

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОЙ РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПРОСТРАНСТВЕ¹

Л.Б. Рапопорт

В данной работе метод полуопределенной релаксации применен к задаче об определении ориентации твердого тела относительно локального горизонта с помощью спутниковой навигации. Показано, как исходная невыпуклая задача квадратичного программирования погружается в более широкий класс выпуклых оптимизационных задач, допускающих эффективное решение. Вместо исходной вычислительно сложной задачи решена выпуклая задача, дающая приближенное решение исходной задачи. Предложенный подход применен к обработке экспериментальных данных.

Ключевые слова: спутниковая навигация, полуопределенная релаксация, задача Wahba.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть на твердом теле закреплены четыре навигационные антенны, обозначенные через A_1 , A_2 , A_3 и M (см. далее в § 4 рис. 1). На рис. 1, приведен пример расположения антенн на крыше автомобиля, использованного при проведении натурных испытаний. Антенна M служит подвижной базовой антенной при решении задач определения базовых линий между антеннами A_i и M , $i = 1, 2, 3$. Напомним, что в спутниковой навигации под базовой линией понимается вектор, соединяющий две навигационные антенны [1]. Таким образом, имеем три базовые линии (вектора), соединяющие антенну M с антеннами A_1 , A_2 и A_3 . Обозначим эти векторы через $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ и $X^{(3)}$. С твердым телом связана система координат, называемая связанной. Выразим векторы $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ и $X^{(3)}$ в координатах связанной системы и разместим их по столбцам в матрице X_0 размера 3×3 . Поскольку связанная система координат вращается вместе с твердым телом, с которым она связана, то матрица X_0 от времени не зависит.

Вторая система координат связана с Землей и называется локальным горизонтом. Первая ось локального горизонта касательна к геоиду в точке,

определенной антенной M , и направлена на север (т. е. касательна к меридиану). Вторая ось также касательна к геоиду и направлена на восток (касательна к параллели). Третья ось ортогональна первым двум и направлена вниз. Три вектора базовых линий, выраженных в координатах локального горизонта, образуют матрицу $X(t)$, зависящую от времени. Ортогональная матрица, переводящая матрицу X_0 в матрицу $X(t)$, называется матрицей ориентации и обозначается $Q(t)$. В дальнейшем символ зависимости от времени для простоты опущен. Матрица Q , выраженная через углы Эйлера, определяется выражением

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\theta & \begin{pmatrix} \cos\psi \sin\phi \sin\theta - \\ -\cos\phi \sin\psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin\phi \sin\psi + \\ +\cos\phi \cos\psi \sin\theta \end{pmatrix} \\ \cos\theta \sin\psi & \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\psi + \\ +\sin\phi \sin\psi \sin\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\psi \sin\theta - \\ -\cos\psi \sin\phi \end{pmatrix} \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где ψ , θ и ϕ обозначают азимут, тангаж и крен соответственно. Матрица X определяется с помощью методов относительной фазово-дифференциальной навигации, описанных например, в работе [1]. Исходными данными для вычислений служат кодовые и фазовые измерения, полученные для всех антенн, нескольких спутников и нескольких частотных диапазонов. Векторы определяются с ошибками, обусловленными влиянием шумов и многолучевых искажений на кодовые и фазовые измере-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 29 Президиума РАН «Актуальные проблемы робототехнических систем».

ния. Для решения задачи определения матрицы Q пользуются распространенным приемом решения задачи Wahba, описанным в работах [2–4].

Этот прием описан далее в § 1 и состоит в минимизации суммы квадратов нормы отклонения векторов базовых линий, измеренных в координатах локального горизонта, от тех же векторов, но определенных поворотом из связанной системы координат к локальному горизонту. При решении задачи минимизации искомой является оценка матрицы поворота (1). Достоинство метода Wahba состоит в простоте реализации. В выражении для квадрата нормы невязок исчезает слагаемое, зависящее от $Q^T Q$, в силу ортогональности матрицы Q .

