УДК 519.853

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ ВЗАИМОЗАВИСИМЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

З.Г. Руденко

Рассмотрена задача формирования оптимального портфеля инвестиционных проектов, взаимозависимых по эффекту. Предложен алгоритм нахождения оптимального решения задачи, основанный на применении метода сетевого программирования. На примере рассмотрена работа предложенного алгоритма.

Ключевые слова: математическое программирование, управление портфелем проектов, взаимозависимые проекты.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из задач процесса стратегического планирования заключается в разработке инвестиционной стратегии, определяющей долгосрочные инвестиционные цели деятельности предприятия и механизмы реализации целей с учетом возможных изменений внешней и внутренней среды. Инвестиционная стратегия устанавливает приоритеты направлений и формы инвестиционной деятельности, характер формирования инвестиционных ресурсов и последовательность этапов реализации долгосрочных инвестиционных целей, границы возможной инвестиционной активности организации и формализованную систему критериев, по которым осуществляются планирование, реализация и оценка инвестиционной деятельности [1]. Эффективная реализация инвестиционной стратегии — один из ключевых факторов успешного развития предприятия, который в долгосрочной перспективе обеспечивает достижение поставленных стратегических целей. Инструментом реализации инвестиционной стратегии служит формирование инвестиционной программы, которая состоит из совокупности проектов, обладающих определенными характеристиками: описание объектов инвестирования, объемы требуемого финансирования и необходимых ресурсов, предполагаемые результаты реализации. В силу существования бюджетных и ресурсных ограничений появляется необходимость решать задачу предварительного выбора проектов в целях формирования оптимальной инвестиционной программы. Дополнительная сложность данной задачи заключается в том, что на практике инвестиционные проекты не являются независимыми, а оказывают влияние друг на друга. В зависимости от характеристик проектов и оказываемого влияния могут быть выделены следующие типы взаимозависимости.

Зависимость по эффекту наблюдается при увеличении или уменьшении итогового результата реализации нескольких проектов относительно суммы эффектов каждого проекта в отдельности. В целях иллюстрации рассмотрим два проекта по выпуску нового товара на рынок. Если товары комплементарные, то объем общих продаж превысит сумму индивидуальных продаж каждого товара. Обратная ситуация наблюдается у взаимозаменяемых товаров, одновременный выпуск которых уменьшает суммарный объем индивидуальных продаж.

Зависимость по ресурсам существует у проектов, одновременная реализация которых может уменьшить размер требуемых ресурсов. Примером служит исследовательские проекты, выполняемые на одном лабораторном оборудовании, расходы на приобретение которого могут быть разделены между проектами.

Технологическая зависимость наблюдается при необходимости одновременного выполнения нескольких проектов или взаимного исключения проектов по технологическим требованиям. Одним из случаев технологической зависимости являются рекомендательные зависимости, при нарушении которых могут изменяться первоначальные характеристики проектов (продолжительность работ, затраты, эффект).

Задача формирования портфеля взаимозависимых проектов рассмотрена рядом зарубежных авторов. В работе [2] проанализирована взаимозависимость между ИТ-проектами и разработана модель оптимизации распределения ресурсов между зависимыми проектами в рамках разработки ИТ системы. Авторами работы [3] рассмотрена задача управления исследовательскими проектами в процессе трансформации научной идеи в конечный продукт и изложен подход к описанию зависимости по ресурсам, технологической зависимости и влияния фактора бизнес-среды, отражающего воздействие изменения рыночных условий на распределение ресурсов между проектами. Подход основан на применении метода тест-кейсов в совокупности с метрикой DEA, оценивающей показатели выполнения проекта. В работе [4] исследован процесс отбора проектов при создании самолета. В целях описания взаимозависимостей между проектами введена квадратичная матрица зависимостей, элементы которой отражают доход проекта, зависящий от реализации другого проекта.

В российской литературе вопросы взаимного влияния проектов также нашли отражение в ряде публикаций. В работах [5, 6] анализируются задачи календарного планирования проекта, учитывающие порядок выполнения работ проекта. Модель взаимодействия между инновационными проектами, основанная на учете экономических связей между проектами через зависимость от общих ресурсов, рассмотрена в публикации [7]. Задача оптимизации портфеля проектов, взаимозависимых по эффекту, и задача оптимизации проектов с рекомендательными зависимостями — ограничениями на порядок выполнения проектов, исследовались в работе [8].

