УДК 62-50

ФУНКЦИОНАЛЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ БОЛЬЦА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.И. Рубан

Вариационным методом построен функционал чувствительности для многомерных нелинейных динамических систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра второго рода с чистым запаздыванием, а также с переменными и постоянными параметрами. Обобщенный функционал качества работы системы имеет форму Больца с интегральной и конечной компонентами. Значения запаздывания, начального и конечного моментов времени зависят от своих постоянных параметров, а фазовые координаты в начальной точке могут иметь разрыв. Приведены примеры, демонстрирующие получение из общего результата функционалов чувствительности для более простых интегро-дифференциальных моделей с запаздыванием.

Ключевые слова: функционал чувствительности, вариационный метод, сопряженное уравнение, интегро-дифференцальное уравнение, запаздывающий аргумент.

ВВЕДЕНИЕ

При анализе и синтезе законов управления и методов идентификации, решении задач оптимизации [1—6] возникает необходимость получения показателей чувствительности — коэффициентов чувствительности (КЧ) (составляющих градиента функционала качества по постоянным параметрам) и функционалов чувствительности (ФЧ), связывающих первую вариацию функционала качества с вариацией переменных и постоянных параметров динамических систем. Некоторые переменные параметры могут выступать как управляющие воздействия. Наиболее употребительны показатели чувствительности первого порядка [1, 4—6]. В настоящей работе будут рассмотрены только ФЧ первого порядка.

Рассмотрим вектор выходов $x(t) = x(t, \alpha)$ динамической модели объекта при непрерывном времени $t \in [t_0, t^1]$, неявно зависящий от вектора постоянных параметров α, и функционал I, построенный на основе траектории $x(t)$ при $t \in [t_0, t^1]$. Коэффициентами чувствительности функционала I к постоянным параметрам α называют составляющие градиента: $(dI/d\alpha)^T \equiv \nabla_\alpha I$; т. е. КЧ — это коэффициенты линейной связи между первой вариацией функционала и вариациями постоянных параметров α: $\delta I = (dI/d\alpha)\delta\alpha \equiv \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial I}{\partial \alpha_j}\delta\alpha_j$. При переменных параметрах $\alpha(t)$ первая вариация функционала δI и вариация параметров $\delta\alpha(t)$ связаны линейным функционалом $\delta I = \int_{t_0}^{t^1} V(t)\delta\alpha(t)dt$ — функционалом чувствительности. Здесь $V(t)$ — вектор-строка ядер. При постоянных параметрах $dI/d\alpha = \int_{t_0}^{t^1} V(t)dt.$

Прямой метод расчета КЧ (путем дифференцирования функционала качества I работы объекта по постоянным параметрам α) требует знания функций чувствительности $W(t)$, получаемых из решения соответствующих уравнений чувствительности; $W(t)$ представляет собой матрицу коэффициентов пропорциональности между первой вариацией выходов модели и вариацией параметров: $\delta x(t) = W(t)\delta\alpha$. Например, для функционала $I = \int_{t_0}^{t^1} f_0(x(t), \alpha, t)dt$ получаем вектор-строку КЧ: $dI/d\alpha = \int_{t_0}^{t^1} [(\partial f_0/\partial x)W(t) + \partial f_0/\partial\alpha]dt$. Для нахождения матрицы $W(t)$ необходимо решать большое число (определяемое размерностью вектора α) векторных уравнений чувствительности.

При переменных параметрах указанный подход неприменим, ибо не существует функций чувствительности к переменным параметрам.

В книге [3] описан вариационный метод получения сопряженных уравнений и формул расчета ФЧ и КЧ, восходящий к работам Лагранжа, Гамильтона и Эйлера. В его основе лежит расширение исходного функционала путем включения в него динамических уравнений объекта (ограничений типа равенства) с помощью множителей Лагранжа. Далее вычисляется первая вариация расширенного функционала относительно фазовых координат объекта и интересуемых параметров. Динамические уравнения для множителей Лагранжа получают путем обращения в ноль (в первой вариации расширенного функционала) коэффициентов перед вариациями фазовых координат, благодаря чему вариация расширенного функционала существенно упрощается и в ней остаются только вариации параметров, т. е. получается простой вид ФЧ. Если все параметры постоянны, то коэффициенты перед вариациями параметров суть искомые КЧ. Данный метод применен и для расчета оптимальных управлений для динамических систем, описываемых гладкими обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями [3]. Метод распространен и на более сложные дискретные и непрерывные системы с постоянными и переменными параметрами [4, 6—14].

