

# АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ И СТРАТЕГИЯ УПРАВЛЕНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫМИ ЗАТРАТАМИ

В.Н. Русев, А.В. Скориков

Рассмотрена аппроксимация функции восстановления для рекуррентных потоков восстановлений. Предполагается, что время безотказной работы объектов системы описывается с помощью двухпараметрического распределения Вейбулла — Гнеденко. Предложены аналитический и численный подходы (на основе методов дискретизации) решения уравнения Вольтерра. Полученные соотношения и алгоритмы проверены на контрольных примерах с помощью профессионального математического пакета Wolfram Mathematica. Изложенные результаты применены в стратегии «блоковой (групповой) политики замен» для обеспечения надежного и эффективного функционирования технологических объектов.

**Ключевые слова:** функция восстановления, распределение Вейбулла — Гнеденко, интегральное уравнение Вольтерра, производящая функция моментов, методы дискретизации интегральных уравнений, мониторинг надежности, блоковая политика замен, компьютерное моделирование в среде Wolfram Mathematica.

## ВВЕДЕНИЕ

Функция восстановления  $H(t)$  определяется как ожидаемое число отказов системы (или элемента) в течение времени  $(0, t)$ . Этот параметр используется для построения системы менеджмента надежности, определения оптимального плана профилактического обслуживания или замен [1–3]. Функция восстановления имеет важное значение для разработки политики гарантий [4], а также применяется в принятии решений планирования схемы поставок [5], построения планов страхования [6].

Для рекуррентных потоков восстановлений интегральное уравнение Вольтерра устанавливает соотношение между функцией восстановления  $H(t)$  и функцией распределения  $F(t)$  времени работы между отказами [7], когда плотность распределения  $f(t) = F'(t)$  определена:

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(\tau)f(t - \tau)d\tau. \quad (1)$$

Решение в замкнутой форме этого уравнения невозможно, кроме некоторых случаев, когда поток восстановлений управляется экспоненциальным или эрланговским распределениями. Хорошо

известна [7] асимптотическая формула для функции восстановления (асимптота Смита)

$$H(t) \sim \frac{1}{\mu} t + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2 - \mu^2}{\mu^2} \right), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где  $\mu$  и  $\sigma^2$  — математическое ожидание и дисперсия времени работы между отказами.

Отметим также публикации [8, 9], посвященные прямому вычислению функции надежности для систем в терминах сверток.

В настоящей статье предполагается, что весь жизненный цикл функционирования объектов системы описывается с помощью двухпараметрического закона распределения Вейбулла — Гнеденко (см. например, работу [10]). Распределение Вейбулла — Гнеденко занимает важное место среди распределений времени безотказной работы систем, состоящих из групп большого числа элементов, отказы которых происходят взаимно независимо, так что отказ любого из элементов приводит к отказу всей системы (принцип «наислабейшего звена»).

Согласно государственному стандарту [11], «Планово-профилактические ремонты или замены полезны в случаях, когда отказы одной или нескольких ключевых составных частей изделия имеют четко выраженный износый и/или усталостный характер, что соответствует описанию



вероятности подобных отказов двухпараметрическим распределением Вейбулла. Зная параметры формы и масштаба этого распределения, можно установить рациональные значения периодичности профилактического обслуживания или замен этих составных частей». Поэтому, с позиций разработки мониторинговых систем оценивания факторов надежности элементов, для достижения оптимального плана технического обслуживания и ремонта изучение и анализ функции восстановления является весьма актуальной проблемой. Полученные аппроксимации функции восстановления применены в стратегии «групповой политики замен» для обеспечения надежного и эффективного функционирования технологических объектов.

Функция распределения и плотность распределения Вейбулла — Гнеденко имеют, соответственно, вид:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha t)^\beta}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} \alpha^\beta \beta t^{\beta-1} e^{-(\alpha t)^\beta}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

с параметрами формы  $\beta > 0$ , масштаба  $\alpha > 0$ .

Авторы работы [12] W.L. Smith and M.R. Leadbetter предложили метод для вычисления функции восстановления для распределения Вейбулла — Гнеденко с помощью разложения в степенной ряд для  $\beta > 1$ , численное вычисление этого ряда ограничено малым диапазоном  $t$ ; A.G. Constantine, N.I. Robinson [13] представили метод вычисления функции восстановления  $H(t)$  с помощью вычетов, позволяющих получить представление для нее равномерно сходящимся рядом затухающих экспоненциальных членов. В статье [14] была предложена оценка функции восстановления, основанная на первых трех моментах распределения, уточняющая асимптотическую формулу (2). Получен также ряд других приближений, таких как полученных авторами работ [15—17], изучавших функцию восстановления для нормального, гамма-, равномерного распределений времени жизни.

**1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ. МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ МОМЕНТОВ**

Применим методы операционного исчисления. Из уравнения (1) получаем

$$\tilde{H}(s) = \tilde{F}(s) + \tilde{H}(s)\tilde{f}(s),$$

откуда следует

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{f}(s)} = \frac{\tilde{f}(s)}{s(1 - \tilde{f}(s))}.$$

Для нахождения оригинала преобразования Лапласа  $\tilde{H}(s)$  воспользуемся производящей функции моментов плотности распределения Вейбулла — Гнеденко.

