

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ, КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ И КУСОЧНО-ЗАДАННЫХ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ<sup>1</sup>

А.Б. Рагимов

Рассмотрены задачи оптимального управления объектами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений при кусочно-постоянных, кусочно-линейных и кусочно-заданных на классе функций управлениях. Оптимизируются как кусочно-постоянные значения параметров управлений, так и границы интервалов постоянства этих значений. Получены аналитические формулы градиента функционала по оптимизируемым параметрам, позволяющие для численного решения задач применять эффективные методы оптимизации первого порядка. Приведены результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** задача управления, система с сосредоточенными параметрами, градиент функционала, принцип максимума, кусочно-постоянное управление, кусочно-линейное управление, кусочно-заданное управление, интервал постоянства управления.

## ВВЕДЕНИЕ

При управлении многими реальными процессами осуществление частых изменений значений управляющих воздействий либо связано с большими трудностями реализации, либо вообще невозможно. Поэтому, с практической точки зрения, возникает необходимость исследования задач оптимального управления на заданных классах, например, на классах кусочно-постоянных, кусочно-линейных и других управляющих воздействий. В настоящей статье исследуются нелинейные задачи оптимального управления процессами, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений. В рассматриваемых задачах управление принадлежит классам кусочно-постоянных, кусочно-линейных и кусочно-заданных управляющих функций; оптимизируются кусочно-

постоянные значения коэффициентов, входящих в выражении управлений, и оптимизируются сами интервалы постоянства этих коэффициентов. Важно, что границы интервалов постоянства коэффициентов неизвестны и оптимизируются. Предложен метод численного определения оптимальных кусочно-постоянных значений коэффициентов и интервалов их постоянства, основанный на методах конечномерной оптимизации первого порядка и полученных формулах градиента функционала по оптимизируемым параметрам.

Отметим, что различные другие аспекты оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций исследовались многими авторами [1–9]. В частности, для решения линейно-квадратичной задачи управления на классе кусочно-постоянных управляющих функций с оптимизируемыми временами их переключения использована фундаментальная матрица решений [3], получены условия оптимальности для случая, когда управления принимают значения из заданного множества с конечным числом значений [7]. Предложен подход к синтезу зональных кусочно-постоянных уп-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики. Грант № EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1.

равляющих воздействий [8]. Исследования данной работы отличаются от других подходов, использующих дискретизацию непрерывной задачи оптимального управления, в которых управляющие воздействия естественно становятся кусочно-постоянными. Здесь параметры управляющих воздействий предполагаются заведомо кусочно-постоянными, а интервалы постоянства никак не связаны с шагом дискретизации задачи, а самое важное то, что оптимизируются сами моменты времени переключения управлений, т. е. границы интервалов постоянства значений параметров управления.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются задачи оптимального управления объектами, описываемыми системами обыкновенных, в общем случае нелинейных, дифференциальных уравнений. Пусть состояние управляемого объекта определяется задачей Коши:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad t \in (0, T], \quad x(0) = \bar{x}_0, \quad (1)$$

где  $x = x(t) \in E^n$ ,  $t \in [0, T]$  — фазовое состояние объекта;  $u = u(t) \in E^r$ ,  $t \in [0, T]$  — управление; вектор-функция  $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)^T$  непрерывно дифференцируема по  $(x, u)$  и непрерывна по  $t$ . Момент времени  $T$  и начальная точка  $\bar{x}_0 \in E^n$  заданы. Рассмотрены три постановки задачи оптимального управления, различающиеся допустимыми классами функций, в которых ищутся оптимальные управляющие воздействия  $u(t)$ .

### 1.1. Управления из класса кусочно-постоянных функций

Управление  $u = u(t) \in E^r$ ,  $t \in [0, T]$ , постоянное на каждом полуинтервале  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ ,  $j = 1, \dots, L$ , полученном разбиением отрезка  $[0, T]$  ( $L - 1$ ) опти-

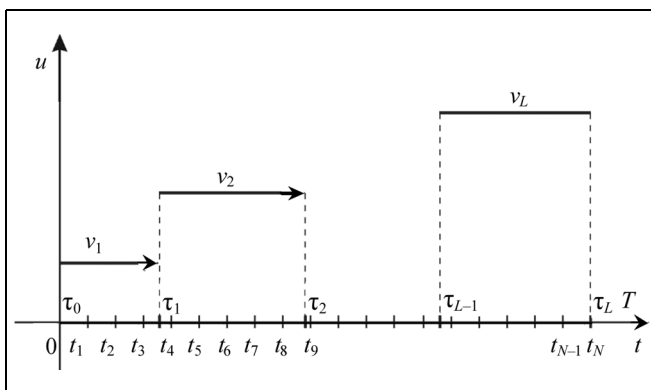


Рис. 1. Кусочно-постоянное управление

мизируемыми точками  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, L - 1$ , (рис. 1), т. е. [10]

$$u(t) = v_j = \text{const}, \quad t \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \quad v_j \in E^r, \quad (2)$$

$$\tau_{j-1} \leq \tau_j, \quad j = 1, \dots, L, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_L = T, \quad (3)$$

а значения управления  $v_j \in E^r$ ,  $j = 1, \dots, L$ , принадлежат некоторому множеству  $U$ , в частности, параллелепипеду:

$$U = \{v : v = (v_1, \dots, v_L), \quad \alpha_j \leq v_j \leq \beta_j, \\ v_j, \alpha_j, \beta_j \in E^r, \quad j = 1, \dots, L\}. \quad (4)$$

Задача заключается в нахождении кусочно-постоянных значений управления  $u(t)$ , т. е. значений конечномерных векторов  $v_j \in E^r$ ,  $j = 1, \dots, L$ , и границ интервалов постоянства этих значений, определяемых вектором  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{L-1})^T$ , при которых заданный функционал

$$J(u) = \bar{J}(v, \tau) = \int_0^T f^0(x, u, t) dt + \Phi(x(T)) \quad (5)$$

при условиях (1)–(4) принимает минимальное значение,  $(v, \tau) \in E^{L(r+1)-1}$ . Предполагается, что заданные функции  $f^0$  и  $\Phi$  непрерывны вместе с частными производными по своим аргументам и число интервалов постоянства управлений  $L$  задано.