В настоящей работе вариационный метод развивается применительно к динамическим системам, описываемым векторными интегро-дифференциальными уравнениями с постоянными и переменными параметрами и с чистым запаздыванием по синхронизующей переменной (например, времени). Учтены также зависимость возмущающего воздействия модели объекта от переменных параметров и от начального момента времени, зависимость запаздывания, начального и конечного моментов времени от постоянных параметров и наличие разрывов фазовых координат в начальной точке. Рассмотрен обобщенный функционал работы системы (задача Больца).

Работа продолжает исследования [11, 12], поэтому сохранены структура и обозначения из работы [11].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагаем, что исследуемая оптимизируемая по переменным $\alpha(t)$ и постоянным параметрам α_{I_1}, α_{x_0}, α_{t_0}, α_{t^1}, α_τ динамическая система описывается системой нелинейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) с интегральной частью типа Вольтерра второго рода и с чистым запаздыванием τ:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), y(t), y(t-\tau), \alpha(t), t),$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t^1, \quad 0 < \tau,$$

$$y(t) = r(\alpha(t), t_0, t) + \int_{t_0}^{t} K(t, x(s), x(s-\tau), y(s),$$
$$y(s-\tau), \alpha(s), s)ds, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^1,$$

$$\tau = \tau(\alpha_\tau),\ t_0 = t_0(\alpha_{t_0}),\ t^1 = t^1(\alpha_{t^1}), \tag{1}$$

$$x(t) = \psi_x(\alpha(t), t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0),\ x(t_0) = x_0(\alpha_{x_0}, t_0),$$
$$y(t) = \psi_y(\alpha(t), t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0).$$

Здесь τ, t_0, t^1 — запаздывание, начальный и конечный моменты времени работы системы; x, y — вектор-столбцы фазовых координат; $\alpha(t)$, α_{x_0}, α_{t_0}, α_{t^1}, α_τ — вектор-столбцы интересующих нас переменных и постоянных параметров; $f(\cdot)$, $r(\cdot)$, $K(\cdot)$, $\tau(\cdot)$, $t_0(\cdot)$, $t^1(\cdot)$, $\psi_x(\cdot)$, $x_0(\cdot)$, $\psi_y(\cdot)$ — известные непрерывно дифференцируемые ограниченные вектор-функции. Фазовые координаты x, y в исходной точке могут совершать разрыв:

$$x^+(t_0) \equiv x(t_0 + 0) = x_0(\alpha_{x_0}, t_0) \neq x(t_0 - 0) \equiv x^-(t_0) =$$
$$= \psi_x(\alpha(t_0), t_0),$$

$$y^+(t_0) \equiv y(t_0 + 0) = r(\alpha, t_0, t_0) \neq y(t_0 - 0) \equiv y^-(t_0) =$$
$$= \psi_y(\alpha(t_0), t_0),$$

Указанный разрыв (в силу расчета x, y на основе сглаживающего интегрального преобразования) не оказывает влияния на непрерывность фазовых координат в моменты времени $t_0 + n\tau$, $n = 1, 2, ...$

Модель измерительного устройства (ИУ) задана уравнением

$$\eta(t) = \eta(x(t), y(t), \alpha(t), t), \quad t \in [t_0, t^1), \qquad (2)$$

где $\eta(\cdot)$ — известная непрерывная, непрерывно дифференцируемая, ограниченная (вместе с первыми производными) вектор-функция. В эту модель входят также переменные параметры $\alpha(t)$. Размерности векторов x, y и η в общем случае различны.

На переменных $\eta(t)$ построен функционал качества работы системы

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t^1} f_0(\eta(t), \alpha(t), t)dt + I_1(\eta(t^1), \alpha_{I_1}, t^1), \quad (3)$$

который явно и неявно зависит от параметров. К ранее указанным параметрам добавляется вектор α_{I_1}. Условия для функций $f_0(\cdot)$ и $I_1(\cdot)$ те же, что и для ранее введенных функций $f(\cdot)$, $r(\cdot)$, $K(\cdot)$, $\tau(\cdot)$, $t_0(\cdot)$, $t^1(\cdot)$, $\psi_x(\cdot)$, $x_0(\cdot)$ и $\psi_y(\cdot)$. При использовании функционала (3) задачу оптимизации в теории оптимального управления называют задачей Больца. Из нее как частные варианты следуют задача Лагранжа (когда присутствует только интегральная составляющая, т. е. когда $I_1(\cdot) = 0$) и задача Майера (когда присутствует только вторая составляющая — функция от фазовых координат в конечной точке, т. е. когда $f_0(\cdot) = 0$).

