УДК 62-50

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РАЗРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.И. Рубан

С помощью вариационного метода построена общая схема расчета коэффициентов чувствительности (составляющих градиента от показателя качества работы системы к постоянным параметрам) для многомерных нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, имеющими разрывы правых частей и фазовых координат.

Ключевые слова: коэффициент чувствительности, вариационный метод, сопряженные уравнения, разрывная динамическая система, запаздывающий аргумент.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема расчета показателей чувствительности динамических систем одна из основных, возникающих при синтезе и анализе алгоритмов идентификации, оптимизации и управления [1—6]. Наиболее употребительны показатели чувствительности первого порядка [1—3]. В дальнейшем мы будем рассматривать только коэффициенты чувствительности первого порядка.

Векторный выход динамической модели объекта $x(t) = x(t, \alpha)$ неявно зависит от вектора искомых параметров α. Рассматривается функционал I, построенный на основе траектории $x(t)$, $t \in [t_0, t^1]$. Под коэффициентами чувствительности (КЧ) первого порядка к постоянным параметрам α понимают набор производных $\partial I/\partial\alpha_i$, $i = \overline{1, m}$, расположенных в виде вектор-строки $dI/d\alpha$ или в виде вектор-столбца $(dI/d\alpha)^T \equiv \nabla_\alpha I$. Коэффициенты чувствительности — это коэффициенты линейной связи между первой вариацией функционала δI и вариацией постоянных параметров: $\delta I = (dI/d\alpha)\delta\alpha$.

При наличии только постоянных искомых параметров α прямое дифференцирование функционалов качества I приводит к необходимости знания функций чувствительности $W(t)$; $W(t)$ — это матрица линейной связи первой вариации выхода динамической модели с вариацией параметров $\delta x(t) = W(t)\delta\alpha$. Например, для функционала $I = \int_{t_0}^{t^1} f_0(x(t), \alpha, t)dt$ имеем следующий вектор КЧ: $dI/d\alpha = \int_{t_0}^{t^1} [\partial f_0/\partial x) W(t) + \partial f_0/\partial\alpha]dt.$ Для получения матрицы $W(t)$ требуется решить громоздкую систему динамических уравнений — уравнений чувствительности. В каждом j-м столбце матрицы W стоят функции чувствительности $dx(t)/d\alpha_j$ (по отношению к j-му скалярному параметру вектора α), которые удовлетворяют векторному уравнению (если x — вектор), получаемому из исходной динамической модели (для x) дифференцированием ее по параметру α_j [1—3].

Для сравнительно простых классов гладких динамических систем показано [6], что избавиться от решения большого числа уравнений чувствительности можно путем перехода к решению сопряженных уравнений — сопряженных по отношению к исходным динамическим уравнениям объекта. Метод получения сопряженных уравнений, предложенный в работе [6], основан на рассмотрении уравнений чувствительности (для функций чувствительности). Он достаточно громоздок и развития не получил. Его сложность возрастает для разрывных динамических систем [1, *с. 151—157*]. Замкнутых результатов здесь пока не получено.

Для синтеза сопряженных уравнений с соответствующими краевыми условиями, а также формул расчета КЧ и функционалов чувствительности был найден простой по структуре вариационный метод, восходящий к работам Лагранжа, Гамильтона и Эйлера. Он был применен для расчета оптимальных управлений в динамических системах, описываемых гладкими обыкновенными дифференциальными или разностными уравнениями [5].

В работах [3, 4] метод применен для определения КЧ по отношению к постоянным и переменным параметрам для достаточно сложных дискретных динамических систем с распределенными и чистыми запаздываниями, а также для непрерывных динамических систем с чистыми запаздываниями. В предлагаемой работе вариационный метод расчета КЧ применяется к многомерным нелинейным динамическим системам, описываемым векторными нелинейными дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, а также с разрывными правой частью и фазовыми координатами [1—4]. Рассмотрены достаточно общие случаи, когда искомые параметры входят в функционал качества, модель измерительного устройства, правые части дифференциальных уравнений, начальные условия, уравнения разрывов фазовых координат, условия переключения. От параметров зависят начальный t_0, конечный t^1 моменты времени и чистое запаздывание τ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются объекты [7, 8], описываемые на различных интервалах времени различными векторными дифференциальными уравнениями [2, 3] с одним зависящим от α запаздывающим аргументом $\tau > 0$:

$$\begin{gathered}\dot x(t) = f(x(t), x(t-\tau), \alpha, t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^1,\\ x^+(t_0) = x_0(t_0, \alpha),\\ f(\cdot) = f_i(x(t), x(t-\tau), \alpha, t), \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i,\\ i = 1, 2, ..., n,\\ f(\cdot) = f_{n+1}(x(t), x(t-\tau), \alpha, t), \quad t_n \leqslant t \leqslant t^1,\\ x(t) = \psi(\alpha, t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0).\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь x — вектор фазовых координат, $f_i(\cdot)$, $x_0(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ — векторы непрерывных дифференцируемых по всем аргументам функций.

