

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОСОБЕННОСТЕЙ УИТНИ ДЛЯ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫБОРЕ ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УПРАВЛЯЮЩЕГО СИГНАЛА

М.А. Работников, Б.Г. Стафейчук, А.Г. Шумихин

**Аннотация.** Представлены результаты оценки устойчивости функционирования автоматизированных технологических процессов непрерывного типа и выбора достаточной частоты временной дискретизации управляющего сигнала с применением теории особенностей Уитни. Предлагаемый подход анализа устойчивости динамической системы основывается на построении одной из типовых бифуркационных особенностей по историческим данным функционирования управляемого объекта при различных частотах дискретизации выходного сигнала управляющего устройства. По формируемому уравнению особенности определяется уравнение кривых равновесного состояния системы и необходимая частота временной дискретизации управляющего сигнала, соответствующая вершине полученной кривой. С целью иллюстрации применения метода рассмотрена система управления материальным балансом исчерпывающей части ректификационной колонны очистки товарного стирола производства этилбензола, стирола и полистирола. По результатам количественного анализа построена бифуркационная особенность и определена достаточная частота временной дискретизации управляющего сигнала, обеспечивающая устойчивость технологического режима функционирования исследуемой системы.

**Ключевые слова:** теория катастроф, бифуркационные особенности, динамические системы, критерии устойчивости.

## ВВЕДЕНИЕ

Применение теории катастроф получило широкое распространение в анализе поведения экономических и социальных систем, оценке сохранения конструктивных свойств сооружений и аппаратов, а также в исследовании свойств и количественных характеристик динамических систем [1–6]. Существующий математический аппарат позволяет численно описать явления скачкообразного переходного процесса выходной величины вследствие плавного изменения входных параметров динамической системы [7]. В частности, данный подход может быть применен для оценки устойчивости автоматизированных технологических процессов непрерывного типа [8].

Исследуемая проблема устойчивого функционирования технологических процессов заключается в соблюдении регламентных ограничений регистрируемых технологических параметров, обеспечивающих минимальный риск останова производства, нарушения качественного состава товарной

продукции и максимальную технологическую эффективность при наличии различного рода возмущений, носящих, как правило, спорадический характер [9]. Современная техническая база, а также существующие математические подходы и алгоритмические решения, применяемые в области автоматизированного управления, позволяют свести проблему стабилизации технологического режима и соблюдения регламентных норм к решению задачи многомерного управления с применением технологий и принципов управления с прогнозирующей моделью [10]. Для систем подобного класса к одному из показателей, характеризующих инерционность управляемого процесса и степень влияния возмущающих воздействий на контролируемые технологические параметры, относится достаточная частота дискретизации работы управляющего устройства, обеспечивающая при прочих равных характеристиках системы устойчивое функционирование объекта в рамках заданных регламентных ограничений технологического процесса.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Для анализа зависимости устойчивости технологического процесса от частоты формирования управляющего сигнала и определения диапазона частот, обеспечивающих функционирование системы в рамках заданных ограничений, рассматривается динамика контролируемого параметра процесса как бифуркационная особенность типового вида.

Согласно заданным условиям, особенность зависит от частоты дискретизации управляющего устройства и влияния возмущающих воздействий на систему, обладая коразмерностью, равной двум. С учетом непрерывности и природного происхождения исследуемых процессов функциональная зависимость бифуркации должна быть непрерывно дифференцируема на всем множестве определения.

Тогда для рассматриваемой задачи исследуемую бифуркацию удобно представить в виде особенности Уитни типа «сборка» [11]. Функциональное отображение данной особенности определяется следующим образом:

$$f(x, g(\omega)) = x^3 + g(\omega)x,$$

где  $f(x)$  – распределение управляемого параметра, приведенное к нормализованной форме;  $x \in [-1; 1]$  – нормализованный спектр эквивалентного возмущения, характеризующий результирующее действие всех внешних факторов системы на управляемую величину;  $g(\omega)$  – функция частотного множителя;  $\omega$  – частота дискретизации, характеризующая временную периодичность управляющего сигнала.