### 1.2. Управления из класса кусочно-линейных функций

Управление  $u = u(t) \in E^r$ ,  $t \in [0, T]$  — линейная функция на каждом полуинтервале  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ ,  $j = 1, \dots, L$ , полученном разбиением отрезка  $[0, T]$  ( $L - 1$ ) оптимизируемыми точками  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, L - 1$  (рис. 2), т. е.

$$u(t) = c_1^j (t - \tau_{j-1}) + c_2^j, \quad t \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \\ c_1^j, c_2^j \in E^r, \quad (6)$$

а допустимые значения управления принадлежат некоторому множеству  $U$ , в частности, параллелепипеду:

$$U = \{u : u = u(t), \quad \alpha \leq u(t) \leq \beta, \quad \alpha, \beta \in E^r, \\ t \in [0, T]\}. \quad (7)$$

Если обозначить параметры управления  $C = (C^1, \dots, C^L)^T = (c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, \dots, c_1^L, c_2^L)^T$ , то ясно, что функционал (5) будет зависеть от  $C$  и  $\tau$ :

$$J(u) = \bar{J}(C, \tau) = \int_0^T f^0(x, u, t) dt + \Phi(x(T)). \quad (8)$$

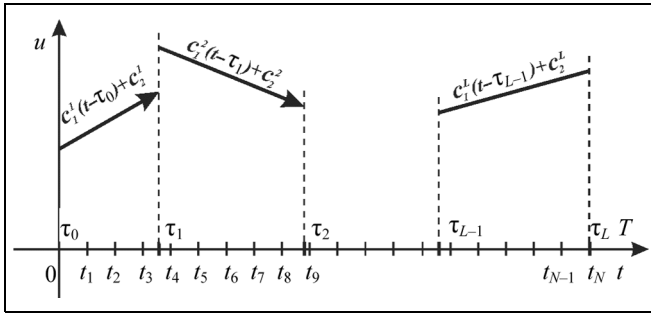


Рис. 2. Кусочно-линейное управление

Задача заключается в нахождении таких векторов  $C = (C^1, \dots, C^L)^T$  и  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{L-1})^T$ , при которых заданный функционал (8) при условиях (1), (6), (3), (7) принимает минимальное значение.

**1.3. Кусочно-заданные на классе функций управления**

Управление  $u = u(t) \in E^r, t \in [0, T]$  определяется заданными базисными функциями  $\varphi_m(t - \tau_{j-1}), m = 1, \dots, M, t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ , с неизвестными оптимизируемыми постоянными коэффициентами  $C^j = (c_1^j, \dots, c_M^j)^T, j = 1, \dots, L$ , на каждом полуинтервале  $[\tau_{j-1}, \tau_j], j = 1, \dots, L$ , полученном разбиением отрезка  $[0, T]$   $(L - 1)$  оптимизируемыми точками  $\tau_j, j = 1, \dots, L - 1$  (рис. 3), т. е.

$$u(t) = \sum_{m=1}^M c_m^j \varphi_m(t - \tau_{j-1}), t \in [\tau_{j-1}, \tau_j],$$

$$c_m^j \in E^r, m = 1, \dots, M, \quad (9)$$

а допустимые значения управлений принадлежат некоторому множеству  $U$ , в частности, параллелепипеду (7).

Задача заключается в нахождении векторов параметров управления  $C = (C^1, \dots, C^L) = (c_1^1, \dots, c_M^1,$

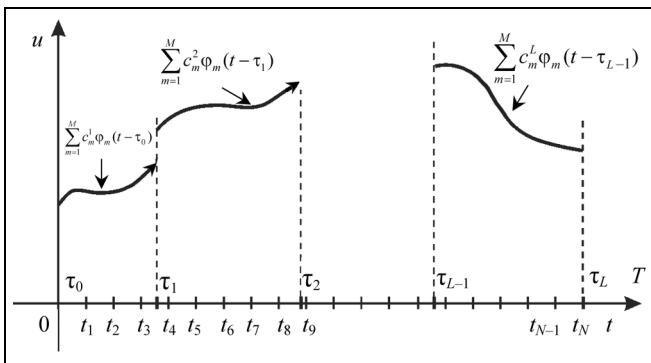


Рис. 3. Кусочно-заданное управление

$\dots, c_1^L, \dots, c_M^L)^T$ , и  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{L-1})^T$  при условиях (1), (9), (3), (7), при которых заданный функционал (8) принимает минимальное значение. Предполагается, что заданные функции  $\varphi_m(t - \tau_{j-1}), m = 1, \dots, M, t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ , вместе с частными производными по  $(x, u)$  непрерывны.

Таким образом, в зависимости от выбора управления в форме (2), (6) или (9), будут рассмотрены три постановки задачи оптимального управления: 1) (1)–(5); 2) (1), (6), (3), (7), (8); 3) (1), (9), (3), (7), (8).

Отметим, что разрыв первого рода управляющих воздействий  $u(t)$  в какие-либо моменты времени  $\tau_j \in [0, T]$ , как известно, приводит к потере гладкости и появлению изломов траектории  $x(t)$  при  $t = \tau_j$ . При расчетах, а именно, при решении системы дифференциальных уравнений (1) численными методами возможны два подхода к учету моментов разрыва управления. Согласно одному из них применяется неравномерный шаг интегрирования, при котором моменты переключения включаются во множество точек дискретизации интервала времени  $[0, T]$ . В этом случае изменение значения управления на интервалах, полученных при дискретизации, учитывается естественным образом. В соответствии с другим подходом множество точек дискретизации берется равномерным, а на интервалах, в которые попали точки переключения управления, значения управления усредняются.

**2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТИЗИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ**

Исследуем решение задачи на каждом из рассмотренных выше классах управления в отдельности.

**2.1. Управление в форме (2)**

Для численного решения задачи (1)–(5) воспользуемся схемой, предложенной в работах [11–14]. Для этого на отрезке  $[0, T]$  введем равномерную сеточную область

$$\Omega = \{t_i; t_i = ih, i = 0, \dots, N, h = T/N\},$$

где  $N$  – заданное натуральное число.

В области  $\Omega$  аппроксимируем значение управления  $u = u(t) \in E^r, t \in [0, T]$ :

$$u_i = \begin{cases} v_j, [t_i, t_{i+1}) \subset [\tau_{j-1}, \tau_j), j = 1, \dots, L, \\ (v_{j+1}(t_{i+1} - \tau_j) + v_j(\tau_j - t_i))/h, \tau_j \in [t_i, t_{i+1}), \\ j = 1, \dots, L - 1, \\ i = 0, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (10)$$

Видно, что если момент времени переключения управления  $\tau_j$  находится между узловыми точками  $t_i$  и  $t_{i+1}$ , то значение управления  $u_i$  аппроксимируется линейной комбинацией значений  $v_j, v_{j+1}$ .

Применяя какую-либо схему аппроксимации (например, явную и неявную схемы метода Эйлера, метод Рунге — Кутты, метод Адамса и др.), аппроксимированную систему (1) можно в общем случае представить в виде:

$$\begin{aligned} X^i &= F_i(X^i, V^i, Q^i), \quad x_0 = \bar{x}_0, \quad i = 1, \dots, N, \\ X^i &= \{x_s : s \in L_X^i\}, \quad V^i = \{v_s : s \in L_V^i\}, \quad (11) \\ Q^i &= \{\tau_s : s \in L_T^i\}, \end{aligned}$$

где функция  $F_i$ , индексные множества  $L_X^i, L_V^i, L_T^i$  определяются применяемой схемой аппроксимации задачи (1).