Соотношение  $h(t) = H'(t)$  в терминах преобразования Лапласа можно записать как  $\tilde{H}(s) = \tilde{h}(s)/s$ .

В работах [18, 19] получено представление преобразования Лапласа плотности восстановления

$$\tilde{h}(s) = \frac{1}{v_1 s} + \left( \frac{v_2}{2v_1^2} - 1 \right) + \frac{3v_2^2 - 2v_1 v_3}{12v_1^3} s + \frac{3v_2^3 - 4v_1 v_2 v_3 + v_1^2 v_4}{24v_1^4} s^2 + \dots$$

Отсюда

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{h}(s)}{s} = \frac{1}{v_1 s^2} + \left( \frac{v_2}{2v_1^2} - 1 \right) \frac{1}{s} + \frac{3v_2^2 - 2v_1 v_3}{12v_1^3} + \frac{3v_2^3 - 4v_1 v_2 v_3 + v_1^2 v_4}{24v_1^4} s^2 + \dots$$

Используя обозначения

$$c_0 = \frac{1}{v_1}, \quad c_1 = \frac{v_2}{2v_1^2}, \quad c_2 = \frac{3v_2^2 - 2v_1 v_3}{12v_1^3},$$

$$c_3 = \frac{3v_2^3 - 4v_1 v_2 v_3 + v_1^2 v_4}{24v_1^4},$$

$$c_k =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -m_0 \\ -m_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & m_1 \\ m_1 & -m_0 & 1 & \dots & 0 & -m_2 \\ -m_1 & m_1 & -m_0 & \dots & 0 & m_3 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & \dots & 0 & -m_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ (-1)^{k+1} m_{k-2} & (-1)^k m_{k-3} & (-1)^{k-1} m_{k-1} & \dots & -m_0 & (-1)^k m_{k-1} \end{vmatrix},$$

где  $v_k$  — начальный момент случайной величины  $\xi$  с плотностью  $f(t)$  порядка  $k$ :

$$v_k = \int_0^{+\infty} t^k f(t) dt = \frac{1}{\alpha^k} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right),$$

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$  — гамма-функция Эйлера,  $s \in \mathbb{C}$ ,

имеем

$$\tilde{H}(s) = \frac{c_0}{s^2} + (c_1 - 1) \frac{1}{s} + c_2 + c_3 s + c_4 s^2 + \dots$$

Тогда

$$H(t) = F(t) + L^{-1} \left[ \frac{c_0}{s^2} \tilde{f}(s) + (c_1 - 1) \frac{1}{s} \tilde{f}(s) + c_2 \tilde{f}(s) + c_3 s \tilde{f}(s) + c_4 s^2 \tilde{f}(s) + \dots \right],$$

где  $L^{-1}[G(s)]$  обозначает обратное преобразование Лапласа для функции  $G(s)$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} H(t) &= F(t) + L^{-1} \left[ \frac{c_0}{s^2} \tilde{f}(s) \right] + (c_1 - 1) \int_0^t f(\tau) d\tau + \\ &+ c_2 f(t) + c_3 f'(t) + c_4 f''(t) + \dots = \\ &= F(t) + L^{-1} \left[ \frac{c_0}{s^2} \tilde{f}(s) \right] + (c_1 - 1) F(t) + c_2 F'(t) + \\ &+ c_3 F''(t) + c_4 F'''(t) + \dots \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[ \frac{c_0}{s^2} \tilde{f}(s) \right] &= c_0 \int_0^t (t - \tau) \alpha^\beta \beta \tau^{\beta-1} e^{-(\alpha\tau)^\beta} d\tau = \\ &= c_0 \alpha^\beta \beta \left[ t \int_0^t \tau^{\beta-1} e^{-(\alpha\tau)^\beta} d\tau - \int_0^t \tau^\beta e^{-(\alpha\tau)^\beta} d\tau \right] = \\ &= c_0 \alpha^\beta \beta \left[ t \frac{1}{\alpha^\beta \beta} \gamma(1, (\alpha t)^\beta) - \frac{1}{\alpha^{\beta+1} \beta} \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right) \right] = \\ &= c_0 \left[ t F(t) - \frac{1}{\alpha} \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right) \right], \end{aligned}$$

где  $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$  — неполная гамма-функция Эйлера и ввиду равенств

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^\mu e^{-(\alpha\tau)^\beta} d\tau &= \frac{1}{\alpha^{\mu+1} \beta} \gamma\left(\frac{\mu+1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right), \\ \gamma(1, (\alpha t)^\beta) &= \int_0^{\alpha t} e^{-z} dz = F(t), \end{aligned}$$

окончательно получаем представление:

$$\begin{aligned} H(t) &= H(t) + c_0 \left[ t F(t) - \frac{1}{\alpha} \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right) \right] + \\ &+ (c_1 - 1) F(t) + c_2 F'(t) + c_3 F''(t) + c_4 F'''(t) + \dots = \\ &= F(t) \left[ 1 + c_0 t - \frac{c_0}{\alpha} \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right) \right] + (c_1 - 1) F(t) + \\ &+ c_2 F'(t) + c_3 F''(t) + c_4 F'''(t) + \dots = \\ &= c_0 t F(t) - \frac{c_0}{\alpha} \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right) + c_1 F(t) + c_2 F'(t) + \\ &+ c_3 F''(t) + c_4 F'''(t) + \dots, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $c_k$  определены выше.

