

# ПОСТРОЕНИЕ КАРТЫ ЛОКАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫХ ПУТЕЙ УПРАВЛЯЕМОГО ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА В КОНФЛИКТНОЙ СРЕДЕ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗ ТОЧКИ В ТОЧКУ<sup>#</sup>

М. А. Самохина\*, А. А. Галяев\*\*

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

\*✉ [ph@ipu.ru](mailto:ph@ipu.ru), \*\*✉ [galaev@ipu.ru](mailto:galaev@ipu.ru)

**Аннотация.** В некоторых задачах планирования маршрутов движения управляемых объектов основным критерием является снижение риска обнаружения при движении в конфликтной среде с учетом карты потенциальных угроз. Рассматривается задача построения всех локально оптимальных путей в конфликтной среде на плоскости. Конфликтная среда представлена фиксированным количеством обнаружителей, положение которых уклоняющемуся от обнаружения объекту известно. Уклоняющийся объект и обнаружители представляют собой материальные точки. Рассматривается постановка, формализованная в виде задачи оптимального управления, на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина её решение сведено к решению краевой задачи. Краевая задача решалась численно методом стрельбы. Рассмотрен случай перехода уклоняющегося объекта из точки в точку с ограничением и без ограничения на длину пути, приводятся результаты численного моделирования. Произведён параметрический анализ задачи.

**Ключевые слова:** конфликтная среда, уклоняющийся объект, принцип максимума, траекторная оптимизация, численное моделирование.

## ВВЕДЕНИЕ

В связи с широким применением мобильных автономных аппаратов в последние годы и продолжающимся развитием этой области весьма актуальными являются задачи, связанные с перемещением одного или группы аппаратов в заданную точку. Такие миссии могут осложняться наличием сенсоров и датчиков различной природы, стационарных или подвижных обнаружителей, образующих конфликтную среду для объекта управления [1–4]. В литературе такой класс задач известен как планирование маршрута движения в конфликтной среде. Методы решения подобных задач достаточно хорошо изучены в случае независимости уровня сигнала, приходящего на сенсор, от скорости дви-

жения объекта. Например, метод потенциальных полей в задаче уклонения от препятствий [5]. В работе [6] представлен общий обзор методов решения задачи планирования безопасного пути, описаны алгоритмы Дейкстры и A\*, генетический и муравьиный алгоритмы. Также планирование пути робота на основе муравьиного алгоритма рассматривается в статье [7].

В данной работе рассматривается конфликтная среда [8], представленная неподвижными обнаружителями и одним управляемым объектом (УО), который перемещается в водной среде с возможно переменной скоростью между двумя заданными точками и уклоняется от обнаружения. Предполагается, что местоположение обнаружителей, формирующих карту угроз [9], УО известно. Маршрут УО и параметры движения выбираются таким образом, чтобы минимизировать негативное воздействие конфликтной среды, а именно понизить вероятность обнаружения УО.

<sup>#</sup> Исследование выполнено частично за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00134).



В работах [8, 10] получены аналитические решения для оптимальных режимов скорости движения в задачах с одним обнаружителем в плоских постановках. В статье [8] численно смоделированы решения для оптимальных режимов скорости в задачах с несколькими конфликтующими объектами на основе алгоритма Дейкстры.

В настоящем исследовании предполагается, что отношение сигнал/помеха на входах приемных систем обнаружителей мало в течение всего времени движения объекта по маршруту, поэтому УО минимизируется интегральный функционал – риск обнаружения по гидроакустическому полю [11, 12].

В публикации [11] для такого функционала в полярной системе координат решена задача уклонения подвижного объекта от обнаружения двумя неподвижными наблюдателями. В работе [13] рассматривается постановка с неподвижными сенсорами и детекторами, имеющими заданные в виде окружностей зоны обнаружения, проведена верификация работы алгоритма Дейкстры для случая одного сенсора и одного детектора, в результате удалось решить задачу аналитически. В статье [14] проведено аналитическое исследование задачи планирования маршрута УО в случае одного обнаружителя и наличия ограничения на длину пути. В публикации [15] рассмотрена задача минимизации риска обнаружения самолёта в трёхмерной постановке. На основе вариационных принципов получено аналитическое решение для случая одного радара. В работе [16] предложен дискретный метод оптимизации траектории уклоняющегося от обнаружения управляемого подвижного объекта на основе принципа динамического программирования.

В настоящей статье разработана методика решения задачи построения карты локально оптимальных путей УО на основе непрямых методов оптимизации для произвольного количества обнаружителей в плоской постановке. При этом проверка достаточных условий оптимальности второго порядка на найденных экстремалиях в данной работе не приводится.

Выписана вычислительная схема метода стрельбы, приводятся результаты численного моделирования для задачи без ограничения на длину пути и с таким ограничением. Моделирование осуществлялось для одного, двух и трёх обнаружителей.

## 1. ЗАДАЧА БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ДЛИНУ ПУТИ

### 1.1. Постановка задачи нахождения путей в конфликтной среде

На плоскости расположено некоторое известное количество  $N \geq 1$  неподвижных обнаружителей – точек  $S_i$ . На данной плоскости решается задача оптимального перемещения материальной точки УО из одной заданной точки плоскости в другую за фиксированное время  $T < \infty$ . В рассматриваемой упрощённой модели движения УО считается, что осуществляется управление модулем и направлением вектора скорости  $v$ . Минимизируется функционал

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2(t)}{r_i^2(t)} \right) dt \rightarrow \min,$$

где  $v(t)$  – модуль вектора скорости УО, а  $r_i(t)$  – расстояния до точек  $S_i$  в момент времени  $t$ ; величины  $q_i > 0$  – весовые коэффициенты влияния точек  $S_i$ . Местонахождение точек  $S_i$  и соответствующие им значения  $q_i$  заданы и известны УО.

### 1.2. Математическая формализация задачи

Рассматриваемая постановка формализуется в виде задачи оптимального управления. На плоскости вводится декартова система координат следующим образом: начало координат совпадает с точкой старта, ось  $Oy$  проходит через точки старта и финиша и направлена от точки старта к точке финиша. Единичный отрезок выбирается таким, чтобы ордината конечной точки была равна 1 (рис. 1). В такой системе координат начальные и конечные условия имеют вид:

$$\begin{cases} x(0) = 0, & x(T) = 0, \\ y(0) = 0; & y(T) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Движение материальной точки УО в данной системе координат описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \varphi, \\ \dot{y} = v \sin \varphi, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varphi$  – угол, который отсчитывается от положительного направления оси  $Ox$  и задаёт направление вектора скорости.