Недостаток, на который обращается внимание в настоящей работе, состоит в том, что в такой формулировке задачи о наименьших квадратах не учитываются корреляционные связи между ошибками оценки компонент векторов базовых линий. Нетрудно переформулировать задачу Wahba в терминах обобщенной задачи о наименьших квадратах, введя в рассмотрение весовую матрицу W . Однако при этом исчезает главное достоинство метода Wahba, поскольку теперь слагаемое, квадратично зависящее от искомой ортогональной матрицы (точнее, от $Q^T W Q$), не исчезает. Решение задачи Wahba с учетом весов рассмотрено также в работе [5], где применены метод погружения задачи в параметрический класс и метод продолжения по параметру. Исползованию результатов фазовых измерений для определения ориентации твердого тела посвящено большое число работ (см., например, [6–10]). Однако эффективные и быстрые методы для использования результатов взвешенных фазовых измерений в этих работах не рассматриваются.

В настоящей работе предложен метод решения взвешенной задачи Wahba. В качестве формального вычислительного аппарата применяется метод полуопределенной релаксации, сводящий задачу к выпуклой оптимизации, для решения которой существуют эффективные инструменты, работающие в реальном времени. Поскольку соответствующие алгоритмы итеративны, то для решения задачи в следующий момент времени можно использовать решение, относящееся к предыдущему моменту времени. В работе приведены результаты натурных испытаний.

1. ЗАДАЧА ВАХБА И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Далее символ I будет обозначать единичную матрицу нужного размера. Нулевая матрица будет обозначаться 0 . Для двух квадратных матриц M и N одинакового размера определяется скалярное произведение выражением $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N) =$

$= \text{tr}(N^T M)$, где символ $\text{tr}(\cdot)$ означает след матрицы. Выражение $\langle M, M \rangle = \|M\|_F^2$ определяет квадрат нормы Фробениуса матрицы M . Матрица Q , доставляющая минимум выражению $\|QX_0 - X\|_F^2$, есть решение задачи Wahba. Для нахождения решения преобразуем последнее выражение. Получим

$$\begin{aligned} \|QX_0 - X\|_F^2 &= \text{tr}[(QX_0 - X)^T(QX_0 - X)] = \\ &= \text{tr}(X_0^T Q^T Q X_0) - 2\text{tr}(X_0^T Q^T X) + \text{tr}(X^T X). \end{aligned} \quad (2)$$

Принимая во внимание, что под знаком $\text{tr}(\cdot)$ в произведении матриц сомножители можно менять местами, получим

$$\text{tr}(X_0^T Q^T X) = \text{tr}(X X_0^T Q^T).$$

Тогда задача минимизации квадрата нормы невязки $\|QX_0 - X\|_F^2$ по ортогональной матрице Q равносильна, в силу выражения (2), максимизации следа матрицы $\text{tr}(X X_0^T Q^T) \rightarrow \max_{Q^T Q = I}$. Согласно ме-

тоду [2, 3] вычислим SVD-разложение $X X_0^T = U \Sigma V$, где матрицы U и V ортогональны, а диагональная матрица Σ составлена из сингулярных чисел матрицы $X X_0^T$. Из линейной независимости столбцов матрицы X_0 следует, что среди сингулярных чисел нет нулевых. Тогда оптимальная оценка матрицы Q , обеспечивающая максимум выражения $\text{tr}(U \Sigma V Q^T) = \text{tr}(\Sigma V Q^T U)$ определяется выражением

$$V Q^T U = I \text{ или } Q^T = V^T U^T, \quad Q = UV. \quad (3)$$

Таким образом решается задача Wahba с помощью SVD-разложения. Для каждого нового момента времени требуется вычисление SVD-разложения.