Другая запись полученного соотношения:

$$H(t) = F(t)(c_0 t + c_1) - \frac{c_0}{\alpha} \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right) + c_2 F'(t) + c_3 F''(t) + c_4 F'''(t) + \dots$$

Осталось только еще удостовериться в том, что полученное соотношение согласуется с асимптотической формой функции восстановления (2), которая в наших обозначениях имеет вид (см. далее рис. 4):

$$H(t) = c_0 t + c_1 - 1 + o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

## 2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Для приближенного метода решения уравнения (1) относительно  $H(t)$  применим методы дискретизации интегрального уравнения, которые в вариационных задачах называются прямыми методами. К таким методам относятся конечно-разностный метод Эйлера, метод Рунге, а также известный в задачах механики метод конечных элементов.

Дискретизация по методу Галеркина с применением кубических сплайнов была рассмотрена в работе [20]. Однако счет для большого числа точек разбиений, по предложенной в этой работе схеме, затруднителен из-за большого массива данных в оперативной памяти компьютера. Численное решение уравнения восстановления (прямой RS-метод) рассмотрено в статьях [21–23], где получены алгоритмы решения уравнения методами типа метода трапеций и метода Симпсона.

Используемая далее в работе дискретизация состоит в применении соответствующего алгоритма только к неизвестной функции, стоящей под знаком интеграла, а интегралы от ядер операторов вычисляются в пакете Mathematica. Таким образом, решение ищется, как в методе Рунге — Галеркина, в виде линейной комбинации соответствующих базисных функций, но для определения коэффициентов, как в методе коллокаций Канторовича [24], невязки в узлах полагаются равными нулю. Точность аппроксимации решения достигается не благодаря более сложным базисным функциям, как в методе Галеркина, а благодаря более мелкому разбиению области.

Рассмотрим три способа дискретизации уравнения (1). Разделим рассматриваемый отрезок времени  $[0, t_{\max}]$  на  $n$  равных частей точками  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = t_0 + \Delta$ , ...,  $t_n = t_0 + n\Delta$ , где  $\Delta$  — шаг разбиения.

**Метод правых узлов.** Будем искать решение  $H(t)$  уравнения (1) в виде суммы кусочно-постоянных функций, равных на каждом отрезке разбиения  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  значению искомого решения в правой

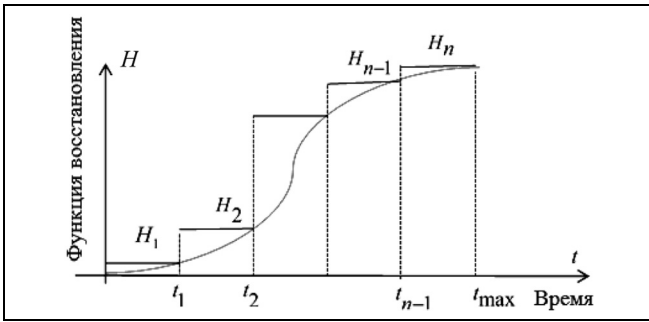


Рис. 1. Метод правых узлов

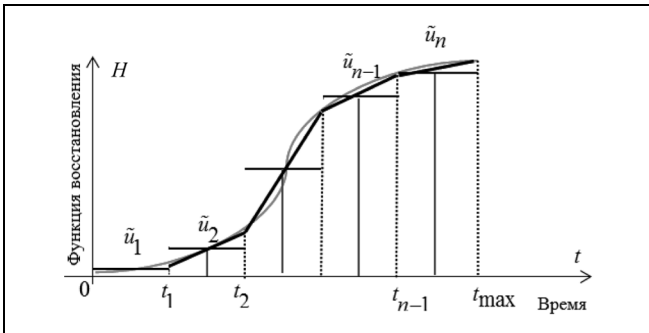


Рис. 2. Метод средних

точке  $t_k$  разбиения  $H_k = H(t_k)$ , также как в квадратурном методе прямоугольников (рис. 1). Если ввести координатные функции  $I_k(t)$ , равные единице при  $t_{k-1} < t \leq t_k$  и нулю в остальных точках, то приближенное решение записывается в виде

$$H(t) \approx \sum_{k=1}^n H_k I_k(t).$$

**Метод средних.** Положим значение приближенного решения  $u(t)$  на  $k$ -м отрезке, равным среднему значению  $\bar{H}_k = \frac{H(t_{k-1}) + H(t_k)}{2}$ , как в методе трапеций квадратурных формул (рис. 2). Приближенное решение, соответственно, имеет вид:

$$\tilde{H}(t) = \sum_{k=1}^n \bar{H}_k I_k(t).$$

**Линейные сплайны.** В качестве приближенного решения на  $k$ -м отрезке  $\bar{H}_k(t)$  выберем интерполяционные многочлены Лагранжа первой степени, которые в узлах  $t_{k-1}, t_k, k = 1, \dots, n$ , равны значениям решения  $H_{k-1} = H(t_{k-1}), H_k = H(t_k)$ . Таким образом, на каждом отрезке разбиения искомое решение заменяется линейной функцией, т. е. рассматривается приближение решения ломаной (рис. 3).