Моменты t_i смены одного уравнения другим (*моменты переключения*) определяются условиями (*условиями переключения*):

$$g_i(x_i^-, t_i, \alpha) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad t_0 = t_0(\alpha). \tag{2}$$

Скалярные функции $g_i(\cdot)$ считаем непрерывно дифференцируемыми по всем аргументам. Неявные уравнения (2) разрешимы относительно t_i, т. е. $\partial g_i(\cdot)/\partial t_i \neq 0$.

В моменты переключения вектор x претерпевает разрывы, определяемые уравнениями

$$\begin{gathered}x_i^+ = x_i^- + \Delta_i(x_i^-, t_i, \alpha), \quad i = \overline{1, n},\\ x_0^+ = x_0(t_0, \alpha).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\Delta_i(\cdot)$ — также непрерывно дифференцируемые векторные функции; $x_i^- = x(t_i - 0)$, $x_i^+ = x(t_i + 0)$ — значения вектора x до и после момента разрыва. В уравнениях (3) принята удобная для исследования аддитивная форма описания разрывов фазовых координат. Если $\Delta_i = 0$, то координата $x(t)$ непрерывна в точке t_i.

Модель измерительного устройства задана в виде

$$\eta(t) = \eta(x(t), \alpha, t), \quad t \in [t_0, t^1], \tag{4}$$

где $\eta(\cdot)$ — также непрерывная, непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Размерности векторов x и η могут быть различны.

На выходных координатах измерительного устройства построен функционал качества работы динамической системы

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t^1} f_0(\eta(t), \alpha, t)dt + I_1(\eta(t^1), \alpha, t^1). \tag{5}$$

Условия для функций $f_0(\cdot)$, $I_1(\cdot)$ те же, что и для функций f_i, x_0, ψ, g_i, Δ_i, η.

В целях упрощения соответствующих выводов при сохранении общности во всех преобразованиях (1)—(5) присутствует один и тот же вектор параметров α. Если в уравнениях (1)—(5) параметры различны, то их можно формально объединить в один вектор α, использовать полученные результаты, а затем, учитывая структуру вектора α, сделать соответствующие упрощения.

При получении результатов используем очевидные обозначения: $f(t) \equiv f(x(t), x(t-\tau), \alpha, t)$, $f_0(t) \equiv$ $\equiv f_0(\eta(t), \alpha, t)$, $\eta(t) \equiv \eta(x(t), \alpha, t)$, $I_1(t^1) \equiv I_1(\eta(t^1), \alpha, t^1)$.

2. РАЗРЫВНАЯ СИСТЕМА

Дополняем функционал качества (5) ограничениями-равенствами (1) с использованием множителей Лагранжа $\lambda(t)$, $t \in [t_0, t^1]$, λ_0, $\bar\lambda(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ и получаем

$$\begin{aligned}I = I(\alpha) + \int_{t_0}^{t^1} \lambda^T(t)(f(t) - \dot x(t))dt + \lambda_0^T(x_0(t_0, \alpha) -\\ - x^+(t_0)) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \bar\lambda^T(t)(\psi(\alpha, t) - x(t))dt.\end{aligned} \tag{6}$$

В расширенном функционале (6) интегрирование по частям слагаемого с производной $\dot x(t)$ выполняем с учетом моментов разрыва t_0, t_i, $i = \overline{1, n}$, а также точек $t_0 + \tau$, $t_i + \tau$, $i = \overline{1, n}$, попадающих в интервал работы системы, в которых терпит разрыв правая часть модели из-за разрыва фазовых координат $x(t-\tau)$:

$$-\int_{t_0}^{t^1}\lambda^T(t)\dot x(t)dt = \int_{t_0}^{t^1}\dot\lambda^T(t)x(t)dt - \lambda^T(t^1-0)x(t^1-0) +$$

$$+\lambda^T(t_0+0)x(t_0+0) + \sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i+0)x(t_i+0) -$$

$$-\lambda^T(t_i-0)x(t_i-0)] + \sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i+\tau+0)x(t_i+\tau+0) -$$