В предыдущих работах [8, 11] с интегро-дифференциальными моделями объекта без чистого запаздывания были рассмотрены задачи Лагранжа [8] и Больца [11]. В работах [7—9] для объектов, описываемых интегральными моделями без чистого запаздывания, также были исследованы задачи Лагранжа [7, 8] и Больца [9]. В работе [9] получены КЧ. В работах [10, 12] для объектов с интегральными моделями и с чистым запаздыванием рассмотрены соответственно функционалы качества, соответствующие задачам Лагранжа [10] и Больца [12]. В работе [12] найдены только КЧ. В работе [10] для задачи Лагранжа и для сравнительно простой модели построены ФЧ и КЧ. В настоящей работе результаты [10] обобщены на задачу Больца, с учетом более общего вида интегральных и интегро-дифференциальных моделей с чистым запаздыванием, со смешанными параметрами (переменными и постоянными) и с учетом разрывов фазовых координат в момент начала работы динамического объекта.

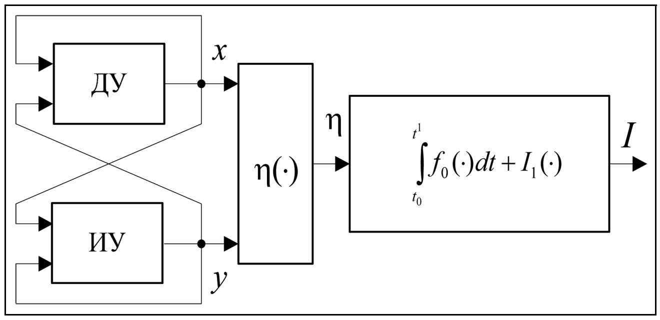

Рис. 1. Интегро-дифференциальная модель

Схема взаимодействия между переменными модели объекта, измерительного устройства и функционала качества приведена на рис. 1.

При получении соответствующих результатов для сокращения записи формул (1)—(3) используем очевидные обозначения: $f(t) \equiv f(x(t), x(t - \tau), y(t), y(t - \tau), \alpha(t), t)$, $r(t) \equiv r(\alpha(t), t_0, t)$, $K(t, s) \equiv K(t, x(s), x(s - \tau), y(s), y(s - \tau), \alpha(s), s)$, $\eta(t) = \eta(x(t), y(t), \alpha(t), t)$, $f_0(t) \equiv f_0(\eta(t), \alpha(t), t)$, $I_1(t^1) \equiv I_1(\eta(t^1), \alpha_{I_1}, t^1)$.

При получении ФЧ перейдем от ИДУ (1) к соответствующему интегральному уравнению (ИУ), получим более общие по сравнению с работой [10] результаты, а затем вернемся к исходным переменным. Удобство интегро-дифференциальной модели в ее структурной универсальности. При упрощении модели в полученных окончательных результатах достаточно обратить в ноль соответствующие слагаемые. Этот прием мы продемонстрируем в заключительной части статьи.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сопряженные уравнения имеют интегро-дифференциальный вид:

$$-\dot{\lambda}_x^T(t) = \lambda_x^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \Phi_y(t^1)\frac{\partial K(t^1, t)}{\partial x(t)} +$$

$$+ \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} + \int_t^{t^1}\gamma_y^T(s)\frac{\partial K(s, t)}{\partial x(t)}ds + 1(t^1 - \tau - t) \times$$

$$\times \left[\lambda_x^T(t + \tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)} + \Phi_y(t^1)\frac{\partial K(t^1, t+\tau)}{\partial x(t)} + \right.$$

$$\left. + \int_{t+\tau}^{t^1}\gamma_y^T(s)\frac{\partial K(s, t+\tau)}{\partial x}ds\right], \quad t \in [t_0, t^1),$$

$$\lambda_x^T(t^1) = \Phi_x(t^1),$$

$$\gamma_y^T(t) = \lambda_x^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \Phi_y(t^1)\frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1}\gamma_y^T(s)\frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)}ds + 1(t^1 - \tau - t) \times$$
$$\times \left[\lambda_x^T(t+\tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)} + \Phi_y(t^1)\frac{\partial K(t^1, t+\tau)}{\partial y(t)} + \int_{t+\tau}^{t^1}\gamma_y^T(s)\frac{\partial K(s, t+\tau)}{\partial y}ds\right], \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^1;$$

