окончания перелета; m_F – масса космического аппарата на конечной орбите. Индекс 1 в таблице используется для обозначения параметров в начальный момент времени, значения которых обеспечивают лучший результат в соответствии с установленным критерием максимизации конечной массы аппарата.

Таким образом, реализованный подход позволил улучшить результат по «опорному» варианту задачи (постановка 4) на 365 г относительно решения, предварительно полученного с опорой на метод по Й. Барду [2].

3.2. Анализ и обсуждение полученных результатов

Проведен расчет пяти типовых задач в цикле. Выявлены области сходимости, а также лучшие решения внутри сетки, при которых выполняется условие оптимальности – максимизация массы на конечной орбите. При этом благодаря варьированию точности на разных этапах расчета минимизируется риск «перешагивания» потенциально оптимального результата.

Полученные результаты в виде векторов недостающих значений переменных для каждого случая записаны в таблицы Excel с использованием функционала MathCad и в дальнейшем будут оценены и проанализированы статистическими методами в программе, написанной на языке программирования Python.

В результате проведенного расчета и реализованного в работе подхода к величине точности

Таблица 2

Векторы значений, обеспечивающие оптимальный перелет для постановок 1–5 (анализ внутри сетки данных)

Характеристика	Постановка 1	Постановка 2	Постановка 3	Постановка 4	Постановка 5
\mathcal{G}_0^1	-0,608528181266	-0,687262955509	-0,58694862445	-0,58063271537992	-0,67460422765
λV_r^1	-0,065265825615	-0,075257944004	-0,06564653582	-0,06466045327036	-0,06339073139
λV_n^1	1,3623340777782	1,3653869345017	1,364158466294	1,36474044140864	1,357648817782
λr^1	1,4200011568480	1,4207257561587	1,421069918027	1,42243156356652	1,40764863211
T_F	6,7321648922778	7,0228415355241	12,30599404742	12,48386539989280	5,855669428846
β_F	3,1311300732552	3,166796288751	5,127686975088	5,33807657900554	2,859452408788
m_F	3227,339 кг	3182,552 кг	3181,12 кг	3204,153 кг	3247,748 кг



начальный результат по «опорному» варианту задачи был улучшен на 365 г без выхода из рассмотренных для каждой величины диапазонов.

Таким образом, настоящая работа демонстрирует эффективность применения метода перебора в рамках сетки данных с целью уточнения и улучшения начального достигнутого результата в задачах построения оптимальной траектории перелета космических аппаратов и представляет собой результат реализации первого (предварительного) этапа исследования, направленного на выявление математических взаимосвязей, существующих между компонентами векторов, обеспечивающих сходимость для типовых задач. Расчеты осуществлены в распараллеленных программах, реализованных в Mathcad 15 и Python 3.9 преимущественно на базе процессора Core i5 1035G1, суммарное время работы программ составило восемь часов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы и расширены возможности эффективного применения математического программирования для решения типовых оптимизационных задач (оптимизация траектории перелета космического аппарата между околоземными орбитами). Кроме того, демонстрируется подход, позволяющий эффективно находить оптимальные (критерий оптимальности – минимизация массового расхода) начальные приближения для вариационной задачи оптимизации траектории перелета между околоземными эллиптическими орбитами.

В результате проведенной работы:

- в программах, реализованных в среде Mathcad и на языке программирования Python, проверено более 4 145 000 вариаций начальных приближений для каждой из задач в выбранном диапазоне с целью выявления взаимосвязей между значениями параметров и сходимостью;
- достигнуто улучшение первичного решения для опорного варианта вариационной задачи оптимизации траектории перелета между двумя эллиптическими околоземными орбитами в пределах рассмотренных диапазонов;
- одновременно исследованы наборы параметров пяти типовых задач, решенных в цикле в среде Mathcad.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития идеи выстраивания и уточнения алгоритма для подбора оптимальных (в зависимости от критериев оптимальности конкретной задачи) начальных приближений для типовых (оптимизация траектории орбитального