Найдем решение по первому способу. Подставим точки разбиения в уравнение (1), заменим  $H(t)$  на  $H(t_k) = H_k$ . Получим:

$$H_0 = F(0) = F_0,$$

$$\begin{aligned} H_1 &= F(t_1) + H_1 \int_0^{t_1} f(t_1 - s) ds = |t_1 - s = r| = \\ &= F(t_1) + H_1 \int_0^{t_1} f(r) dr, \\ H_1 &= F_1 + H_1 K_1, \end{aligned}$$

где  $F_1 = F(t_1), K_1 = \int_0^{t_1} f(r) dr,$

$$\begin{aligned} H_2 &= F(t_2) + H_1 \int_0^{t_1} f(t_2 - s) ds + H_2 \int_{t_1}^{t_2} f(t_2 - s) ds = \\ &= |t_2 - s = r| = F(t_2) + H_1 \int_{t_2-t_1}^{t_2} f(r) dr + H_2 \int_0^{t_2-t_1} f(r) dr = \\ &= F(t_2) + H_1 \int_{t_1}^{t_2} f(r) dr + H_2 \int_0^{t_1} f(r) dr, \\ H_2 &= F_2 + H_1 K_2 + H_2 K_1, \end{aligned}$$

где  $F_2 = F(t_2), K_2 = \int_{t_1}^{t_2} f(r) dr,$

$$\begin{aligned} H_n &= F(t_n) + H_1 \int_0^{t_1} f(t_n - s) ds + H_2 \int_{t_1}^{t_2} f(t_n - s) ds + \dots + \\ &+ H_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t_n - s) ds = |t_n - s = r| = \\ &= F(t_n) + H_1 \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(r) dr + H_2 \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} f(r) dr + \dots + H_n \int_0^{t_1} f(r) dr, \\ H_n &= F_n + H_1 K_n + H_2 K_{n-1} + \dots + H_n K_1, \end{aligned}$$

где  $F_n = F(t_n), K_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(r) dr.$

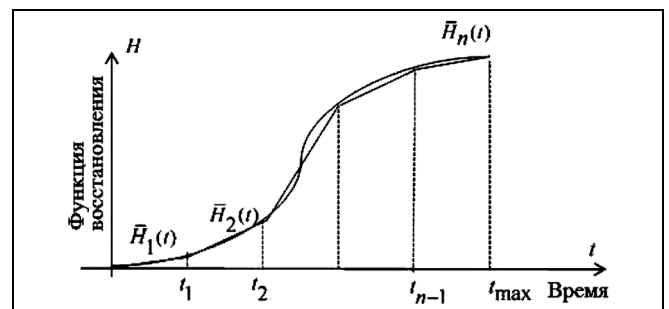


Рис. 3. Метод линейных сплайнов

Таким образом, для  $n$  точек разбиения получаем систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} H_0 = F_0, \\ H_1 = F_1 + H_1 K_1, \\ H_2 = F_2 + H_1 K_2 + H_2 K_1, \\ \dots \\ H_n = F_n + H_1 K_n + H_2 K_{n-1} + \dots + H_n K_1. \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы можно записать рекуррентными формулами:

$$\begin{cases} H_0 = F_0, \\ H_1 = F_1 / (1 - K_1) \\ H_2 = (F_2 + H_1 K_2) / (1 - K_1), \\ \dots \\ H_n = (F_n + H_1 K_n + H_2 K_{n-1} + \dots + H_{n-1} K_2) / (1 - K_1). \end{cases}$$

При втором способе дискретизации заменим  $H(t)$  на соответствующем отрезке средним  $\tilde{u}_k = \frac{u_{k-1} + u_k}{2}$ . Соответственно, модифицируется система (3):

$$\begin{cases} H_0 = F_0, \\ H_1 = F_1 + \frac{H_1 + H_0}{2} K_1, \\ H_2 = F_2 + \frac{H_1 + H_0}{2} K_2 + \frac{H_2 + H_1}{2} K_1, \\ \dots \\ H_n = H_n + \frac{H_1 + H_0}{2} K_n + \frac{H_2 + H_1}{2} K_{n-1} + \dots + \frac{H_n + H_{n-1}}{2} K_1. \end{cases}$$