$$\bar{\gamma}_x^T(t) = 1(t^1 - \tau - t)\left[\lambda_x^T(t+\tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)} + \Phi_y(t^1)\frac{\partial K(t^1, t+\tau)}{\partial x(t)} + \int_{t+\tau}^{t^1}\gamma_y^T(s)\frac{\partial K(s, t+\tau)}{\partial x(t)}ds\right],$$

$$\bar{\gamma}_y^T(t) = 1(t^1 - \tau - t)\left[\lambda_x^T(t+\tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)} + \Phi_y(t^1)\frac{\partial K(t^1, t+\tau)}{\partial y(t)} + \int_{t+\tau}^{t^1}\gamma_y^T(s)\frac{\partial K(s, t+\tau)}{\partial y(t)}ds\right],$$
$$t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0. \qquad (4)$$

Здесь $\Phi_x(t^1) \equiv \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)}\frac{\partial \eta(t^1)}{\partial x(t^1)}$, $\Phi_y(t^1) \equiv \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)}\frac{\partial \eta(t^1)}{\partial y(t^1)}$, $1(z)$ — стандартная селективная единичная функция: $1(z) = 1$, если $0 < z$; $1(z) = 0$, если $z \leqslant 0$.

Вариационным методом получаем следующий ФЧ (метод идейно не сложный, но промежуточные формулы достаточно громоздки и они не приводятся):

$$\delta I = \int_{t_0}^{t^1}\left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \alpha(t)} + \gamma_y^T(t)\frac{\partial r(t)}{\partial \alpha(t)} + \lambda_x^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial \alpha(t)} + \Phi_y(t^1)\frac{\partial K(t^1, t)}{\partial \alpha(t)} + \int_t^{t^1}\gamma_y^T(s)\frac{\partial K(s, t)}{\partial \alpha(t)}ds\right]\delta\alpha(t)dt + \left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)}\frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \alpha(t^1)} + \Phi_y(t^1)\frac{\partial r(t^1)}{\partial \alpha(t^1)}\right]\delta\alpha(t^1) + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \alpha_{I_1}}\delta\alpha_{I_1} +$$
$$+ \lambda_x^T(t_0)\frac{\partial x_0(\alpha_{x_0}, t_0)}{\partial \alpha_{x_0}}\delta\alpha_{x_0} + \int_{t_0-\tau}^{t_0}\left[\bar{\gamma}_x^T(t)\frac{\partial \psi_x(\alpha(t), t)}{\partial \alpha(t)} + \bar{\gamma}_y^T(t)\frac{\partial \psi_y(\alpha(t), t)}{\partial \alpha(t)}\right]\delta\alpha(t)dt +$$
$$+ \left[\lambda_x^T(t_0)\left(\frac{\partial x_0(\alpha_{x_0}, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0)\right) + 1(t^1 - t_0 - \tau)\lambda_x^T \times (t_0 + \tau)(f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) + \Phi_y(t^1)\left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t_0} - K(t^1, t_0) + 1(t^1 - t_0 - \tau) \times K(t^1, t_0 + \tau - 0) - K(t^1, t_0 + \tau + 0))\right] - f_0(t_0) + \int_{t_0}^{t^1}\gamma_y^T(t)\left(\frac{\partial r(t)}{\partial t_0} - K(t, t_0)\right)dt + 1(t^1 - t_0 - \tau)\int_{t_0+\tau}^{t^1}\gamma_y^T(t) \times [K(t, t_0 + \tau - 0) - K(t, t_0 + \tau + 0)]dt\right]\frac{dt_0}{d\alpha_{t_0}}\delta\alpha_{t_0} +$$
$$+ \left[\Phi_x(t^1)f(t^1) + \Phi_y(t^1)\left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t^1} + K(t^1, t^1) + \int_{t_0}^{t^1}\frac{\partial K(t^1, s)}{\partial t^1}ds\right] + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)}\frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1)\right]\frac{dt^1}{s\alpha_{t^1}}\delta\alpha_{t^1} + \left[1(t^1 - t_0 - \tau)\lambda_x^T(t_0 + \tau) \times (f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) - \right.$$
$$- \int_{t_0}^{t^1}\lambda_x^T(t)\left(\frac{\partial f(t)}{\partial x(t-\tau)}\frac{dx(t-\tau)}{d(t-\tau)} + \frac{\partial f(t)}{\partial y(t-\tau)}\frac{dy(t-\tau)}{d(t-\tau)}\right)dt + \Phi_y(t^1)\left[1(t^1 - t_0 - \tau)K(t^1, t_0 + \tau - 0) - K(t^1, t_0 + \tau + 0)) - \int_{t_0}^{t^1}\left(\frac{\partial K(t^1, s)}{\partial x(s-\tau)}\frac{dx(s-\tau)}{d(s-\tau)} + \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial y(s-\tau)}\frac{dy(s-\tau)}{d(s-\tau)}\right)ds\right] + 1(t^1 - t_0 - \tau)\int_{t_0+\tau}^{t^1}\gamma_y^T(t) \times$$
$$\times (K(t, t_0 + \tau - 0) - K(t, t_0 + \tau + 0))dt - \int_{t_0}^{t^1}\gamma_y^T(t)\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial K(t, s)}{\partial x(s-\tau)}\frac{dx(s-\tau)}{d(s-\tau)} + \left.\frac{\partial K(t, s)}{\partial y(s-\tau)}\frac{dy(s-\tau)}{d(s-\tau)}\right)dsdt\right]\frac{d\tau}{d\alpha_\tau}\delta\alpha_\tau. \qquad (5)$$