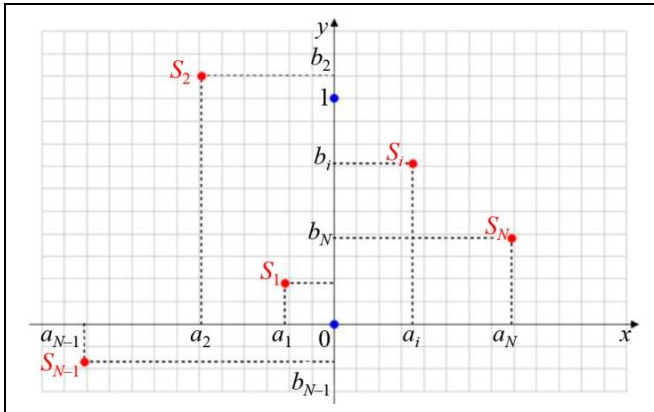


Рис. 1. Конфликтная среда, представленная неподвижными обнаружителями

Функции  $v$  и  $\varphi$  являются функциями управления и полагаются ограниченными кусочно-непрерывными функциями:

$$0 \leq v(t) \leq v_{\max} \leq \infty, \quad (3)$$

$$0 \leq \varphi(t) \leq 2\pi \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $T$  – заданный момент финиша;  $v_{\max}$  – максимальная скорость УО, является параметром задачи.

При кусочно-непрерывных ограниченных управлениях  $v$ ,  $\varphi$  фазовые переменные  $x$ ,  $y$  будут непрерывными кусочно-гладкими функциями, удовлетворяющими на участках непрерывности своих производных уравнениям дифференциальной связи (2).

Момент времени  $t = 0$  — время начала движения УО.

Пусть точки  $S_i$  имеют координаты  $(a_i, b_i)$ . Тогда минимизируемый УО функционал будет иметь вид:

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \right) dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Глобально оптимальным решением задачи минимизации риска обнаружения УО являются набор неизвестных фазовых переменных  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  и управления  $v(\cdot)$ ,  $\varphi(\cdot)$ , которые должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (2), ограничениям на управление (3), начальным и конечным условиям (1) и доставлять минимум функционалу (4).

Нас же интересует поиск всевозможных локально оптимальных путей – траекторий, выгодных УО для перемещения по ним, доставляющих сильный локальный минимум в задаче (1)–(4).

Заметим, что при приближении УО к какому-либо обнаружителю функционал (4) может сколь-

угодно возрастать, так как в знаменателе одного соответствующего слагаемого подынтегральной функции стоит квадрат расстояния от УО до данного обнаружителя. При стремлении этого расстояния к нулю значение функционала устремится к бесконечности. Поэтому проход УО непосредственно через обнаружитель запрещён.

### 1.3. Система необходимых условий оптимальности

Применим к рассматриваемой задаче оптимального управления принцип максимума Л.С. Понтрягина [17, 18]. Для этого выпишем основные конструкции принципа максимума:

– функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^T L dt + l,$$

– лагранжиан

$$L = p_x (\dot{x} - v \cos \varphi) + p_y (\dot{y} - v \sin \varphi) +$$

$$+ \lambda_0 \sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}, \quad (5)$$

– терминант

$$l = \lambda_{x_0} x(0) + \lambda_{y_0} y(0) + \lambda_{x_T} x(T) + \lambda_{y_T} (y(T) - 1),$$

– функцию Понтрягина

$$H = p_x v \cos \varphi + p_y v \sin \varphi -$$

$$- \lambda_0 \sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}.$$

Пусть существует оптимальный в сильном смысле процесс в задаче, описываемой формулами (1)–(4), такой, что для некоторого  $\varepsilon > 0$  траектория движения точки УО проходит вне малых  $\varepsilon$ -окрестностей точек  $S_i$  и выполняются условия гладкости: правые части систем дифференциальных уравнений (2) и их частные производные по фазовым переменным  $x$ ,  $y$  непрерывны в окрестности оптимальной траектории, подынтегральная функция из (4) непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$  почти всюду.

Тогда, согласно принципу максимума Понтрягина, для задачи оптимального управления (1)–(4) существуют не равные одновременно нулю множители Лагранжа: константы  $\lambda_0$ ,  $\lambda_{x_0}$ ,  $\lambda_{y_0}$ ,  $\lambda_{x_T}$ ,  $\lambda_{y_T}$  и функции  $p_x$ ,  $p_y$  такие, что на оптимальной траектории УО выполняется следующая система необходимых условий оптимальности:



• уравнения Эйлера – Лагранжа (условие стационарности по фазовым переменным)

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \\ &= -\lambda_0 \sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2}{((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)^2} \cdot 2(x-a_i), \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = \\ &= -\lambda_0 \sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2}{((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)^2} \cdot 2(y-b_i); \end{aligned} \right. \quad (6)$$

• условие Понтрягина (условие оптимальности по управлению)

$$(v, \varphi) = \arg \max_{\substack{0 \leq v(t) \leq v_{\max} \\ 0 \leq \varphi(t) < 2\pi}} \left( p_x v \cos \varphi + p_y v \sin \varphi - \lambda_0 \sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \right),$$

• условия трансверсальности по фазовым переменным

$$\left. \begin{aligned} p_x(0) &= \frac{\partial l}{\partial x(0)} = \lambda_{x_0}, \quad p_x(T) = -\frac{\partial l}{\partial x(T)} = -\lambda_{x_T}, \\ p_y(0) &= \frac{\partial l}{\partial y(0)} = \lambda_{y_0}, \quad p_y(T) = -\frac{\partial l}{\partial y(T)} = -\lambda_{y_T}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Условий стационарности по времени нет, так как в задаче (1)–(4) начальный и конечный момент времени – известные константы.

Условия дополняющей нежёсткости нет, так как в задаче (1)–(4) отсутствуют условия вида «меньше или равно». Условие непрохождения УО вблизи точек  $S_i$  проверяется непосредственно при численном решении задачи. Условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ .

Выполняется условие однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя). Заметим, что аномальный случай  $\lambda_0 = 0$  приводит к траектории движения УО по направлению от старта к финишу с максимальной скоростью, которая доставляет минимум только при отсутствии обнаружителей на отрезке, соединяющем старт и финиш, и  $T = \frac{1}{v_{\max}}$ , а в противном случае управляемый процесс,

соответствующий  $\lambda_0 = 0$ , не будет допустимым. В качестве нормировки задачи выбирается условие

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}.$$

#### 1.4. Краевая задача

На основе принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления сводится к краевой задаче с краевыми условиями (1) и системой дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= \hat{v} \cos \hat{\varphi}, \\ \dot{y} &= \hat{v} \sin \hat{\varphi}, \\ \dot{p}_x &= -\sum_{i=1}^N q_i \frac{\hat{v}^2}{((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)^2} \cdot (x-a_i), \\ \dot{p}_y &= -\sum_{i=1}^N q_i \frac{\hat{v}^2}{((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)^2} \cdot (y-b_i), \end{aligned} \right. \quad (8)$$

где

$$\hat{v} = \min \left( \frac{\|p\|}{\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}}, v_{\max} \right), \quad (9)$$

а управление  $\hat{\varphi}$  находится из соотношений  $\cos \hat{\varphi} = \frac{p_x}{\|p\|}$ ,  $\sin \hat{\varphi} = \frac{p_y}{\|p\|}$ , а  $\|p\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \neq 0$ .

При  $\|p(\tau)\| = 0$  в отдельной точке  $\tau \in [0, T]$  получим управление  $\hat{v} = 0$ ,  $\hat{\varphi} \in [0, 2\pi]$ . При  $\|p\| = 0$  на целом промежутке  $\Delta$  получается решение, при котором УО на протяжении времени  $\Delta$  стоит на месте. Как будет показано далее в теореме 3, это решение не доставляет локальный минимум в исходной задаче.