Например, для явного метода Эйлера функция

$$F_i(X^i, V^i, Q^i) = x_{i-1} + hf(x_{i-1}, u_{i-1}, t_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (12)$$

а индексные множества

$$\begin{aligned} L_X^i &= \{i-1\}, \quad L_V^i = \{j : \tau_{j-1} \leq t_{i-1} < \tau_j\}, \\ L_T^i &= \{j : t_{i-1} \leq \tau_j < t_i\}. \end{aligned}$$

Для неявного метода Эйлера

$$\begin{aligned} F_i(X^i, V^i, Q^i) &= x_{i-1} + hf(x_i, u_{i-1}, t_i), \quad i = 1, \dots, N, \\ L_X^i &= \{i-1, i\}, \quad L_V^i = \{j : \tau_{j-1} \leq t_{i-1} < \tau_j\}, \quad (13) \\ L_T^i &= \{j : t_{i-1} \leq \tau_j < t_i\}. \end{aligned}$$

Для метода Рунге — Кутты четвертого порядка

$$\begin{aligned} F_i(X^i, V^i, Q^i) &= \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6}hf(x_{5q} u_{5q} t_{5q}), i = 5q + 1, \\ \frac{1}{3}hf(x_{5q} + \frac{h}{2}x_{5q+1}, u_{5q} t_{5q} + \frac{h}{2}), i = 5q + 2, \\ \frac{1}{3}hf(x_{5q} + \frac{h}{2}x_{5q+2}, u_{5q} t_{5q} + \frac{h}{2}), i = 5q + 3, \\ \frac{1}{6}hf(x_{5q} + x_{5q+3}, u_{5q} t_{5q} + h), i = 5q + 4, \\ \sum_{s=0}^4 x_{5q+s}, i = 5q + 5, \end{cases} \quad (14) \end{aligned}$$

$$L_X^i = \begin{cases} \{5q-5, 5q-4, 5q-3, 5q-2, 5q-1\}, i = 5q, \\ \{5q-k-1, 5q-5\}, i = 5q-k, k = 1, 2, 3, \\ \{5q-5\}, i = 5q-4, \end{cases}$$

$$L_V^i = \begin{cases} j : \tau_{j-1} \leq t_{i-k} < \tau_j, i = 5q+k, k = 1, 2, 3, 4, \\ \emptyset, i = 5q, \end{cases}$$

$$L_T^i = \begin{cases} j : t_{i-k} \leq \tau_j < t_{i-k+1}, i = 5q+k, k = 1, 2, 3, 4, \\ \emptyset, i = 5q, \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, 5N, \quad q = 1, \dots, N-1.$$

Интеграл, участвующий в выражении функционала (5), аппроксимируем с помощью какой-либо квадратурной формулы:

$$I(v, \tau) = \Phi(x_N) + h \sum_{i=0}^N \gamma_i f^0(x_i, u_i, t_i) \rightarrow \min_{v, \tau}, \quad (15)$$

где  $\gamma_i, i = 0, 1, \dots, N$  — коэффициенты квадратурной формулы.

В результате получим конечномерную задачу математического программирования (10), (11), (15) с учетом условий (3), (4).

Для решения задачи (10), (11), (15), т. е. для определения оптимальных значений векторов  $v$  и  $\tau$ , воспользуемся численными методами конечномерной оптимизации первого порядка, в частности, итерационным методом проекции градиента функционала в пространстве оптимизируемых параметров  $(v, \tau)$ :

$$\begin{aligned} (v^{k+1}, \tau^{k+1}) &= P_{(3),(4)}[(v^k, \tau^k) - \\ &- \alpha(\partial I(v^k, \tau^k)/\partial v, \partial I(v^k, \tau^k)/\partial \tau)], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (16) \end{aligned}$$

где  $P_{(3),(4)}$  — оператор проектирования вектора  $(v, \tau)$  на допустимую область параметров, определяемую ограничениями (3), (4);  $(v^0, \tau^0)$  — некоторое заданное начальное приближение для оптимизируемых параметров; векторы

$$\begin{aligned} dI(v, \tau)/dv &= (dI/dv_1, \dots, dI/dv_L)^T, \\ dI(v, \tau)/d\tau &= (dI/d\tau_1, \dots, dI/d\tau_{L-1})^T, \quad (17) \end{aligned}$$

определяют градиент функционала задачи (10), (11), (15), формулы для компонент которого будут получены далее.

Введем индексные множества  $\bar{L}_X^i, \bar{L}_V^i, \bar{L}_T^i$ , которые назовем сопряженными относительно множеств  $L_X^i, L_V^i, L_T^i$ :

$$\bar{L}_X^i = \{s : i \in \bar{L}_X^s, s = 0, \dots, N-1\},$$

$$\bar{L}_V^i = \{s : i \in \bar{L}_V^s, s = 0, \dots, N-1\},$$

$$\bar{L}_T^i = \{s : i \in \bar{L}_T^s, s = 0, \dots, N-1\}.$$



Векторы

$$p_i = dI(v, \tau)/dx_i, \quad p_i \in E^n, \quad i = 0, \dots, N, \quad (18)$$

будем называть импульсными переменными [10–14]. Здесь производная понимается как полная, с учетом взаимозависимости значений  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , в соотношениях (11). Отсюда с учетом (11) следует:

$$p_i = \frac{\partial I}{\partial x_i} + \sum_{s \in \bar{L}_X^i} \frac{dI}{dx_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_i} = \frac{\partial I}{\partial x_i} + \sum_{s \in \bar{L}_X^i} \frac{\partial F_s(X^s, V^s, Q^s)}{\partial x_i} p_s, \quad i = 0, \dots, N. \quad (19)$$

Систему (19) назовем сопряженной системой.

Из формулы (12) несложно понять, что для явного метода Эйлера  $\bar{L}_X^i = \{i\}$ , а сопряженная система имеет вид:

$$p_i = \frac{\partial I}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{i+1}(X^{i+1}, V^{i+1}, Q^{i+1})}{\partial x_i} p_{i+1} = \gamma_i h \frac{\partial f^0(x_i, u_i, t_i)}{\partial x_i} + \left[ E + h \frac{\partial f^T(x_i, u_i, t_i)}{\partial x_i} \right] p_{i+1}, \quad i = N - 1, \dots, 0, \quad (20)$$

$$p_N = \frac{\partial I}{\partial x_N} = \frac{\partial \Phi(x_N)}{\partial x_N} + \gamma_N h \frac{\partial f^0(x_N, u_N, t_N)}{\partial x_N},$$

где  $E$  —  $n$ -мерная единичная матрица.

Для неявного метода Эйлера (13)  $\bar{L}_X^i = \{i, i + 1\}$ , а сопряженная система (19) примет вид:

$$p_i = \frac{\partial I}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{i+1}(X^{i+1}, V^{i+1}, Q^{i+1})}{\partial x_i} p_{i+1} + \frac{\partial F_i(X^i, V^i, Q^i)}{\partial x_i} p_i = \gamma_i h \frac{\partial f^0(x_i, u_i, t_i)}{\partial x_i} + p_{i+1} + h \frac{\partial f^T(x_i, u_{i-1}, t_i)}{\partial x_i} p_i, \quad i = N - 1, \dots, 1, \quad (21)$$

$$p_N = \frac{\partial I}{\partial x_N} + \frac{\partial F_N(X^N, V^N, Q^N)}{\partial x_N} = \frac{\partial \Phi(x_N)}{\partial x_N} + \gamma_N h \frac{\partial f^0(x_N, u_N, t_N)}{\partial x_N} + h \frac{\partial f(x_N, u_{N-1}, t_N)}{\partial x_N}.$$

Для метода Рунге — Кутты четвертого порядка (14) из системы (19) имеем:

$$p_i = \begin{cases} \frac{1}{6} p_{5q+5}, \quad i = 5q + 4, \\ \frac{1}{3} p_{5q+5} + \frac{h \partial f^T(x_{5q} + x_{5q+3}, u_{5q}, t_{5q} + h)}{\partial x_{5q+3}} p_{5q+4}, \\ i = 5q + 3, \\ \frac{1}{3} p_{5q+5} + \frac{h^2 \partial f^T(z, u_{5q}, t_{5q} + h/2)}{\partial z} p_{5q+3}, \\ \text{где } z = x_{5q} + h/2(x_{5q+2}), \quad i = 5q + 2, \\ \frac{1}{6} p_{5q+5} + \frac{h^2 \partial f^T(z, u_{5q}, t_{5q} + h/2)}{\partial z} p_{5q+2}, \\ \text{где } z = x_{5q} + h/2(x_{5q+1}), \quad i = 5q + 1, \\ h \gamma_{5q} \frac{\partial f^0(x_{5q}, u_{5q}, t_{5q})}{\partial x_{5q}} + \frac{h \partial f^T(x_{5q}, u_{5q}, t_{5q})}{\partial x_{5q}} p_{5q+1} + \\ + \frac{h \partial f^T(x_{5q} + h/2(x_{5q+1}), u_{5q}, t_{5q} + h/2)}{\partial x_{5q}} p_{5q+2} + \\ + \frac{h \partial f^T(x_{5q} + h/2(x_{5q+2}), u_{5q}, t_{5q} + h/2)}{\partial x_{5q}} p_{5q+3} + \\ + \frac{h \partial f^T(x_{5q} + h/2(x_{5q+3}), u_{5q}, t_{5q} + h/2)}{\partial x_{5q}} p_{5q+4} + \\ + p_{5q+5}, \quad i = 5q \\ p_{5N} = \frac{\partial \Phi(x_{5N})}{\partial x_{5N}} + \gamma_{5N} h \frac{\partial f^0(x_{5N}, u_{5N}, t_{5N})}{\partial x_{5N}}, \\ i = 5N - 1, \dots, 0, \quad q = N - 1, \dots, 0, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$L_X^i = \begin{cases} \{5q + 1, 5q + 2, 5q + 3, 5q + 4, 5q + 5\}, \quad i = 5q, \\ \{5q + k + 1, 5q + 5\}, \quad i = 5q + k, \quad k = 1, 2, 3, \\ \{5q + 5\}, \quad i = 5q + 4. \end{cases}$$

Учитывая зависимости (11) и определение для сопряженных переменных (18), компоненты градиента

$$\frac{dI}{dv_j} = \frac{\partial I}{\partial v_j} + \sum_{s \in \bar{L}_V^j} \frac{dI}{dx_s} \frac{\partial x_s}{\partial v_j} = \frac{\partial I}{\partial v_j} + \sum_{s \in \bar{L}_V^j} \frac{\partial F_s(X^s, V^s, Q^s)}{\partial v_j} p_s, \quad j = 1, \dots, L, \quad (23)$$

$$\frac{dI}{d\tau_j} = \frac{\partial I}{\partial \tau_j} + \sum_{s \in \bar{L}_T^j} \frac{dI}{dx_s} \frac{\partial x_s}{\partial \tau_j} = \frac{\partial I}{\partial \tau_j} + \sum_{s \in \bar{L}_T^j} \frac{\partial F_s(X^s, V^s, Q^s)}{\partial \tau_j} p_s, \quad j = 1, \dots, L - 1. \quad (24)$$

В частности, для явного метода Эйлера предположим, что момент переключения  $\tau_j$  находится между узловыми точками  $t_{k_{j-1}}$  и  $t_{k_j}$ , т. е.  $\tau_j \in [t_{k_{j-1}}, t_{k_j})$ ,  $j = 1, \dots, L - 1$ . Ясно, что тогда значение управления  $v_j$  будет влиять на переменные  $x_s$  с индексами  $s = k_{j-1}, k_{j-1} + 1, \dots, k_j - 1, k_j$ . В этом случае  $\bar{L}_V^i = \{k_{j-1}, k_{j-1} + 1, \dots, k_j - 1, k_j\}$  и  $\bar{L}_T^i = \{k_j\}$ . Следовательно, компоненты градиента

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dv_j} &= \frac{\partial I}{\partial v_j} + \sum_{s=k_{j-1}}^{k_j} \frac{\partial x_s}{\partial v_j} p_s = \\ &= h \sum_{s=k_{j-1}}^{k_j} \left[ \gamma_{s-1} \frac{\partial f^0(x_{s-1}, u_{s-1}, t_{s-1})}{\partial u_{s-1}} \frac{\partial u_{s-1}}{\partial v_j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^T(x_{s-1}, u_{s-1}, t_{s-1})}{\partial u_{s-1}} \frac{\partial u_{s-1}}{\partial v_j} p_s \right], \\ &\quad j = 1, \dots, L, \end{aligned}$$

где  $p_s, s = k_{j-1}, \dots, k_j, j = 1, \dots, L$ , определяются из системы соотношений (20), а частные производные  $\partial u_s / \partial v_j, s = k_{j-1} - 1, \dots, k_j - 1, j = 1, \dots, L$ , определяются из соотношения (10):

$$\frac{\partial u_s}{\partial v_j} = \begin{cases} 1, s = k_{j-1}, \dots, k_j - 2, \\ (t_{s+1} - \tau_{j-1})/h, s = k_{j-1} - 1, \\ (\tau_j - t_s)/h, s = k_j - 1. \end{cases} \quad (25)$$

Для компонент градиента имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau_j} &= \frac{\partial I}{\partial \tau_j} + \frac{\partial x_{k_j}}{\partial \tau_j} p_{k_j} = \frac{\partial I}{\partial \tau_j} + \frac{\partial x_{k_j}}{\partial u_{k_{j-1}}} \frac{\partial u_{k_{j-1}}}{\partial \tau_j} p_{k_j} = \\ &= h \frac{\partial u_{k_{j-1}}}{\partial \tau_j} \left[ \gamma_{k_{j-1}} \frac{\partial f^0(x_{k_{j-1}}, u_{k_{j-1}}, t_{k_{j-1}})}{\partial u_{k_{j-1}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^T(x_{k_{j-1}}, u_{k_{j-1}}, t_{k_{j-1}})}{\partial u_{k_{j-1}}} p_{k_j} \right], \\ &\quad j = 1, \dots, L - 1, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $p_{k_j}, j = 1, \dots, L - 1$ , определяются из соотношений (20). Частные производные  $\partial u_{k_{j-1}} / \partial \tau_j, j = 1, \dots, L - 1$  определяются непосредственно из соотношения (10):

$$\begin{aligned} \partial u_{k_{j-1}} / \partial \tau_j &= (v_j - v_{j+1})/h, \\ &\quad j = 1, \dots, L - 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда из выражений (26) и (27) для  $j = 1, \dots, L - 1$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau_j} &= (v_j - v_{j+1})^T \left[ \gamma_{k_{j-1}} \frac{\partial f^0(x_{k_{j-1}}, u_{k_{j-1}}, t_{k_{j-1}})}{\partial u_{k_{j-1}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^T(x_{k_{j-1}}, u_{k_{j-1}}, t_{k_{j-1}})}{\partial u_{k_{j-1}}} p_{k_j} \right], \quad j = 1, \dots, L - 1. \end{aligned}$$

Для неявного метода Эйлера  $\bar{L}_V^i = \{k_{j-1}, k_{j-1} + 1, \dots, k_j - 1, k_j\}$ ,  $\bar{L}_T^i = \{k_j\}$  и

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dv_j} &= h \sum_{s=k_{j-1}}^{k_j} \left[ \gamma_{s-1} \frac{\partial f^0(x_{s-1}, u_{s-1}, t_{s-1})}{\partial u_{s-1}} \frac{\partial u_{s-1}}{\partial v_j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^T(x_{s-1}, u_{s-1}, t_{s-1})}{\partial u_{s-1}} \frac{\partial u_{s-1}}{\partial v_j} p_s \right], \quad j = 1, \dots, L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau_j} &= (v_j - v_{j+1})^T \left[ \gamma_{k_{j-1}} \frac{\partial f^0(x_{k_{j-1}}, u_{k_{j-1}}, t_{k_{j-1}})}{\partial u_{k_{j-1}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^T(x_{k_j}, u_{k_{j-1}}, t_{k_j})}{\partial u_{k_{j-1}}} p_{k_j} \right], \quad j = 1, \dots, L - 1, \end{aligned}$$

где  $p_s, s = k_{j-1}, \dots, k_j, j = 1, \dots, L$ , определяются из сопряженной системы (21), а частные производные  $\partial u_s / \partial v_j, s = k_{j-1} - 1, \dots, k_j - 1, j = 1, \dots, L$ , — по формулам (25).

Для метода Рунге — Кутты четвертого порядка  $\bar{L}_V^i = \{5k_{j-1}, \dots, 5k_j\}$ ,  $\bar{L}_T^i = \{5k_j - 4, 5k_j - 3, 5k_j - 2, 5k_j - 1, 5k_j\}$  и

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dv_j} &= \frac{\partial I}{\partial v_j} + \sum_{s=5k_{j-1}}^{5k_j} \frac{\partial x_s}{\partial v_j} p_s = \\ &= \sum_{s=k_{j-1}}^{k_j} \gamma_s h \frac{\partial f^0(x_{5s}, u_{5s}, t_{5s})}{\partial u_{5s}} \frac{\partial u_{5s}}{\partial v_j} + \sum_{s=5k_{j-1}}^{5k_j} \frac{\partial x_s}{\partial v_j} p_s, \\ &\quad j = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau_j} &= \frac{\partial I}{\partial \tau_j} + \sum_{s=0}^4 \frac{\partial x_{k_j-s}}{\partial \tau_j} p_{k_j-s} = \\ &= h \gamma_{k_{j-1}} \frac{\partial f^0(x_{k_{j-1}}, u_{k_{j-1}}, t_{k_{j-1}})}{\partial u_{k_{j-1}}} \frac{\partial u_{k_{j-1}}}{\partial \tau_j} + \\ &\quad + \sum_{s=0}^4 \frac{\partial x_{k_j-s}}{\partial u_{k_{j-1}}} \frac{\partial u_{k_{j-1}}}{\partial \tau_j} p_{k_j-s}, \quad j = 1, \dots, L - 1, \end{aligned} \quad (29)$$



где

$$\frac{\partial x_s}{\partial v_j} = \begin{cases} \frac{h \partial f(x_{5q}, u_{5q}, t_{5q}) \partial u_{5q}}{6 \partial u_{5q} \partial v_j}, s = 5q + 1, \\ \frac{h \partial f(x_{5q} + h/2(x_{5q+k-1}), u_{5q}, t_{5q} + h/2) \partial u_{5q}}{3 \partial u_{5q} \partial v_j}, \\ s = 5q + k, k = 2, 3, \\ \frac{h \partial f(x_{5q} + x_{5q+3}, u_{5q}, t_{5q} + h) \partial u_{5q}}{6 \partial u_{5q} \partial v_j}, s = 5q + 4, \\ 0, s = 5q + 5, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_{5q}}{\partial v_j} = \begin{cases} 1, q = k_{j-1}, \dots, k_j - 2, \\ (t_{5q+5} - \tau_{j-1})/h, q = k_{j-1} - 1, \\ (\tau_j - t_{5q})/h, q = k_j - 1. \end{cases}$$

Импульсы  $p_s, s = 5k_{j-1}, \dots, 5k_j, j = 1, \dots, L$ , определяются из соотношений (22), а частные производные  $\partial u_{k_{j-1}}/\partial \tau_j, j = 1, \dots, L - 1$ , — по формулам (27).

Формулы (23) и (24) определяют компоненты градиента (17) функционала задачи (10), (11), (15).

Как указывалось в работах [11–15], именно приведенные формулы для импульсов и градиента функционала точно соответствуют применяемым схемам аппроксимации. Для аппроксимации классической сопряженной системы для непрерывного случая так же необходимо использовать приведенные формулы, соответственно схеме аппроксимации прямой задачи. Но надо отметить, что при аппроксимации непрерывных прямых и сопряженных систем «увидеть» правильность согласования схем не просто. В предложенных формулах это согласование происходит естественно [11–15]. Отметим, что формулы (28) и (29), полученные для случая применения метода Рунге — Кутты, ранее никем не приводились как в классическом случае кусочно-непрерывного класса управлений, так и, тем более, для рассматриваемых в данной работе классов управляющих воздействий.

Итерационный процесс (16) осуществляется в несколько этапов:

1) при текущих значениях вектора  $(v^k, \tau^k) \in E^{2L-1}$  из формул (10) и (11) определяется решение аппроксимированной задачи Коши  $x_i \in E^n, i = 0, \dots, N$ ;

2) из формулы (19) в обратном порядке, начиная от  $i = N$  и продолжая до  $i = 0$ , определяются векторы импульсов  $p_i \in E^n$ ;

3) из формул (23) и (24) определяются компоненты градиента (17);

4) выполняется процедура (16) с выбором шага  $\alpha$  из условия одномерной минимизации функционала (15) (учитывая «простоту» допустимой об-

ласти параметров (3), (4), операция проектирования  $P_{(3),(4)}$  не представляет сложности) определяется новое приближение  $(v^{k+1}, \tau^{k+1})$ .

В случае невыполнения условия оптимальности или останова повторяются этапы 1—4.

## 2.2. Управления в форме (6)

В области  $\Omega$  аппроксимируем значение управления  $u = u(t) \in E^r, t \in [0, T]$  и функционал (8):

$$u_i = \begin{cases} c_1^j(t_i - \tau_{j-1}) + c_2^j, [t_i, t_{i+1}] \subset [\tau_{j-1}, \tau_j], j = 1, \dots, L, \\ \frac{1}{h} [(t_{i+1} - \tau_j)(c_1^{j+1}(t_{i+1} - \tau_j) + c_2^{j+1}) + \\ + (\tau_j - t_i)(c_1^j(t_i - \tau_{j-1}) + c_2^j)], \tau_j \in [t_i, t_{i+1}), \\ j = 1, \dots, L - 1, \\ i = 0, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (30)$$

$$I(C, \tau) = \Phi(x_N) + h \sum_{i=0}^N \gamma_i f^0(x_i, u_i, t_i) \rightarrow \min_{C, \tau}. \quad (31)$$

Видно, что если момент времени переключения управления  $\tau_j$  находится между узловыми точками  $t_i$  и  $t_{i+1}$ , то значение управления  $u_i$  аппроксимируется линейной комбинацией значений  $(c_1^j(t_i^{j+1} - \tau_{j-1}) + c_2^j), (c_1^{j+1}(t_{i+1} - \tau_j) + c_2^{j+1})$ .

Итак, аппроксимируя задачу (1), (6), (3), (7), (8), в результате получим конечномерную задачу математического программирования (11), (12), (30), (31) с учетом условий (3), (7).

Для решения задачи (11), (12), (30), (31), т. е. для определения оптимальных значений векторов  $C = (c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, \dots, c_1^L, c_2^L)^T$  и  $\tau$ , воспользуемся итерационным методом проекции градиента функционала в пространстве оптимизируемых параметров  $(C, \tau)$ :

$$(C^{k+1}, \tau^{k+1}) = P_{(3),(7)}[(C^k, \tau^k) - \alpha(dI(C^k, \tau^k)/dC, dI(C^k, \tau^k)/d\tau)], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (32)$$

где  $P_{(3),(7)}$  — оператор проектирования вектора  $(C, \tau)$  на допустимую область параметров, определяемую ограничениями (3), (7);  $(C^0, \tau^0)$  — некоторое заданное начальное приближение для оптимизируемых параметров; векторы

$$dI/d\tau = (dI/d\tau_1, \dots, dI/d\tau_{L-1})^T, dI/dC = (dI/dc_1^1, dI/dc_2^1, dI/dc_1^2, \dots, dI/dc_1^L, dI/dc_2^L)^T, \quad (33)$$

определяют градиент функционала (31).

Получим формулы для вычисления градиента (33). Предположим, что момент переключения  $\tau_j$  находится между узловыми точками  $t_{k_j-1}$  и  $t_{k_j}$ , т. е.  $\tau_j \in [t_{k_j-1}, t_{k_j}), j = 1, \dots, L-1$ . Тогда компоненты градиента

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dc_m^j} &= \frac{\partial I}{\partial c_m^j} + \sum_{s=k_{j-1}}^{k_j} \frac{\partial x_s}{\partial c_m^j} p_s = \\ &= h \sum_{s=k_{j-1}}^{k_j} \left[ \gamma_{s-1} \frac{\partial f^0(x_{s-1}, u_{s-1}, t_{s-1})}{\partial u_{s-1}} \frac{\partial u_{s-1}}{\partial c_m^j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^T(x_{s-1}, u_{s-1}, t_{s-1})}{\partial u_{s-1}} \frac{\partial u_{s-1}}{\partial c_m^j} p_s \right], \\ &j = 1, \dots, L, \quad m = 1, 2, \end{aligned} \quad (34)$$

а из соотношения (30) частные производные определяются

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial c_1^j} &= \begin{cases} t_s - \tau_{j-1}, & s = k_{j-1}, \dots, k_j - 2, \\ (t_{s+1} - \tau_{j-1})^2 / h, & s = k_{j-1} - 1, \\ (\tau_j - t_s)(t_s - \tau_{j-1}) / h, & s = k_j - 1, \end{cases} \\ \frac{\partial u_s}{\partial c_2^j} &= \begin{cases} 1, & s = k_{j-1}, \dots, k_j - 2, \\ (t_{s+1} - \tau_{j-1}) / h, & s = k_{j-1} - 1, \\ (\tau_j - t_s) / h, & s = k_j - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Для компонент градиента  $dI/d\tau_j, j = 1, \dots, L-1$  получим выражение (26). Частные производные, участвующие в выражении (26), определяются непосредственно из соотношения (30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{k_j-1}}{\partial \tau_j} &= \frac{1}{h} [2c_1^{j+1}(\tau_j - t_{k_j}) + c_1^j(t_{k_j-1} - \tau_{j-1}) - \\ &\quad - c_2^{j+1} + c_2^j]. \end{aligned} \quad (35)$$

Если учесть формулу (35) в выражении (26), то получим

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau_j} &= \left[ \gamma_{k_j-1} \frac{\partial f^0(x_{k_j-1}, u_{k_j-1}, t_{k_j-1})}{\partial u_{k_j-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^T(x_{k_j-1}, u_{k_j-1}, t_{k_j-1})}{\partial u_{k_j-1}} p_{k_j} \right] \times \\ &\times [2c_1^{j+1}(\tau_j - t_{k_j}) + c_1^j(t_{k_j-1} - \tau_{j-1}) - c_2^{j+1} + c_2^j], \\ &j = 1, \dots, L-1. \end{aligned} \quad (36)$$

Формулы (34) и (36) определяют компоненты градиента функционала (31) задачи (11), (12), (30), (31).

### 2.3. Управления в форме (9)

В области  $\Omega$  аппроксимируем значение управления  $u = u(t) \in E^r, t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} u_i &= \\ &= \begin{cases} \sum_{m=1}^M c_m^j \varphi_m^{i,j-1}, [t_p, t_{i+1}) \subset [\tau_{j-1}, \tau_j), j = 1, \dots, L, \\ \frac{1}{h} \left[ (t_{i+1} - \tau_j) \sum_{m=1}^M c_m^{j+1} \varphi_m^{i+1,j} + (\tau_j - t_i) \sum_{m=1}^M c_m^j \varphi_m^{i,j-1} \right], \\ \tau_j \in [t_p, t_{i+1}), j = 1, \dots, L-1, \\ i = 0, \dots, N-1, \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\varphi_m^{i,j} = \varphi_m(t_i - \tau_{j-1}), m = 1, \dots, M, i = 0, \dots, N-1, j = 0, \dots, L-1$ .

Итак, аппроксимируя задачу (1), (9), (3) (7), (8), в результате получим конечномерную задачу математического программирования (11), (12), (37), (31) с учетом условий (3), (7).

Для определения оптимальных значений векторов  $C = (c_1^1, \dots, c_M^1, \dots, c_1^L, \dots, c_M^L)^T$  и  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{L-1})^T$ , воспользуемся процедурой (32). Здесь векторы

$$dI/d\tau = (dI/d\tau_1, \dots, dI/d\tau_{L-1})^T,$$

$$dI/dC = (dI/dc_1^1, \dots, dI/dc_M^1, \dots, dI/dc_1^L, \dots, dI/dc_M^L)^T$$

определяют градиент функционала задачи (11), (12), (37), (31).

Введем вектор импульсных переменных (18) и предположим, что  $\tau_j \in [t_{k_j-1}, t_{k_j}), j = 1, \dots, L-1$ .