Согласно свойствам особенности при  $g(\omega) > 0$  управляющая система находится в неустойчивом состоянии:  $f(x, g(\omega))$  не имеет невырожденных критических точек, функция непрерывно возрастает на всей области определения [12]. При  $\omega = \omega_s$ :  $g(\omega) = 0$ , где  $\omega_s$  – достаточная частота временной дискретизации алгоритмов управляющего устройства, система проходит через точку бифуркации  $S$ , находясь в равновесном состоянии. При  $g(\omega) < 0$  система приходит в устойчивое положение, образуя особенность с двумя стационарными точками.

Для количественного описания наблюдаемых реальных процессов функция частотного множителя  $g(\omega)$ , не имеющая строгого математического описания, может быть построена методом кусочно-линейной аппроксимации на исторических данных функционирования управляемого объекта. Тогда с учетом обратной зависимости запаса по

устойчивости и частоты  $\omega$ , согласно которой устойчивость системы обеспечивается в диапазоне  $\omega \in (\omega_s; +\infty)$ , функция частотного множителя для исследуемого участка режима работы системы примет вид

$$g(\omega) = -\omega + \omega_s.$$

В этом случае особенность преобразуется к виду

$$f(x, \omega) = x^3 + (\omega_s - \omega)x.$$

Путем приведения распределения  $f(x, \omega)$  от нормализованных величин к величинам, выраженным в исходных единицах измерения,

$$y(x, \omega) = \alpha f(x, \omega) + M_y,$$

где  $\alpha$  – коэффициент нормализации,  $M_y$  – математическое ожидание  $y(x, \omega)$ , получен конечный вид поверхности:

$$y(x, \omega) = \alpha(x^3 + (\omega_s - \omega)x) + M_y. \quad (1)$$

Проекция сборки  $y(x, \omega)$  на плоскость  $(y, \omega)$  образует множество критических точек  $y_s$  с вершиной в начальной точке бифуркации  $S$ . Рассматриваемое бифуркационное множество формирует границы ветвей кривых равновесного состояния, для расчета которых, согласно определению, необходимо привести к нулю производную  $y'_x(x, \omega)$  [13]:

$$3x^2 + \omega_s - \omega = 0.$$

Путем подстановки полученного условия в формулу (1) определяется общий вид уравнения бифуркационного множества исследуемой управляющей системы:

$$y_s(\omega) = M_y \pm 2\alpha \left( \frac{\omega - \omega_s}{3} \right)^{3/2}, \quad \omega \geq \omega_s. \quad (2)$$

Графическая характеристика полученной особенности представлена на рис. 1.

Значения параметров  $\omega_s$  и  $\alpha$ , характеризующие устойчивость управляющей системы, определяются эмпирически по историческим данным поведения замкнутого контура при различных частотах  $\omega$ . Согласно принципу соответствия числа степеней свободы необходимому количеству уравнений для идентификации параметров  $\omega_s$  и  $\alpha$  необходимо и достаточно получить статистическую выборку, содержащую наборы исторических данных для двух режимов работы при различных частотах функционирования управляющей системы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :  $y_1(x_1, \omega_1)$ ;  $y_2(x_2, \omega_2)$ , где  $y_1$  и  $y_2$  – регистрируемые состояния контролируемого параметра при внешних возмущающих воздействиях  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. В этом случае образуется система уравнений

$$\begin{cases} y_1 = \alpha(x_1^3 + (\omega_s - \omega_1)x_1) + M_y, \\ y_2 = \alpha(x_2^3 + (\omega_s - \omega_2)x_2) + M_y. \end{cases}$$