#### 1.5. Метод решения краевой задачи

Полученная краевая задача принципа максимума (1), (7)–(9) четвертого порядка нелинейна, в данной работе она решается численно методом стрельбы [19, гл. 2; 20, § 2] с использованием следующей вычислительной схемы.

В качестве параметров пристрелки выбирают недостающие для решения задач Коши константы  $p_0$  и  $\psi_0$ , для момента  $t = 0$ :

$$p_0 = \|p(0)\| = \left\| \begin{pmatrix} p_x(0) \\ p_y(0) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(p_x(0))^2 + (p_y(0))^2},$$

а  $\psi_0$  находится исходя из уравнения

$$\begin{pmatrix} p_x(0) \\ p_y(0) \end{pmatrix} = P_0 \begin{pmatrix} \cos \psi_0 \\ \sin \psi_0 \end{pmatrix}.$$

Задав вектор параметров пристрелки  $\alpha = (p_0, \psi_0)^T$  каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке времени  $[0, T]$ , получим соответствующие выбранному значению  $\alpha$  функции  $x(\cdot)[\alpha]$ ,  $y(\cdot)[\alpha]$ ,  $p_x(\cdot)[\alpha]$ ,  $p_y(\cdot)[\alpha]$ , и, в частности, значения фазовых и сопряжённых переменных, зависящие от вектора  $\alpha$ , в момент времени  $T$ . Соответствующие выражения из краевых условий в момент времени  $T$  составляют вектор-функцию невязок

$$\mathbf{X}[\alpha] = \begin{pmatrix} x(T) \\ y(T) - 1 \end{pmatrix}.$$

Серия задач Коши в методе Ньютона решалась численно явным методом Рунге – Кутты восьмого порядка, основанным на расчётных формулах Дормана – Принса 8(7) DOPRI8 с автоматическим выбором шага [21, гл. II.4, II.6; 22].

Для решения краевой задачи необходимо было подобрать значения параметров пристрелки  $\alpha$  так, чтобы выполнялось условие обнуления вектор-функции невязок  $\mathbf{X}[\alpha] = 0$ .

Таким образом, решение краевой задачи свелось к решению системы из двух нелинейных алгебраических уравнений от двух неизвестных. Корень  $\alpha$  системы алгебраических уравнений  $\mathbf{X}[\alpha] = 0$  находился методом Ньютона с модификацией Исаева – Сониной [23].

Для решения полученной краевой задачи (1), (7)–(9) был реализован на языке С и протестирован соответствующий программный комплекс [24], обеспечивающий функционал решения системы нелинейных уравнений, системы линейных уравнений, интегрирования задачи Коши, численного дифференцирования, визуализации полученных результатов.

Задача многоэкстремальна, разные начальные приближения параметров пристрелки  $\alpha$  могут соответствовать разным решениям краевой задачи. Для решения задачи классификации путей УО метод стрельбы многократно запускался из точек ограниченной прямоугольной сетки в пространстве параметров пристрелки  $(p_0, \psi_0)$ .

## 1.6. Численное моделирование

Описанная методика применима при расчётах для произвольного количества обнаружителей  $N$ .

Моделирование проводилось для  $N \leq 10$ . В настоящей работе представлены результаты моделирования для одного, двух и трёх статично расположенных обнаружителей с  $q_i = 1$ ,  $i \in [1, N]$ ,  $v_{\max} = 2$ ,  $T = 1$ .

Ниже на рис. 2–5 приведены траектории УО в конфликтной среде для разного количества обнаружителей. Движение УО начинается из точки с координатами (0,0) и заканчивается в точке (0,1), они обозначены чёрными квадратами. Расположение обнаружителей отмечено красными точками. На всех рисунках ниже траектории с меньшим значением функционала соответствует более жирная кривая, в данном разделе лучшие траектории УО отобразены фиолетовым цветом.

На рис. 2 представлены экстремали Понтрягина для одного обнаружителя. В результате расчётов получаются три траектории – обход обнаружителя слева, справа и траектория с полным оборотом вокруг обнаружителя. Перемещаясь по голубой траектории, УО вначале движется от точки старта до точки  $A$  по кривой  $l_1$ , затем совершает оборот вокруг обнаружителя по кривой  $l_2$ , возвращаясь в точку  $A$ , и, наконец, движется от точки  $A$  до финиша по кривой  $l_3$ .

Несмотря на то, что траектории с полным оборотом вокруг обнаружителя удовлетворяют необходимым условиям оптимальности и получаются в результате расчётов, будем их отбрасывать, так как если исключить из таких траекторий полные обороты, функционал будет меньше, к тому же значение функционала на них получается значительно больше, чем на траекториях без полных оборотов вокруг обнаружителей.

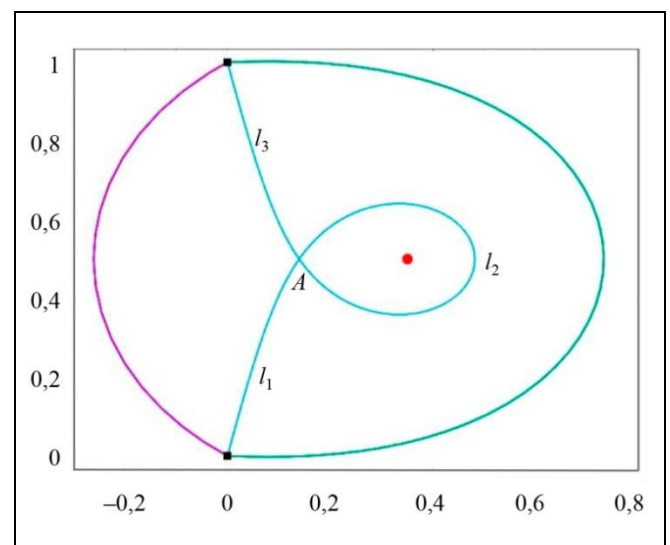


Рис. 2. Траектории для случая одного обнаружителя с координатами (0,5; 0,5)

На рис. 3 приводятся траектории для двух обнаружителей: на рис. 3, *а* – все полученные траектории, на рис. 3, *б* – после отброса траекторий с полными оборотами вокруг особых точек.

На рис. 4 показаны траектории для трёх обнаружителей: на рис. 4, *а* – все полученные траекто-

рии, на рис. 4, *б* – после отброса траекторий с полными оборотами вокруг особых точек.

Траектории для другой конфигурации трёх обнаружителей после отброса траекторий с полными оборотами вокруг особых точек представлены на рис. 5.