2. МЕТОД SDP-РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАХБА

Заметим, что в выражении (2) слагаемое $\text{tr}(X^T X)$ может быть опущено, поскольку оно не зависит от искомой матрицы Q . Поэтому выражение (2) можно переписать в виде

$$\|QX_0 - X\|_F^2 = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} X_0 X_0^T - X_0 X^T \\ -X X_0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q Q^T & Q^T \\ Q & 0 \end{pmatrix} \right). \quad (4)$$

Обозначим $G = \begin{pmatrix} X_0 X_0^T - X_0 X^T \\ -X X_0^T & 0 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что в правой части выражения (4) матрицу



$\begin{pmatrix} QQ^T & Q^T \\ Q & 0 \end{pmatrix}$ можно без изменения смысла заметить на $Y = \begin{pmatrix} I & Q^T \\ Q & I \end{pmatrix}$.

Имеем $\|QX_0 - X\|_{F,W}^2 = \text{tr}(GY)$.

Далее выражение $M \geq 0$ обозначает неотрицательную определенность матрицы M . Условие $M \geq N$ означает $M - N \geq 0$. Условие ортогональности $QQ^T = I$ заменим на более слабое (релаксированное) условие $QQ^T - I \geq 0$. Используя лемму Шура (см., например, работу [11]), получим условие неотрицательной определенности (полуопределенности) в виде

$$Y \geq 0. \tag{5}$$

Таким образом, задача Wahba может быть переписана в релаксированном виде как задача выпуклого полуопределенного программирования [11, 12]. При этом требуется минимизировать линейную форму

$$\langle G, Y \rangle \rightarrow \min \tag{6}$$

при выпуклом ограничении (5). Релаксированное ограничение (5) вместо строгого исходного ограничения $QQ^T - I = 0$ предполагает приближенное решение задачи Wahba. Однако вычислительные эксперименты с реальными данными показывают, что на практике решение релаксированной выпуклой задачи (5), (6) совпадает с точным решением исходной задачи (3).

3. ВЗВЕШЕННАЯ ЗАДАЧА WAHBA И ЕЕ РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ SDP-РЕЛАКСАЦИИ

Наряду с задачей (2) рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \|QX_0 - X\|_{F,W}^2 &= \text{tr}[(QX_0 - X)^T W(QX_0 - X)] = \\ &= \text{tr}(X_0^T Q^T W Q X_0) - 2\text{tr}(X_0^T Q^T W X) + \\ &+ \text{tr}(X^T W X) \rightarrow \min \end{aligned} \tag{7}$$

минимизации квадрата взвешенной нормы невязки. Здесь W — положительно определенная весовая матрица. Применение обобщенного метода наименьших квадратов предполагает использование в качестве весовой матрицы, обратной к ковариационной матрице C ошибок оценки векторов $X^{(i)}$. Эта матрица получается одновременно с вычислением матрицы X . При этом в формуле (7) $W = C^{-1}$.

В отличие от ранее рассмотренных методов теперь слагаемое $\text{tr}(X_0^T Q^T W Q X_0)$ в выражении (7) не

может быть опущено, поскольку оно не является константой (матрица $Q^T W Q$ не является единичной). В данной работе предложен двухэтапный метод решения задачи

$$\|QX_0 - X\|_{F,W}^2 \rightarrow \min \text{ при условии } Q^T Q = I.$$

На первом этапе решается задача Wahba с единичной весовой матрицей любым из рассмотренных методов. Получим оценку Q^* . На втором этапе находим коррекцию решения Q^* , обусловленную введением весовой матрицы. Предполагая, что коррекция мала, представим Q в виде

$$Q = Q^*(I + S), \tag{8}$$

где $S = -S^T$ это малая кососимметричная матрица. Обозначим $\bar{X} = X - Q^*X_0$. Тогда выражение (7) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \|QX_0 - X\|_{F,W}^2 &= \|Q^*SX_0 - \bar{X}\|_{F,W}^2 = \text{tr}[(Q^*SX_0 - \\ &- \bar{X})^T W(Q^*SX_0 - \bar{X})] = \text{tr}(X_0^T S^T Q^{*T} W Q^* S X_0 - \\ &- 2\text{tr}(X_0^T S^T Q^{*T} W \bar{X}) + \text{tr}(\bar{X}^T W \bar{X})) = \\ &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} X_0 X_0^T & -X_0 \bar{X}^T W \\ -W \bar{X} X_0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^T Q^{*T} W Q^* S & S^T Q^{*T} \\ Q^* S & 0 \end{pmatrix} \right) + \\ &+ \text{tr}(\bar{X}^T W \bar{X}) \rightarrow \min. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначив $\bar{G} = \begin{pmatrix} X_0 X_0^T & -X_0 \bar{X}^T W \\ -W \bar{X} X_0^T & 0 \end{pmatrix}$ и отбросив

слагаемое $\text{tr}(\bar{X}^T W \bar{X})$, не зависящее от искомой матрицы S , перепишем выражения (9) в виде

$$\begin{aligned} \|QX_0 - X\|_{F,W}^2 &= \\ &= \text{tr} \left(\bar{G} \begin{pmatrix} S^T Q^{*T} W Q^* S & S^T Q^{*T} \\ Q^* S & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \text{tr} \left(\bar{G} \begin{pmatrix} S^T Q^{*T} W Q^* S & S^T Q^{*T} \\ Q^* S & W^{-1} \end{pmatrix} \right) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Последнюю задачу запишем в виде

$$\text{tr}(\bar{G} \bar{Y}) \rightarrow \min, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} P & S^T Q^{*T} \\ Q^* S & W^{-1} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $P - S^T Q^* T W Q^* S = 0$. Заменяв последнее равенство на более слабое $P - S^T Q^* T W Q^* S \geq 0$ и воспользовавшись леммой Шура, получим

$$\bar{Y} \geq 0. \quad (11)$$

Задача (10), (11) представляет собой задачу полуопределенного программирования, которая решается любым из известных [11, 12] методов выпуклой оптимизации с полуопределенным ограничением. После решения задачи (10), (11) относительно S и получения Q по формуле (8), воспользуемся одним шагом ортогонализации

$$Q = \frac{1}{2}(Q + (Q^{-1})^T).$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

На рис. 1 изображена крыша автомобиля, на которой закреплены антенны. Связанная система координат определена следующим образом. Первая ось направлена параллельно центральной оси автомобиля вперед. Вторая ось направлена ортогонально первой в горизонтальной плоскости и ориентирована в правую сторону. Третья ось направлена вниз ортогонально первым двум. На рис. 2 показано расположение антенн в горизонтальной плоскости связанной системы координат. Первая координата совпадает с осью ординат, вторая координата совпадает с осью абсцисс. Матрица X_0 имеет вид:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0,693 & 0,339 & 0,349 \\ 0 & -0,354 & 0,345 \\ -0,233 & -0,232 & -0,228 \end{pmatrix}.$$

Автомобиль ездил 30 мин в городе по плоской траектории, показанной на рис. 3. При этом крен и тангаж изменялись незначительно. Данные собирались на частоте 10 Гц. Четыре антенны PG-F1

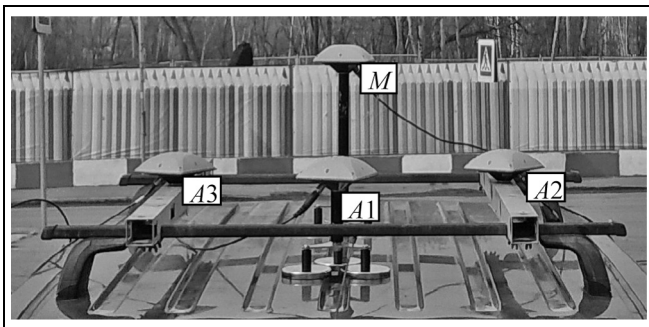


Рис. 1. Расположение антенн на крыше автомобиля

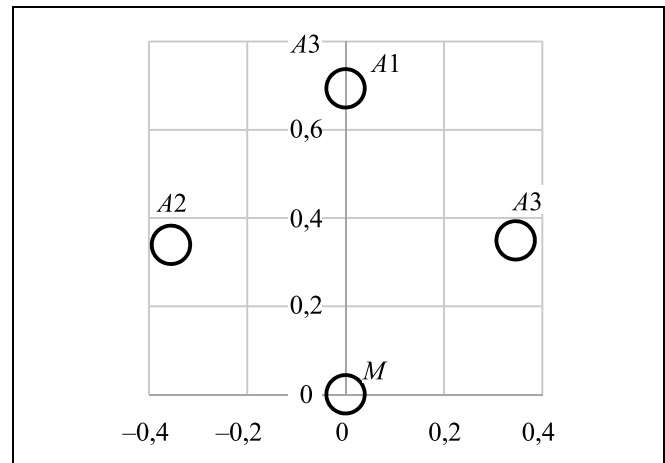


Рис. 2. Расположение антенн в горизонтальной плоскости связанной системы координат (по осям абсцисс и ординат отложены первая и вторая координата, измеренные в метрах)

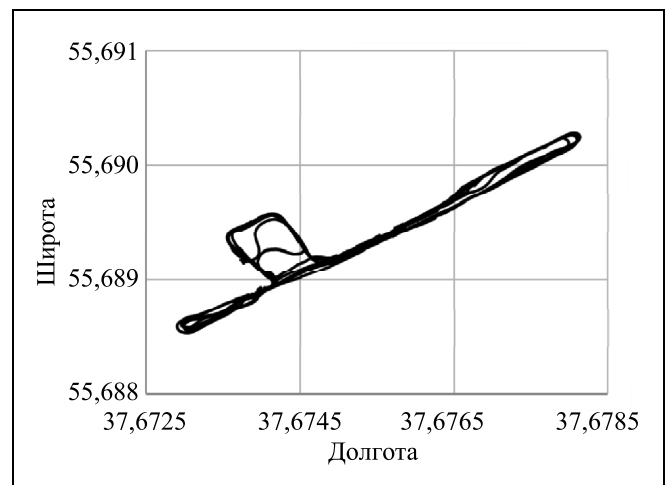


Рис. 3. Траектория движения автомобиля в координатах «широта — долгота» (координаты отложены в градусах северной широты и восточной долготы)

были подключены к приемникам Net-G5 производства компании «Торсон». Сырые данные, записанные в памяти приемников, были использованы для расчета матрицы $X(t)$. Поездке предшествовала статическая калибровка, проводившаяся в течение 30 мин. В процессе калибровки была определена матрица X_0 . Графики изменения углов изображены на рис. 4. Задача полуопределенного программирования решалась с помощью пакетов SEDUMI и YALMIP для Matlab.

Весовая матрица была определена при расчете матрицы $X(t)$ для каждого момента времени t в результате применения алгоритма RTK [1] вместе с получением оценок векторов базовых линий. Алгоритм RTK реализован автором на языке C++.

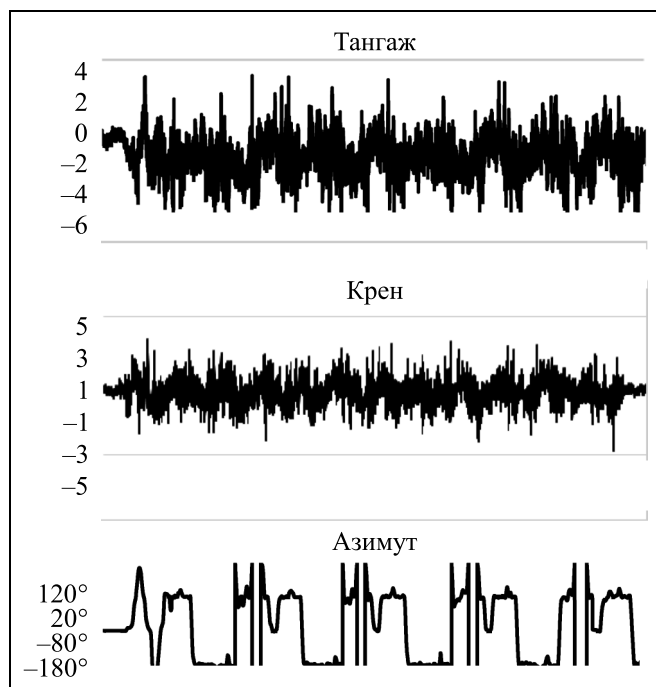


Рис. 4. Графики зависимости углов ориентации от времени (по оси абсцисс отложено время; единицей времени служит 0,1 с; всего на графиках представлены 18 000 отсчетов, соответствующие 1800 с)