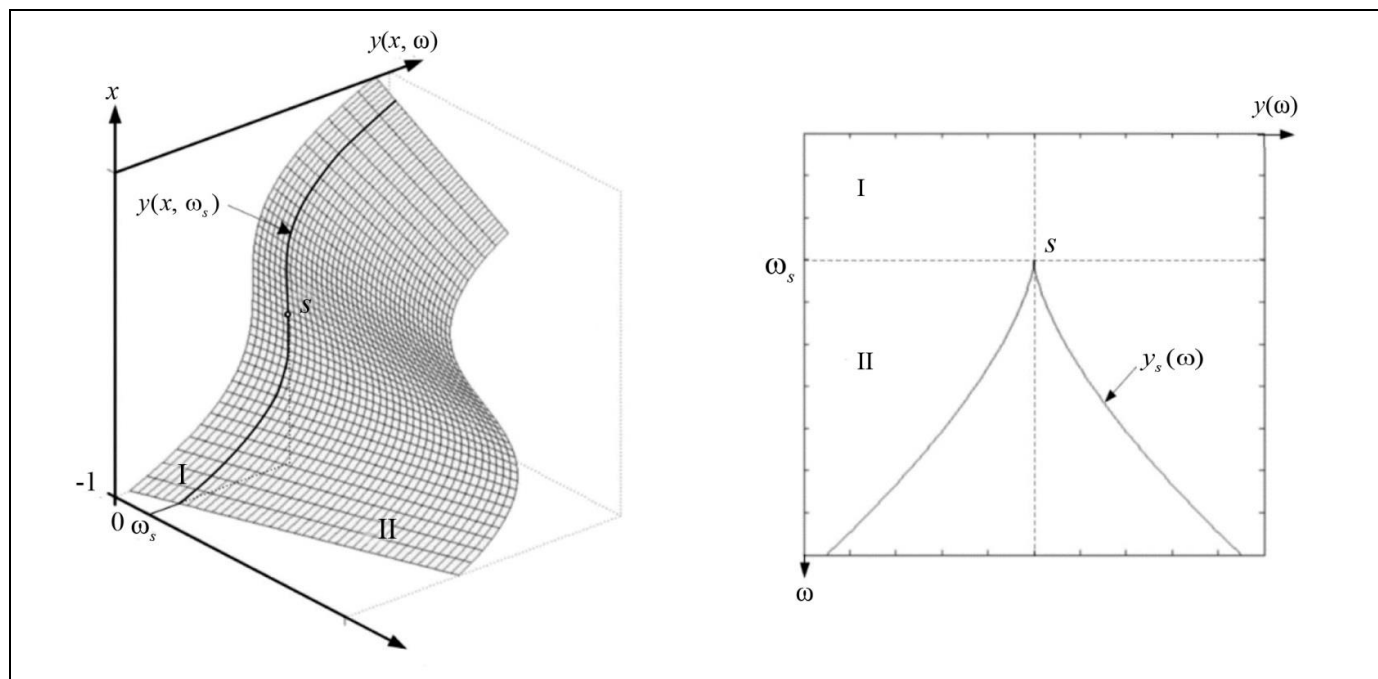


Рис. 1. Общий вид особенности управляющей системы:  $s$  – точка бифуркации, I – область неустойчивого состояния, II – область устойчивого состояния

После ряда преобразований из этой системы несложно получить выражения для определения значений параметров  $\omega_s$  и  $\alpha$  соответственно:

$$\omega_s = \frac{(y_1 - M_y)(x_2 \omega_2 - x_2^3) - (y_2 - M_y)(x_1 \omega_1 - x_1^3)}{(y_1 - M_y)x_2 - (y_2 - M_y)x_1}. \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{(y_1 - M_y)x_2 - (y_2 - M_y)x_1}{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2 - \omega_1 + \omega_2)}. \quad (4)$$

Расчет значений параметров  $\omega_s$  и  $\alpha$  удобно производить в точках максимального выброса регулируемого параметра:  $y_1, y_2$  для соответствующих частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Данные отклики выходного сигнала соответствуют значениям границ нерегистрируемого спектра результирующего возмущающего воздействия системы в нормализованном виде:  $|x_{1,2}| = 1$ . Знак  $x_{1,2}$  определяется в зависимости от положения соответствующей точки выброса регулируемой величины относительно математического ожидания выборки  $M_y$ .