В общем виде оптимизация портфеля взаимозависимых проектов представляет собой задачу невыпуклого квадратичного программирования, которая относится к классу NP-трудных [9]. Существующие подходы к решению задач квадратичной оптимизации могут быть разделены на две группы: основанные на модификации алгоритмов решения задач выпуклой оптимизации и первоначально разработанные для решения дискретных задач оптимизации. К первой группе относятся метод выделения активных ограничений [10] и метод поиска внутренней точки [11]. Оба метода являются итерационными и состоят в построении последовательности точек $x_{k+1} = x_k + q_k p_k$, которая сходится к решению исходной задачи. Основной недостаток данных методов заключается в том, что их применение гарантирует нахождение лишь локального оптимума. Для поиска глобального оптимального решения применяются подходы второй группы, которые заключаются в построении оценки сверху для исходной задачи и ее применении в адаптированных к непрерывному случаю методах дискретной оптимизации: метод ветвей и границ, метод отсечений. Среди существующих подходов к получению оценки сверху могут быть выделены линеаризация целевой функции [12], лагранжева [13] и полуопределенная релаксация [14]. Трудности в применении данных подходов заключаются в значительном увеличении числа переменных в случае линеаризации и необходимости привлечения трудоемких методов недифференцируемой оптимизации в случае двух остальных подходов.

В настоящей статье предложен алгоритм нахождения оценки сверху для квадратичной оптимизационной задачи, основанный на применении метода сетевого программирования [15]. Данный метод первоначально разрабатывался для решения дискретных задач оптимизации. Показана возможность его применения для решения непрерывной оптимизационной задачи и получено достаточное условие существования оптимального решения оценочной задачи.

1. ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ВЗАИМОЗАВИСИМЫХ ПРОЕКТОВ

Рассмотрим n инвестиционных проектов (выпуск новых продуктов). Предположим, что параметры в задаче нормализованы. Обозначим x_i — объем финансирования i-го проекта. Заданы ограничения:

— максимальный объем финансирования i-го проекта, определяемый возможностями производства и рыночным спросом;

— размер постоянных затрат на разработку и освоение i-го проекта;

— суммарный объем финансирования не превышает значения C.

Эффект (доход) от реализации i-го проекта равен $b_i x_i$, где b_i — рентабельность i-го проекта.

Для описания взаимосвязей между проектами введем $n \times n$ матрицу взаимозависимости $[a_{ij}]$. Значение элемента $a_{ij} \ge 0$ показывает дополнительный эффект, который получает проект i от успешной реализации проекта j. Если $a_{ij} = 0$, то эффект от реализации проекта i не зависит от проекта j. Диагональные элементы матрицы a_{ii} равны 0. Таким образом, суммарный эффект для i-го проекта равен $\sum_{j \in A} a_{ij}$, где A — множество проектов, принятых к реализации.

Задача формирования инвестиционного портфеля взаимозависимых проектов может быть записана в виде:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right) \xrightarrow[\{x_i\},\, i = \overline{1, n}]{} \max, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le C, \qquad (2)$$

$$0 \le x_i \le 1, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

где c_i — коэффициенты, полученные в результате нормализации величин x_i, $i = \overline{1, n}$.

Для применения метода сетевого программирования представим элементы a_{ij} в виде суммы u_{ij} и v_{ij}:

$$a_{ij} = u_{ij} + v_{ij}; \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Если выполняется условие (3), то относительно параметров u_{ij} и v_{ij} справедливо неравенство:

$$a_{ij}x_ix_j \le u_{ij}x_i + v_{ij}x_j; \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

которое следует из того, что

$$u_{ij}x_ix_j \le u_{ij}x_i,\ v_{ij}x_ix_j \le v_{ij}x_j \text{ при } 0 \le x_i \le 1,\ i, j = \overline{1, n}.$$

Учитывая соотношение (5), запишем задачу линейного программирования, решение которой является оценкой сверху для исходной задачи:

$$\max_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} x_i \left[\sum_{j=1}^{n} (u_{ij} + v_{ji}) + b_i \right], \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le C, \tag{7}$$

$$0 \le x_i \le 1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Для нахождения точного оптимального решения задачи (6)—(8) может быть применен «жадный алгоритм», заключающийся в выборе проектов с максимальным отношением эффекта к затратам [5]. Для этого упорядочим x_i по убыванию данного отношения (относительного эффекта):

$$\frac{1}{c_i} \sum_{j=1}^{n} [(u_{ij} + v_{ji}) + b_i]. \tag{9}$$

Пусть первые k значений x_i, удовлетворяющие неравенству (7), равны 1, а остальные $n - k$ значений — 0 (формально k-е значение может получиться меньше 1, но поскольку решается задача получения оценки сверху, то оно округляется до 1). Тогда в оптимальном решении значение целевой функции (6) является оценкой сверху для исходной задачи (1)—(3) и равно