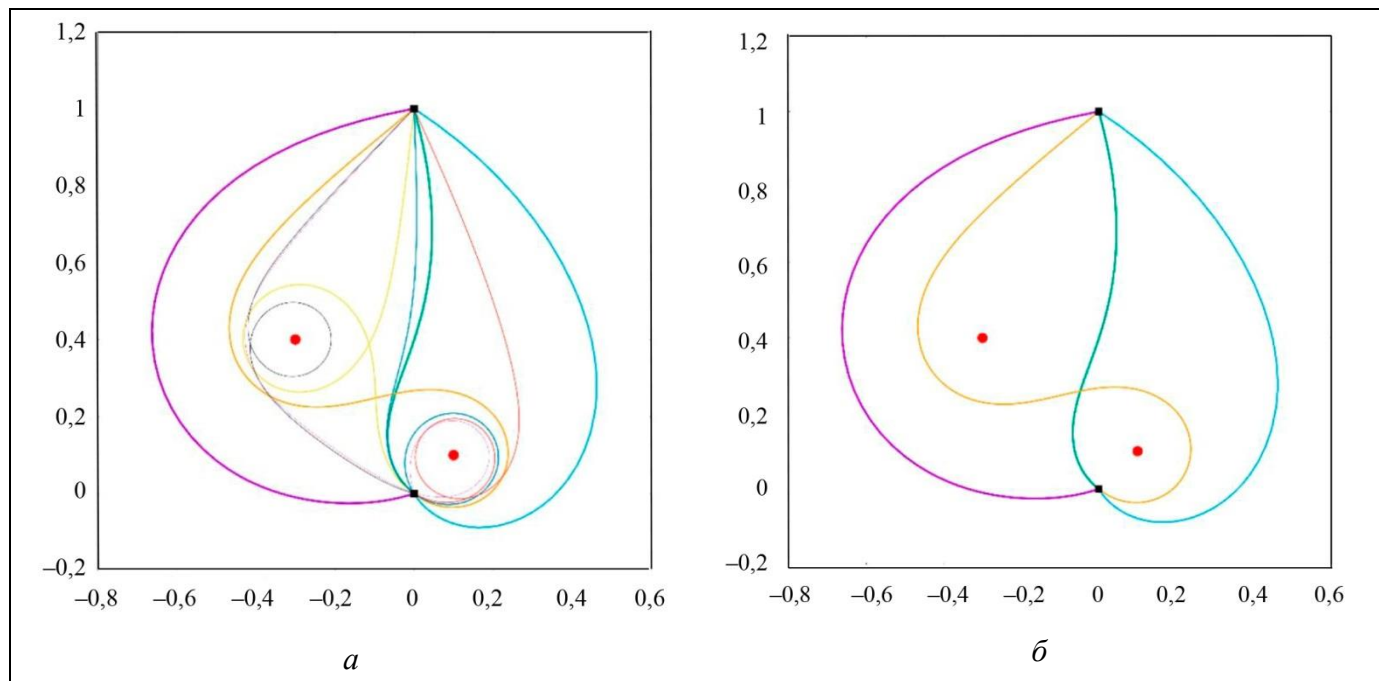


Рис. 3. Траектории для случая двух обнаружителей с координатами  $(0,1; 0,1)$  и  $(-0,3; 0,4)$ : *а* – все траектории, *б* – траектории без оборотов вокруг обнаружителей

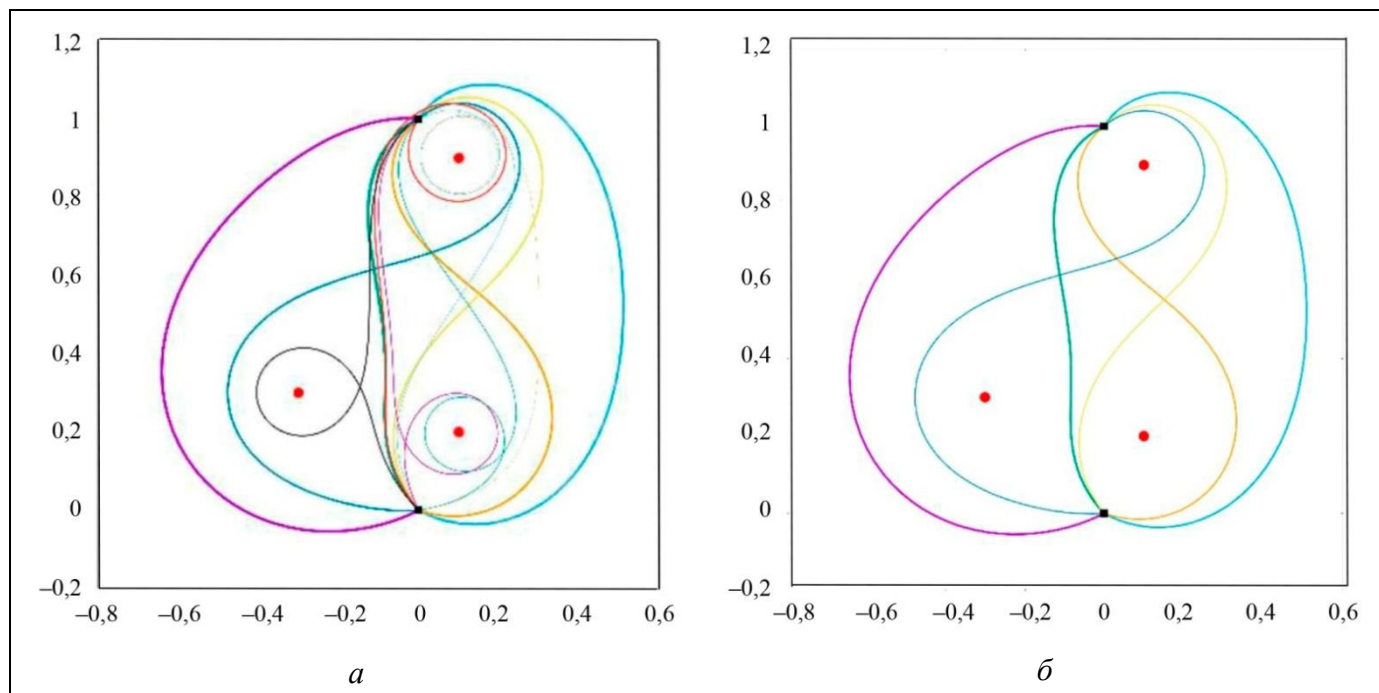


Рис. 4. Траектории для случая трёх обнаружителей с координатами  $(0,1; 0,2)$ ,  $(-0,3; 0,3)$  и  $(0,1; 0,9)$ : *а* – все траектории, *б* – траектории без оборотов вокруг обнаружителей

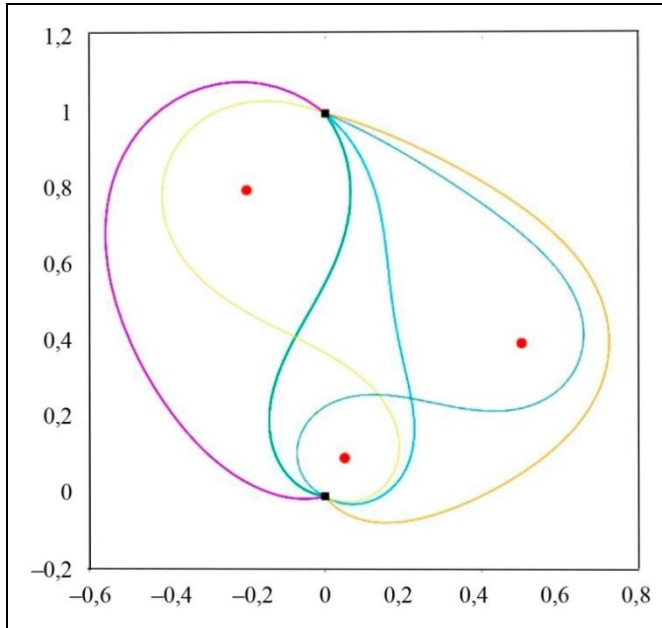


Рис. 5. Траектории УО для случая трёх обнаружителей с координатами (0,0.5; 0,1), (0,5; 0,4) и (-0,2; 0,8), без оборотов вокруг обнаружителей