## 2. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ОСОБЕННОСТИ ДЛЯ РЕАЛЬНОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

В качестве примера построения бифуркационной особенности и оценки достаточной частоты дискретизации управляющего сигнала автоматизированной системы рассмотрен технологический процесс исчерпывающей части ректификационной колонны К-2 узла разделения производства этилбензола, стирола и полистирола (ПЭСП). Ис-

следуемый узел состоит из трех колонн – К-1, К-2, К-3 – предназначенных для разделения углеводородного конденсата (УВК), поступающего с блока дегидрирования этилбензола на стирол-сырец и бензол-толуол-этилбензольную фракцию, очистки товарного стирола от более тяжелых фракций – кубовых остатков ректификации стирола (КОРС) – и разделения бензол-толуол-этилбензольной фракции на возвратный этилбензол и бензол-толуольную фракцию (бентол) соответственно. На рис. 2 отражена общая схема основных материальных потоков ректификационного узла производства этилбензола, стирола и полистирола.

Проблема поддержания технологического режима исчерпывающей части колонны К-2 заключается в решении задачи многомерного управления – стабилизации уровня жидкой фазы в кубе (L1001) с ограничением по предельно допустимому значению температурного профиля колонны (T1001), обусловленным началом реакции полимеризации стирола. Основным управляющим воздействием является подача перегретого пара в теплообменный аппарат Т-2 (FIC001), предназначенный для подогрева кубовой фракции; откачка высококипящих компонентов из куба колонны (FIC002) зафиксирована на минимальном значении ввиду сопутствующих потерь товарного стирола, содержащегося в смеси. Ключевым возмущающим воздействием для рассматриваемой системы автоматического управления является количественно нерегистрируемое изменение состава поступающего углеводородного сырья.

