УДК 517.93;517.937

К ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ НЕЛИНЕЙНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА. БИХЕВИОРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД[1]

В.А. Русанов, Л.В. Антонова, А.В. Данеев

Приведены признаки дифференциальной реализации нелинейных бихевиористических систем — слабоструктурированных семейств динамических процессов типа «вход — выход» с модельными реализациями в классе бесконечномерных нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений состояния с программным и нелинейно-позиционным управлениями.

Ключевые слова: обратная задача, системный анализ, нелинейная дифференциальная реализация.

ВВЕДЕНИЕ

К 1970-м гг. сложилось впечатление, что та часть качественной теории обратных задач системного анализа, которую принято называть реализацией линейных конечномерных динамических систем с непрерывным временем [1], в целом завершена и стоит ожидать лишь относительно второстепенных улучшений; это впечатление усиливалось заявлениями основателей теории реализации: 1969 г., Р. Калман [1, *с. 268*]: «... в § 10.13 мы дадим новое и (надеемся) *исчерпывающее* изложение теории реализации линейных систем с непрерывным временем» (курсив наш). Но как в последствии продемонстрировал Я. Виллемс [2], задача реализации, сформулированная в работе [1, *с. 21*], далеко не единственная постановка данной проблемы и часто не самая естественная. Конструктивность созданного на этом пути набора общих понятий и методов была апробирована для нестационарных систем (см. работу [3] с библиографией), а также систем, описываемых многомерными гладкими нелинейными дифференциальными уравнениями (см., например, статью [4]), когда задача реализации состоит в том, чтобы заменить *неявные* дифференциальные уравнения высшего порядка на *явные* дифференциальные уравнения первого порядка плюс специальные алгебраические уравнения, т. е. в виде системы «вход — состояние — выход»; как показано в работе [5], при выполнении некоторых предположений такая нелинейная реализация может быть редуцирована к модели дифференциальной реализации с уравнениями в пространстве состояний *минимальной* размерности [1, *с. 267*].

Что же касается результатов теории реализации, относящихся к бесконечномерному случаю, то они не затрагивают всех вопросов, которые нашли свое законченное решение в конечномерном варианте, хотя некоторые из них решаются уже на этой степени общности [6, 7]. Здесь необходимо отметить, что один фундаментальный результат теории идентификации в банаховом пространстве [8], а именно следствие теоремы 1 [9], по существу указал аналитическую форму, в которой следует искать необходимые и достаточные условия разрешимости задачи дифференциальной реализации динамического процесса «*траектория, программное управление, позиционное управление*». В подобной форме были получены нетривиальные обобщения результатов работы [10] на системы реализации в гильбертовом пространстве [11, 12] с опорой на теорему Рисса [13, *с. 132*] и разложение Фурье [13, *с. 129*].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований № 15 Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (проект № 2.5).

В данной работе на языке сигнальных функций [9] и оператора Релея—Ритца [3] обсуждаются необходимые и достаточные условия разрешимости задачи дифференциальной реализации *бихевиористической динамической системы* (D-системы; определение 1 [10]), представленной фиксированным пучком вектор-функций «*траектория, программное управление, нелинейное позиционное управление*» — экзогенное поведение [14] «*вход — выход*» D-системы типа «черный ящик» с модельной реализацией в классе обыкновенных нестационарных дифференциальных уравнений состояния в равномерно выпуклом банаховом пространстве; при этом не претендуя на полноту и законченность, а лишь уточняя и развивая главные принципы (!), поскольку исследования качественной теории обратных задач нелинейной динамики в общем банаховом пространстве, по-видимому, активно только разворачиваются.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ БИХЕВИОРИСТИЧЕСКОЙ *D*-СИСТЕМЫ

Везде далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ и $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — вещественные сепарабельные банаховы пространства, $L(Y, X)$ — банахово пространство с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(Y,\,X)}$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из Y в X (аналогично $L(X, X)$, $\|\cdot\|_{L(X,\,X)}$ и $L(Z, X)$, $\|\cdot\|_{L(Z,\,X)}$), T: $= [t_0, t_1]$ — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и ν — положительная мера, абсолютно непрерывная относительно μ и определенная на σ-алгебре $\wp_\nu$ всех ν-измеримых (лебеговски пополненных) подмножеств из T, через $p, q \in (1, \infty)$ обозначим сопряженные числа $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (т. е. $(p - 1)(q - 1) = 1$).

Пусть $(B, \|\cdot\|_B)$ — банахово пространство, $£_r(T, \nu, B)$, $r \in [1, \infty)$ — пространство всех интегрируемых (по Бохнеру [13, *с. 189*]) отображений f: $T \to B$ с нормой

$$\|f\|_{B,\,Lr} := \Big(\int_T \|f(\tau)\|_B^r \nu(d\tau)\Big)^{1/r}.$$

Как обычно, через $L_r(T, \nu, B)$ обозначим банахово фактор-пространство классов ν-эквивалентности в $£_r(T, \nu, B)$, через $AC(T, B) \subset £_1(T, \mu, B)$ — линейное множество всех абсолютно непрерывных функций (относительно меры μ).