### 1.7. Анализ результатов численного моделирования

Если на траектории не достигалось значение скорости  $v_{\max}$ , то при варьировании параметра  $T$  в постановке задачи часто путь УО  $y(x)$  оставался без изменений, т. е. соответствующая траектория по-прежнему являлась экстремалью Понтрягина, но точка УО двигалась по ней с другой скоростью. Сформулируем данное наблюдение в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Если на экстремали  $\{\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), \hat{v}(\cdot), \hat{\phi}(\cdot)\}$  задачи (1)–(4) не было выхода на ограничение  $v \leq v_{\max}$ , то путь  $\hat{y}(\hat{x})$  останется путем, соответствующим некоторой экстремали в задаче, отличающейся от исходной задачи (1)–(4) только увеличением константы  $T$ .

**Доказательство.** Пусть в исходной задаче (назовём её задачей 1) время движения УО было задано величиной  $T = T_1$ . Рассмотрим задачу 2, совпадающую с исходной за исключением ограничения по времени, а именно со временем движения УО, заданным величиной  $T_2 > T_1$ . Тогда такой задаче оптимального управления соответствует та же краевая задача принципа максимума (1), (7)–(9), отличающаяся только значением константы  $T$ . Сделав  $v$ -замену времени [25], а именно растянув время в  $\varkappa = \frac{T_2}{T_1} > 1$  раз, непосредственной проверкой получаем, что экстремаль задачи 1 также будет являться экстремалью задачи 2. Путь  $\hat{y}(\hat{x})$  перемеще-

ния УО при этом сохраняется, но движение по нему будет осуществляться со скоростью, в  $\varkappa$  раз меньшей скорости в исходной задаче 1. ♦

**Замечание 1.** Обратное утверждение неверно, так как значения  $v_{\max}$  и  $T$  задают максимально возможную длину пути УО, равную  $v_{\max} T$ . Если для времени  $T = T_1$  существовала экстремаль  $\{\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), \hat{v}(\cdot), \hat{\phi}(\cdot)\}$  задачи (1)–(4) с путём  $\hat{y}(\hat{x})$

длины  $\ell$ , то для времени  $T_2 < \frac{\ell}{v_{\max}} \leq T_1$  такой путь

уже не будет допустимым: либо УО для удовлетворения ограничения придётся пройти по более короткому пути ближе к одному из обнаружителей, либо решение с конфигурацией обхода обнаружителей, полученное для большего времени, перестанет существовать. ♦

Соответствующий пример изменения траектории можно наблюдать далее при сравнении левых и правых траекторий рис. 6, в и г.

**Замечание 2.** При увеличении времени  $T$  могут появиться новые траектории УО, являющиеся экстремалью, которые не удовлетворяли естественно возникающему ограничению на длину пути при меньшем  $T$ . ♦

Соответствующий пример можно видеть при сравнении рис. 6, б и б, а, в, г, а именно при жёстком ограничении на время, соответствующее рис. 6, б, траектории с обходом наблюдателей слева и справа не возникает, остаётся только траектория с проходом между наблюдателями.

**Утверждение.** При сохранении того же вида пути траектории  $\hat{y}(\hat{x})$  в условии теоремы 1 значение функционала (4) уменьшится в  $\varkappa$  раз, так как от времени функционал зависит линейно, а от скорости – квадратично. ♦

**Доказательство.** Сделаем замену переменной под интегралом  $\tau = t / \varkappa$ , переводящую отрезок  $[0, T_2]$  в  $[0, T_1]$ , при этом  $v(\tau) = \varkappa v(t)$ :

$$\int_0^{T_2} \sum_{i=1}^N \frac{v^2(t)}{r_i^2(t)} dt = \int_0^{T_2} v^2(t) \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i^2(t)} dt = \int_0^{T_1} \frac{v^2(\tau)}{\varkappa^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i^2(\tau)} \varkappa d\tau = \frac{1}{\varkappa} \int_0^{T_1} \sum_{i=1}^N \frac{v^2(\tau)}{r_i^2(\tau)} d\tau. \diamond$$

**Замечание 3.** Самый короткий возможный путь будет при перемещении УО по отрезку (0,0)–(0,1) длины 1. Поэтому при  $T = \frac{1}{v_{\max}}$  решение задачи существует только при отсутствии обнаружителей



на отрезке, соединяющем начальную и конечную точки движения УО, и представляет собой движение УО по данному отрезку с максимальной скоростью  $v_{\max}$ , а при  $T < \frac{1}{v_{\max}}$  решений в задаче (1)–

(4) нет, так как самый короткий путь имеет длину, равную 1. ♦

**Замечание 4.** Пути  $y(x)$  экстремалей задачи лежат в некоторой трубке траекторий, содержащей отрезок  $(0,0)–(0,1)$ . Вне зависимости от расположения обнаружителей при устремлении времени  $T$  к  $\frac{1}{v_{\max}}$  справа диаметр данной трубки стремится к нулю. ♦

Соответствующее «стягивание» траектории к отрезку, соединяющему точки старта и финиша УО, можно видеть далее на рис. 6 на примере траектории, проходящей между обнаружителями.

**Теорема 2.** *Замкнутые кривые, описывающие полный оборот вокруг какого-либо из обнаружителей, не доставляют абсолютный минимум в задаче (1)–(4).*

**Доказательство.** Действительно, рассмотрим ситуацию, изображённую на рис. 2, при которой УО совершает полный оборот вокруг какого-либо из обнаружителей. При этом всю траекторию можно разбить на три части: движение по линии  $l_1$  до некоторой точки  $A$ , в которой путь УО будет самопересекаться, затем полный оборот вокруг обнаружителя  $l_2$  и, наконец, перемещение по линии  $l_3$  от точки  $A$  до финиша.

Заметим, что если удалить участок движения  $l_2$ , то траектория движения УО от старта до точки  $A$  по линии  $l_1$  и затем сразу от точки  $A$  к финишу по линии  $l_3$  будет допустимой в задаче (1)–(4), так как в постановке отсутствуют ограничения на кривизну траектории и скорость поворота УО. При этом функционал (4) аддитивный, его значение при прохождении по траектории строго возрастает, а значит, если удалить из пути участок движения УО по линии  $l_2$ , значение функционала уменьшится. К тому же, общее время движения уменьшится на  $\Delta T$ , и согласно утверждению, на оставшейся части траектории можно уменьшить скорость движения УО в  $\frac{T}{T-\Delta T}$  раз, что дополнительно уменьшит значение функционала (4).