$$-\lambda^T(t_i+\tau-0)x(t_i+\tau-0)]1(t^1-t_i-\tau)\varepsilon_i. \quad (7)$$

Компонента $\Sigma[\cdot]$ обусловлена моментами разрыва t_i, $i=\overline{1,n}$. Она позволяет найти условия переключения множителей Лагранжа в точках разрыва. Вторая компонента $\Sigma[\cdot]1(\cdot)\varepsilon_i$ аналогично обеспечивает получение условий переключения множителей Лагранжа в точках $t_0+\tau$, $t_i+\tau$, $i=\overline{1,n}$. Если некоторая из этих особых точек совпадает с точкой разрыва t_j, то соответствующее слагаемое второй компоненты отсутствует. В этом случае введенный коэффициент $\varepsilon_i = 0$. В остальных случаях коэффициент $\varepsilon_i = 1$.

После подстановки выражения (7) в расширенный функционал (6) и учета вида функционала (5) получаем, что

$$I = I_1(t^1) - \lambda^T(t^1)x(t^1) + \int_{t_0}^{t^1}[f_0(t) + \lambda^T(t)f(t) +$$

$$+\dot\lambda^T(t)x(t)]dt + (\lambda^T(t_0) - \lambda_0^T)x(t_0) + \lambda_0^T x_0(t_0, \alpha_0) +$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\bar\lambda^T(t)[\psi(\alpha, t) - x(t)]dt + \sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i+0)x(t_i+0) -$$

$$-\lambda^T(t_i-0)x(t_i-0)] + \sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i+\tau+0)x(t_i+\tau+0) -$$

$$-\lambda^T(t_i+\tau-0)x(t_i+\tau-0)]1(t^1-t_i-\tau)\varepsilon_i. \quad (8)$$

При вычислении первой вариации расширенного функционала (8) в дополнение к результатам непрерывного варианта [6] находим первую вариацию по x и по t_i, $i=\overline{1,n}$, дополнительных компонент, а также по t_i, $t_i+\tau$, $i=\overline{1,n}$, первой интегральной составляющей в функционале (8). В результате первая вариация компоненты $\Sigma[\cdot]$ в нем имеет вид

$$\delta\Sigma[\cdot] = \sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i+0)\delta x(t_i+0) -$$

$$-\lambda^T(t_i-0)\delta x(t_i-0)] + \sum_{i=1}^{n}[\dot\lambda^T(t_i+0)x(t_i+0) -$$

$$-\dot\lambda^T(t_i-0)x(t_i-0)]\delta t_i =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i+0)(E+\partial\Delta_i/\partial x_i^-) - \lambda^T(t_i-0)]\delta x(t_i-0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda^T(t_i+0)\frac{\partial\Delta_i}{\partial t_i}\delta t_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda^T(t_i+0)\frac{\partial\Delta_i}{\partial\alpha}\delta\alpha +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\dot\lambda^T(t_i+0)x(t_i+0) - \dot\lambda^T(t_i-0)x(t_i-0)]\delta t_i.$$

Здесь E — единичная матрица. Связь между вариациями $\delta x(t_i+0)$ и $\delta x(t_i-0)$ была найдена из уравнения разрыва фазовых координат (3):

$$\delta x(t_i+0) = \delta x(t_i-0) + \frac{\partial\Delta_i(x_i^-, t_i, \alpha)}{\partial x_i^-}\delta x(t_i-0) +$$

$$+\frac{\partial\Delta_i(\cdot)}{\partial t_i}\delta t_i + \frac{\partial\Delta_i(\cdot)}{\partial\alpha}\delta\alpha.$$

Первая вариация компоненты $\Sigma[\cdot]1(\cdot)\varepsilon_i$ в функционале (8) вычисляется аналогично:

$$\delta\Sigma[\cdot]1(\cdot)\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i+\tau+0) -$$

$$-\lambda^T(t_i+\tau-0)]1[t^1-t_i-\tau)\varepsilon_i\delta x(t_i+\tau) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\dot\lambda^T(t_i+\tau+0)x(t_i+\tau+0) -$$

$$-\dot\lambda^T(t_i+\tau-0)x(t_i+\tau-0)]1(t^1-t_i-\tau)\varepsilon_i\delta t_i +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\dot\lambda^T(t_i+\tau+0)x(t_i+\tau+0) -$$

$$-\dot\lambda^T(t_i+\tau-0)x(t_i+\tau-0)]1(t^1-t_i-\tau)\varepsilon_i\delta.$$

Здесь учтена непрерывность фазовых координат в точках $t = t_i+\tau$, ибо было принято, что в сумму входят только компоненты с несовпадающими $t_i+\tau$, и t_j.

Первая вариация первой интегральной составляющей расширенного функционала (8) по моментам разрыва t_i, $t_i+\tau$, $i = 0, \overline{1,n}$, и по t^1 имеет вид

$$\delta\left[\int_{t_0}^{t^1}\{f_0(t) + \lambda^T(t)f(t) + f(t) + \dot\lambda^T(t)x(t)\}dt\right] =$$

$$= [-f_0(t_0+0) - \lambda^T(t_0+0)f_1(t_0+0) -$$

$$-\dot\lambda^T(t_0+0)x(t_0+0)]\delta t_0 + \sum_{i=1}^{n}[f_0(t_i-0) +$$

$$+\lambda^T(t_i-0)f_i(t_i-0) + \dot\lambda^T(t_i-0)x(t_i-0) - f_0(t_i+0) -$$

$$-\lambda^T(t_i+0)f_{i+1}(t_i+0) - \dot\lambda^T(t_i+0)x(t_i+0)]\delta t_i +$$

$$+ f_0(t^1 - 0) + \lambda^T(t^1 - 0)f(t^1 - 0) + \dot{\lambda}^T(t^1 - 0) \times$$

$$\times x(t^1 - 0)]\delta t^1 + \sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i + \tau - 0)f(t_i + \tau - 0) -$$

$$-\lambda^T(t_i + \tau + 0)f(t_i + \tau + 0) + \dot{\lambda}^T(t_i + \tau - 0) \times$$

$$\times x(t_i + \tau - 0) - \dot{\lambda}^T(t_i + \tau + 0)x(t_i + \tau + 0)] \times$$

$$\times 1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon_i\delta t_i + \Big\{\sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i + \tau - 0)f(t_i + \tau - 0) -$$

$$-\lambda^T(t_i + \tau + 0)f(t_i + \tau + 0) + \dot{\lambda}^T(t_i + \tau - 0) \times$$

$$\times x(t_i + \tau - 0) - \dot{\lambda}^T(t_i + \tau + 0)x(t_i + \tau + 0)] \times$$

$$\times 1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon_i\Big\}\delta\tau .$$

Здесь $\delta t_0 = (dt_0/d\alpha)\delta\alpha$, $\delta t^1 = (dt^1/d\alpha)\delta\alpha$, $\delta\tau = (d\tau/d\alpha)\delta\alpha$. Зависимость вариации момента разрыва δt_i, $i = \overline{1, n}$, от вариации фазовых координат $\delta x(t_i - 0)$ и от вариации параметров $\delta\alpha$ находим из условия переключения (2):

$$\delta t_i = a_i\delta x(t_i - 0) + b_i\delta\alpha,$$

$$a_i = -\left(\frac{\partial g_i(\cdot)}{\partial t_i}\right)^{-1}\frac{\partial g_i(\cdot)}{\partial x_i^-}, \quad b_i = -\left(\frac{\partial g_i(\cdot)}{\partial t_i}\right)^{-1}\frac{\partial g_i(\cdot)}{\partial \alpha}.$$

Учитываем указанные дополнительные компоненты в итоговой первой вариации функционала, записываем интегралы на отдельных интервалах в виде одного интеграла (при этом, естественно, принимаем во внимание изменение вида правой части $f(\cdot)$уравнения (1)), компенсируем одинаковые слагаемые с противоположными знаками: $[\dot{\lambda}^T(t_0)x(t_0) - \dot{\lambda}^T(t_0)x(t_0)]$; $[\dot{\lambda}^T(t - 0)x(t - 0) - \dot{\lambda}^T(t - 0)x(t - 0)]$, $[\dot{\lambda}^T(t + 0)y(t + 0) - \dot{\lambda}^T(t + 0)x(t + 0)]$, $t = t_i, t_0 + \tau, t_i + \tau, i = \overline{1, n}$; $[\dot{\lambda}^T(t^1)x(t^1) - \dot{\lambda}^T(t^1)x(t^1)]$, объединяем компоненты с одинаковыми вариациями и в итоге получаем первую вариацию функционала:

$$\delta I = \left(\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial x(t^1)} - \lambda^T(t^1)\right)\delta x(t^1) +$$

$$+ (\lambda_T(t_0) - \lambda_0^T)\delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t^1}\Big\{\frac{\partial f_0(t)}{\partial\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial x(t)} + \lambda^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} +$$

$$+ 1(t^1 - t - \tau)\lambda^T(t + \tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)} + \dot{\lambda}^T(t)\Big\}\delta x(t)dt +$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0}\left(1(t^1 - t - \tau)\lambda^T(t + \tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)} - \bar{\lambda}^T(t)\right)\delta x(t)dt +$$

$$+ [\lambda^T(t_0 + \tau - 0) - \lambda^T(t_0 + \tau - 0)]1(t^1 - t_0 - \tau) \times$$

$$\times \delta x(t_0 + \tau) + \sum_{i=1}^{n}[\lambda^T(t_i + \tau + 0) - \lambda^T(t_i + \tau - 0)] \times$$

$$\times 1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon\delta x(t_i + \tau) + \sum_{i=1}^{n}\{[\lambda^T(t_i + 0)\left(E + \frac{\partial\Delta_i}{\partial x_i^-}\right) -$$

$$-\lambda^T(t_i - 0)] + [f_0(t_i - 0) + \lambda^T(t_i - 0)f_i(t_i - 0) -$$

$$-f_0(t_i + 0) - \lambda^T(t_i + 0)f_{i+1}(t_i + 0) + \lambda^T(t_i + 0)\frac{\partial\Delta_i}{\partial t_i} +$$

$$+ [\lambda^T(t_i + \tau - 0)f(t_i + \tau - 0) - \lambda^T(t_i + \tau + 0) \times$$

$$\times f(t_i + \tau + 0)]1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon_i]a_i\}\delta x(t_i - 0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}[f_0(t_i - 0) + \lambda^T(t_i - 0)f_i(t_i - 0) - f_0(t_i + 0) -$$

$$-\lambda^T(t_i + 0)f_{i+1}(t_i + 0) + \lambda^T(t_i + 0)\frac{\partial\Delta_i}{\partial t_i} +$$

$$+ [\lambda^T(t_i + \tau - 0)f(t_i + \tau - 0) -$$

$$-\lambda^T(t_i + \tau + 0)f(t_i + \tau + 0)]1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon_i]b_i +$$

$$+ \lambda^T(t_i + 0)\frac{\partial\Delta_i}{\partial\alpha} + \Big\{\lambda_0^T\frac{\partial x_0(t_0, \alpha)}{\partial\alpha} + \Big[-f_0(t_0) +$$

$$+ \lambda_0^T\left(\frac{\partial x_0(t_0, \alpha)}{\partial t_0} - f(t_0)\right) + [\lambda^T(t_0 + \tau - 0)f(t_0 + \tau - 0) -$$

$$-\lambda^T(t_0 + \tau + 0)f(t_0 + \tau + 0)]1(t^1 - t_0 - \tau)\Big]\frac{dt_0}{d\alpha} +$$

$$+ \left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) + \lambda^T(t^1)f(t^1)\right]\frac{dt^1}{d\alpha} +$$

$$+ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\alpha} + \int_{t_0}^{t^1}\Big[\frac{\partial f_0(t)}{\partial\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial\alpha} +$$

$$+ \frac{\partial f_0(t)}{\partial\alpha} + \lambda^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial\alpha}\Big]dt + \int_{t_0-\tau}^{t_0}\bar{\lambda}^T(t)\frac{\partial\psi(\alpha, t)}{\partial\alpha}dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}[f_0(t_i - 0) + \lambda^T(t_i - 0)f_i(t_i - 0) - f_0(t_i + 0) -$$

$$-\lambda^T(t_i + 0)f_{i+1}(t_i + 0) + \lambda^T(t_i + 0)\frac{\partial\Delta_i}{\partial t_i} +$$

$$+ [\lambda^T(t_i + \tau - 0)f(t_i + \tau - 0) -$$

$$-\lambda^T(t_i + \tau + 0)f(t_i + \tau + 0)]1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon_i]b_i +$$

$$+ \lambda^T(t_i + 0)\frac{\partial\Delta_i}{\partial\alpha} + \Big\{[\lambda^T(t_0 + \tau - 0)f(t_0 + \tau - 0) -$$

$$-\lambda^T(t_0 + \tau + 0)f(t_0 + \tau + 0)]1(t^1 - t_i - \tau) -$$

$$- \int_{t_0}^{t^1} \lambda^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t-\tau)} \frac{dx(t-\tau)}{d(t-\tau)} dt + \sum_{i=1}^{n} [\lambda^T(t_i + \tau - 0) \times$$

$$\times f(t_i + \tau - 0) - \lambda^T(t_i + \tau + 0) f(t_i + \tau + 0)] \times$$

$$\times 1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon_i \Big\} \frac{d\tau}{d\alpha} \Big\} \delta\alpha. \qquad (9)$$

Приравниваем коэффициенты перед $\delta x(t)$ к нулю и получаем сопряженные уравнения

$$\lambda^T(t^1) = \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial x(t^1)},$$

$$\dot{\lambda}^T(t) = \left\{ \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} + \lambda^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \right.$$

$$\left. + 1(t^1 - t_i - \tau)\lambda^T(t_i + \tau) \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)} \right\}, \qquad (10)$$

$$t \in [t^1, t_0],$$

с краевым значением в точке t^1, условие для λ_0^T (связь с основным множителем)

$$\lambda_0^T = \lambda^T(t_0), \qquad (11)$$

непрерывность λ в точках $t_i + \tau$

$$\lambda^T(t_i + \tau + 0) = \lambda^T(t_i + \tau - 0), \quad i = 0, 1, 2, ..., n,$$

уравнения расчета множителей Лагранжа $\bar{\lambda}^T(t)$, $t \in (t_0, t_0 - \tau]$, соответствующих начальной функции (1) уравнений,

$$\bar{\lambda}^T(t) = 1(t^1 - t - \tau)\lambda^T(t + \tau) \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)},$$

$$t \in (t_0 - \tau, t_0), \qquad (12)$$

а также условия переключения множителей Лагранжа в моменты разрыва

$$\lambda^T(t_i - 0) = \left\{ \lambda^T(t_i + 0) \left[E + \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_i^-} + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial t_i} - f_{i+1}(t_i + 0) \right) a_i \right] + (f_0(t_i - 0) - f_0(t_i + 0))a_i +$$

$$+ \lambda^T(t_i + \tau)[f(t_i + \tau - 0) -$$

$$\left. - f(t_i + \tau + 0)]1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon_i a_i \right\} (E - f_i(t_i - 0)a_i)^{-1},$$

$$i = \overline{1, n}. \qquad (13)$$

Если моменты разрыва в явном виде зависят от параметров, т. е. $t_i = t_i(\alpha)$, то $a_i = 0$ и условия переключения существенно упрощаются:

$$\lambda^T(t_i - 0) = \lambda^T(t_i + 0)[E + \partial\Delta_i/\partial x_i^-], \quad i = \overline{1, n}.$$

Если в добавление к предыдущим упрощениям и размер скачка фазовых координат объекта Δ_i не зависит от x_i^-, то множители Лагранжа непрерывны.

Правая часть сопряженных уравнений (10) в точках разрыва меняет свои значения из-за изменения правой части модели (1) и разрыва фазовых координат (3).

Объединяем в выражении (9) коэффициенты перед вариациями параметров $\delta\alpha$ и получаем КЧ:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \lambda^T(t_0) \frac{\partial x_0(t_0, \alpha)}{\partial \alpha} + \left\{ -f_0(t_0) + \right.$$

$$+ \lambda^T(t_0) \left(\frac{\partial x_0(t_0, \alpha)}{\partial t_0} - f(t_0) \right) + \lambda^T(t_0 + \tau)[f(t_0 + \tau - 0) -$$

$$\left. - f(t_0 + \tau + 0)]1(t^1 - t_i - \tau) \right\} \frac{dt_0}{d\alpha} +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) + \lambda^T(t^1) f(t^1) \right\} \frac{dt^1}{d\alpha} +$$

$$+ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial I_1(\cdot)}{\partial \alpha} + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \alpha} + \right.$$

$$\left. + \lambda^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial \alpha} \right] dt + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} 1(t^1 - t_i - \tau) \times$$

$$\times \lambda^T(t + \tau) \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)} \frac{\partial \psi(\alpha, t)}{\partial \alpha} dt + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[f_0(t_i - 0) + \right. \right.$$

$$+ \lambda^T(t_i - 0) f_i(t_i - 0) - f_0(t_i + 0) - \lambda^T(t_i + 0) \times$$

$$\times f_{i+1}(t_i + 0) + \lambda^T(t_i + 0) \frac{\partial \Delta_i}{\partial t_i} + \lambda^T(t_i + \tau) \times$$

$$\left. \times [f((t_i + \tau - 0) - f(t_i + \tau + 0)]1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon_i \right] b_i +$$

$$\left. + \lambda^T(t_i + 0) \frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} \right\} + \left\{ \lambda^T(t_i + \tau)[f(t_0 + \tau - 0) - \right.$$

$$- f((t_0 + \tau + 0)]1(t^1 - t_0 - \tau) -$$

$$- \int_{t_0}^{t^1} \lambda^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t-\tau)} \frac{dx(t-\tau)}{d(t-\tau)} dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda^T(t_i + \tau) \times$$

$$\left. \times [f(t_i + \tau - 0) - f(t_i + \tau + 0)]1(t^1 - t_i - \tau)\varepsilon_i \right\} \frac{d\tau}{d\alpha}. \qquad (14)$$

Здесь учтены уравнения ((11) и (12)) пересчета множителей λ_0, $\bar{\lambda}$ через основные множители Лагранжа λ и условия непрерывности $\lambda(t)$ в точках $t_0 + \tau$, $t_i + \tau$, $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим некоторые частные варианты.