Отсюда получаем рекуррентные формулы для решения:

$$\begin{cases} H_0 = F_0, \\ H_1 = \left( F_1 + \frac{F_0}{2} K_1 \right) / \left( 1 - \frac{K_1}{2} \right), \\ H_2 = \left( F_2 + \frac{H_1}{2} K_2 + \frac{H_0}{2} K_2 + \frac{H_1}{2} K_1 \right) / \left( 1 - \frac{K_1}{2} \right), \\ \dots \\ H_n = \left( F_n + \frac{H_1}{2} K_n + \frac{H_2}{2} K_{n-1} + \dots + \frac{H_{n-1}}{2} K_2 + \frac{H_0}{2} K_n + \frac{H_1}{2} K_{n-1} + \dots + \frac{H_{n-1}}{2} K_1 \right) / \left( 1 - \frac{K_1}{2} \right). \end{cases}$$

По третьему способу дискретизации приближенное решение на каждом отрезке разбиения ищется в виде интерполяционного многочлена Лагранжа первой степени, т. е.

$$H_k(t) = H_{k-1} \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} + H_k \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}.$$

Обозначим

$$l_k(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} = \frac{t_k - t}{\Delta}.$$

Тогда

$$H_k(t) = H_{k-1} l_k(t) - H_k l_{k-1}(t).$$

Для линейных функций  $l_k$  справедливо при  $m \geq k$  равенство

$$\begin{aligned} l_k(t_m - t) &= \frac{t_k - t_m + t}{\Delta} = \frac{-(t_m - t_k) + t}{\Delta} = \\ &= -\frac{t_m - t_k - t}{\Delta} = -l_{m-k}(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнения (1)  $u_0 = f(0) = f_0$ , далее при  $t = t_1$ , учитывая равенство (4), имеем

$$\begin{aligned} H_1 &= F(t_1) + \int_0^{t_1} f(t_1 - s)(H_0 l_1(s) - H_1 l_0(s)) ds = \\ &= |t_1 - s = r| = F(t_1) + \int_0^{t_1} f(r)(H_0 l_1(t_1 - r) - \\ &\quad - H_1 l_0(t_1 - r)) dr = F_1 - H_0 \int_0^{t_1} f(r) l_0(r) dr + \\ &\quad + H_1 \int_0^{t_1} f(r) l_1(r) dr = F_1 - H_0 G_{10} + H_1 G_{11}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$H_1(1 - G_{11}) = f_1 - H_0 G_{10}.$$

Подставим в уравнение (1)  $t = t_n$ :

$$\begin{aligned} H_n &= F(t_n) + \int_0^{t_1} f(t_n - s)(H_0 l_1(s) - H_1 l_0(s)) ds + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} f(t_n - s)(H_1 l_2(s) - H_2 l_1(s)) ds + \dots + \\ &\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t_n - s)(H_{n-1} l_n(s) - H_n l_{n-1}(s)) ds = |t_1 - s = r| = \\ &= f_1 + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(r)(H_0 l_1(t_n - r) - H_1 l_0(t_n - r)) dr + \\ &\quad + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} f(r)(H_1 l_2(t_n - r) - H_2 l_1(t_n - r)) dr + \dots + \\ &\quad + \int_0^{t_1} f(r)(H_{n-1} l_n(t_n - r) - H_n l_{n-1}(t_n - r)) dr = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= F_n - H_0 \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(r)l_{n-1}(r)dr + H_1 \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(r)l_n(r)dr - \\
 &- H_1 \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} f(r)l_{n-2}(r)dr + H_2 \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} f(r)l_{n-1}(r)dr - \dots - \\
 &- H_{n-1} \int_{t_0}^{t_1} f(r)l_0(r)dr + H_n \int_{t_0}^{t_1} f(r)l_1(r)dr = \\
 &= F_1 - H_0 G_{nn-1}^0 + H_1(G_{nn}^0 - G_{n-1n-2}^0) + \dots + \\
 &+ H_{n-1}(G_{22} - G_{10}) + H_n G_{11},
 \end{aligned}$$

где

$$G_{kj} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r)l_j(r)dr.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 H_n(1 - G_{11}) &= F_1 - H_0 G_{nn-1} + \\
 &+ H_1(G_{nn} - G_{n-1n-2}) + \dots + H_{n-1}(G_{22} - G_{10}).
 \end{aligned}$$

Итак, система уравнений имеет вид

$$\begin{cases}
 H_0 = F_0, \\
 H_1(1 - G_{11}) = F_1 - H_0 G_{10}, \\
 H_2(1 - G_{11}) = F_2 - H_0 G_{21} + H_1(G_{22} - G_{10}), \\
 \dots \\
 H_n(1 - G_{11}) = F_n - H_0 G_{nn-1} + \\
 + H_1(G_{nn} - G_{n-1n-2}) + \dots + H_{n-1}(G_{22} - G_{10}).
 \end{cases} \quad (5)$$

Рекуррентные формулы для решения системы (5) имеют вид:

$$\begin{cases}
 u_0 = f_0, \\
 H_1 = (F_1 - H_0 G_{10}) / (1 - G_{11}), \\
 H_2 = (f_2 - H_0 G_{21} + H_1(G_{22} - G_{10})) / (1 - G_{11}), \\
 \dots \\
 H_n = (F_n - H_0 G_{nn-1} + H_1(G_{nn} - G_{n-1n-2}) + \dots + \\
 + H_{n-1}(G_{22} - G_{10})) / (1 - G_{11}).
 \end{cases}$$