Полученная форма представления сопряженных уравнений и функционала чувствительности позволяет легко выписать результаты при рассмотрении отдельно дифференциальных и интегральных моделей либо их различных комбинаций.

3. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА ПРИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

Уравнения для модели объекта и измерительного устройства в этом случае имеют вид:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\, x(t-\tau),\, \alpha(t),\, t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^1,\ 0 < \tau,$$

$$\tau = \tau(\alpha_\tau),\ t_0 = t_0(\alpha_{t_0}), \quad t^1 = t^1(\alpha_{t^1}),$$

$$x(t) = \psi_x(\alpha(t),\, t),\ t \in [t_0 - \tau,\, t_0),\ x(t_0) = x_0(\alpha_{x_0},\, t_0);$$

$$\eta(t) = \eta(x(t),\, \alpha(t),\, t),\ t \in [t_0,\, t^1].$$

Вид функционала качества (3) не меняется. Схема взаимодействия между всеми переменными системы представлена на рис. 2.

В итоговых результатах (4), (5) необходимо учесть отсутствие зависимости от $y(t)$ в функциях f и η, а также отсутствие функций r, K, ψ_y и переменных $\gamma_y(t)$, $\bar{\gamma}_y(t)$. Сопряженные уравнения имеют вид:

$$-\dot{\lambda}_x^T(t) = \lambda_x^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} +$$

$$+ 1(t^1 - \tau - t)\lambda_x^T(t+\tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^1,$$

$$\lambda_x^T(t^1) = \Phi_x(t^1),$$

$$\bar{\gamma}_x^T(t) = 1(t^1 - \tau - t)\lambda_x^T(t+\tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial x(t)},$$

$$t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0.$$

Упрощается и ФЧ:

$$\delta I = \int_{t_0}^{t^1}\left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \alpha(t)} + \lambda_x^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial \alpha(t)}\right]\delta\alpha(t)dt +$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0}\bar{\gamma}_x^T(t)\frac{\partial \psi_x(\alpha(t),\, t)}{\partial \alpha(t)}\delta\alpha(t)dt + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)}\frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \alpha(t^1)}\delta\alpha(t^1) +$$

$$+ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \alpha_{I_1}}\delta\alpha_{I_1} + \lambda_x^T(t_0)\frac{\partial x_0(\alpha_{x_0},\, t_0)}{\partial \alpha_{x_0}}\delta\alpha_{x_0} +$$