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{n} (u_{ij} + v_{ji}) + b_i \right]. \tag{10}$$

Поставим задачу выбора параметров u_{ij} и v_{ij}, минимизируют полученную оценку:

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{n} (u_{ij} + v_{ji}) + b_i \right] \xrightarrow[\{u_{ij},\, v_{ij}\},\, i = \overline{1, n}]{} \min, \tag{11}$$

$$a_{ij} = u_{ij} + v_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Задача (10) — (12) является обобщенной двойственной для исходной задачи, и в работе [15] показано, что она выпуклая. Определим достаточное условие существования оптимального решения данной задачи.

Утверждение. *Если существуют значения* u_{ij} и v_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, *удовлетворяющие условию* (12), *при которых выполняются соотношения*

$$\frac{1}{c_i} \left[\sum_{j=1}^{n} (u_{ij} + v_{ji}) + b_i \right] = \frac{1}{c_j} \left[\sum_{i=1}^{n} (u_{ji} + v_{ij}) + b_j \right],$$

$$i, j = \overline{1, n}, \tag{13}$$

то данные значения являются оптимальным решением задачи (10)—(12).

Доказательство. Введем обозначение:

$$\sum_{j=1}^{n} (u_{ij} + v_{ji}) + b_i = s_i.$$

Предположим, что в оптимальном решении задачи (6)—(8) существует проект, относительный эффект которого на δ превосходит эффект p от каждого из остальных $n - 1$ проектов. По результатам упорядочения по отношению (9) данный проект перейдет на первую позицию, и в этом случае значение функции (10) равно

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = \delta c_1 + pC. \tag{14}$$

Пусть рассматриваемый проект взаимосвязан с $m - 1$ проектами портфеля. Поскольку у всех проектов, за исключением первого, одинаковый относительный эффект p, то не нарушая общности предположим, что данные $m - 1$ проектов занимают позиции со второй по m. Уменьшим на небольшую величину относительный эффект $(p + \delta)$ первого проекта путем изменения s_i так, чтобы эффект первого проекта не снизился ниже p:

$$\frac{s_1 - \Delta_1}{c_1} = r_1, \quad \frac{s_i + \Delta_i}{c_i} = r_i, \quad i = \overline{2, m},$$

$$\Delta_1 - \sum_{i=2}^{m} \Delta_i = 0, \tag{15}$$

где r_i — относительный эффект, полученный после изменения s_i, $i = \overline{1, m}$.

Снова упорядочим проекты по убыванию отношения (9), при этом рассматриваемые m проектов останутся на первых m позициях. Если $m > k$, то значение функции (10) в силу соотношения (15) уменьшится по сравнению с величиной (14), что противоречит предположению об оптимальности исходного решения:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = \delta c_1 - \Delta_1 + \sum_{j=2}^{k} \Sigma\Delta_j + pC < \delta c_1 + pC.$$

При $m \le k$ повторим описанный выше подход к перераспределению относительного эффекта, но уже с другим проектом. Перераспределение эффекта можно проводить до тех пор, пока не выполнится условие (13). ♦

Решение задачи (6)—(8) может служить в качестве оценки сверху для подмножества решений при применении метода ветвей и границ. При нахождении решения задачи (6)—(8), в котором значе-

Оптимальные решения

x_1	x_2	x_3	$f(x)$	$f_0(x)$
1	1	0	14	14
1	0	1	14	12
0	1	1	14	10

ния целевой функции оценочной и исходной задач совпадают, полученное решение является оптимальным решением задачи (1)—(3). Далее покажем на примере работу предложенного алгоритма.

2. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу оптимизации:

$$(7x_1 + 3x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2 + 2x_2x_3 + 4x_3) \xrightarrow[\{x_i\},\ i = \overline{1,3}]{} \max, \quad (16)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 2, \quad (17)$$

$$0 \le x_{1,2,3} \le 1. \quad (18)$$

Представим коэффициенты целевой функции в виде (4):

$$u_{12} + v_{12} = 3; \quad u_{13} + v_{13} = 1; \quad u_{23} + v_{23} = 2. \quad (19)$$

Прировняем коэффициенты согласно условию (13):

$$7 + u_{12} + u_{13} = 4 + v_{12} + u_{23} = 4 + v_{13} + v_{23}. \quad (20)$$

После подстановки условий (19) в выражение (20) получим:

$$u_{12} = 0, \quad v_{12} = 2, \quad u_{13} = 0, \quad v_{13} = 1, \quad u_{23} = 0, \quad v_{23} = 2.$$

Задача получения оценки сверху (6)—(8) для исходной задачи:

$$(7x_1 + 7x_2 + 7x_3) \xrightarrow[\{x_i\},\ i = \overline{1,3}]{} \max, \quad (21)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1,\ 0 \le x_{1,2,3} \le 1. \quad (22)$$

Оптимальные решения задачи (21), (22) приведены в таблице, где $f(x)$ — значение целевой функции задачи (21), (22) в оптимальном решении, $f_0(x)$ — значение целевой функции исходной задачи (16)—(18).

Поскольку для $\{x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 0\}$ значение $f(x)$ совпадает с $f_0(x)$, то данное решение является оптимальным решением исходной задачи (16)—(18).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен алгоритм решения задачи оптимизации портфеля инвестиционных проектов с учетом их взаимного влияния на итоговый эффект, получаемый от реализации сформированного портфеля проектов. Алгоритм основан на применении метода сетевого программирования к решению задачи квадратичной оптимизации. В качестве перспективных направлений дальнейших исследований представляются:

— разработка алгоритма решения обобщенной двойственной задачи;

— применение сетевых методов для решения задачи формирования оптимального портфеля проектов с учетом наличия нескольких типов взаимозависимостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лахметкина Н.И.* Инвестиционная стратегия предприятия: учеб. пособие. — 7-е изд., стер. — М.: КНОРУС, 2014. — 232 с.
2. *Santhanam R., Kyparisis G.J.* A decision model for interdependent information system project selection // European Journal of Operational Research. — 1996. — Vol. 89. — P. 380—399.
3. *Verma D., Sinha K.K.* Toward a theory of project interdependencies in high tech R & D environments // Journal of Operations Management. — 2002. — Vol. 20. — P. 451—468.
4. *Dickinson M.W., Thornton A.C., Graves S.* Technology Portfolio Management: Optimizing Interdependent Projects over Multiple Time Periods // IEEE Trans. on Engineering Management. — 2001. — Vol. 48, N 4. — P. 518—527.
5. *Математические* основы управления проектами: учеб. пособие / С.А. Баркалов, В.И. Воропаев, Г.И. Секлетова и др. — М.: Высшая школа, 2005. — 423 с.
6. *Прикладные* задачи управления строительными проектами / В.И. Алферов, С.А. Баркалов, В.Н. Бурков и др. — Воронеж: Центрально-Черноземное кн. изд-во, 2008. — 765 с.
7. *Шомова Е.Н.* Модель формирования оптимального портфеля взаимозависимых инновационных проектов // Управление проектами и программами. — 2011. — № 4.
8. *Недовесов М.В., Руденко З.Г.* Формирование оптимального портфеля взаимозависимых проектов и его оптимизация по времени // Проблемы управления. — 2012. — № 4. — С. 26—31.
9. *Pardalos P.M., Vavasis S.A.* Quadratic programming with one negative eigenvalue is NP-hard // Journal of Global Optimization. — 1991. — Vol. 1, iss. 1. — P. 15—22.
10. *Wong E.* Active-Set Methods for Quadratic Programming / Phd thesis, University of California, San Diego, 2011.
11. *Absil P.A., Tits A.L.* Newton-KKT interior-point methods for indefinite quadratic programming // Computational Optimization and Applications. — 2007. — Vol. 36, iss. 1. — P. 5—41.
12. *Vandenbussche D., Nemhauser G.L.* A branch-and-cut algorithm for nonconvex quadratic programs with box constraints // Math. Program. — 2005. — Vol. 102, iss. 3. — P. 559—575.
13. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация // Киев: Наукова думка, 1989. — 209 с.
14. *Burer S., Vandenbussche D.* A finite branch-and-bound algorithm for nonconvex quadratic programming via semidefinite relaxations // Math. Program. — 2008. — Vol. 113, iss. 2. — P. 259—282.
15. *Буркова И.В.* Метод сетевого программирования в задачах нелинейной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 10. — С. 15—21.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Руденко Зоя Геннадьевна — аспирант,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва, ✉ zoya.rudenko@gmail.com.