Таким образом, при движении по пути  $l_1l_3$  значение функционала будет гарантированно меньше. ♦

**Замечание 5.** Несмотря на то, что в доказательстве теоремы 2 показано, что движение по пути  $l_1l_3$  лучше движения по пути  $l_1l_2l_3$  с точки зрения минимизации риска обнаружения, обычно на таких

путях в точке  $A$  стыковки  $l_1$  и  $l_3$  траектория УО не является гладкой, что соответствует скачку в управлении и разрыву сопряжённых переменных, а значит, управляемый процесс с движением УО по пути  $l_1l_3$  не является экстремалью задачи (1)–(4).

**Теорема 3.** *Траектории управляемых процессов  $\xi$  с  $\|p\|=0$  на некотором промежутке  $\Delta$  в краевой задаче (1), (7)–(9), не доставляют локальный минимум в задаче оптимального управления (1)–(4).*

**Доказательство.** Из условия  $\|p\|=0$  следует  $\dot{v}=0$ , т. е. УО находится в одной точке на протяжении времени  $\Delta$ . Для любого сколь угодно малого  $\varepsilon \in (0,1)$

уменьшим время нахождения в этой точке в  $\frac{1}{\varepsilon}$  раза с  $\Delta$

до  $\varepsilon\Delta$  на соответствующем  $\xi$  пути  $y(x)$ . При этом время движения по остальному маршруту увеличится с  $T-\Delta$  до  $T-\varepsilon\Delta$ . Уменьшим скорость движения УО в  $k = \frac{T-\varepsilon\Delta}{T-\Delta}$  раз. Тогда функционал (4) на таком близком к  $\xi$  в пространстве решения задачи управляемом процессе, соответствующем построенной траектории, уменьшится в  $k > 1$  раз. ♦

## 2. ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ДЛИНУ ПУТИ

### 2.1. Изменения в постановке и краевая задача

Если длина пути УО ограничена, то для учёта данного ограничения вводится дополнительная фазовая переменная  $z(t)$  – длина пройденного УО пути за время  $t$ .

Тогда к граничным условиям (1) добавляются условия

$$z(0) = 0, z(T) \leq \ell, \quad (10)$$

где  $\ell$  – ограничение на длину пути УО.

К системе дифференциальных связей (2) в этом случае добавляется соотношение

$$\dot{z} = v. \quad (11)$$

При исследовании задачи на основе принципа максимума произойдут следующие изменения. В основных конструкциях (5) к лагранжиану  $L$  добавится слагаемое  $p_z(\dot{z}-v)$ , к терминанту  $l$  – слагаемые  $\lambda_{z_0}z(0)$  и  $\lambda_{z_T}(z(T)-\ell)$ , к функции Понтрягина  $H$  – слагаемое  $p_z v$ .

При исследовании сопряжённой системы дополнительно к уравнениям (6) получаем  $\dot{p}_z = 0 \Rightarrow p_z \equiv \text{const}$ .



К условиям трансверсальности (7) добавляются соотношения  $p_z(0) = \lambda_{z_0}$ ,  $p_z(T) = -\lambda_{z_T}$ .

Появляется условие дополняющей нежёсткости

$$\lambda_{z_T} (z(T) - \ell) = 0, \quad (12)$$

а также дополнительное условие неотрицательности

$$\lambda_{z_T} \geq 0. \quad (13)$$

В зависимости от того, какой из сомножителей в условии (12) обнуляется, возможны два разных случая.

В первом случае ограничение на длину пути активно:  $z(T) = \ell$ . Тогда решение задачи оптимального управления с учётом формул (10), (11) сводится к решению краевой задачи с дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = \hat{v} \frac{p_x}{\|p\|}, & \dot{y} = \hat{v} \frac{p_y}{\|p\|}, & \dot{z} = \hat{v}, \\ \dot{p}_x = -\sum_{i=1}^N q_i \frac{\hat{v}^2}{((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)^2} \cdot (x-a_i), \\ \dot{p}_y = -\sum_{i=1}^N q_i \frac{\hat{v}^2}{((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)^2} \cdot (y-b_i), \end{cases}$$

где

$$\hat{v} = \min \left( \max \left( \frac{\|p\| + p_z}{\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}}, 0 \right), v_{\max} \right),$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} x(0) = 0, & x(T) = 0, \\ y(0) = 0, & y(T) = 1, \\ z(0) = 0, & z(T) = \ell. \end{cases}$$

Вычислительная схема метода стрельбы в этом случае выглядит следующим образом. По параметрам пристрелки  $p_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\lambda_{z_T}$  заполняются начальные значения для решения задачи Коши:

$$\begin{pmatrix} p_x(0) \\ p_y(0) \\ p_z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cos \psi_0 \\ p_0 \sin \psi_0 \\ -\lambda_{z_T} \end{pmatrix}.$$

Затем решается задача Коши и вычисляется вектор-функция невязок

$$\begin{pmatrix} x(T) \\ y(T) - 1 \\ z(T) - \ell \end{pmatrix}.$$

Далее система нелинейных уравнений решается методом, описанном в п. 1.5.

Во втором случае, когда  $z(T) < \ell$ , т. е. ограничение не активно, получаем краевую задачу (1), (7)–(9), которой соответствует вычислительная схема, описанная в п. 1.6, но теперь также дополнительно интегрируется переменная  $z$  с условиями  $\dot{z} = \hat{v}$ ,  $z(0) = 0$ .

Если на полученном решении краевой задачи оказывается, что  $z(T) > \ell$ , то соответствующая траектория отбрасывается, так как не удовлетворяет системе ограничений задачи и не является допустимой.

## 2.2. Результаты численного моделирования

Для наглядной демонстрации влияния ограничения на длину пути на решения рассмотрим сценарий с двумя обнаружителями, расположенными в точках (0,2; 0,3) и (–0,3; 0,4). Возьмём следующие значения констант:  $q_i = 1$ ,  $v_{\max} = 0,8$ ,  $T = 2$ .

На рис. 6, а изображены три экстремали Понтрягина в задаче без ограничения на длину пути. На рис. 6, б рассмотрена ситуация с жёстким ограничением, при котором на траекториях обхода обоих обнаружителей слева или справа не выполняется ограничение на длину пути, и они удаляются из семейства решений как недопустимые. На рис. 6, в ограничение слабее, и траектории обхода обоих обнаружителей с одной стороны появляются вновь, однако ограничение на длину пути вынуждает УО в этом случае двигаться к ним ближе, чем на рис. 6, а. При дальнейшем ослаблении ограничения на длину пути появляются невыгодные по функционалу траектории с совершением полного оборота вокруг одного из обнаружителей, изображённые на рис. 6, г, они не являются оптимальными по теореме 2.

Лучшим решением для случаев, изображённых на рис. 6, б–г, по-прежнему является более жирная зелёная траектория, проходящая между обнаружителями с рисунка 6, а, на которой ограничение на длину пути не активно. Траектории же, проходящие между обнаружителями на рис. 6, б–г, экстремалами не являются, так как на них нарушается условие неотрицательности (13).