Наделим $(B, \|\cdot\|_B)$-пространства дополнительной структурой.

Определение 1 [13, *с. 182*]. Банахово пространство $(B, \|\cdot\|_B)$ называют равномерно выпуклым, если каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условий $\|x\|_B \le 1$, $\|y\|_B \le 1$ и $\|x - y\|_B \ge \varepsilon$ $(x, y \in B)$ следует неравенство $\|x + y\|_B \le$ $\le 2(1 - \delta)$.

Замечание 1:

а) есть перефразировка: пространство $(B, \|\cdot\|_B)$ равномерно выпукло, если из $\|x\|_B \le 1 + \varepsilon$, $\|y\|_B \le$ $\le 1 + \varepsilon$, $\|(x + y)/2\|_B > 1$ следует $\|x - y\|_B \to 0$ вместе с $\varepsilon \to 0$;

б) любое гильбертово пространство $(G, \|\cdot\|_G)$ — равномерно выпукло согласно [13, *с. 182*] формуле $\|x + y\|_G^2 + \|x - y\|_G^2 = 2(\|x\|_G^2 + \|y\|_G^2)$, $\forall x, y \in G$;

в) всякое равномерно выпуклое пространство *рефлексивно* [13, *с. 182*]. ♦

Выделим к рассмотрению дифференциальные модели класса

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B^{\#}(t)u^{\#}(x(t)), \quad (1)$$

где $x \in AC(T, X)$ — решение Каратеодори (K-решение), $u \in L_q(T, \mu, Y)$ и $u^{\#}(x) \in L_q(T, \mu, Z)$ — программное и нелинейное позиционное управления, $(A, B, B^{\#}) \in L_p(T, \mu, L(X, X)) \times L_p(T, \mu, L(Y, X)) \times$ $\times L_p(T, \mu, L(Z, X))$; в целях удобства вектор-функцию $(x, u, u^{\#}(x))$ из системы (1) тоже будем называть K-решением, а тройку оператор-функций $(A, B, B^{\#})$, согласно терминологии из работы [10], — $(A, B, B^{\#})_p$-моделью дифференциальной системы (1).

В практических задачах апостериорного моделирования уравнений динамики сложных управляемых процессов понимание физической природы функционирования D-системы (порождающей наблюдаемые процессы) недостаточно для однозначного определения структуры ее математической модели (например, допустима ли линеаризация уравнений модели на основе полученных экспериментальных данных). В такой постановке возникает следующий методологический вопрос: какой из возможных структур модели следует отдать предпочтение при имеющихся входных и выходных данных? На самом деле, в большинстве практических случаев, ответ на означенный вопрос должен быть одним из первых шагов в построении математической модели D-системы. Следуя этой парадигме, предметом исследований сделаем две следующие задачи системного анализа бихевиористической D-системы.

• *Существование дифференциальной реализации на пучке процессов*: пусть

$$u^{\#}(\cdot)\colon AC(T, X) \to L_q(T, \mu, Z), \quad q \in (1, \infty),$$

$$\Pi_u^{\#} := \{(x, u, v) \in AC(T, X) \times L_q(T, \mu, Y) \times \times L_q(T, \mu, Z)\colon (x, u, v) = (x, u, u^{\#}(x))\}$$

и $N \subset \Pi_u^{\#}$ — фиксированное экзогенное поведение типа «вход — выход» исследуемой D-системы с нелинейным позиционным управлением $u^{\#}(x)$, заданным *a priori*. Определить необходимые и достаточные условия, при которых пучок динамических процессов N представляет K-решения некоторого уравнения (1); ограничений на Card N (мощность пучка N) не накладываем (например, Card $N \geq \aleph_0$ — алеф нуль).

• *Инвариантное расширение дифференциальной реализации*: пусть

$$N_1, N_2 \subset \Pi_u^{\#}, \quad N_1 \cap N_2 = \varnothing, \quad N_1 \neq \varnothing \neq N_2,$$

где N_1 и N_2 — фиксированные пучки динамических процессов с дифференциальными реализациями в классе моделей (1); ограничений на мощности множеств N_1 и N_2 не накладываем. Используя наличие реализаций для N_1 и N_2, определить геометрические условия, при которых «объединенный пучок» $N_1 \cup N_2$ также представляет семейство K-решений некоторого дифференциального уравнения (1).

Замечание 2. Означенные постановки дифференциальной реализации D-систем не исключают методологического положения, когда закон $u^{\#}(x)$ детерминируется не по принципу «state feedback», а характеризует существенную «нелинейную компоненту» в уравнениях динамики (1), моделируемых *a posteriori* [8], опираясь (и развивая) на результаты теории геометрии $u^{\#}(x)$-поверхностей [15, 16].