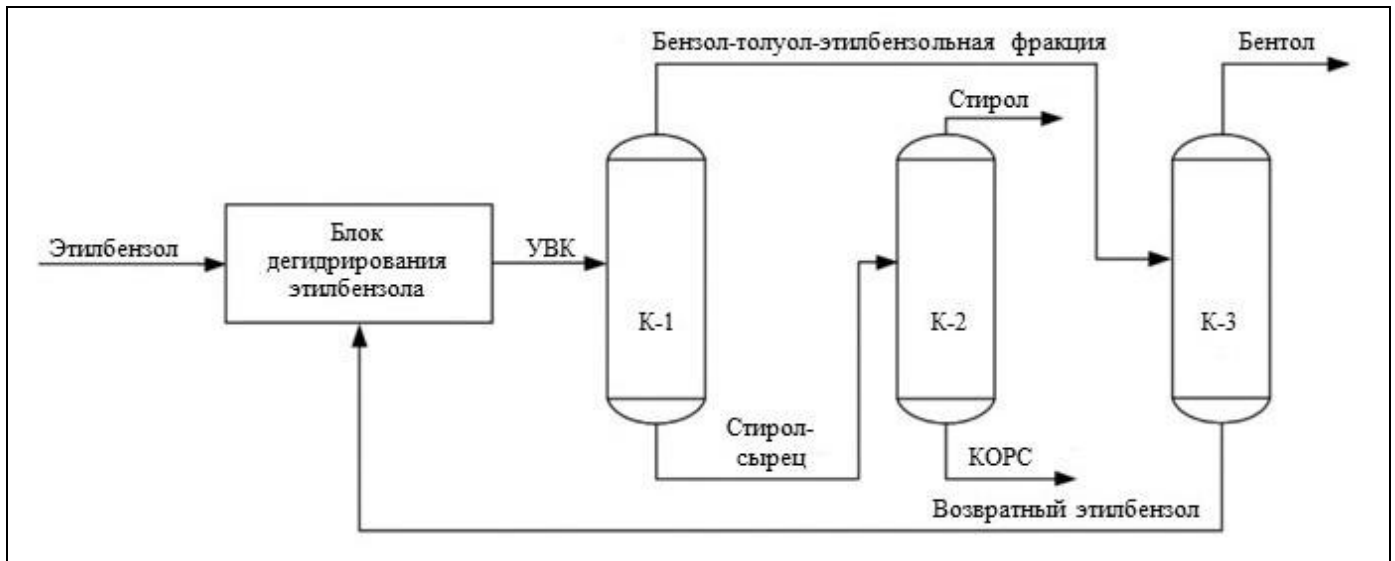


Рис. 2. Схема ректификационного блока

Поведение технологического объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n_1} a_{1i} \frac{\partial^i \Delta L(t)}{\partial t^i} = \\ = \sum_{j=0}^{m_1} b_{1j} \frac{\partial^j \Delta F(t - \tau_{11})}{\partial t^j} + \sum_{k=0}^{q_1} c_{1k} \frac{\partial^k \Delta Q(t - \tau_{12})}{\partial t^k}, \\ \sum_{i=0}^{n_2} a_{2i} \frac{\partial^i \Delta T(t)}{\partial t^i} = \\ = \sum_{j=0}^{m_2} b_{2j} \frac{\partial^j \Delta F(t - \tau_{21})}{\partial t^j} + \sum_{k=0}^{q_2} c_{2k} \frac{\partial^k \Delta Q(t - \tau_{22})}{\partial t^k}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $L$  – уровень жидкой фазы в колонне К-2;  $F$  – расход пара в аппарате Т-2;  $Q$  – количественный состав питания колонны;  $T$  – температура куба в колонне К-2;  $a, b, c$  – коэффициенты дифференциальных уравнений;  $n, m, k$  – порядок многочленов ( $n > m, n > k$ );  $\tau$  – временное запаздывание динамических каналов.

Для поддержания технологического режима в заданных регламентных ограничениях реализована система автоматизированного управления с прогнозирующей моделью (англ. *Model Predictive Control*, MPC) [14]. Применяемая модель представлена в форме матричной передаточной функции, аппроксимирующей реальное поведение технологического процесса согласно эмпирическим переходным характеристикам исследуемых каналов передачи (5). Общая функциональная схема автоматического управления технологическим режимом исчерпывающей части колонны К-2 представлена на рис. 3.

Ввиду относительно малых габаритных размеров колонны и высокой скорости массообменных

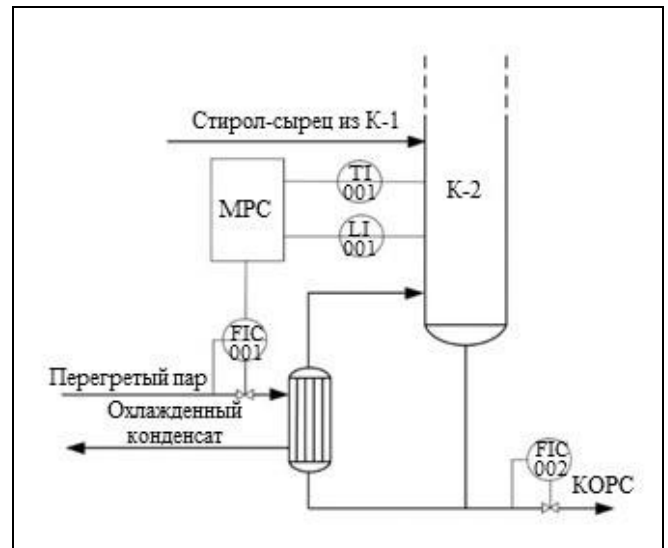


Рис. 3. Схема управления исчерпывающей частью колонны К-2

процессов ректификационная колонна К-2 обладает низкими инерционными свойствами. На рис. 4 отображено изменение уровня кубовой жидкости в колонне при различных частотах дискретизации управления технологическим режимом. На частоте  $\omega_1 = 0,1/\text{мин}$  наблюдаются скачкообразные изменения уровня кубовой жидкости со средним квадратичным отклонением (СКО), равным 7,29%, определяющие возможность аварийного останова производственного участка: отключение насосного оборудования при полной откачке кубовой фракции из колонны. При прочих равных значениях параметров системы на частоте  $\omega_2 = 1/\text{мин}$  флуктуации уровня жидкой фазы в колонне с СКО, равным 4,33%, носят допустимый характер – техноло-

гический процесс находится в устойчивом состоянии.

Для построения бифуркационной особенности системы по рассматриваемому набору исторического массива, образующего показательную выборку, определены необходимые начальные данные. С этой целью рассмотрены максимальные отклонения уровня жидкой фазы в колонне К-2 относительно значения математического ожидания  $M_y = 88,75\%$  при функционировании системы с частотами  $\omega_1 = 0,1/\text{мин}$  и  $\omega_2 = 1/\text{мин}$ :  $y(x_1, \omega_1) = 55,29\%$ ,  $x_1 = -1$ ;  $y(x_2, \omega_2) = 82,32\%$ ,  $x_2 = -1$ .