Тогда для компонент градиента имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dc_m^j} &= \frac{\partial I}{\partial c_m^j} + \sum_{s=k_{j-1}}^{k_j} \frac{\partial x_s}{\partial c_m^j} p_s = \\ &= h \sum_{s=k_{j-1}}^{k_j} \left[ \gamma_{s-1} \frac{\partial f^0(x_{s-1}, u_{s-1}, t_{s-1})}{\partial u_{s-1}} \frac{\partial u_{s-1}}{\partial c_m^j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^T(x_{s-1}, u_{s-1}, t_{s-1})}{\partial u_{s-1}} \frac{\partial u_{s-1}}{\partial c_m^j} p_s \right], \\ &j = 1, \dots, L, \quad m = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (38)$$

а из соотношения (37) определяются частные производные

$$\frac{\partial u_s}{\partial c_m^j} = \begin{cases} \varphi_m^{s,j-1}, & s = k_{j-1}, \dots, k_j - 2, \\ (t_{s+1} - \tau_{j-1}) \varphi_m^{s+1,j-1} / h, & s = k_{j-1} - 1, \\ (\tau_j - t_s) \varphi_m^{s,j-1} / h, & s = k_j - 1. \end{cases}$$





Для компонент градиента  $dI/d\tau_j, j = 1, \dots, L - 1$  имеют место соотношения (26). Частные производные, участвующие в соотношении (26), определяются непосредственно из выражения (37):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{k_j-1}}{\partial \tau_j} &= \frac{1}{h} \left[ \sum_{m=1}^M c_m^j \varphi_m^{k_j-1, j-1} - \sum_{m=1}^M c_m^{j+1} \varphi_m^{k_j, j} \right] = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^M \left( c_m^j \varphi_m^{k_j-1, j-1} - c_m^{j+1} \varphi_m^{k_j, j} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Тогда из формул (26) и (39)

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau_j} &= \left[ \gamma_{k_j-1} \frac{\partial f^0(x_{k_j-1}, u_{k_j-1}, t_{k_j-1})}{\partial u_{k_j-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^T(x_{k_j-1}, u_{k_j-1}, t_{k_j-1})}{\partial u_{k_j-1}} p_{k_j} \right] \times \\ &\quad \times \sum_{m=1}^M \left( c_m^j \varphi_m^{k_j-1, j-1} - c_m^{j+1} \varphi_m^{k_j, j} \right), \\ &\quad j = 1, \dots, L - 1. \end{aligned} \quad (40)$$

Формулы (38) и (40) определяют компоненты градиента функционала (31) задачи (11), (12), (37), (31).

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

**Задача 1.** Применим предложенный подход к решению тестовой задачи нелинейного оптимального управления на отрезке  $t \in [0, 3\pi/4]$  [16]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -u(t)x_1, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \\ 1 \leq u(t) \leq 4, \quad J = x_1(T) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (41)$$

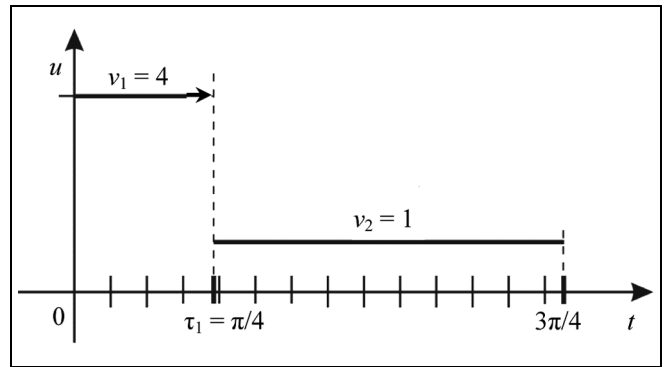


Рис. 4. График оптимального управления в задаче 1

Здесь  $n = 2, m = 1, T = 3\pi/4 = 2,356194$ . Точное решение задачи (рис. 4):

$$u^*(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < \pi/4, \\ 1, & \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4, \end{cases}$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < \pi/4, \\ -2\sin(t - \pi/4), & \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4, \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} -2\sin 2t, & 0 \leq t < \pi/4, \\ -2\cos(t - \pi/4), & \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4, \end{cases}$$

а минимальное значение функционала  $J(u^*) = -2$ .

Оптимальное управление в задаче (41) имеет релейный вид с двумя интервалами постоянства, т. е.  $L = 2$ . Оптимальное значение вектора  $(v, \tau)$

$$(v^*, \tau^*) = (v_1^*, v_2^*, \tau_1^*) = (4; 1; 0,785392).$$

Задача (41) решалась на классе кусочно-постоянных управляющих воздействий. Для аппроксимации дифференциальных уравнений применялась схема метода Эйлера.

В табл. 1 приведены результаты численных экспериментов ( $M$  — число итераций). Применялся

Таблица 1

Численные результаты решения задачи 1

$N$	$(v^0, \tau^0)$	$I^0$	$(v^*, \tau^*)$	$I^*$	$M$
1	(3,200; 1,500; 1,231)	-1,31334	(4,000000; 1,000000; 0,789326)	-2,05638082	6
2	(2,850; 1,200; 0,522)	-1,37611	(4,000000; 1,000000; 0,789323)	-2,05638072	6
3	(3,150; 2,430; 0,953)	-0,88576	(4,000000; 1,000000; 0,789325)	-2,05638083	7
4	(3,540; 1,820; 1,847)	-0,46159	(4,000000; 1,000000; 0,789325)	-2,05638084	8
5	(2,180; 1,470; 1,368)	-1,21106	(4,000000; 1,000000; 0,789329)	-2,05638077	4
6	(1,890; 0,750; 2,092)	-1,05994	(4,000000; 1,000000; 0,789325)	-2,05638084	4

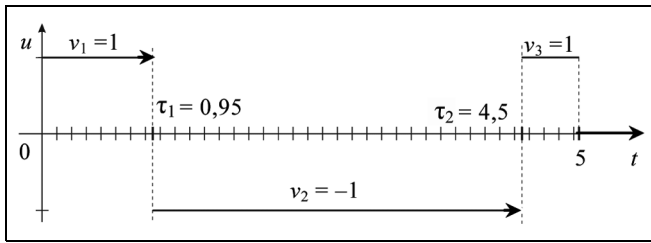


Рис. 5. График оптимального управления в задаче 2

метод проекции сопряженных градиентов с точностью  $\varepsilon = 0,001$  при различных начальных значениях  $(v^0, \tau^0)$  управляющего вектора  $(v, \tau)$ , шаг  $h \approx 0,01178$ .

**Задача 2.** Рассмотрим тестовую задачу [17]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - \sin x_1, \quad t \in (0; 5], \quad x_1(0) = 5,$$

$$x_2(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad J = x_1^2(5) + x_2^2(5) \rightarrow \min.$$

Здесь  $n = 2, m = 1, T = 5$ . Оптимальное управление имеет релейный вид с тремя интервалами постоянства (рис. 5), т. е.  $L = 3$ :

$$u^*(t) = 1, \quad t \in [0; 0,95); \quad u^*(t) = -1, \quad t \in [0,95; 4,50);$$

$$u^*(t) = 1, \quad t \in [4,50; 5];$$

$$(v^*, \tau^*) = (v_1^*, v_2^*, v_3^*, \tau_1^*, \tau_2^*) = (1; -1; 1; 0,95; 4,50).$$

В табл. 2 приведены результаты численных экспериментов. Применялся метод проекции сопря-

женных градиентов с точностью  $\varepsilon = 0,001$  при различных начальных значениях  $(v^0, \tau^0)$  управляющего вектора  $(v, \tau)$ , шаг  $h = 0,05$ .