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА «ВХОД — ВЫХОД»

Для динамического процесса «вход — выход» $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_u^{\#}$ далее в теореме 1 дадим три эквивалентных решения задачи существования дифференциальной реализации $(x, u, u^{\#}(x))$, которыми легче пользоваться в приложениях, чем теоремой 2 из § 3; хотя последняя и превосходит первую своей аналитической общностью. Эти решения потребуют привлечения идей функционально-геометрического подхода в аксиоматическом построении теории идентификационных процессов [9]. Тем самым решение задачи *параметрической* идентификации, полученное в работе [9] применительно к управляемым динамическим объектам (1) в банаховом пространстве, примет общую *структурную* форму, при этом подтвердив универсальную математическую конструкцию для теоретико-системного анализа широкого класса непрерывных слабоструктурированных нестационарных систем (в том числе, динамических систем с распределенными параметрами [7]).

В работе [10] показано, что для конечномерного случая теория реализации существенно опирается на факт, что всякий линейный оператор ограничен. Для бесконечномерных систем ситуация оказывается более тонкой, что уже обсуждалось в статье [7], давая пищу геометрической интуиции. Кроме того, необходимо отметить, что в отличие от известных свойств (теорема Лебега) числовых функций произвольная σ-аддитивная μ-абсолютно непрерывная функция интервала T, принимающая значения в некотором банаховом пространстве, не обязательно должна быть представима в виде некоторого μ-интеграла Бохнера (см. пример [13, *с. 193*]); это обстоятельство оправдывает следующее определение [17, *с. 107*].

Определение 2. Функция f на T со значением в банаховом пространстве B называется первообразной, если существует функция $f' \in L_1(T, \mu, B)$, для которой $f(t) = f(t_0) + \int_T \chi_t(\tau) f'(\tau)\mu(d\tau)$, $\chi_t(\cdot)$ — *характеристическая функция интервала* $[t_0, t] \subset T$.

Замечание 3. Первообразная функция всегда абсолютно непрерывна, обратное верно, в частности, если B — равномерно выпукло; см. п. в) замечания 1 и работу [18, *с. 16*].

Лемма 1. *Пусть сепарабельное банахово пространство* B *равномерно выпукло, тогда любая функция* $y(\cdot) \in AC(T, B)$ *обладает производной* $dy(\cdot)/dt \in L_1(T, \mu, B)$ *и, значит, всякая функция класса* $AC(T, B)$ *является первообразной.* ♦

Теперь введем несколько важных конструкций. Обозначим через

$$\mathbf{L}_p := L_p(T, \mu, L(X, X)) \times L_p(T, \mu, L(Y, X)) \times \times L_p(T, \mu, L(Z, X))$$

банахово пространство классов μ-эквивалентности всех $(A, B, B^{\#})_p$-моделей (упорядоченных троек оператор-функций из уравнений (1)) с нормой:

$$\|(A, B, B^{\#})\|_{\mathbf{L}} := \Big(\int_T (\|A(\tau)\|_{L(X, X)^p} + \|B(\tau)\|_{L(Y, X)^p} + \|B^{\#}(\tau)\|_{L(Z, X)^p}\,\mu(d\tau)\Big)^{1/p}.$$

Через $(H_q, \|\cdot\|_H)$ обозначим пространство-произведение (с нормой):

$$L_q(T, \mu, X) \times L_q(T, \mu, Y) \times L_q(T, \mu, Z),$$

$$\|(g, w, v)\|_H := \Big(\int_T (\|g(\tau)\|_X^q + \|w(\tau)\|_Y^q + \|v(\tau)\|_Z^q\,\mu(d\tau)\Big)^{1/q}, \quad (g, w, v) \in H_q,$$

которое, как полное (в силу конструкции нормы $\|\cdot\|_H$), является банаховым. Далее, через $(L(H_q, X), \|\cdot\|_{L(H, X)})$ обозначим банахово пространство с операторной нормой всех линейных непрерывных операторов, действующих из H_q в X.

Пусть $(A, B, B^{\#}) \in \mathbf{L}_p$. Рассмотрим оператор ξ: $H_q \to X$, имеющий представление

$$\xi(g, w, v) := \int_T (A(\tau)g(\tau) + B(\tau)w(\tau) + B^{\#}(\tau)v(\tau))\mu(d\tau), \quad (g, w, v) \in H_q; \tag{2}$$