Согласно полученным ранее формулам (3), (4) определены значения параметров, задающие количественные свойства рассматриваемой бифуркации:  $\omega_s = 0,22/\text{мин}$ ,  $\alpha = 30,03$ . Тогда конечный вид особенности управляющей системы исчерпывающей части ректификационной колонны К-2 и соответствующая функция бифуркационного множества примут вид (рис. 5):

$$y(x, \omega) = 30,03(x^3 + (0,22 - \omega)x) + 88,75,$$

$$y_s(\omega) = 88,75 \pm 60,07 \left( \frac{0,22 - \omega}{3} \right)^{3/2}, \quad \omega \geq 0,22.$$



Рис. 4. Уровень кубовой жидкости в кубе К-2

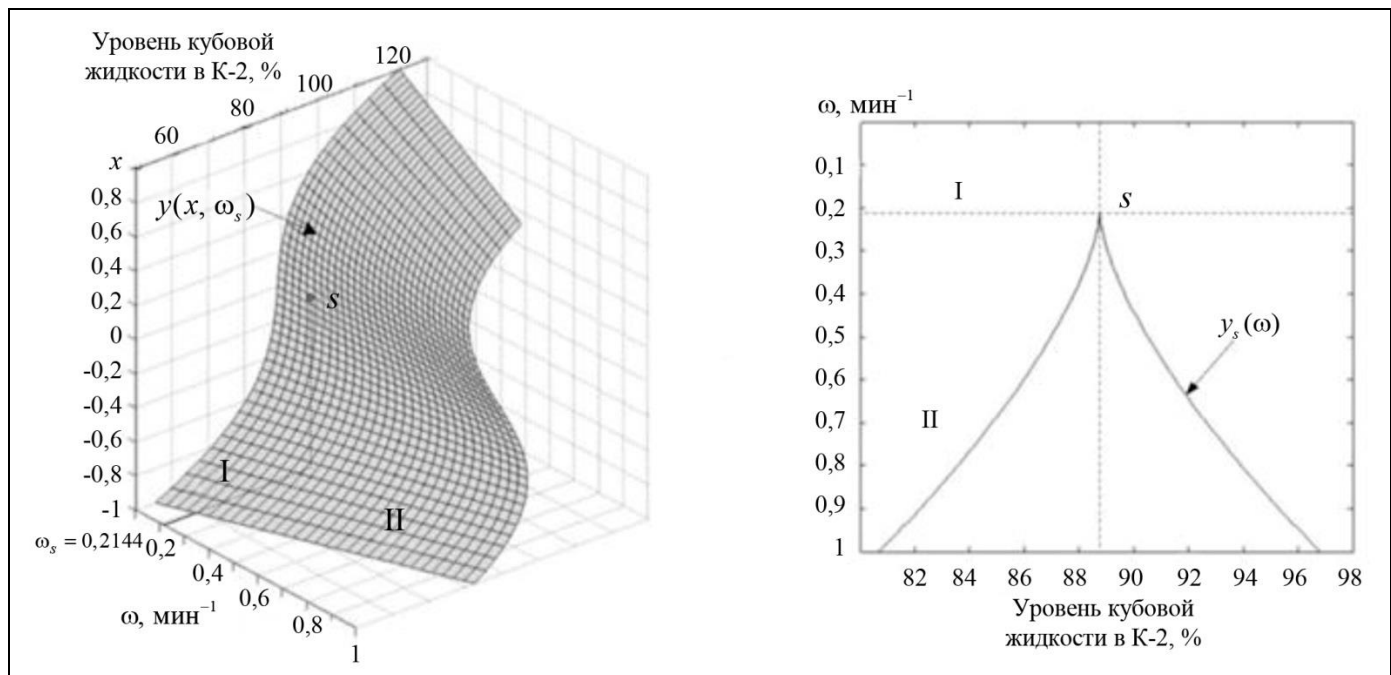


Рис. 5. Бифуркационная особенность исчерпывающей части ректификационной колонны К-2:  $s$  – точка бифуркации, I – область неустойчивого состояния, II – область устойчивого состояния