**Задача 3.** Рассмотрим тестовую задачу [18] на отрезке  $[0, 8]$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \quad x_1(0) = 16, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases}$$

$$J = x_1^2(T) + x_2^2(T) + x_3^2(T) \rightarrow \min. \quad (42)$$

Здесь  $n = 3, m = 1, T = 8$ . Точное решение задачи:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 2, \\ 1, & 2 \leq t < 6, \\ -1, & 6 \leq t \leq 8, \end{cases}$$

а минимальное значение функционала  $J(u^*) = 0$ . Оптимальное управление в задаче (42) имеет релейный вид с тремя интервалами постоянства, т. е.  $L = 3$ . Оптимальное значение вектора  $(v, \tau)$ :

$$(v^*, \tau^*) = (v_1^*, v_2^*, v_3^*, \tau_1^*, \tau_2^*) = (-1, 1, -1, 2, 6).$$

В табл. 3 и 4 приведены результаты численных экспериментов. Применялся метод проекции сопряженных градиентов с точностью  $\varepsilon = 0,001$  при различных начальных значениях  $(v^0, \tau^0)$  управляющего вектора  $(v, \tau)$ , шаг  $h = 0,04$ .

Таблица 2

Численные результаты решения задачи 2

$N$	$(v^0, \tau^0)$	$I^0$	$(v^*, \tau^*)$	$I^*$	$M$
1	(0,78; 3,46; 0,7; -0,6; 0,5)	32,38	(0,950; 4,511; 1,0; -1,0; 1,0)	11,6681	24
2	(0,78; 3,46; 2; -2; 0,5)	9,15	(0,950; 4,501; 1,0; -1,0; 1,0)	11,6686	19
3	(0,52; 2,73; 0,8; -0,8; 0,4)	44,39	(0,950; 4,528; 1,0; -1,0; 1,0)	11,6699	40
4	(0,28; 3,26; 0,26; -0,4; 0,32)	42,78	(0,950; 4,512; 1,0; -1,0; 1,0)	11,6681	22

Таблица 3

Начальные значения в задаче 3

$N$	$(v^0, \tau^0)$	$I^0$
1	(-0,530; 0,760; -0,700; 0,382; 6,321)	4435,0140
2	(-0,600; 0,500; -0,800; 0,782; 4,647)	655,9553
3	(-0,300; 0,780; -0,550; 1,191; 3,463)	703,9213
4	(-0,840; 0,710; -0,670; 1,665; 6,742)	100,1715
5	(0,100; 0,640; -0,410; 2,357; 5,745)	1554,4936
6	(0,260; -0,400; 0,320; 3,281; 7,069)	713,2167



Таблица 4

## Численные результаты решения задачи 3

$N$	$(\nu^*, \tau^*)$	$I^*$	$M$
1	(-0,99866; 0,99820; -1,00000; 2,00052; 6,00382)	0,0000057	87
2	(-1,00000; 0,99998; -1,00000; 2,00002; 6,00011)	0,0000007	70
3	(-1,00000; 1,00000; -0,99956; 1,99997; 5,99966)	0,0000001	95
4	(-0,99991; 0,99164; -0,99999; 1,99331; 6,01179)	0,0000523	93
5	(-1,00000; 0,99998; -0,99895; 2,00002; 5,99977)	0,0000036	55
6	(-0,99997; 1,00000; -0,99972; 2,00031; 6,00196)	0,0000429	90

Результаты численных экспериментов показывают возможность получения с достаточно высокой точностью решения задач управления, в которых сами оптимальные управления являются релейными, кусочно-постоянными. Это, прежде всего, обусловлено использованием полученных формул для компонент градиента функционала по временам переключения кусочно-постоянных параметров управления. С другой стороны, приводимые формулы позволяют применить для решения задач управления богатый арсенал стандартного программного обеспечения решения задач конечной оптимизации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены аналитические формулы для градиента целевого функционала в задаче оптимального управления при кусочно-постоянных, кусочно-линейных и кусочно-заданных на классе функций управляющих воздействиях с оптимизируемыми временами переключений. Полученные формулы для градиента целевого функционала позволяют применять методы оптимизации первого порядка для численного решения задач оптимального управления.

Учитывая техническую простоту реализации управляющих воздействий из рассмотренных классов функций, результаты данной работы могут найти применение при разработке математического обеспечения систем автоматизированного и автоматического управления технологическими процессами различного назначения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *The Control Handbook: Control System Advanced Methods* / Ed. W.S. Levine. — Boca-Raton; London; New York: CRC Press, 2010. — 942 p.

- Li R., Teo K.L., Wong K.H., Duan G.R. Control parameterization enhancing transform for optimal control of switched systems // *Mathematical and Computer Modelling*. — 2006. — Vol. 43, N 1112. — P. 1393–1403.
- Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975. — 280 с.
- Рыжиков И.С., Семенкин Е.С. Система нахождения релейного программного управления для динамических объектов // *Программные продукты и системы*. — 2013. — № 1. — С. 167–171.
- Квитко А.Н., Якушева Д.Б. Алгоритм построения кусочно-постоянного синтезирующего управления при решении граничной задачи для нелинейной стационарной системы // *Вестник ВГУ. Сер.: Физика. Математика*. — 2012. № 1. — С. 138–145.
- Болдырев В.И. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. — 2004. — № 1. — С. 28–123.
- Моисеев А.А. Оптимальное управление при дискретных управляющих воздействиях // *Автоматика и телемеханика*. — 1991. — № 9. — С. 123–132.
- Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. Об одной задаче синтеза управления для нелинейных систем // *Автоматика и вычислительная техника*. — 2005. — Т. 39, № 1. — С. 15–23.
- Феско О.В. Алгоритм поиска кусочно-линейного управления с нефиксированными моментами переключений // *Вестник Бурятского гос. ун-та. Матем. и информатика*. — 2011. — № 9. — С. 52–56.
- Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. О решении задач оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций // *Автоматика и вычислительная техника*. — 2007. — Т. 41, № 1. — С. 27–36.
- Айда-заде К.Р., Евтушенко Ю.Г. Быстрое автоматическое дифференцирование на ЭВМ // *Математическое моделирование*. — 1989. — Т. 1, № 1. — С. 120–131.
- Айда-заде К.Р. Исследование и численное решение конечно-разностных аппроксимаций задач управления распределенными системами // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1989. — Т. 29, № 3. — С. 346–354.
- Евтушенко Ю.Г. Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. — М.: ВЦ РАН, 2013. — 144 с.
- Айда-заде К.Р., Евтушенко Ю.Г., Тальбов С.Г. Численные схемы решения задачи оптимального управления объектами с распределенными параметрами // *Изв. АН АЗССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук*. — 1985. — № 6. — С. 106–112.
- Айда-заде К.Р., Тальбов С.Г. О согласовании схем конечно-номерной аппроксимации краевых задач в оптимальном управлении // *Изв. АН АР. Сер. физ.-техн. и матем. наук*. — 1998. — № 6.
- Практикум по численным методам в задачах оптимального управления* / В.В. Александров, Н.С. Бахвалов, К.Г. Григорьев и др. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 80 с.
- Васильев О.В., Тятюшкин А.И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1981. — Т. 21, № 6. — С. 1376–1384.
- Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 486 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Рагимов Анар Бейбала оглы — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, Институт систем управления (кибернетики) НАН Азербайджана, г. Баку; Институт Френеля, г. Марсель, Франция, ✉ anar.rahimov@fresnel.fr, anar\_r@yahoo.com.