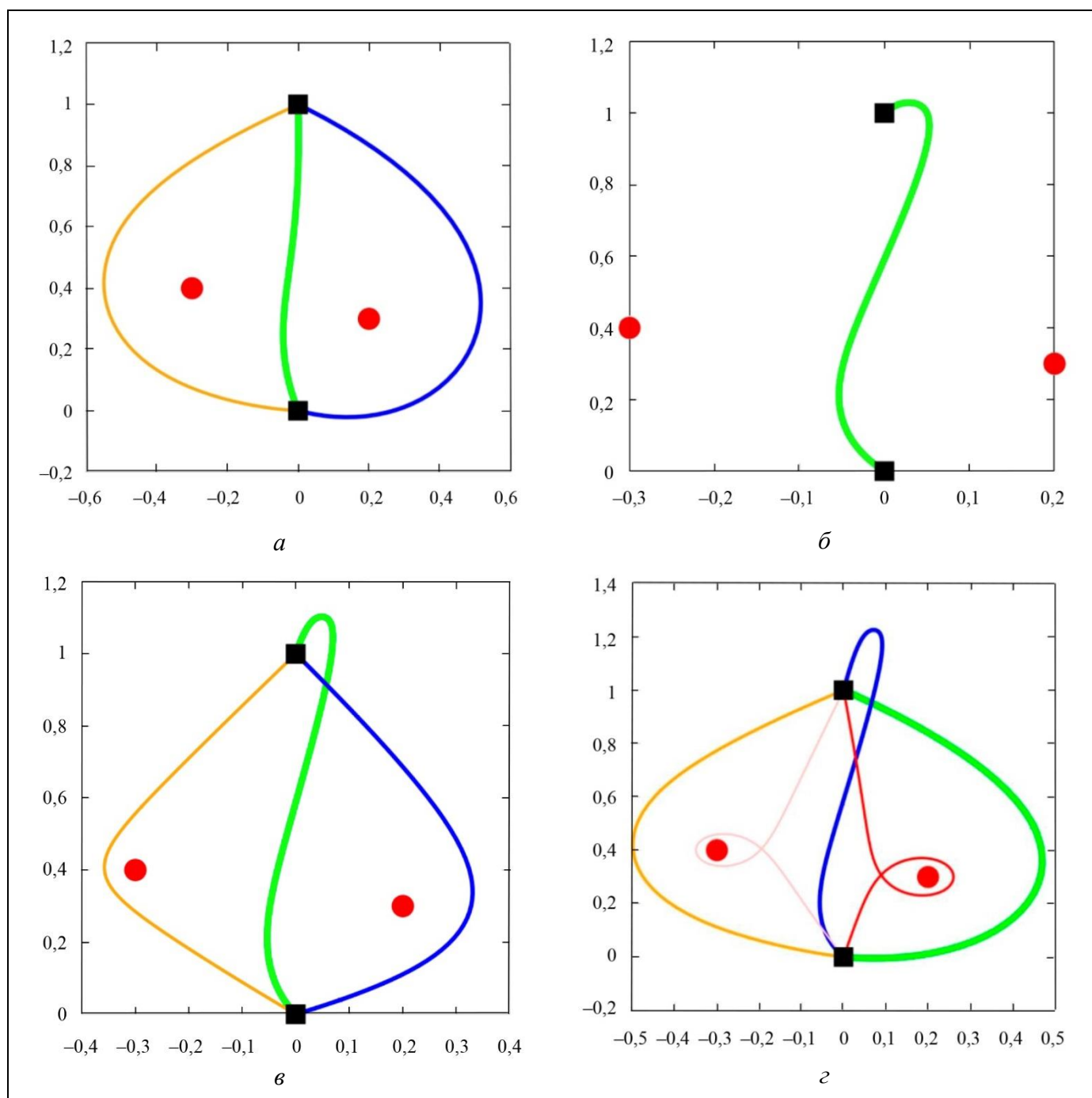


Рис. 6. Влияние ограничения на длину пути:  $a$  – ограничение не активно,  $б - \ell = 1,1$ ,  $в - \ell = 1,25$ ,  $г - \ell = 1,5$

Влияние варьирования величин  $q_i$  на траектории УО изучено в работе [26], на рис. 2 в ней можно видеть, что по результатам моделирования УО выгодно проходить дальше от обнаружителя с большим весом  $q_i$ , что соответствует здравому смыслу.

Отметим также, что в двух задачах, отличающихся только величиной ограничения  $v_{\max}$ , могут получаться различные наборы траекторий движения УО, если хотя бы в одном из двух случаев

происходит выход на ограничение  $v_{\max}$ , что можно видеть на рис. 5 в статье [26].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача планирования траектории движения УО с интегральным критерием качества (риском), зависящим от скорости УО и расположения нескольких обнаружителей, а также интегральным ограничением на длину траектории, формализова-

на как задача оптимального управления. Эта задача решена непрямыми методами оптимизации, опирающимися на принцип максимума Понтрягина. В результате получается набор экстремальных траекторий, из которых выбирается глобально оптимальная и выписывается оптимальный закон скорости на ней. Проведено моделирование с целью определения чувствительности параметров задачи, а именно координат точек обнаружителей, времени передвижения и длины траектории.