ясно, что $\xi \in L(H_q, X)$. По терминологии работы [9] оператор ξ — ξ_p-модель. Для обратного утверждения «$\zeta \in L(H_q, X) \Rightarrow$ *оператор* ζ *имеет аналитическое представление* (2)» потребуются дополнительные уточнения и рассуждения (см. далее лемму 2). Перейдем к деталям. Банахово пространство X по геометрии локально выпукло, следовательно (так как пространство сопряженное X, разделяет на X точки), интегральный оператор Γ: $\mathbf{L}_p \to L(H_q, X)$, осуществляющий согласно представлению (2) соответствие $\Gamma(A, B, B^{\#}) := \xi$, суть *линейный изоморфизм* между линейными множествами всех $(A, B, B^{\#})_p$- и ξ_p-моделями (т. е. дифференциальными и интегральными моделями), что позволяет относительно геометрических свойств оператора Γ утверждать большее:

Лемма 2. *Оператор* Γ: $\mathbf{L}_p \to L(H_q, X)$ *— линейный гомеоморфизм.* ♦

Чтобы приступить к решению поставленной ранее задачи дифференциальной реализации, прежде всего введем для экзогенного поведения $(x, u, u^{\#}(x))$ исследуемой D-системы две исключительно важные μ-непрерывные меры.

Определение 3. Для управляемого динамического процесса $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_u^{\#}$, протекающего в равномерно выпуклом пространстве X, введем на интервале T меры

$$\nu(S) := \int_S (\|x(\tau)\|_{X^q} + \|u(\tau)\|_{Y^q} + \|u^{\#}(\tau)\|_{Z^q})\mu(d\tau), \quad S \in \wp_\mu, \tag{3}$$

$$\nu\_(S) := \int_S \|dx(\tau)/d\tau\|_X \mu(d\tau), \quad S \in \wp_\mu,$$

которые (для определенности) будем называть бихевиористическими. ♦

Мера $\nu\_$ определена корректно, поскольку функция $x(\cdot)$ — первообразная в силу леммы 1. С другой стороны, в силу теоремы 1 [9] мера ν определяет важный в теории идентификации D-систем класс *сигнальных функций* $L_q(T, \nu, R)$. Далее считаем, что означенные меры лебеговски расширены до σ-алгебр $\wp_\nu$ и $\wp_{\nu\_}$.

Лемма 3. *Пусть X — равномерно выпукло и пусть* $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_u^{\#}$. *Тогда* $\{t \in T: dx(t)/dt = 0 \in X\} \supset \{t \in T: (x(t), u(t), u^{\#}(x(t))) = 0 \in X \times Y \times Z\}$ (mod μ).

Замечание 4. Важным обстоятельством леммы является тот факт, что в ней для вектор-функции $(x, u, u^{\#}(x))$ заведомо не оговаривается разрешимость задачи реализации. Если допустить *a priori*, что $(x, u, u^{\#}(x))$ — K-решение некоторой системы (1), то лемма 3 — прямое следствие конструкции уравнения (1). ♦

Под впечатлением от леммы 3 мы должны признать:

Следствие 1. *Для лебеговски пополненных мер* ν *и* $\nu\_$ *справедливо* $\wp_\mu \subset \wp_\nu \subset \wp_{\nu\_}$. ♦

В терминах бихевиористических мер введем линейные непрерывные операторы $æ$: $L_q(T, \nu, R) \to H_q$ и ζ: $L_1(T, \nu\_, R) \to X$, действующие согласно следующим правилам:

$$æ(\lambda) := \lambda \cdot (x, u, u^{\#}(x)), \quad \lambda \in L_q(T, \nu, R), \tag{4}$$

$$\zeta(\eta) := \int_T (\eta(\tau)dx(\tau)/d\tau)\mu(d\tau), \quad \eta \in L_1(T, \nu\_, R);$$

в теоретико-множественной модели [9] идентификации систем (1) операторы $æ$ и ζ — «конструкторы» пространств «входных» и «выходных» сигналов.

Есть много теорем [9], геометрических по характеру, о качественных свойствах сигнальных функций $L_q(T, \nu, R)$ и идентификационных базисах $æ(\Lambda)$, $\Lambda \subset L_q(T, \nu, R)$ в теоретико-множественной аксиоматической конструкции формального идентификационного процесса, но далее понадобится только следующий результат (для него можно временно забыть о сепарабельности и равномерной выпуклости X, Y, Z).

Лемма 4. *Пусть* $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_u^{\#}$, $æ$ — *оператор* (4) *и пусть* Ω — *полный образ в* H_q *оператора* $æ$. *Тогда* Ω — *замкнутое сепарабельное равномерно выпуклое подпространство в* H_q, *при этом конструкция* $æ$: $L_q(T, \nu, R) \to \Omega$ — *линейная изометрия.*

Замечание 5. Напрашивается полезное уточнение. Норма

$$\|(x, y, z)\|_U := (\|x\|_{X^q} + \|y\|_{Y^q} + \|z\|_{Z^q})^{1/q}$$

в произведении $X \times Y \times Z =: U$ наделяет его банаховой структурой. Следовательно, пространства H_q и $L_q(T, \mu, U)$ равны с точностью до метрического изоморфизма, осуществляющего естественное вложение H_q в $L_q(T, \mu, U)$. Поэтому с разумной долей условности можно считать, что имеет место вложение $\Omega \subset L_q(T, \mu, U)$, при этом, если *все* пространства X, Y, Z равномерно выпуклы, то сопряженным к $L_q(T, \mu, U)$ является пространство $L_p(T, \mu, U^*)$ (см. теорему 2 [13, *с. 182*]). ♦