перелета космического аппарата) и иных оптимизационных задач. Ожидается, что они позволят упростить процесс решения задач данного класса и будут способствовать дальнейшему уточнению и развитию математического аппарата, позволяющего находить оптимальные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведякова А.О., Милованович Е.В., Слита О.В. Тертычный-Даури В.Ю. Методы теории оптимального управления. – М.: Университет ИТМО, 2021. – 111 с. [Vedyakova, A.O., Milovanovich, E.V., Slita, O.V., and Tertychny-Dauri, V.U. Methods of Optimal Control Theory. – Moscow: University ITMO, 2021. – 111 s. (In Russian)]
2. Bard, Y. Nonlinear Parameter Estimation. – New York & London: Academic Press edition. – 1979. – 349 p.
3. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. Космические исследования. – 2008. – Т. 46. – № 3. – С. 224–237. [Petukhov, V.G. Optimization of interplanetary trajectories of spacecraft with a ideally regulated engine by the continuation method. – Space Studies. – 2008. – Vol. 46, no. 3. – P. 224–237 (In Russian)]
4. Kitrell, J.R., Mezaki, R., and Watson, C.C. Estimation of parameters for nonlinear least squares analysis // Industrial & Engineering Chemistry. – 1965. – Vol. 57. – P. 18–27.
5. Hofmann, C., and Topputo, F. Embedded Homotopy for Convex Low-Thrust Trajectory Optimization with Operational Constraints // Proceedings of 2022 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. – Charlotte, NC, USA, 2022. – P. 1–16.
6. Jiang, F., Baoyin, F. and Li, J. Practical Techniques for Low-Thrust Trajectory Optimization with Homotopic Approach // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 2012. – Vol. 35, no. 1. – P. 245–258.
7. Wu, D., Wu, C., Lin, F., et al. Analytical Costate Estimation by a Reference Trajectory-Based Least-Squares Method // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2022. – Vol. 45. – P. 1–9.
8. Wu, D., Cheng, L., Gong, S., and Baoyin, H. Approximate time-optimal low-thrust rendezvous solutions between circular orbits // Aerospace Science and Technology. – 2022. – Vol. 131, Part A. – Art. No. 108011.
9. Bevilacqua, R. Analytical Guidance Solutions for Spacecraft Planar Rephasing via Input Shaping // Journal of Guidance, Control. and Dynamics. – 2014. – Vol. 37. – DOI: 10.2514/1.G000008.
10. Wu, D., Wu, Ch., Lin, F., and Baoyin, H. An Atlas of Optimal Low-Thrust Rephasing Solutions in Circular Orbit // arXiv:2209.07418v1. – 2022. – DOI: 10.48550/arXiv.2209.07418.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 23.01.2023,
после доработки 21.03.2023.
Принята к публикации 13.04.2023.

Саввина Елена Валерьевна – соискатель, г. Москва,
✉ petrakowae@mail.ru

INTER-ORBITAL SPACECRAFT TRANSFER: TRAJECTORY DESIGN BY ITERATING PARAMETER VALUES WITHIN A DATA GRID

E.V. Savvina

✉ petrakowae@mail.ru

Abstract. This paper considers the problem of designing an optimal inter-orbital spacecraft transfer. We present a computational algorithm and modeling results of the optimal transfer trajectory between near-Earth elliptical orbits for spacecraft with a chemical booster and fixed thrust. The trajectory design procedure includes four stages as follows: a) formation of the primary ranges of initial approximations for typical optimization problems; b) iterative integration to find the domains of convergence for a typical variational problem; c) determination of the optimal position for each problem statement within the accepted ranges and its implementation by calculating the terminal conditions residuals; d) analysis of the results obtained. We use numerical methods of mathematical analysis and mathematical programming. The risk of “overstepping” the potentially optimal result is minimized by varying the accuracy at different stages of calculations. Based on the results, we improve the primary solution of the reference problem statement, identify the domains of convergence of solutions, and obtain the sets of initial approximation vectors ensuring convergence of the considered problems for further analysis. The results of this study can be used to develop further and refine an algorithm for selecting optimal initial approximations for different optimization problems (including spacecraft trajectory optimization as a typical one).

Keywords: optimal control, spacecraft trajectory optimization, maximum principle, mathematical modeling, nonlinear programming.