Расчеты сделаны для двух вариантов: с весовой матрицей и без нее. Сравнение показывает примерно 10% уменьшения погрешности при использовании взвешивания. Сравнение точности проводилось на тех же статических данных, на которых проводилась калибровка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что задача определения ориентации твердого тела с помощью методов спутниковой навигации может быть сведена к выпуклой полуопределенной оптимизации. Выводы подтверждены натурным экспериментом.

Автор выражает признательность сотрудникам компании «Торсон» М.М. Костяному и В.М. Дмитриеву за помощь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leick A., Rapoport L., Tatarnikov D. GPS Satellite Surveying. — Wiley & Sons, 2015.
2. Cohen C.E. Attitude Determination, in: Global Positioning System: Theory and Applications, Vol. 2, ed. by B.W. Parkinson and J.J. Spilker; Vol. 164, Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, Reston, VA, 1994.
3. Wahba G. A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude // SIAM Review. — 1965. — Vol. 7, N 3. — P. 409.
4. Степанов О.А., Кошаев Д.А. Исследование методов решения задачи ориентации с использованием спутниковых систем // Гироскопия и навигация. — 1999. — № 2 (25). — С. 30–55.
5. Рапопорт Л.Б. Метод определения относительной ориентации // Проблемы управления. — 2010. — № 5. — С. 57–64.
6. Mogilnitsky V.G., Rapoport L.B., Khvalkov A.A., et al. Attitude/RTK/INS Integrated System: Experimental Results // Proc. of the 17th Intern. Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2004), Long Beach, CA, September, 2004. — P. 792–800.
7. Liu S., Lei Zhang, Jian L., Luo Y. Dual Frequency Long-short Baseline Ambiguity Resolution for GNSS Attitude Determination // Proc. of IEEE/ION PLANS 2016, Savannah, GA, April. — 2016. — P. 630–637.
8. Shnauffer B., McGraw G., Phan H., Joseph A., GNSS-Based Dual-Antenna Heading Augmentation for Attitude and Heading Reference Systems // Proc. of the 29th Intern. Technical Meeting of The Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS + 2016), Portland, Oregon, September, 2016. — P. 3669–3691.
9. Garcia J.G., Axelrad P., Roncagliolo P.A., Muravchik C.H. Fast and Reliable GNSS Attitude Estimation Using a Constrained Bayesian Ambiguity Resolution Technique (C-BART) // Proc. of the 28th Intern. Technical Meeting of The Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS + 2015), Tampa, Florida, September. — 2015. — P. 2809–2820.
10. Nadarajah N., Teunissen P.J.G. Instantaneous GPS/BeiDou/Galileo Attitude Determination: A Single-Frequency Robustness Analysis under Constrained Environments // Proc. of the ION 2013 Pacific PNT Meeting, Honolulu, Hawaii, April. — 2013. — P. 1088–1103.
11. Vandenberghe L., Boyd S. Semidefinite Programming // SIAM Review. — 1996. — Vol. 38. — P. 49–95.
12. Ben-Tal A., Nemirovski A. Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications / MOS-SIAM Series on Optimization. — Philadelphia, 2001.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Рапопорт Лев Борисович — д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва; профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, ✉ LBRapoport@gmail.com.

Не забудьте подписаться!

Подписку на журнал «Проблемы управления» можно оформить в любом почтовом отделении (подписной индекс 81708 в каталоге Роспечати или 38006 в объединенном каталоге «Пресса России»), а также через редакцию с любого месяца, при этом почтовые расходы редакция берет на себя. Отдельные номера редакция высылает по первому требованию.