Разработанная методика планирования траектории УО в конфликтной среде может быть далее применена для обратной задачи оптимизации расстановки обнаружителей с целью противодействия скрытному движению УО [27].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rafai, A., Adzhar, N., Jaimi, N. A Review on Path Planning and Obstacle Avoidance Algorithms for Autonomous Mobile Robots // *Journal of Robotics*. – 2011. – P. 1–14. – DOI: 10.1155/2022/2538220.
2. Zhang, Z., Wu, J., Dai, J., He, C. Rapid Penetration Path Planning Method for Stealth UAV in Complex Environment with BB Threats // *International Journal of Aerospace Engineering*. – 2020. – P. 1–15. – DOI: 10.1155/2020/8896357.
3. Hu, J., Fan, L., Yifei, L., et al. Reinforcement Learning-Based Low-Altitude Path Planning for UAS Swarm in Diverse Threat Environments // *Drones*. – 2023. – Vol. 7. – P. 567. – DOI: 10.3390/drones7090567.
4. Chen Q., Zhao Q., & Zou, Z. Threat-Oriented Collaborative Path Planning of Unmanned Reconnaissance Mission for the Target Group // *Aerospace*. – 2022. – Vol. 9, no. 577. – P. 1–23. – DOI: 10.3390/aerospace9100577.
5. Filimonov, A.B., Filimonov, N.B. Constructive Aspects of the Method of Potential Fields in Mobile Robotics // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2021. – Vol. 57, no. 4. – P. 371–377. – DOI: 10.15372/AUT20210406.
6. Karur, K., Sharma, N., Dharmatti, Ch., Siegel, J.E. Survey of Path Planning Algorithms for Mobile Robots // *Vehicles*. – 2021. – Vol. 3, no. 3. – P. 448–468. – DOI: 10.3390/vehicles3030027.
7. Ajeil, F.H., Ibraheem, I.K., Azar, A.T., Humaidi, A.J. Grid-Based Mobile Robot Path Planning Using Aging-Based Ant Colony Optimization Algorithm in Static and Dynamic Environments // *Sensors*. – 2020. – Vol. 20, no. 7. – Art. no. 1880. – DOI: 10.3390/s20071880.
8. Галяев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. – 2009. – № 3. – С. 134–140. [Galyaev, A.A., Maslov, E.P., Rubinovich, E.Ya. On a Motion Control Problem for an Object in a Conflict Environment // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2009. – Vol. 48, no. 3. – P. 458–464.]
9. Dogan, A., Zengin, U. Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2006. – Vol. 29, no. 4. – P. 723–732. – DOI: 10.2514/1.18386.
10. Галяев А.А., Маслов Е.П. Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. – 2010. – № 4. – С. 52–62. [Galyaev, A.A., Maslov, E.P. Optimization of a Mobile Object Evasion Laws From Detection // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2010. – Vol. 49, no. 4. – P. 560–569.]
11. Галяев А.А., Маслов Е.П. Уклонение в конфликтной среде от обнаружения системой разнородных наблюдателей // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2014. – № 4. – С. 18–27. [Galyaev, A.A., Maslov, E.P. Evasion from Detection by a System of Heterogeneous Observers in Threat Environment // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2014. – Vol. 53, no. 4. – P. 487–496.]
12. Сысоев Л.П. Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // *Проблемы управления*. – 2010. – № 6. – С. 64–70. [Sysoev, L.P. The Criterion of Probability Detecting on the Trajectory in the Problem of Movement Control in Threat Environment // *Control Sciences*. – 2010. – No. 6. – P. 65–72. (In Russian)]
13. Галяев А.А. Задача уклонения от обнаружения системой разнородных наблюдателей: один сенсор – группа детекторов // *Проблемы управления*. – 2016. – № 3. – С. 72–77. [Galyaev, A.A. Problem of Evading Detection by System of Heterogeneous Observers: One Sensor – Group of Detectors // *Control Sciences*. – 2016. – No. 3. – P. 72–77. (In Russian)]
14. Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Уклонение подвижного объекта от одиночного обнаружителя на заданной скорости // *Проблемы управления*. – 2020. – № 1. – С. 83–91. – DOI: 10.25728/ru.2020.1.8. [Galyaev, A.A., Lysenko, P.V., Yakhno, V.P. Moving Object Evasion from Single Detector at Given Speed // *Control Sciences*. – 2020. – No. 1. – P. 83–91. – DOI: 10.25728/ru.2020.1.8. (In Russian)]
15. Zabarankin, M., Uryasev, S., Murphey, R. Aircraft Routing under the Risk of Detection // *Naval Research Logistics*. – 2006. – Vol. 53, no. 8. – P. 728–747. – DOI: 10.1002/nav.20165.
16. Добровидов А.В., Кулида Е.Л., Рудько И.М. Бортовой комплекс управления скрытностью морских подводных объектов с оперативно советующей системой // *Проблемы управления*. – 2011. – № 3. – С. 64–75. [Dobrovodov, A.V., Kulida, E.L., Rud'ko, I.M. Control of Object Movement in Threat Environment // *Control Sciences*. – 2011. – No. 3. – P. 64–75. (In Russian)]
17. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с. [Aleksseev, V.M., Tikhomirov, V.M., Fomin, S.V. Optimal'noe upravlenie. – M.: Nauka, 1979. – 432 p. (In Russian)]
18. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 393 с. [Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F. Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov. – M.: Nauka, 1983. – 393 p. (In Russian)]
19. Григорьев И.С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. – М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. – 393 с. [Grigor'ev, I.S. Metodicheskoe posobie po chislnym metodam resheniya kraevykh zadach printsipa maksimuma v zadachakh optimal'nogo upravleniya. – M.: Izdatel'stvo Tsentra prikladnykh issledovaniy pri mekhaniko-matematicheskome fakul'tete MGU, 2005. – 393 p. (In Russian)]
20. Александров В.В., Бахвалов Н.С., Григорьев К.Г. и др. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. – М.: Издательство Московского



- университета, 1988. – 80 с. [Aleksandrov, V.V., Bakhvalov, N.S., Grigor'ev, K.G., et al. Praktikum po chislennym metodam v zadachakh optimal'nogo upravleniya. – М.: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1988. – 80 p. (In Russian)]
21. Хайпер Э., Нёрсетт С.П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1989. – 512 с. [Khairer, E.H., Nersett, S.P., Vanner, G. Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. – М.: Mir, 1989. – 512 p. (In Russian)]
22. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с. [Bakhvalov, N.S., Zhidkov, N.P., Kobel'kov, G.M. Chislennye metody. – М.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2008. – 636 p. (In Russian)]
23. Исаев В.К., Сонин В.В. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 6. – С. 1114–1116. [Isaev, V.K., Sonin, V.V. On a Modification of Newton's Methods for the Numerical Solution of Boundary Problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1963. – Vol. 3, no. 6. – P. 1525–1528.]
24. Самохин А.С., Самохина М.А. Решение задачи Коши многомерным методом Рунге-Кутты, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса 8(7), с автоматическим выбором шага. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020611811. Запер. 11.02.2020. [Samokhin, A.S., Samokhina, M.A. Reshenie zadachi Koshi mnogomernym metodom Runge-Kutty, osnovannym na raschetnykh formulakh Dormana-Prinsa 8(7), s avtomaticheskim vyborom shaga. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EHVМ RU 2020611811. Reg. 11.02.2020. (In Russian)]
25. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. – М.: МГУ, мех.-матем. ф-т, 2004. – 168 С. [Milyutin, A.A., Dmitruk, A.V., Os-molovskii, N.P. Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii. – М.: МГУ, мех.-матем. ф-т, 2004. – 168 с. (In Russian)]
26. Галяев А.А., Самохин А.С., Самохина М.А. On problem of optimal observers' placement on plane // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1864, no. 1. – Art. no.012075. – DOI: 10.1088/1742-6596/1864/1/012075.
27. Галяев А., Самохин А., Самохина М. Application of the Gradient Projection Method to the Problem of Sensors Arrangement for Counteraction to the Evasive Object // 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). – Saint Petersburg, 2021. – p. 9470857.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 30.10.2023,  
после доработки 29.11.2023.  
Принята к публикации 30.11.2023.

Самохина Марина Александровна – науч. сотрудник,

✉ ph@ipu.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7043-706X>

Галяев Андрей Алексеевич – член-корр. РАН, д-р техн. наук,

✉ galaev@ipu.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6494-6880>

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва

© 2024 г. Самохина М.А., Галяев А.А.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

## CONSTRUCTING A MAP OF LOCALLY OPTIMAL PATHS FOR A CONTROLLED MOVING OBJECT IN A THREAT ENVIRONMENT

M. A. Samokhina\* and A. A. Galyaev\*\*

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

\*✉ ph@ipu.ru, \*\*✉ galaev@ipu.ru

**Abstract.** In some path planning problems for controlled objects, the main criterion is to reduce the integral risk of detection when moving in a threat environment with a given map of potential threats. In this paper, we construct all locally optimal paths in a 2D threat environment. The environment is represented by a fixed number of detectors whose positions are known to an evasive object. This object and the detectors are material points. The original problem is formalized as an optimal control problem and reduced to a boundary value problem based on Pontryagin's maximum principle. The boundary value problem is solved numerically by the shooting method. The case of point-to-point transition of the evasive object with and without the path length constraint is studied, and the results of numerical simulation are provided. A parametric analysis of the problem is carried out.

**Keywords:** threat environment, evasive object, maximum principle, trajectory optimization, numerical simulation.

**Acknowledgments.** This work was supported in part by the Russian Science Foundation, project no. 23-19-00134.