### 3. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные алгоритмы были проверены на контрольных примерах с помощью профессионального математического пакета Wolfram Mathematica. Погрешность приближенного решения определяется не только построенным алгоритмом, но также погрешностью численного интегрирования в пакете Wolfram Mathematica, равной  $10^{-15}$ . Отметим, что погрешность решения контролируется применением различных методов и известным асимптотическим приближением (2). Для распре-

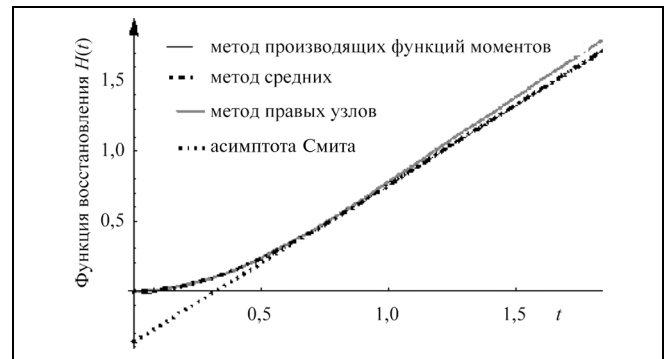


Рис. 4. Аппроксимация функции восстановления для распределения Рэлея

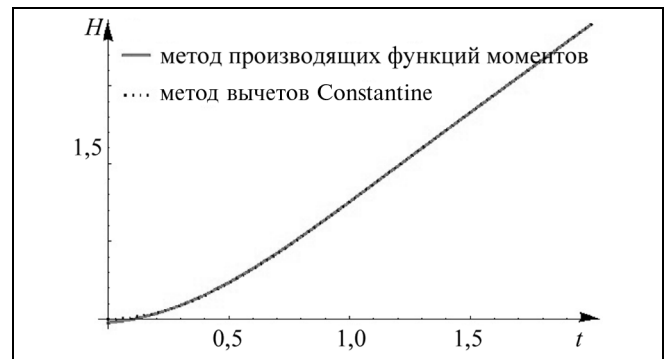


Рис. 5. Сравнение аппроксимаций функций восстановления для распределения Рэлея, полученных методом производящих функций моментов и методом вычетов Constantine, Robinson

деления Рэлея, важного частного случая распределения Вейбулла — Гнеденко ( $\beta = 2, \alpha = 1$ ), функции восстановления представлены на рис. 4. Из графиков видно, что приближение линейными сплайнами и метод средних дает одно и то же решение при малом числе точек разбиения (20 точек), которое близко к приближенному решению, полученному методом производящих функций моментов. Рассмотренные приближенные решения быстро сходятся к асимптотическому значению функции восстановления (2). Метод правых узлов для рассмотренного числа точек разбиения (20 точек) дает большую погрешность при  $t > 1$ . Однако, увеличение числа точек разбиения до 200 дает практически совпадение приближенных решений, найденных рассмотренными выше методами правых узлов, средних и производящих функций. Время счета при таком разбиении составляет приблизительно 2–3 с.

Сравнение графиков функций восстановления, полученных для распределения Рэлея методом вычетов [13] и методом производящих функций моментов (рис. 5) показывает совпадение результатов.



#### 4. ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ПРОФИЛАКТИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

По ГОСТ Р 27.606—2013 [11]: «Если же отказ не несет угроз безопасности, но ведет к утрате изделием готовности к применению по назначению, то периодичность замен устанавливают, исходя из заданного уровня готовности, обеспечиваемого при оптимальных затратах, включающих в себя, в том числе, стоимость заменяемых изделий и экономический ущерб от отказов». Таким образом, необходим баланс между суммой, потраченной на профилактическое обслуживание, и суммой на замены при внезапном отказе.

Применим стратегию технического обслуживания, известную как «групповую или блоковую политику замен» («block replacement policy — BRP») [1, 3]. Предполагается, что объект заменяется новым изделием при постоянной длине интервала замен  $t_p$ , независимо от возраста объекта, а также замены объекта происходят столько раз, сколько требуется на интервале  $(0, t_p)$  при внезапных отказах объекта. В работе [25] рассмотрены стратегии замен по эксплуатационным затратам, в частности, уточняющие определение оптимального срока

службы при восстановлении работоспособности объекта без восполнения его ресурса.

Пусть  $C_p$  — средняя стоимость профилактического обслуживания,  $C_f$  — средняя стоимость восстановления при отказе ( $C_p < C_f$ ). Средняя стоимость на интервале  $(0, t_p)$  профилактического обслуживания и восстановления после отказа равна  $C_p + C_f H(t_p)$ , где  $H(t_p)$  — среднее число восстановлений на интервале  $(0, t_p)$ . В качестве критерия оптимальности рассматривается средняя стоимость эксплуатационных затрат (удельная стоимость затрат) единицу времени:

$$R(t_p) = \frac{C_p(1 + c_o H(t_p))}{t_p}, \quad (6)$$

где  $c_o = C_f/C_p$  — коэффициент затрат. Точка минимума функции (6) дает соответствующее значение времени оптимального профилактического обслуживания  $t_0$ . Известно, что в точке  $t_0$  экстремума  $R(t) = C_f H'(t_0) = C_f h(t_0)$ , т. е. значение функции  $R(t)$  определяется плотностью восстановления  $h(t_0)$ . Более того, можно доказать равенство

$$R''(t_0) = t_0^2 C_f H''(t_0). \quad (7)$$

Из равенства (7) следует, что характер выпуклости функции  $R(t)$  в точках экстремума совпадает с характером выпуклости функции  $H(t)$  и осцилляция функции восстановления согласуется с осцилляцией средней стоимости эксплуатационных затрат.