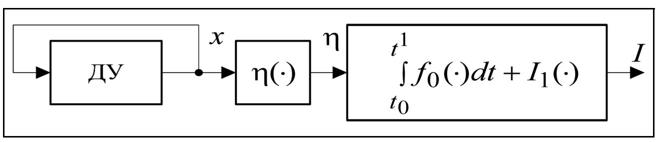

Рис. 2. Дифференциальная модель

$$+ \left[\lambda_x^T(t_0)\left(\frac{\partial x_0(\alpha_{x_0},\, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0)\right) + 1(t^1 - t_0 - \tau) \times\right.$$

$$\times\, \lambda_x^T(t_0 + \tau)f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) -$$

$$\left. - f_0(t_0)\right]\frac{dt_0}{d\alpha_{t_0}}\delta\alpha_{t_0} + \left[\Phi_x(t^1)f(t^1) + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)}\frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1)\right]\frac{dt^1}{d\alpha_{t^1}}\delta\alpha_{t^1} + \left[1(t^1 - t_0 - \tau) \times\right.$$

$$\times\, \lambda_x^T(t_0 + \tau)(f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) -$$

$$\left. - \int_{t_0}^{t^1}\lambda_x^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial x(t-\tau)}\frac{dx(t-\tau)}{d(t-\tau)}dt\right]\frac{d\tau}{d\alpha_\tau}\delta\alpha_\tau.$$

Если параметры $\alpha(t)$ постоянные (т. е. $\alpha(t) = \alpha$, $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t^1$), то КЧ к параметрам α, α_{I_1}, α_{x_0}, α_{t_0}, α_{t^1} и α_τ имеют вид:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t^1}\left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \alpha} + \lambda_x^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial \alpha}\right]dt +$$

$$+ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)}\frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \alpha} + \int_{t_0-\tau}^{t_0}\bar{\gamma}_x^T(t)\frac{\partial \psi_x(\alpha,\, t)}{\partial \alpha}dt,$$

$$\frac{dI}{d\alpha_{I_1}} = \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \alpha_{I_1}}, \quad \frac{dI}{d\alpha_{x_0}} = \lambda_x^T(t_0)\frac{\partial x_0(\alpha_{x_0},\, t_0)}{\sum \alpha_{x_0}},$$

$$\frac{dI}{d\alpha_{t_0}} = \left[\lambda_x^T(t_0)\left(\frac{\partial x_0(\alpha_{x_0},\, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0)\right) +\right.$$

$$+ 1(t^1 - t_0 - \tau)\lambda_x^T(t_0 + \tau)(f(t_0 + \tau - 0) -$$

$$\left. - f(t_0 + \tau + 0)) - f_0(t_0)\right]\frac{dt_0}{d\alpha_{t_0}},$$

$$\frac{dI}{d\alpha_{t^1}} = \left[\Phi_x(t^1)f(t^1) + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)}\frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1)\right]\frac{dt^1}{d\alpha_{t^1}},$$

$$\frac{dI}{d\alpha_\tau} = \left[1(t^1 - t_0 - \tau)\lambda_x^T(t_0 + \tau)(f(t_0 + \tau - 0) -\right.$$

$$\left. - f(t_0 + \tau + 0)) - \int_{t_0}^{t^1}\lambda_x^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial x(t-\tau)}\frac{dx(t-\tau)}{d(t-\tau)}dt\right]\frac{d\tau}{d\alpha_\tau}.$$

4. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПРИ ВАРИАНТАХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

Вариант 4.1. В исходной постановке задачи меняются уравнения модели объекта и измерительного устройства:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), \alpha(t), t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^1,$$
$$0 < \tau, \ x(t_0) = x_0(\alpha_{x_0}, t_0),$$

$$y(t) = r(\alpha(t), t_0, t) + \int_{t_0}^{t} K(t, x(s), x(s-\tau), y(s),$$
$$y(s-\tau), \alpha(s), s)ds, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^1;$$

$$\tau = \tau(\alpha_\tau), \quad t_0 = t_0(\alpha_{t_0}), \quad t^1 = t^1(\alpha_{t^1}),$$

$$x(t) = \psi_x(\alpha(t), t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0),$$
$$x(t_0) = x_0(\alpha_{x_0}, t_0),$$

$$y(t) = \psi_y(\alpha(t), t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0);$$

$$\eta(t) = \eta(y(t), \alpha(t), t), \quad t \in [t_0, t^1].$$

Схема взаимодействия между переменными модели объекта, измерительного устройства и функционала качества приведена на рис. 3.

В итоговых результатах (4), (5) необходимо учесть, что $\partial\eta/\partial x = 0$, $\Phi_x(t^1) = 0$, $\partial f(t)/\partial y(t) = 0$, $\partial f(t + \tau)/\partial y(t) = 0$.