Как показала лемма 1, у равномерно выпуклых пространств есть много хороших свойств, в частности, в теории реализации важен следующий геометрический факт:

Лемма 5. *При равномерно выпуклых* X, Y, Z *для любого замкнутого подпространства* $E \subset H_q$ *существует замкнутое подпространство* E' *такое, что* $E + E' = H_q$, $E \cap E' = \{0\}$.

В аналитической теории обратных задач системного анализа теорема 1 [9] «описывает» один из основных качественных результатов общей теории идентификации, а именно, в любом идентификационном процессе «параметрического восстановления» динамического объекта (1) семейство сигнальных функций характеризуется конструкцией обычного лебегова пространства $L_q(T, \nu, R)$. С другой стороны, развитие следствия [9] этой теоремы для задач структурной идентификации позволяет сформулировать важный результат (см. далее теорему 1), но уже в области качественной теории реализации непрерывных управляемых D-систем в классе квазилинейных дифференциальных объектов с уравнениями состояния (1).

Теорема 1. *Пусть* X, Y, Z *равномерно выпуклы. Тогда процесс* $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_u^{\#}$ *обладает реализацией* (1), *если и только если истинно хотя бы одно из условий*

$$\pounds_q(T, \nu, R) \subset \pounds_1(T, \nu\_, R);$$

$$\|dx/dt\|_X(\|x\|_{X^q} + \|u\|_{Y^q} + \|u^{\#}(x)\|_{Z^q})^{-1/q} \in$$
$$\in L_p(T, \mu, R);$$

$$\exists f \in L_p(T, \mu, R){:}\ \forall S \in \wp_\mu,$$
$$\nu\_(S) \le (\nu_+(S))^{1/p}(\nu(S))^{1/q},\ \nu_+(S) = \int_S |f(\tau)|^p \mu(d\tau);$$

здесь ν *и* $\nu\_$ — *лебеговски пополненные бихевиористические меры* (3).

Замечание 6. В условиях теоремы 1 имеют место следующие положения:

а) можно считать, что второе условие дано для оператора Релея — Ритца [3];

б) $\pounds_q(T, \nu, R) \subset \pounds_1(T, \nu\_, R)$ не гарантирует $L_q(T, \nu, R) \subset L_1(T, \nu\_, R)$ (в силу следствия 1), при этом вложение $\pounds_q(T, \nu, R) \subset \pounds_1(T, \nu\_, R)$ непрерывно [19, *с. 322*];

в) можно считать $\|dx(t)/dt\|_X(\|x(t)\|_{X^q} + \|u(t)\|_{Y^q} + \|u^{\#}(x(t))\|_{Z^q})^{-1/q} := 0$ в точках $t \in \{t \in T{:}\ (x(t), u(t), u^{\#}(x(t))) = 0 \in U\}$, если это множество ненулевой μ-меры (лемма 3);

г) реализация (1) для процесса $(x, u, u^{\#}(x))$ не обеспечивает (всегда!) *единственность* соответствующей ей $(A, B, B^{\#})_p$-модели (теорема 4 [9] и лемма 2);

д) для D-системы с поведением $(x, u) \in AC(T, X) \times L_q(T, \mu, Y)$ задачу дифференциальной реализации можно ставить (см. замечание 2) в терминах структурной идентификации нелинейного позиционного закона $u^{\#}(x)$, при котором для (x, u) в теореме 1 имеет место любое из трех условий реализации $(x, u, u^{\#}(x))$ в динамике (1), что можно интерпретировать как задачу построения аналитического представления уравнений состояния исследуемой динамической системы, в которых форма нелинейного члена $u^{\#}(x)$ посредством теоремы 1 через пару (x, u) и идентификационный базис Ω (см. лемму 4) подлежит «апостериорному конструированию».

Мы проанализировали три признака дифференциальной реализации локального (Card $N = 1$) поведения D-системы. Второй признак дает теоретически состоятельную интерпретацию поведения, полученного экспериментально как некоторого K-решения. Два признака (второй и третий) заслуживают дальнейшего развития, что станет предметом исследования в следующем параграфе.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ НА ПУЧКЕ ПРОЦЕССОВ

Как подчеркивалось ранее, основная задача качественной теории дифференциальной реализации систем (1) с нелинейным позиционным уравнением $u^{\#}(x)$ состоит в анализе геометрической структуры пучков динамических процессов на многообразии $\Pi_u^{\#}$. Таким образом, стратегия, которую следует выбрать, исходя из данной программы исследований, состоит в том, чтобы сосредоточиться на изучении фиксированного $N \subset \Pi_u^{\#}$ (фиксированное экзогенное поведение «вход — выход» исследуемой D-системы с позиционным управлением $u^{\#}(x)$). Желательно, чтобы при этом означенное семейство было «обширным» по Card N насколько это возможно (от конечного, более единицы, до континуума); для Card $N = 1$ данная проблема в части существования модели реализации полностью решена теоремой (касательно некоторых вычислительных схем при построении дифференциальной реализации см. алгоритмы из работ [20, 21]).

Обозначим через $L(T, \mu, R)$ пространство классов μ-эквивалентности всех вещественных μ-измеримых на T функций и пусть $\le_L$ — квазиупорядочение в $L(T, \mu, R)$ такое, что $\phi_1 \le_L \phi_2$, когда $\phi_1, \phi_2 \in L(T, \mu, R)$ и при этом $\phi_1(t) \le \phi_2(t)$ μ-почти всюду в T. Наименьшую верхнюю грань для подмножества $W \subset L(T, \mu, R)$ обозначим $\sup\limits_L W$, если она существует для подмножества W в структуре частичного упорядочения $\le_L$.

Для равномерно выпуклого пространства X введем (конечномерный прототип данной конструкции был введен в статье [10]) *энтропийный оператор Релея—Ритца* Ψ: $AC(T, X) \times L_q(T, \mu, Y) \times L_q(T, \mu, Z) \to L(T, \mu, R)$, построенный согласно правилам:

$$\Psi(g, w, v)(t) :=$$

$$:= \begin{cases} \|dg(t)/dt\|_X(\|g(t)\|_{X^q} + \|w(t)\|_{Y^q} + \|v(t)\|_{Z^q})^{-1/q}, \\ \text{если } (g(t), w(t), v(t)) \ne 0 \in U; \\ 0 \in R, \text{ если } (g(t), w(t), v(t)) = 0 \in U. \end{cases}$$

Пусть $N \subset \Pi_u^{\#}$, Card $N > 1$ и Q — некоторое (следовательно, любое) поглощающее множество в Span N; в геометрии поглощающего множества следуем работе [13, *с. 42*], т. е. $\cup\{\alpha Q\}_{\alpha > 0}$ = Span N. В такой постановке принцип максимума энтропии, выраженный теоремой 2 [10] в аналитическом решении задачи дифференциальной реализации поведения D-системы в классе конечномерных систем (1), трансформируется в его аналог для реализации поведения $N \subset \Pi_u^{\#}$ бесконечномерной D-системы:

Теорема 2. *Если X, Y, Z равномерно выпуклы, то семейство процессов $N \subset \Pi_u^{\#}$ — K-решения уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_L \Psi(Q) \in L_p(T, \mu, R)$, *или (что равносильно) существует такая μ-непрерывная положительная мера ν_+, что для произвольного подинтервала $T^*: = [t_*, t^*] \subset T$ и любой тройки $(g, w, v) \in Q$ справедливо неравенство $\nu\_(T^*) \le$ $\le (\nu_+(T^*))^{1/p}(\nu(T^*))^{1/q}$, где ν и $\nu\_$ — меры вида*:

$$\nu(S): = \int_S (\|g(\tau)\|_{X^q} + \|w(\tau)\|_{Y^q} + \|v(\tau)\|_{Z^q})\mu(d\tau),$$
$$S \in \wp_\mu,$$

$$\nu\_(S): = \int_S \|dg(\tau)/d\tau\|_X \mu(d\tau), \quad S \in \wp_\mu.$$

Замечание 7. Реализация фиксированной системой (1) семейств динамических процессов из $\Pi_u^{\#}$ — свойство *конечного характера*, что позволяет (при желании) с учетом теоремы 2 и леммы Тейхмюллера — Тьюки [23, *с. 28*] построить (определение 1 [10]) весьма элегантную *структурную* по Бурбаки аксиоматику D-систем с реализацией в классе моделей (1); аналитическая основа — построение для *заданного* закона $u^{\#}(\cdot)$: $AC(T, X) \to$ $\to L_q(T, \mu, Z)$ шкалы множеств, содержащей $\Pi_u^{\#}$, и «фиксация» в ней максимального в $\Pi_u^{\#}$ множества N с характеристическим (структурным) теоретико-множественным свойством вида $\exists \sup\limits_L \Psi(Q) \in$ $\in L_p(T, \mu, R)$. ♦

Качественное изучение дифференциальной реализации состоит, прежде всего, в выработке языка геометрической структуры пучков управляемых динамических процессов, поэтому естественно спросить: когда *два* пучка процессов имеют *одно* (общее) дифференциальное уравнение реализации, выраженной в терминах этого языка? Требуется, следовательно, установить некоторое геометрическое отношение на заданном (для начала, на конечном) семействе пучков моделируемых процессов. Далее исследуем «угловое отношение», которое индуцирует означенную структуру; назовем ее — *угловым инвариантным расширением* реализации D-системы.