Достаточным условием существования минимума функции  $R(t)$  является условие на коэффициент затрат  $c_o$  [26, 27], имеющее в наших обозначениях вид:

$$c_o > \frac{2}{1 - CV^2}, \quad (8)$$

где  $CV^2 = \sigma^2/\mu^2$  — квадрат коэффициента вариации. Отметим, что условие (8) не является необходимым. Приведем иллюстрацию данного утверждения, служащую контрпримером условию (8). Рассмотрим распределение Рэлея, для которого ограничение (8) означает, что  $c_o > 2,8$ . Однако, как видно из графика (рис. 6) при значении коэффициента  $c_o = 2,6$ , не удовлетворяющему условию (8), функция  $R(t)$  имеет вполне конкретный минимум. Более того, при этом же коэффициенте затрат функция стоимости имеет еще и максимум. Иными словами, при большем значении интервала профилактического обслуживания можно попасть в точку максимума затрат, а из формулы (2) следует, что  $R(\infty) = C_f/\mu$  является наименьшим значением функции стоимости. Поэтому в этом случае оптимальной стратегией будет замена лишь после наступления отказа.

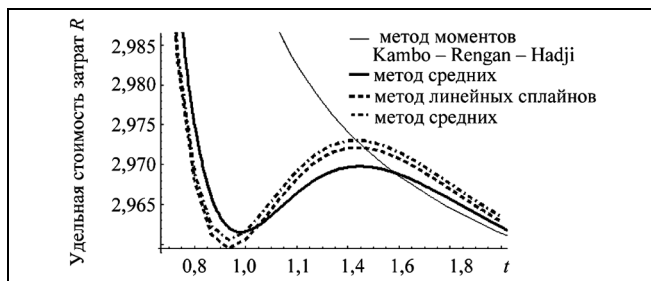


Рис. 6. Графики приближений функции стоимости  $R(t)$  для распределения Рэлея при коэффициенте затрат  $c_o = 2,6$

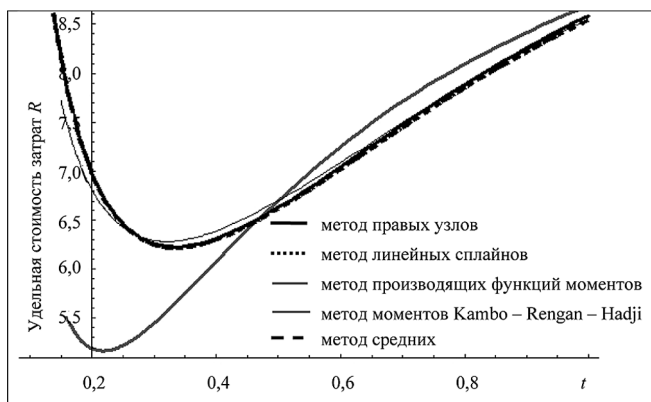


Рис. 7. Графики приближений функции стоимости  $R(t)$  для распределения Рэлея при коэффициенте затрат  $c_o = 10$



Заметим, что применение критерия (6) для определения времени оптимального профилактического обслуживания требует достаточно точного вычисления функции восстановления. Сравнение графиков (рис. 7) критерия (6) показывает значительное расхождение графиков  $R(t)$  при вычислении функции восстановления по методу производящих моментов или дискретизацией с графиком  $R(t)$  по методу [14] с использованием трех моментов.

Соответствующие координаты точек минимума:  $\{0,32; 6,28\}$ ;  $\{0,32; 6,22\}$ ;  $\{0,22; 5,17\}$ . Сравнение результатов, полученных в данной работе с результатами  $\{0,34; 6,17\}$  работы [16] показывают небольшое расхождение 5 и 2 % соответственно.