Вариант 4.2. Уравнения модели объекта и измерительного устройства имеют вид:

$$\dot{x}(t) = f(y(t), y(t-\tau), \alpha(t), t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^1, \quad 0 < \tau,$$

$$y(t) = r(\alpha(t), t_0, t) + \int_{t_0}^{t} K(t, x(s), x(s-\tau), y(s),$$
$$y(s-\tau), \alpha(s), s)ds, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^1;$$

$$\tau = \tau(\alpha_\tau), \quad t_0 = t_0(\alpha_{t_0}), \quad t^1 = t^1(\alpha_{t^1}),$$

$$x(t) = \psi_x(\alpha(t), t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0),$$
$$x(t_0) = x_0(\alpha_{x_0}, t_0),$$

$$y(t) = \psi_y(\alpha(t), t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0);$$

$$\eta(t) = \eta(y(t), \alpha(t), t), \quad t \in [t_0, t^1].$$

Схема взаимодействия между переменными модели объекта, измерительного устройства и функционала качества приведена на рис. 4. В общих результатах (4), (5) для сопряженных уравнений и ФЧ следует положить $\partial\eta/\partial x = 0$, $\Phi_x(t^1) = 0$,

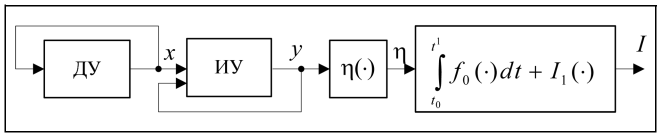

Рис. 3. Интегро-дифференциальная модель: вариант 4.1

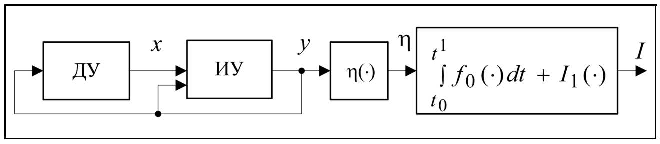

Рис. 4. Интегро-дифференциальная модель: вариант 4.2

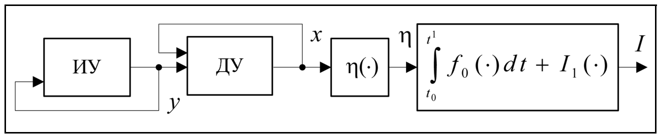

Рис. 5. Интегро-дифференциальная модель: вариант 4.3

$\partial f(t)/\partial x(t) = 0$, $\partial f(t + \tau)/\partial x(t) = 0$. Формула расчета ФЧ сохраняет тот же вид, что и в предыдущем варианте.

Вариант 4.3. Уравнения для модели объекта и измерительного устройства имеют вид:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), y(t), y(t-\tau), \alpha(t), t),$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t^1, \quad 0 < \tau,$$

$$y(t) = r(\alpha(t), t_0, t) + \int_{t_0}^{t} K(t, y(s), y(s-\tau), \alpha(s), s)ds,$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t^1;$$

$$\tau = \tau(\alpha_\tau), \quad t_0 = t_0(\alpha_{t_0}), \quad t^1 = t^1(\alpha_{t^1}),$$

$$x(t) = \psi_x(\alpha(t), t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0),$$
$$x(t_0) = x_0(\alpha_{x_0}, t_0),$$

$$y(t) = \psi_y(\alpha(t), t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0);$$

$$\eta(t) = \eta(y(t), \alpha(t), t), \quad t \in [t_0, t^1].$$

Основной является переменная x. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению. Переменная y выступает в качестве входного воздействия для основной дифференциальной модели и удовлетворяет самостоятельному интегральному уравнению. Схема взаимодействия между переменными приведена на рис. 5.

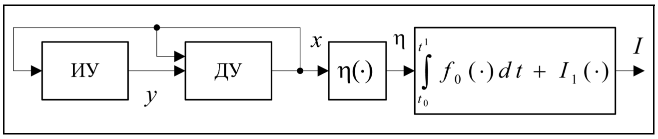

Рис. 6. Интегро-дифференциальная модель: вариант 4.4

Из общих результатов (4), (5) с учетом того, что $\partial\eta/\partial y = 0$, $\Phi_y(t^1) = 0$, $\partial K(s, t)/\partial x(t) = 0$, $\partial K(s, t + \tau)/\partial x(t) = 0$, следует выписать сопряженные уравнения и ФЧ.

Вариант 4.4. Уравнение для модели объекта имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau), y(t), y(t - \tau), \alpha(t), t),$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t^1, \ 0 < \tau,$$

$$y(t) = r(\alpha(t), t_0, t) + \int_{t_0}^{t} K(t, x(s), x(s - \tau), \alpha(s), s)ds,$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t^1;$$

$$\tau = \tau(\alpha_\tau), \quad t_0 = t_0(\alpha_{t_0}), \quad t^1 = t^1(\alpha_{t^1}),$$

$$x(t) = \psi_x(\alpha(t), t), \ \ t \in [t_0 - \tau, t_0),$$
$$x(t_0) = x_0(\alpha_{x_0}, t_0),$$

$$y(t) = \psi_y(\alpha(t), t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0).$$

Переменная y является вспомогательной. Она отражает сравнительно простую интегральную связь с основной переменной x. Выход измерительного устройства также зависит только от основной переменной $\eta(t) = \eta(x(t), \alpha, t)$, $t \in [t_0, t^1]$.

Схема взаимодействия между переменными приведена на рис. 6.

В итоге из (4), (5) с учетом того, что $\partial\eta/\partial y = 0$, $\Phi_y(t^1) = 0$, $\partial K(s, t)/\partial y(t) = 0$, $\partial K(s, t + \tau)/\partial y(t) = 0$ получаем сопряженные уравнения и ФЧ. Формула расчета ФЧ сохраняет тот же вид, что и в предыдущем варианте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вариационный метод расчета коэффициентов и функционалов чувствительности допускает обобщение на задачи Больца для более сложных классов динамических систем, описываемых различными разрывными интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями — см. расчет коэффициентов чувствительности для моделей в виде разрывных дифференциальных уравнений без запаздывания [13] и с запаздывающим аргументом [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Методы* теории чувствительности в автоматическом управлении / Под ред. Е.Н. Розенвассера и Р.М. Юсупова. — Л.: Энергия, 1971. — 341 с.
2. *Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж.* Теория управления: идентификация и оптимальное управление. — М.: Мир, 1973. — 248 с.
3. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
4. *Рубан А.И.* Идентификация нелинейных динамических объектов на основе алгоритма чувствительности. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975. — 270 с.
5. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
6. *Рубан А.И.* Идентификация и чувствительность сложных систем. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. — 302 с.
7. *Рубан А.И.* Коэффициенты и функционалы чувствительности для многомерных систем, описываемых интегральными уравнениями // Сб. науч. тр. Новосибирского государственного технического университета. — 1996. — № 2 (4). — С. 64—72.
8. *Rouban A.I.* Coefficients and functionals of sensitivity for multivariate systems described by integral and integro-differetial equations // Advances in Modeling & Analysis: Series A. Mathematical Problems; General Mathematical Modeling. France: A.M.S.E. — 1999. — Vol. 35, N 1. — P. 25—34.
9. *Рубан А.И.* Коэффициенты чувствительности в задаче Больца для многомерных систем, описываемых обобщенными интегральными уравнениями // Информатика и системы управления: Межвуз. сб. науч. тр. / НИИ ИПУ. — Красноярск, 2000. — Вып. 5. — С. 272—279.
10. *Rouban A. I.* Coefficients and functionals of sensitivity for continuous many-dimensional dynamic systems described by integral equations with delay time // 5th Intern. Conf. on actual Problems of Electronic Instrument Engineering. Proceedings APEIE-2000. — Novosibirsk, 2000. — Vol. 1. — P. 135—140.
11. *Рубан А. И.* Коэффициенты чувствительности в задаче Больца для многомерных систем, описываемых обыкновенными интегро-дифференциальными уравнениями // Информатика и системы управления: Межвуз. сб. науч. тр. / НИИ ИПУ. — Красноярск, — 2001. — Вып. 6. — С. 58—68.
12. *Рубан А.И.* Коэффициенты чувствительности в задаче Больца для многомерных динамических систем, описываемых интегральными уравнениями с запаздыванием // Там же. — С. 69—80.
13. *Рубан А.И.* Коэффициенты чувствительности для разрывных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 4. — С. 41—47.
14. *Рубан А.И.* Коэффициенты чувствительности разрывных динамических систем с запаздыванием // Проблемы управления. — 2011. — № 4. — С. 53—59.

Статья представлена к публикации руководителем РРС В.В. Огурцовым.

Анатолий Иванович Рубан — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск,
☎ (391) 291-22-34, (391) 291-22-96,
✉ ai-rouban@mail.ru, rouban@mail.ru.