Пусть G и M — произвольные (но фиксированные) ненулевые замкнутые подпространства в $(H_q, \|\cdot\|_H)$ такие, что $G \cap M = \{0\}$. Далее, через конструкцию

$$\gamma[G, M] := \inf\{\|(h/\|h\|_H - h'/\|h'\|_H)\|_H: h \in G\backslash\{0\}, h' \in M\backslash\{0\}\}$$

обозначим *угловое расстояние* [17, *с. 21*] между подпространствами G и M; при $q = 2$ функция углового расстояния $\gamma[\cdot, \cdot]$, через скалярное произведение в H_q, тесно связана [17, *с. 42*] с конструкцией угла в гильбертовом пространстве (см., например, теоремы 11.D [17, *с. 21*] и 14.C [17, *с. 21*], которые «коррелируют» с леммой 5).

Постановка углового расширения: пусть N_1, $N_2 \subset \Pi_u^{\#}$, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ — пучки динамических процессов с дифференциальной реализацией (1) (необязательно с одной и той же $(A, B, B^{\#})_p$-моделью для N_1 и N_2). Рассмотрим задачу, не прибегая к теореме 2, но используя (!) факт существования реализаций для N_1 и N_2, определить на языке угловой метрики $\gamma[\cdot, \cdot]$ условия, когда расширенный пучок $N := N_1 \cup N_2$ тоже характеризуется K-решениями некоторого дифференциального уравнения (1).

Замечание 8. Другой геометрический подход к решению задачи существования инвариантного расширения реализации можно развить, опираясь на свойство полуаддитивности оператора Релея — Ритца (развивая результат теоремы 1 [12]). ♦

Обозначим через E_1 и E_2 замыкания в пространстве H_q линейных многообразий $\mathrm{Span}\{\chi\cdot(x, u, u^{\#}(x)): \chi \in F, (x, u, u^{\#}(x)) \in N_1\}$ и $\mathrm{Span}\{\chi\cdot(x, u, u^{\#}(x)): \chi \in F, (x, u, u^{\#}(x)) \in N_2\}$, где $F \subset L(T, \mu, R)$ — семейство классов эквивалентности (mod μ) всех характеристических функций, индуцированных элементами σ-алгебры $\wp_\mu$.

Теорема 3. *Пусть пространства X, Y, Z равномерно выпуклы, а пучки процессов N_1, $N_2 \subset \Pi_u^{\#}$ определены ранее. Тогда семейство динамических процессов $N := N_1 \cup N_2$ состоит из K-решений некоторого уравнения* (1), *если* $\gamma[E_1, E_2] > 0$. ♦

Эта теорема позволяет, в частности, не используя впрямую теорему 2, исследовать свойство реализации D-системы $N \subset \Pi_u^{\#}$, $1 <\mathrm{Card}\, N \le k < \aleph_0$ через анализ угловых расстояний $\gamma\left[\sum_{j=1}^{i} E_j, E_{i+1}\right]$ на конечном семействе пучков, в частности, «одноэлементных» N_i, $i = 1, \ldots, k$, из N, прошедших предварительную апробацию (теорема 1: $\Psi(N_i) \in L_p(T, \mu, R)$) на предмет существования реализации (1) для каждого динамического процесса N_i; в данном контексте особый аналитический интерес приобретает постановка дифференциального моделирования слабоструктурированных D-систем, связанная с методологической позицией д) замечания 6. С учетом общих положений, высказанных в замечании 7, теорема 3 имеет как «контрпункт» положения г) замечания 6 по сути очевидное, хотя и парадоксальное, положение:

Следствие 2. *Пусть N_1 и N_2 ($N_1 \ne N_2$) — максимальные элементы в семействе подмножеств из $\Pi_u^{\#}$, обладающих реализацией* (1) *с нелинейным позиционным законом $u^{\#}(\cdot)$: $AC(T, X) \to L_q(T, \mu, Z)$. Тогда $\gamma[E_1, E_2] = 0$, при этом семейства процессов N_1 и N_2 не обладают общей $(A, B, B^{\#})_p$-моделью в реализации* (1) *с управлением $u^{\#}(x)$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная статья преследовала цель — развить общий концептуальный подход, сформулированный Р. Калманом [1, *с. 286*]: «Мы рассматриваем сейчас задачу реализации как попытку угадать уравнения движения динамической системы по поведению ее входных и выходных сигналов, или как задачу построения физической модели, объясняющей экспериментальные данные». В данном контексте системы (1), будучи необходимыми для содержательного разговора о нелинейной дифференциальной реализации, в целом не достаточны для этой цели, тем самым возникает потребность в принципах, гарантирующих более широкую свободу в обращении с дифференциальными моделями. Поэтому наметим (тезисно) исследования по дифференциальной реализации в бесконечномерном банаховом пространстве, на которые стоит обратить дальнейшее внимание: на реализацию с вполне непрерывной [13, *с. 382*] интегральной ξ_p-моделью (2), на стационарные модели $(A, B, B^{\#}) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X)$, на модели при $T = R$, на модели [23] с минимальной операторной нормой $\|\cdot\|_{L(H, X)}$, а при $d^{k-1}x/dt^{k-1} \in AC(T, X)$