Таким образом, стратегия «групповой политики восстановлений» дает возможность обеспечения надежного и эффективного функционирования технологических объектов в рамках системного подхода к мониторингу эксплуатационных показателей.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблеме вычисления функции восстановления, одной из популярных и важных задач теории надежности, посвящены многочисленные исследования, что отражено в достаточно подробном обзоре, выполненном в начале статьи. В работе предложено и исследовано несколько методов аппроксимации функции восстановления на основе ее аналитического представления: метод производящих функций моментов с последующим обращением преобразования Лапласа, методы решения интегрального уравнения восстановления путем его дискретизации. Приведены результаты компьютерного моделирования и сравнение на их основе различных методов аппроксимации. Полученные формулы для нахождения функции восстановления применены в стратегии «групповой политики замен» в задаче обеспечения надежного и эффективного функционирования технологических объектов с позиций мониторинга показателей надежности элементов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. — М.: Советское радио, 1969. — 488 с.
2. Северцев Н.А. Надежность сложных систем в эксплуатации и обработке. — М.: Высшая школа, 1989. — 432 с.
3. Jardine A.K.S., Tsang A.H.C. Maintenance, Replacement, and Reliability: Theory and Applications. — London, N.-Y.: Boca Raton, CRC/Taylor & Francis, 2006. — 330 p.
4. Blischke W., Murthy D.N.P. Warranty Cost Analysis. — N.-Y.: CRC Press, 1994.
5. Parsa H., Jin M. An improved approximation for the renewal function and its integral with an application in twoechelon // International Journal of Production Economics. — 2013. — Vol. 146, N 1. — P. 142–152.
6. Frees E.W. Warranty analysis and renewal function estimation // Naval Research Logistics Quarterly. — 1986. — Vol. 33. — P. 361–372.
7. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановлений. — М.: Советское радио, 1967. — 292 с.

8. Andronov A., Vishnevsky V., Rykov V. Reliability of a system with two parallel renewable channels // The 10-th Intern. Conf. on Mathematical Methods in Reliability (MMR-2017) July 3 — July 5, 2017, Grenoble, France. — P. 58.
9. Andronov A., Vishnevsky V., Rykov V. On Reliability Function of a Parallel System with Three Renewable Components // Материалы междунар. науч. конф. «Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и ее приложениях (АВМТВ-2017)», Москва, РУДН, 23–27 окт. 2017 г. / под общ. ред. А.В. Лебедева. — М., 2017. — С. 430–434.
10. Grigoriev L., Kucheryavy V., Rusev V., Sedyh I. Formation of estimates of reliability indicators for active elements in gas transport systems on the basis of refusals statistics // Journal of Polish Safety and Reliability Association. — 2014. — Vol. 5, N 2. — P. 41–47.
11. ГОСТ Р 27.606—2013. Надежность в технике. Управление надежностью. Техническое обслуживание, ориентированное на безотказность. — М.: Стандартинформ, 2014. — 38 с.
12. Smith W.L., Leadbetter M.R. On the Renewal Function for the Weibull Distribution // Technometrics. — 1963. — N 5. — P. 393–396.
13. Constantine A.G., Robinson N.I. The Weibull renewal function for moderate to large arguments. // Computational Statistics & Data Analysis. — 1997. — N 24. — P. 9–27.
14. Kambo N.S., Rangan A. & Ehsan Moghimi Hadji E. Moments based approximation to the renewal function // Communications in Statistics. — Theory and Methods. — 2012. — Vol. 41. — P. 851–868.
15. Cui L., Xie M. Some Normal Approximations for Renewal Function of Large Weibull Shape Parameter // Communications in Statistics. — 2003. — Vol. 32, N 1. — P. 1–16.
16. Smeitink E., Dekker R. Simple approximation to the renewal function // IEEE Trans. on Reliability. — 1990. — Vol. 39, N 1. — P. 71–75.
17. Maghsoodloo S., Helvacı D. Renewal and Renewal-Intensity Functions with Minimal Repair // Journal of Quality and Reliability Engineering. — 2014. — ID 857437. — 10 p.
18. Русев В.Н., Скориков А.В. Анализ элементов систем газоснабжения с помощью метода производящих функций моментов // Тр. РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. — 2016. — № 1 (282). — С. 68–79.
19. Rusev V., Skorikov A. On solution of renewal equation in the weibull model // Reliability: Theory & Applications. — 2017. — Vol. 12, N 4 (47). — P. 60–67.
20. Deligonul Z.S., Bilgen S. Solution of the Volterra equation of renewal theory with Galerkin technique using cubic splines // Journal of Statistical Computation and Simulation. — 1984. — N 20. — P. 37–45.
21. Xie M. On the solution of renewal-type integral equations // Communications in Statistics. — Simulation and Computation. — 1989. — Vol. 18 (1). — P. 281–293.
22. Xie M., Preuss W., Cui L. Error analysis of some integration procedures for renewal equation and convolution integrals // Journal of Statistical Computation and Simulation. — 2003. — Vol. 73 (1). — P. 59–70.
23. Tortorella M. Numerical solutions of renewal-type integral equation // Inform Journal of Computing. — 2005. — Vol. 17 (1). — P. 66–74.
24. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ: 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
25. Лубков Н.В. Оптимизация срока службы оборудования по критерию эксплуатационных затрат // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 5. — С. 180–190.
26. Hanscom M.A., Cleroux R. The block replacement problem // J. Statist. Comput. Simul. — 1978. — Vol. 3. — P. 233–248.
27. Berg M. A marginal cost analysis for preventive maintenance policies // European Journal of Operational Research. — 1980. — N 4. — P. 136–142.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Русев Владимир Николаевич — ст. преподаватель,  
✉ rusev.v@gubkin.ru,

Скориков Александр Васильевич — канд. физ.-мат. наук, доцент,  
✉ skorikov.a@gubkin.ru,

Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина.