

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ¹

Л.Б. Рапопорт

Описан метод определения ориентации твердого тела относительно локального горизонта. Предположено, что тело находится вблизи поверхности Земли или в околоземном пространстве на высоте, существенно меньшей высоты орбит спутниковых сетевых навигационных систем.

Ключевые слова: спутниковая навигация, ориентация в пространстве, уравнения навигации, дальномерные измерения.

ВВЕДЕНИЕ

Предполагается, что на твердом теле закреплено несколько приемных навигационных антенн. Антенны распределены по поверхности тела таким образом, что в любой момент времени, по крайней мере три антенны «видят» не менее четырех спутников системы GPS или GLONASS, или GALILEO. Необходимо не менее трех антенн для определения трех угловых переменных ориентации в процессе измерения межантенных векторов. Для определения межантенных векторов совместно со сдвигом временных шкал между двумя приемниками необходимы, по крайней мере, четыре дальномерных измерения, обеспечиваемых одновременным слежением за четырьмя спутниками.

Напомним кратко основные понятия, принятые в спутниковой навигации. Более детальное описание можно найти, например, в книге [1].

В геоцентрической системе координат определяется положение спутников в любой момент времени. Алгоритмы вычисления положения спутников описаны в интерфейсных контрольных документах соответствующих спутниковых систем [2–4]. Положение антенн навигационных приемников вычисляется на основе дальномерных измерений. Необходимы, по крайней мере, четыре спутника для определения трех компонент поло-

жения фазового центра антенны и сдвига временных шкал системы GPS и часов приемника.

В основе определения ориентации твердого тела в пространстве лежит метод дифференциального относительного позиционирования [1], позволяющий определять межантенные векторы с сантиметровой точностью с помощью фазовых измерений после разрешения фазовых неоднозначностей. Проблеме разрешения фазовых неоднозначностей посвящена обширная литература. Известно много вычислительных методов ее решения. Большинство из них сводятся к задаче квадратичного целочисленного программирования. При практической реализации метода, предложенного в данной работе, для разрешения фазовых неоднозначностей применялись методы, описанные в работах [5–7].

После разрешения фазовых неоднозначностей рассматриваемая задача сводится к задаче определения ориентации по векторным измерениям, известной как задача Уэбба [8]. Ее решению посвящено множество работ. В обзорах [9, 10] рассмотрены постановки задачи оценки ориентации и построения методов рекуррентного оценивания. В настоящей работе не затрагиваются вопросы фильтрации и интеграции с инерциальными сенсорами. Ее цель состоит в описании нового вычислительно эффективного метода решения задачи Уэбба по однозначным фазовым измерениям. Особенность предложенного метода заключается в применении метода параметрического продолжения для учета матрицы весов фазовых измерений, которая в общем случае не является диагональной.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-0900064) и комплексной программы 15 ОЭМПУ РАН.

Произвольный вид положительно определенной весовой матрицы не позволяет решить задачу в явном виде с помощью широко распространенного приема, основанного на сингулярном разложении матриц [9]. Предложенный в работе метод продолжения по параметру позволяет, начав с весовой матрицы специального вида, допускающей аналитическое (точнее, практически аналитическое) решение задачи Уэбба, продолжить решение до такого, которое отвечает реальным ошибкам фазовых измерений, характерных для навигационного приемника. При практической реализации использовался приемник JNSGуго-4 [11]. Эксперименты показали, что корректный учет ковариационной матрицы фазовых измерений позволяет уменьшить погрешность определения ориентации примерно на 30 %, практически не увеличивая вычислительную сложность программы, работающей в реальном времени и позволяющей гарантированно определять ориентацию 20 раз/с.

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СТРУКТУРА ДАЛЬНОМЕРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Будем пользоваться следующими обозначениями, принятыми в спутниковой навигации и вычислительных методах линейной алгебры (большая часть употребляемых в статье понятий и обозначений широко известна и приводится здесь только для удобства читателя):

верхний индекс s используется для обозначения номера спутника;

нижний индекс r используется для нумерации антенн навигационных приемников, расположенных на твердом теле, $r = 0, \dots, m - 1$; $m \geq 3$;

нижний индекс k используется для нумерации моментов времени, называемых эпохами;

n_{rk} — число спутников, находящихся в захвате приемником r в момент времени k ;

верхний индекс b используется для обозначения частотных диапазонов, $b = 1, 2$ (L1, L2);

R^d — d -мерное вещественное евклидово пространство с нормой $\|x\|$;

символ T означает матричное транспонирование, векторы считаются столбцами;

$R^{d \times m}$ — пространство вещественнозначных матриц размера $d \times m$;

$\|x\|_F = \sqrt{x_{11}^2 + \dots + x_{dm}^2} = \sqrt{\text{tr}(x^T x)}$ — матричная норма Фробениуса матрицы $x \in R^{d \times m}$, $\text{tr}(\cdot)$ — след матрицы, $\|x\|_{F, W} = \sqrt{\text{tr}(x^T W x)}$, где W — положительно определенная весовая матрица;

X_{rk}, Y_{rk}, Z_{rk} — декартовы координаты антенны приемника r в k -ю эпоху в геоцентрической системе координат WGS-84;

X_k^s, Y_k^s, Z_k^s — декартовы координаты спутника s в момент времени, предшествующий k -й эпохе на время распространения сигнала от спутника до приемника (в системе WGS-84);

$$\rho_{rk}^s = \|X_r - X_k^s\|, \rho_{rk} = (\rho_{rk}^1, \dots, \rho_{rk}^{n_{rk}})^T \in R^{n_{rk}};$$

c — скорость света в вакууме;

f^{sb} — частота несущей в диапазоне b , отвечающая спутнику s . Для систем GPS и GALILEO частота не зависит от номера спутника, для системы GLONASS зависимость частоты от номера частотной литеры спутника определена в документе [3];

$\lambda^{sb} = c/f^{sb}$ — длина волны несущей, отвечающей спутнику s в диапазоне b ;

τ_{rk} — сдвиг шкал времени между системой GPS и внутренней шкалой приемника r ;

τ_k^s — сдвиг шкал времени между системой GPS и внутренней шкалой спутника s .

Расстояние до спутников измеряется в двух шкалах — кодовой и фазовой. Кодовая шкала дает погрешность порядка нескольких метров в то время как фазовая шкала дает миллиметровую погрешность, но содержит так называемую фазовую неоднозначность, принимающую постоянное и целочисленное значение, различное для каждого спутника. Более точно, фазовые неоднозначности постоянны до возникновения скачков фазы, которые связаны с возможным срывом слежения в петлях фазовой автоподстройки, являющихся частью программного обеспечения навигационного приемника. Более подробно структура спутниковых навигационных измерений и структура ошибок описана, например, в работе [1]. В дополнение к введенным обозначениям определим следующие величины:

μ_{rk}^{sb} — кодовое измерение расстояния между приемником r и спутником s , измеренное в момент времени k в частотном диапазоне b , $\mu_{rk}^b = (\mu_{rk}^{1b}, \dots, \mu_{rk}^{n_{rk}b})^T \in R^{n_{rk}}$;

φ_{rk}^{sb} — аналогичным образом определенное измерение псевдодалности в фазовой шкале измерений, $\varphi_{rk}^b = (\varphi_{rk}^{1b}, \dots, \varphi_{rk}^{n_{rk}b})^T \in R^{n_{rk}}$.

С учетом введенных обозначений уравнения, связывающие измеренные псевдодалности в ко-



довой и фазовой шкалах с расстояниями до спутников, имеют вид:

$$\begin{aligned}\mu_{rk}^{s1} &= \rho_{rk}^s + c(\tau_{rk} + \tau_k^s) + I_{rk}^s + \varepsilon_{rk}^{s1}, \\ \mu_{rk}^{s2} &= \rho_{rk}^s + c(\tau_{rk} + \tau_k^s) + \gamma I_{rk}^s + \varepsilon_{rk}^{s2},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\lambda^{s1} \varphi_{rk}^{s1} = \rho_{rk}^s + c(\tau_{rk} + \tau_k^s) - I_{rk}^s + \lambda^{s1} N_r^{s1} + v_{rk}^{s1},$$

$$\lambda^{s2} \varphi_{rk}^{s2} = \rho_{rk}^s + c(\tau_{rk} + \tau_k^s) - \gamma I_{rk}^s + \lambda^{s2} N_r^{s2} + v_{rk}^{s2},$$

где $\gamma = (f^{1s}/f^{2s})^2$, I_{rk}^s — задержка сигнала спутника s в ионосфере Земли в первом частотном диапазоне, N_r^{sb} — целочисленные значения фазовых неоднозначностей, $N_r^b = (N_r^{1b}, \dots, N_r^{nb})^T \in Z^{n_k}$, ε_{rk}^{s1} , ε_{rk}^{s2} , v_{rk}^{s1} , v_{rk}^{s2} — ошибки кодовых и фазовых измерений, включающие в себя шумовую составляющую и ошибку многолучевости.

В системе уравнений (1), называемой системой уравнений спутниковой навигации, не указана ошибка положения спутника, связанная с ошибкой эфемеридных данных. Однако эту ошибку можно считать одинаковой для близко расположенных приемников и, поэтому, исчезающей при взятии разностей измерений, относящихся к одному и тому же спутнику и двум различным близко расположенным антеннам.

2. СВЯЗАННЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ОТНОСИТЕЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ И ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ

Обозначим антенны, закрепленные на теле, символами A_0, A_1, \dots, A_{m-1} . Пусть x, y, z — связанная с телом декартова прямоугольная система координат. Пусть некоторый вектор представлен в связанной системе координат $l = (x, y, z)^T$. Этот же вектор в геоцентрической системе координат имеет представление $L = (X, Y, Z)^T$.

Будем искать ортогональную матрицу поворота Q , переводящую координаты одного и того же вектора из одной системы в другую. Более точно, $L = Ql$. Поместим начало связанной системы координат в точку расположения антенны A_0 . Введем в рассмотрение межантенные векторы $A_r - A_0$, называемые также векторами базовых линий. Пусть $l_r = (x_r, y_r, z_r)^T$ — вектор базовой линии $A_r - A_0$ в связанной системе координат, $L_{rk} = (X_{rk} - X_{0k}, Y_{rk} - Y_{0k}, Z_{rk} - Z_{0k})^T$ — тот же вектор в геоцентрической системе координат в момент времени k , \bar{l}

и $\bar{L}_k \in R^{3 \times (m-1)}$ — матрицы, столбцами которых являются векторы l_r и L_{rk} .

Обозначим через Δ оператор взятия разности между величинами, относящимися к антенне A_r , $r = 1, \dots, m-1$, и величинами, относящимися к антенне A_0 . Ионосферная задержка одинакова для близко расположенных антенн, и поэтому индекс r при величинах I_{rk}^s в уравнениях (1) может быть опущен. Применяя оператор Δ к уравнениям (1) и принимая во внимание, что величины, не содержащие индекс r , при взятии разности исчезают, получим

$$\begin{aligned}\Delta \mu_{rk}^{s1} &= \Delta \rho_{rk}^s + c \Delta \tau_{rk} + \Delta \varepsilon_{rk}^{s1}, \\ \Delta \mu_{rk}^{s2} &= \Delta \rho_{rk}^s + c \Delta \tau_{rk} + \Delta \varepsilon_{rk}^{s2},\end{aligned}\quad (2)$$

$$\Delta \varphi_{rk}^{s1} = \frac{1}{\lambda^{s1}} \Delta \rho_{rk}^s + f^{1s} \Delta \tau_{rk} + \Delta N_r^{s1} + \Delta v_{rk}^{s1},$$

$$\Delta \varphi_{rk}^{s2} = \frac{1}{\lambda^{s2}} \Delta \rho_{rk}^s + f^{2s} \Delta \tau_{rk} + \Delta N_r^{s2} + \Delta v_{rk}^{s2}.\quad (3)$$

Задача относительной навигации состоит в определении положения антенны A_r относительно антенны A_0 , т. е. в определении вектора $A_r - A_0$ с использованием уравнений (2) и (3), называемых уравнениями относительной навигации. В группе уравнений (2) используются однозначные, но неточные кодовые измерения. В группе уравнений (3) используются неоднозначные, но точные фазовые измерения. Стандартные отклонения шумов фазовых измерений имеют порядок 10^{-3} м в то время, как кодовые измерения имеют стандартное отклонение порядка $10^{-1} \div 10^1$ м. Фазовые неоднозначности ΔN_r^{s1} и ΔN_r^{s2} , присутствующие во второй группе уравнений (3), принимают целочисленные значения. Обычно процедуру разрешения фазовых неоднозначностей разделяют на оценку вещественных значений неоднозначностей, поиск наилучшей целочисленной аппроксимации и проверку правильности разрешения неоднозначностей. При реализации метода, описанного в данной работе, использовалась вычислительная схема рекуррентного оценивания вещественных оценок фазовых неоднозначностей, описанная в работе [12]. Целочисленное разрешение фазовых неоднозначностей основано на целочисленной квадратичной оптимизации с помощью методов, описанных в работах [6, 7]. В рамках данной статьи считаем, что процедура разрешения фазовых неоднозначностей уже выполнена и значения ΔN_r^{s1} и ΔN_r^{s2} известны.

Пусть координаты X_{0k}, Y_{0k}, Z_{0k} антенны A_0 в момент времени k уже известны из решения задачи о наименьших квадратах невязок двух первых навигационных уравнений (1) при $r = 0$. Поставим задачу определения векторов L_{rk} с помощью решения задачи о наименьших квадратах невязок уравнений (3). Одна итерация метода Гаусса — Ньютона [5] для системы нелинейных уравнений эквивалентна решению задачи о наименьших квадратах для линейризованной системы. Выпишем уравнения (3), линейризованные в окрестности точки X_{0k}, Y_{0k}, Z_{0k} в момент времени k . Обозначим:

$$\Phi_{rk}^{sb} = (\Delta\Phi_{rk}^{sb} - \Delta N_r^{sb})\lambda^{sb},$$

$$\Phi_{rk}^b = (\Phi_{rk}^{1b}, \dots, \Phi_{rk}^{n_{rk}b})^T \in R^{n_{rk}},$$

$$\Phi_{rk} = \begin{pmatrix} \Phi_{rk}^1 \\ \Phi_{rk}^2 \end{pmatrix} \in R^{2n_{rk}},$$

$$\Phi_k = (\Phi_{1k}, \dots, \Phi_{(m-1)k}) \in R^{2n_{rk}} \times (m-1),$$

$J_{rk} \in R^{n_{rk} \times 3}$ — матрица Якоби вектор-функции

$$\rho_{rk} \in R^{n_{rk}}.$$

Строками матрицы J_{rk} являются векторы направляющих косинусов линии визирования спутника $s = 1, \dots, n_{rk}$ из антенны A_r . Для антенн, расположенных на расстоянии нескольких метров друг от друга, линии визирования на спутники, расположенные на расстоянии $\sim 20\,000$ км от них, практически коллинеарны. Предположим, что число и состав спутников, наблюдаемых антеннами $A_r, r = 0, \dots, m-1$, одинаково. При этом предположении выполняются условия $n_{rk} \equiv n_k, J_{rk} \equiv J_k$, где n_k — общее для всех антенн число наблюдаемых спутников, а J_k — общая для всех антенн матрица Якоби вектор-функций ρ_{rk} . Далее, обозначим:

$$C = (c, \dots, c)^T \in R^{n_k}, A_k = \begin{bmatrix} J_k & C \\ J_k & C \end{bmatrix} \in R^{2n_k \times 4},$$

$$\tilde{L}_k = \begin{bmatrix} X_{1k} - X_{0k} & X_{2k} - X_{0k} & \dots & X_{(m-1)k} - X_{0k} \\ Y_{1k} - Y_{0k} & Y_{2k} - Y_{0k} & \dots & Y_{(m-1)k} - Y_{0k} \\ Z_{1k} - Z_{0k} & Z_{2k} - Z_{0k} & \dots & Z_{(m-1)k} - Z_{0k} \\ \Delta\tau_{1k} & \Delta\tau_{2k} & \dots & \Delta\tau_{(m-1)k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_k \\ (\Delta\tau_{1k}, \dots, \Delta\tau_{(m-1)k}) \end{bmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений уравнения относительной навигации, линейризованные в окрестности положения X_{0k}, Y_{0k}, Z_{0k} антенны A_0 , принимают вид

$$A_k \tilde{L}_k = \Phi_k, \quad (4)$$

где опущены слагаемые Δv_{rk}^{sb} , отвечающие за ошибки измерений. Для весовой матрицы

$$W = \text{diag}((\sigma_\phi^1)^{-2}, \dots, (\sigma_\phi^n)^{-2}), \quad (5)$$

где $(\sigma_\phi^n)^2$ — априорная дисперсия ошибок первых разностей фазовых измерений Δv_{rk}^{sb} , поставим задачу минимизации взвешенной суммы квадратов невязок уравнений относительной навигации (4)

$$\|A_k \tilde{L}_k - \Phi_k\|_{F, V}^2 \xrightarrow{\tilde{L}_k} \min, \quad V = \text{diag}(W, W) \in R^{2n}. \quad (6)$$

Ориентация связанной системы координат относительно геоцентрической системы координат в момент времени k определяется матрицей Q_k . Для краткости далее опустим индекс зависимости от времени k в выражении (6). Вспомнив определение $L = Ql$, перепишем задачу (6) как задачу определения ортогональной матрицы Q , доставляющей минимум в задаче о наименьших квадратах

$$\|A\tilde{L} - \Phi\|_{F, V}^2 \xrightarrow{\tilde{L}} \min, \quad \tilde{L} = \begin{bmatrix} Q\bar{l} \\ (\Delta\tau_1, \dots, \Delta\tau_{m-1}) \end{bmatrix}, \quad Q^T Q = I. \quad (7)$$

Перепишем задачу (7) в виде

$$\min_{\tilde{L}} \|A\tilde{L} - \Phi\|_{F, V}^2 = \min_Q \left\{ \min_{\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_{(m-1)}} \|A\tilde{L} - \Phi\|_{F, V}^2 \right\}, \quad Q^T Q = I. \quad (8)$$

$$\text{Обозначим } H = \begin{bmatrix} J \\ J \end{bmatrix} \in R^{2n \times 3}, D = \begin{bmatrix} C \\ C \end{bmatrix} \in R^{2n}.$$

Взяв «внутренний» минимум в выражении (8), получим

$$\|HQ\bar{l} - \Phi\|_{F, \bar{W}}^2 \xrightarrow{\bar{W}} \min, \quad Q^T Q = I. \quad (9)$$

$$\bar{W} = V - \frac{1}{D^T V D} V D D^T V.$$



Заметим, что весовая матрица \bar{W} вырождена и имеет дефект ранга 1. Матрица V определяется выражениями (5) и (6) и отражает структуру шумов фазовых измерений. Используя определение нормы Фробениуса, перепишем задачу (9) в виде

$$\begin{aligned} \|HQ\bar{l} - \Phi\|_{F, \bar{W}}^2 &= \text{tr}(HQ\bar{l} - \Phi)^T \bar{W} (HQ\bar{l} - \Phi) = \\ &= (\text{tr}(\bar{l}^T Q^T H^T \bar{W} H Q\bar{l}) - 2\text{tr}(\bar{l}^T Q^T H^T \bar{W} \Phi) + \\ &+ \text{tr}(\Phi^T \bar{W} \Phi)) \rightarrow \min, \quad Q^T Q = I. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть H^+ — взвешенная псевдообратная матрица

$$H^+ = (H^T \bar{W} H)^{-1} H^T \bar{W}.$$

Предполагается, что $n \geq 4$ и матрица $H^T \bar{W} H \in R^{3 \times 3}$ невырождена, даже принимая во внимание вырожденность матрицы \bar{W} . Обозначим $l^* = H^+ \Phi$ решение задачи о наименьших квадратах

$$\|H\bar{l} - \Phi\|_{F, \bar{W}}^2 \rightarrow \min_{l \in R^{3 \times 3}}.$$

Дальнейшие преобразования выражения (10) приводят к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \|HQ\bar{l} - \Phi\|_{F, \bar{W}}^2 &= \text{tr}(\bar{l}^T Q^T H^T \bar{W} H Q\bar{l}) - \\ &- 2\text{tr}(\bar{l}^T Q^T H^T \bar{W} H l^*) \rightarrow \min, \quad Q^T Q = I. \end{aligned} \quad (11)$$

Задача квадратичной оптимизации (11) при квадратичных ограничениях решается итеративными методами, основанными на методе Ньютона [5, 13]. Мы следуем другой схеме. В качестве первого шага определим другую вспомогательную весовую матрицу, допускающую аналитическое решение задачи (11). Введение вспомогательной весовой матрицы позволяет избавиться от квадратичного слагаемого и воспользоваться известным вычислительным приемом (см., например, работу [9]). Затем решение параметрически продолжается до решения задачи (11) при исходной весовой матрице \bar{W} .

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим вспомогательную весовую матрицу

$$\tilde{W} = H^{+T} H^+. \quad (12)$$

Принимая во внимание тождество $H^+ H = I$ и ортогональность матрицы Q , перепишем задачу (11) в виде

$$\text{tr}(\bar{l}^T Q^T l^*) \rightarrow \max, \quad Q^T Q = I. \quad (13)$$

Далее, $\text{tr}(\bar{l}^T Q^T l^*) = \text{tr}(l^{*T} Q^T \bar{l}) = \text{tr}(\bar{l} l^{*T} Q^T)$. Обозначим $B = \bar{l} l^{*T}$ и перепишем задачу (13) в виде

$$\text{tr}(BQ) \rightarrow \max, \quad Q^T Q = I. \quad (14)$$

Представив матрицу B в виде сингулярного разложения $B = P\Sigma T$, $P^T P = T^T T = I$, Σ — диагональная матрица, получим решение задачи (14) в виде $Q = T^T P^T$.

Таким образом, замена весовой матрицы \bar{W} вспомогательной весовой матрицей \tilde{W} вида (12), позволяет найти аналитическое решение задачи (11).

4. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Введем в рассмотрение весовую матрицу, зависящую от параметра,

$$W(\alpha) = \alpha \bar{W} + (1 - \alpha) H^{+T} H^+, \quad (15)$$

где параметр α принимает значения из интервала $[0, 1]$. Начиная со значения $\alpha = 0$, для которого решение задачи (11) получено, найдем его параметрическое продолжение до значения $\alpha = 1$, для которого $W(1) = \bar{W}$. Подставив матрицу (15) в выражение (10), получим

$$\begin{aligned} &\text{tr}[\bar{l}^T Q^T (\alpha H^T \bar{W} H + (1 - \alpha) I) Q \bar{l}] - \\ &- 2\text{tr}[\bar{l}^T Q^T (\alpha H^T \bar{W} H + (1 - \alpha) I) l^*] \rightarrow \min, \\ &Q^T Q = I. \end{aligned}$$

Обозначим $M = H^T \bar{W} H - I$. Тогда последняя задача минимизации принимает вид

$$\begin{aligned} &\alpha \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{l}^T Q^T M Q \bar{l}) - \alpha \text{tr}(B M Q) - \text{tr}(B Q) \rightarrow \min, \\ &Q^T Q = I. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $Q(\alpha)$ — решение задачи (16). Продолжим $Q(\alpha)$ по параметру от $\alpha = 0$ до $\alpha = 1$.

Пусть μ — матрица множителей Лагранжа, отвечающих ограничениям $Q^T Q = I$ в задаче (16). Она симметрична в силу специфики ограничений. Функция Лагранжа принимает вид

$$\begin{aligned} L(Q, \mu, \alpha) &= \alpha \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{l}^T Q^T M Q \bar{l}) - \alpha \text{tr}(B M Q) - \\ &- \text{tr}(B Q) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} \sum_{k=1}^3 (q_{ki} q_{kj} - \delta_{ij}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Пусть $\mu(\alpha)$ — матрица множителей Лагранжа, отвечающая решению $Q(\alpha)$, а $\dot{Q}(\alpha)$ и $\dot{\mu}(\alpha)$ — полные производные матриц $Q(\alpha)$ и $\mu(\alpha)$ по параметру α . Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Матрица множителей Лагранжа, отвечающая решению $Q(0)$, определяется формулой

$$\mu(0) = \frac{1}{2} P \Sigma P^T. \blacklozenge$$

Опустим для краткости символ зависимости от параметра (α) в выражениях $Q(\alpha)$, $\mu(\alpha)$, $\dot{Q}(\alpha)$ и $\dot{\mu}(\alpha)$.

Лемма 2. (а) Полная производная

$$\dot{Q} = QS, \quad (18)$$

где матрица $S = -S'$ кососимметричная.

(б) Кососимметричная матрица S и симметричная матрица $\dot{\mu}$ удовлетворяют линейному уравнению

$$\begin{aligned} \alpha Q^T M Q S \Pi^T + 2S\mu + 2\dot{\mu} &= \\ &= Q^T M B^T - Q^T M Q \Pi \Pi^T. \blacklozenge \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательства лемм приведены в Приложении. Обозначим

$$\Pi = Q^T M Q, \quad R = Y_0 Y_0^T, \quad \Psi = Q^T M B^T - Q^T M Q Y_0 Y_0^T.$$

Транспонирование выражения (19) и вычитание из него результата дает

$$\alpha \Pi S R + \alpha R S \Pi + 2S\mu + 2\dot{\mu} S = \Psi - \Psi^T. \quad (20)$$

Уравнение (20) относительно кососимметричной матрицы S линейно и может быть переписано как система трех линейных уравнений относительно трех внедиагональных элементов S . После определения матрицы S уравнение (18) определяет матрицу \dot{Q} . Наконец, уравнение (19) решается относительно матрицы $\dot{\mu}$.

Полные производные матриц \dot{Q} и $\dot{\mu}$, вычисленные при некотором значении параметра α , определяют направление изменения $Q(\alpha)$ и соответствующей матрицы множителей Лагранжа $\mu(\alpha)$. Для восстановления всей траектории $Q(\alpha)$, $\mu(\alpha)$ при изменении параметра α от 0 до 1 воспользуемся методом ломаных Эйлера. Пусть $\Delta\alpha$ — шаг изменения параметра. Начиная со значения $Q(0)$ и $\mu(0)$, вычисляем

$$\begin{aligned} Q((k+1)\Delta\alpha) &= Q(k\Delta\alpha) + \dot{Q}(k\Delta\alpha)\Delta\alpha, \\ \mu((k+1)\Delta\alpha) &= \mu(k\Delta\alpha) + \dot{\mu}(k\Delta\alpha)\Delta\alpha \end{aligned}$$

для $k = 0, 1, 2, \dots$ до тех пор, пока $k\Delta\alpha$ достигает значения 1. Матрицы $\dot{Q}(k\Delta\alpha)$ и $\dot{\mu}(k\Delta\alpha)$ вычисляются в соответствии с изложенной схемой.

Заметим, что уравнение (П1) (см. Приложение), определяющее направление изменения \dot{Q} и $\dot{\mu}$, может рассматриваться как уравнение ньютоновских итераций для вектор-функции $\partial L(Q, \mu, \alpha) / \partial q_{st}$ при ограничении $Q^T Q = 1$.

Вычислительные эксперименты показывают, что матрица $Q(0)$, вычисленная в начальной точке $a = 0$, дает хорошее приближение к решению $Q(1)$. Поэтому двух-четырёх итераций обычно достаточно для получения точного решения ($\Delta\alpha = 0,25 \dots 0,5$).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Цель испытаний состояла в проверке описанного алгоритма в статических и кинематических условиях и оценке точности определения ориентации.

Точность определения ориентации зависит от взаимного положения антенн и расстояния между ними. Четыре антенны «Magant» [11] были закреплены на крыше автомобиля «Нива» (рис. 1). В системе координат, начало которой совпадает с антенной A_0 , ось x направлена вдоль центральной оси машины и коллинеарна вектору $l_1 = A_1 - A_0$, ось y ортогональна оси x и направлена направо в плоскости крыши, ось z дополняет первые две до правой тройки, координаты антенн, совпадающие с координатами базовых линий $l_r = A_r - A_0$, равны (0; 0,766; 0,030), (-0,491; 0,019; 0,001), (0,488; -0,020; -0,007).

Использовался навигационный приемник JNSGygo-4 [11]. Алгоритм работал в реальном времени на частоте 10 Гц. Были проведены статическое и кинематическое испытания. Статическое испытание дает представление об ошибках определения ориентации. Длительность теста составила 2400 отсчетов. Сравнивались среднеквадратические отклонения углов, вычисленных с использованием вспомогательной весовой матрицы (12) и весовой матрицы (5), отвечающей реальным ошибкам фазовых шумов. В формуле (5) значения σ_φ^s изменялись в диапазоне от 0,02 до 0,07 цикла в за-

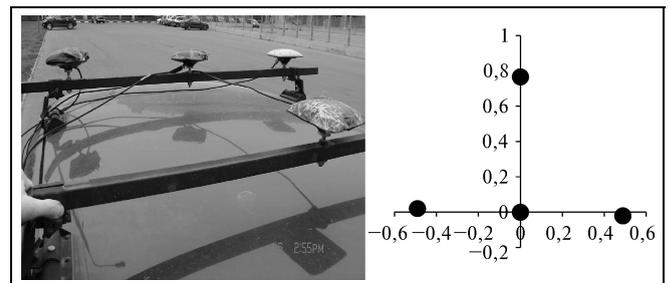


Рис. 1. Расположение антенн на крыше автомобиля

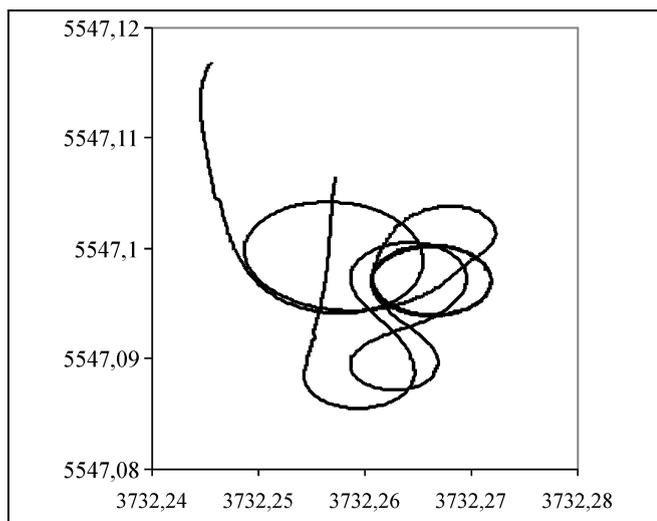


Рис. 2. Траектория движения автомобиля в течение кинематического теста (по осям отложены долгота и широта в формате ГММ, ММ — градусы, минуты и две десятичные цифры после запятой)

висимости от угла возвышения спутника. Средне-квадратические отклонения ошибок тангажа, крена и азимута равны 0,22, 0,17 и 0,08° соответственно. При использовании матрицы (12) ошибки оказались примерно на 30 % больше. Этот результат ожидаем и подтверждает целесообразность применения развитого в работе метода. Его вычислительная эффективность подтверждается возможностью реализации в реальном времени. Профилирование программы показало, что вычислительный метод, основанный на продолжении по параметру и дающий 30 %-е уменьшение погрешности, увеличивал вычислительную трудоемкость не более чем на 40 %. Основным источником ошибок при испытаниях был белый шум и многолучевость, вызванная отражением радиосигнала от крыши автомобиля и приемом отраженного сигнала обратной стороной антенны.

Траектория движения автомобиля в координатах «долгота — широта» в течение кинематического теста представлена на рис. 2, на рис. 3 — графики изменения азимута и крена. Изменения тангажа носят шумовой характер и не представляют интереса. Азимут изменяется в диапазоне от 0 до 360°. Волнообразное изменение крена вызвано наклоном автомобиля при поворотах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описан метод определения относительной ориентации твердого тела. Хотя, в действительности, решается задача ориентации твердого тела относительно локального горизонта, задача определения относительной ориентации легко решается добавлением радиоканала, передающего информацию об ориентации между несколькими телами. Проведенные натурные испытания подтверждают работоспособность предложенного метода. В отличие от других, ранее известных методов, предложенный метод позволяет правильно учесть реальную структуру ковариационных связей между ошибками фазовых измерений при высокой вычислительной эффективности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Условие стационарности точки (Q, μ) функции (17) $\left. \frac{\partial L(Q, \mu, \alpha)}{\partial q_{st}} \right|_{\alpha=0} = 0$,

q_{st} — элементы матрицы Q , принимает вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L(Q, \mu, \alpha)}{\partial q_{st}} \right|_{\alpha=0} &= -b_{ts} + \sum_{i \neq t} \mu_{it} \frac{\partial}{\partial q_{st}} (q_{si} q_{st} - \delta_{it}) + \\ &+ \sum_{j \neq t} \mu_{it} \frac{\partial}{\partial q_{st}} (q_{st} q_{sj} - \delta_{jt}) + \mu_{it} \frac{\partial}{\partial q_{st}} (q_{st} q_{st} - 1) = \\ &= -b_{ts} + 2 \sum_i \mu_{it} q_{si} = 0 \end{aligned}$$

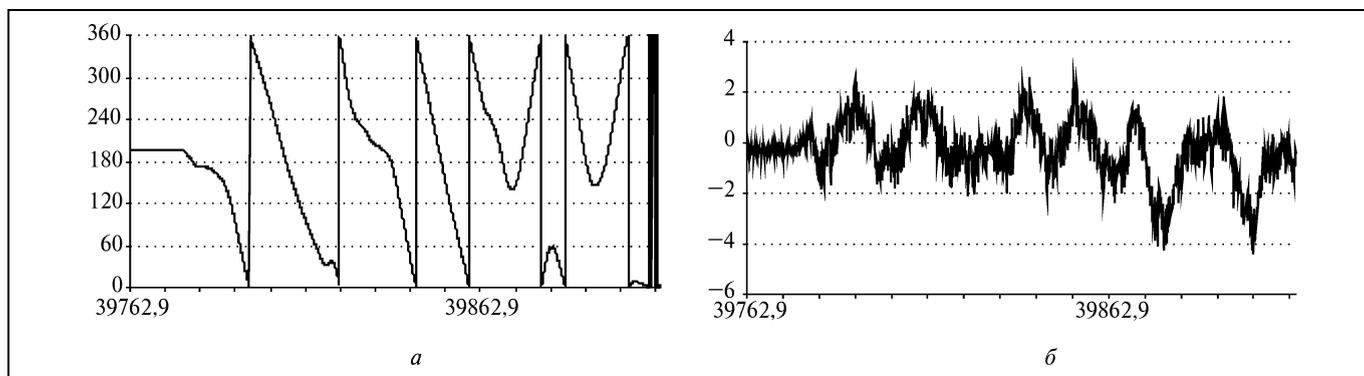


Рис. 3. Графики изменения азимута (а) и крена (б) в течение кинематического теста

или $-B^T + 2Q\mu(0) = 0$. Принимая во внимание разложение $B = P\Sigma V$ и выражение (17), получаем $\mu(0) = \frac{1}{2} Q^T B^T = P\Sigma P^T$.

Доказательство леммы 2. Утверждение (а) следует непосредственно из ортогональности матрицы $Q(\alpha)$ и свойств касательного пространства к группе ортогональных матриц $SO(3)$ в точке I , состоящего из кососимметричных матриц.

Дифференцирование условий стационарности $\frac{\partial L(Q, \mu, \alpha)}{\partial q_{st}} = 0$ по параметру α дает следующие условия (следующие также из теоремы о неявной функции)

$$\sum_{g,h} \frac{\partial^2 L}{\partial q_{st} \partial q_{gh}} \dot{q}_{gh} + \sum_{g,h} \dot{\mu}_{gh} \frac{\partial}{\partial q_{st}} \sum_k (q_{kg} q_{kh} - \delta_{gh}) + \frac{\partial}{\partial q_{st}} \left[\frac{1}{2} \text{tr}(I^T Q^T M Q I) - \text{tr}(B Q) \right] = 0. \quad (\text{П1})$$

Пусть $\{\cdot\}_{st}$ означает соответствующий элемент матрицы. Тогда поэлементное дифференцирование в выражении (П1) дает

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_{st} \partial q_{gh}} = \alpha m_{sg} \{I I^T\}_{th} + 2\mu_{th} \delta_{sg},$$

$$\sum_{g,h} \dot{\mu}_{gh} \frac{\partial}{\partial q_{st}} \sum_k (q_{kg} q_{kh} - \delta_{gh}) = 2\{Q\dot{\mu}\}_{st}, \quad (\text{П2})$$

$$\frac{\partial}{\partial q_{st}} \left[\frac{1}{2} \text{tr}(I^T Q^T M Q I) - \text{tr}(B Q) \right] = \{M Q I I^T - B^T\}_{st} \quad (\text{П3})$$

Комбинация условий (П1) с выражениями (П2) и (П3) дает

$$\alpha M \dot{Q} I I^T + 2\dot{Q} \mu + 2\dot{\mu} = M B^T - M Q I I^T.$$

Подстановка $\dot{Q} = Q S$ в последнее выражение и умножение слева на матрицу Q^T дает выражение (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Leick A. GPS Satellite Surveying. — New York: John Wiley & Sons, 1995.
2. GPS Interface Control Document. — URL: <http://www.navcen.uscg.gov/pubs/gps/icd200/> (дата обращения: 27.05.2010).
3. Интерфейсный контрольный документ. GLONASS. — URL: <http://www.glonass-ianc.rsa.ru/i/glonass/ICD-2002r.pdf> (дата обращения: 27.05.2010).
4. GALILEO Interface Control Document. — URL: <http://www.gsa.europa.eu/go/galileo/os-sis-icd> (дата обращения: 27.05.2010).
5. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985.
6. Lenstra A.K., Lenstra H.W., Lovász L. Factoring Polynomials with Rational Coefficients // Math. Annalen. — 1982. — Vol. 261. — P. 515–534.
7. Схрейвер А. Линейное и целочисленное программирование. — М.: Мир, 1991.
8. Wahba G. A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude // SIAM Review. — 1965. — Vol. 7, N 3.
9. Crassidis J.L., Landis Markley F., Cheng Y. Survey of Nonlinear Attitude Estimation Methods // J. Guidance, Control, and Dynamics. — 2007. — Vol. 30, N 1. — P. 12–28.
10. Степанов О.А., Кошаев Д.А. Исследование методов решения задачи ориентации с использованием спутниковых систем // Навигация и гироскопия. — 1999. — № 2 (25). — С. 30–55.
11. <http://www.javad.com/jns> (дата обращения: 27.05.2010).
12. Rapoport L., Barabanov I., Khvalkov A., et al. OSTOPUS: Multi antennae GPS/ GLONASS RTK System // ION Meeting Proceedings, Nashville, Tennessee, Sept. 14–17, 1999.
13. Gill P.E., Golub G.H., Murray W., Saunders M.A. Methods for Modifying Matrix Factorizations // Math. of Computations. — 1977. — Vol. 28. — P. 505–535.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Рapoпорт Лев Борисович — д-р физ.-мат. наук, зав лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-86-60, ✉ L.Rapoport@Javad.com.

За достигнутые трудовые успехи и многолетнюю плодотворную работу академик Российской академии наук, советник Российской академии наук, член редколлегии нашего журнала Станислав Васильевич Емельянов Указом Президента Российской Федерации награждён Орденом Почёта.

Сердечно поздравляем Станислава Васильевича с высокой наградой и желаем ему дальнейших творческих успехов!

Редколлегия и редакция
журнала «Проблемы управления»