В выражении (14) $(\partial x_0(t_0, \alpha)/\partial t_0 - f(t_0))$ представляет собой величину разрыва производной (по t) фазовых координат в начальный момент времени t_0. Если начальный момент времени t_0 заранее задан (не зависит от α), то в формуле (14) $dt_0/d\alpha = 0$. При этом начальное значение фазовых координат будет зависеть только от α: $x^+(t_0) = x_0(\alpha)$. Исчезновение зависимости конечного момента t^1 работы системы от α (при этом $dt^1/d\alpha = 0$) приводит к обращению в ноль в выражении (14) слагаемого $[\cdot]dt^1/d\alpha$.

Если фазовые координаты объекта в точках переключения непрерывны, т. е. $\Delta_i = 0$, то непрерывны подынтегральная функция f_0 функционала качества в точках t_i, $i = \overline{1, n}$, и правая часть f дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом в точках $t_i + \tau$, но множители Лагранжа (см. условия (13)) сохраняют разрывы

$$\lambda^T(t_i - 0) = \lambda^T(t_i + 0)[E - f_{i+1}(t_i + 0)a_i] \times$$
$$\times (E - f_i(t_i - 0)a_i)^{-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если в дополнение к указанному моменты разрыва в явном виде зависят от параметров (т. е. $t_i = t_i(\alpha)$, $a_i = 0$ и $b_i = dt_i/d\alpha$), то множители Лагранжа непрерывны.

Если моменты переключения t_i заранее заданы, т. е. не зависят от x_i^- и α, то в приведенных формулах следует положить $a_i = b_i = 0$, ибо при этом $\delta t_i = 0$. Множители Лагранжа сохраняют разрыв, если $\partial\Delta_i/\partial x_i^- \neq 0$. Если, кроме того, Δ_i не зависит от α (т. е. $\partial\Delta_i/\partial\alpha = 0$), то КЧ рассчитываются как для непрерывного случая, но в отличие от него множители Лагранжа имеют разрывы (если Δ_i зависят от x_i^-) и правые части сопряженных уравнений (10) меняют свои значения из-за изменения правых частей уравнения (1) и разрыва координат x.

Если чистое запаздывание постоянное (не зависит от α), то в выражении (14) исчезает группа слагаемых с множителем $d\tau/d\alpha$.

Если уравнения (1) переходят в обычные разрывные дифференциальные уравнения, то основные результаты полностью сохраняются, только в них необходимо положить нулю производные от $f(t)$ по $x(t - \tau)$ (при выводе сопряженных уравнений), убрать компоненты с $\psi(\cdot)$ и положить $\varepsilon_i = 0$. Приходим к результатам работы [4].

Пример. Одномерный объект с одним постоянным параметром α описывается линейным дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом и разрывной правой частью:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} f_1(t) = x(t-1), \ 0 < t \le \alpha; \\ f_2(t) = -x(t-1), \ \alpha < t \le 1; \end{cases}$$

$$x^+(0) = \alpha; \quad x(t) = \alpha/2, \quad -1 \leqslant t < 0;$$
$$x^+(\alpha) = x^-(\alpha) + \alpha, \quad \Delta_1 = \alpha.$$

Здесь приведено также уравнение (3) разрыва фазовой координаты x, которая меняется во времени следующим образом: $x(t) = \alpha + \alpha t/2$ при $0 \leqslant t < \alpha$; $x(t) = 2\alpha + \alpha^2 - \alpha t/2$ при $\alpha \leqslant t \leqslant 1$. Начальный $t_0 = 0$ и конечный $t^1 = 1$ моменты, а также запаздывание $\tau = 1$ заданы. Момент разрыва ($t_1 = \alpha$), изменяющийся в интервале [0; 1], в явном виде зависит от параметра α. В начальной точке координата x терпит разрыв $x(t_0) - \psi(\alpha, t_0) = \alpha - \alpha/2$.

Функционал (5) имеет вид: $I = \int\limits_0^1 x(t)dt$, т. е. $\eta(t) = x(t)$, $f_0(\cdot) = x(t)$.

Множитель Лагранжа в точке переключения t_1 непрерывен. Этот факт следует из формулы (13), в которой $a_1 = 0$, $b_1 = dt_1/d\alpha = 1$ (ибо t_1 явно зависит от α), $\partial\Delta_1/\partial x_i^- = 0$. Сопряженное уравнение (10) принимает вид: $\dot\lambda(t) = -1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $\lambda(1) = 0$. Его решение: $\lambda(t) = 1 - t$.

Воспользуемся теперь формулой расчета КЧ (14), в которой $I_1(t^1) = 0$, $\partial\eta(t)/\partial\alpha = \partial f_0(t)/\partial\alpha = \partial f(t)/\partial\alpha = dt_0/d\alpha = \lambda(t^1) = dt^1/d\alpha = d\tau/d\alpha = 0$. В итоге

$$\frac{dI}{d\alpha} = \lambda^T(t_0)\frac{\partial x_0(t_0, \alpha)}{\partial\alpha} + \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0} 1(t^1 - t - \tau) \times$$
$$\times \lambda^T(t_0 + \tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)}\frac{\partial\psi(\alpha, t)}{\partial\alpha}dt + [f_0(t_1 - 0) -$$
$$- f_0(t_1 + 0) + \lambda(t_1)f_1(t_i - 0) - f_2(t_1 + 0))]\frac{dt_1}{d\alpha} +$$
$$+ \lambda(t_1)\frac{\partial\Delta_1}{\partial\alpha} = 1 \cdot 1 + \left[-\frac{1}{4} + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}\right] +$$
$$+ [-\alpha + (1 - \alpha)\,\alpha] \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 1 = \frac{7}{4} - \frac{3\alpha^2}{2}.$$

Для поверки нетрудно выполнить прямое аналитическое вычисление функционала $I(\alpha) = 7\alpha/4 - \alpha^3/2$ и его дифференцирование. В приведенном примере все вычисления, соответствующие полученным в работе формулам, проведены аналитически. На практике вычисления выполняются численно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вариационный метод допускает обобщение на гладкие динамические модели (с чистыми запаздываниями и без них) в виде интегральных и интегродифференциальных уравнений (моделей с распределенными запаздываниями), на соответствующие им классы разрывных динамических моделей [3], а также на гибридные модели (включающие в себя дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и разностные уравнения) и на уравнения нейтрального типа [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Методы* теории чувствительности в автоматическом управлении / Под ред. Е.Н. Розенвассера и Р.М. Юсупова. — Л.: Энергия, 1971. — 344 с.
2. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
3. *Рубан А.И.* Идентификация и чувствительность сложных систем. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. — 302 с.
4. *Рубан А.И.* Коэффициенты чувствительности для разрывных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 4. — С. 41—47.
5. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
6. *Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж.* Теория управления. Идентификация и оптимальное управление. — М.: Мир, 1973. — 248 с.
7. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
8. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Рубан Анатолий Иванович — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск,
☎(391) 291-22-34, 291-22-96,
✉ rouban@mail.ru, ai-rouban@mail.ru.

С 18 по 20 октября 2011 г. в Москве, в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН состоится XI международная конференция «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM—2011)»

Организаторы

- Российский фонд фундаментальных исследований
- Российская академия наук
- Министерство образования и науки РФ
- Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
- Государственный космический научно-производственный центр им. М.В. Хруничева
- Московский технический университет связи и информатики
- Ракетно-космическая корпорация «Энергия»
- МГТУ «Станкин»
- Международная академия информатизации

Тематика конференции

- Организация структур технических и программных средств проектирования и управления. Средства взаимодействия, структуры данных, международные стандарты
- Компьютерная графика и CAD/CAM/PDM-системы в учебных процессах (программы обучения по дисциплинам, методические материалы, тестирование). Средства виртуальной реальности в промышленных системах
- Интегрированные производственные системы и управление технологическими процессами. PDM-системы
- Проектирование в машиностроении и строительстве
- Проектирование в радиоэлектронике

Более подробную информацию можно найти на сайте http://lab18.ipu.rssi.ru,
✉ conf18@spm.ipu.ru
☎ (495) 334-93-50, 🖹 (495) 334-91-29
Председатель Оргкомитета – д-р техн. наук Артамонов Евгений Иванович
Учёный секретарь – канд. техн. наук Смирнов Сергей Владимирович