и позиционном управлении $u^{\#}(x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), ..., x(t-\tau_r))$ с запаздываниями $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_r$ означенные постановки распространить на модели вида:

$$d^k x/dt^k = A_{k-1} d^{k-1} x/dt^{k-1} + ... + A_1 dx/dt + A_0 x + \\ + Bu + B^{\#}u^{\#}(x; \tau_1, \tau_2, ..., \tau_r),$$

$$(A_{k-1}, ..., A_0, B, B^{\#}) \in L_p(T, L(X, X)) \times ... \\ ... \times L_p(T, L(X, X)) \times L_p(T, L(Y, X)) \times \\ \times L_p(T, L(Z, X)).$$

В этой связи еще раз сошлемся на работу [21], в которой предложена конструктивная процедура построения нелинейных дифференциальных реализаций, позволившая, например, показать, как рассматривать уравнения Эйлера в качестве эмпирической экстраполяции дифференциальной модели динамики в реализации наблюдаемого пространственного вращательного движения твердого тела (см. так же постановку задачи структурной идентификации, означенную в замечании 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
2. *Willems J.C.* System Theoretic Models for the Analysis of Physical Systems // Ricerchedi Automatica. — 1979. — N 10. — P. 71—106.
3. *Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю.* Нестационарная реализация Калмана — Месаровича в конструкциях оператора Релея — Ритца // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 1. — С. 82—90.
4. *Van der Schaft A.J.* On realization of nonlinear systems described by higher-order differential equations // Mathematical Systems Theory. — 1987. — Vol. 19, N 3. — P. 239—275.
5. *Коровин С.К., Крищенко А.П., Четвериков В.Н.* Нелинейные отображения вход-выход и их минимальные реализации // Доклады РАН. — 2010. — Т. 434, № 5. — С. 604—608.
6. *Колмогоров А.Н.* Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений // Колмогоров А.Н. Избранные труды: т. 1. Математика и механика. — М., 2005. — С. 296—300.
7. *Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В.* От реализации Калмана—Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 137—157.
8. *Ahmed N.U.* Optimization and identification of systems governed by evolution equations on Banach space. — New-York: John Wiley and Sons, 1988. — 188 p.
9. *Данеев А.В., Русанов В.А.* К методам качественной теории идентификации сложных динамических систем // Доклады РАН. — 1997. — Т. 355, № 2. — С. 174—177.
10. *Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю.* Принцип максимума энтропии в структурной идентификации динамических систем. Аналитический подход // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 11. — С. 16—24.
11. *Русанов В.А.* К качественной теории реализации квазилинейных систем в гильбертовом пространстве // Доклады РАН. — 2008. — Т. 421, № 3. — С. 326—328.
12. *Русанов В.А.* Об одной алгебре множеств динамических процессов, обладающей дифференциальной реализаций в гильбертовом пространстве // Доклады РАН. — 2010. — Т. 433, № 6. — С. 750—752.
13. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
14. *Polderman J.W., Willems J.C.* Introduction to mathematical systems theory: A behavioral approach. — Berlin: Springer-Verlag, 1998. — 454 p.
15. *Розендорн Э.Р.* Теория поверхностей. — М.: МГУ, 1972. — 204 с.
16. *Антонова Л.В.* Вещественные *n*-поверхности в пространствах $R_n(e)$ // Вестник Бурятского гос. ун-та. — 2010. — № 9. — С. 204—209.
17. *Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.
18. *Barbu V.* Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space. — Leyden: Ncordhoff International Publishing, 1976. — 352 p.
19. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. — М.: Наука, 1966. — 500 с.
20. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. — 1952. — Т. XVI, № 6. — С. 659—670.
21. *Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю.* К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем // Прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 74, вып. 1. — С. 119—132.
22. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.
23. *Данеев А.В., Русанов В.А.* К проблеме построения сильных дифференциальных моделей управления с минимальной операторной нормой. I, II // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 144—153; № 2. — С. 170—178.

Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком РАН С.Н. Васильевым.

Русанов Вячеслав Анатольевич — д-р физ.-мат. наук,
гл. науч. сотрудник, Институт динамики систем
и теории управления СО РАН, г. Иркутск,
✉ V.Rusanov@mail.ru,

Антонова Лариса Васильевна — канд. физ.-мат. наук, доцент,
Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ,
✉ antonov vi 52@mail.ru,

Данеев Алексей Васильевич — д-р. техн. наук, проф.,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
✉ daneev@mail.ru.