Результаты построения бифуркационной особенности для определения достаточной частоты дискретизации управляющего сигнала косвенно подтверждаются динамическими характеристиками рассматриваемой реальной системы стабилизации материального баланса исчерпывающей части ректификационной колонны К-2. По каналу управляющего воздействия (см. рис. 3) величина запаздывания  $\tau_e \approx 5$  мин, поэтому допустимая частота дискретизации эмпирически определяется выражением  $\omega_e = \tau_e^{-1} \approx 0,2$  мин<sup>-1</sup>. Аналитическое решение, полученное методом бифуркационных диаграмм, определило значение достаточной частоты дискретизации  $\omega_s \geq 0,22$  мин<sup>-1</sup>.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный метод построения бифуркационных особенностей динамических систем на основании исторических данных применен для оценки устойчивого функционирования системы управления материальным балансом исчерпывающей части ректификационной колонны очистки товарного стирола производства ПЭСИ. Достаточная частота дискретизации управляющего сигнала, обеспечивающая работоспособность системы в рамках допустимых регламентных ограничений параметров технологического процесса, составила 0,22 мин<sup>-1</sup>.

Предложенный подход к построению бифуркационных особенностей управляющих систем и расчета области устойчивого состояния химико-технологического объекта является оценочным и позволяет провести предварительные вычисления для определения оптимального временного такта функционирования управляющей системы с учетом динамических свойств управляемого объекта.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Зиненко А.В.* Теория катастроф и ценовая динамика // Экономика и математические методы. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 116–123. [Zinenko, A.V. Catastrophe Theory and Price Dynamics // Economic and Mathematical methods. – 2018. – Vol. 54, no. 4. – P. 116–123. (In Russian)]
2. *Неделько Н.С.* Использование теории катастроф к анализу поведения экономических систем // Вестник МГТУ. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 223–227. [Nedelko, N.S. Catastrophe Theory and Analysis of Economic Systems Behavior // Vestnik of MSTU. – 2010. – Vol. 13, no. 1. – P. 223–227. (In Russian)]
3. *Schmitt, N., Tramontana, F., Westerhoff, F.* Nonlinear Asset-price Dynamics and Stabilization Policies // Nonlinear Dynamics. – 2020. – No. 102. – P. 1045–1070.
4. *Мужиков Г.П., Гилев М.А.* Анализ динамических систем с использованием элементов теории бифуркаций // Современный тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике. – 2017. – Т. 3, № 1 (2). – С. 35–37. [Muzhikov, G.P., Gilev, M.A. Analysis of Dynamic Systems Using Elements of the Theory of Bifurcations // Economic and Mathematical Methods. – 2017. – Vol. 3, no. 1 (2). – P. 35–37. (In Russian)]
5. *Qin, L., Qin, H., Xing, J.* Energy Flow Characteristics of Friction-Induced Nonlinear Vibrations in a Water-Lubricated Bearing-Shaft Coupled System // Acta Mechanica Sinica. – 2021. – No. 37. – P. 679–704.
6. *Skorobogatov, S.M.* Catastrophes and Serviceability of Reinforced Concrete Structures (Classification and Elements of Theory). – Ekaterinburg: Ural'skii gosudarstvennyi universitet putei soobshcheniya, 2020. – 532 p.
7. *Hassard, B., Kazarinov, D., Wan, Y.* Theory and Applications of Hopf Bifurcation. – Cambridge: Cambridge University Press, 1982. – 320 p.
8. *Острейковский В.А.* Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф. Учебное пособие. – М.: Высшая Школа, 2005. – 560 с. [Ostreikovskii, V.A. Analiz ustoichivosti i upravlyаемости dinamicheskikh sistem metodami teorii katastrof. Uchebnoe posobie. – Moscow: Vysshaya Shkola, 2005. – 560 s. (In Russian)]
9. *Черешко А.А., Шундерюк М.М.* Границы применимости алгоритмов усовершенствованного управления с прогнозирующей моделью в условиях неопределенности объекта управления // Проблемы управления. – 2020. – № 1. – С. 17–23. [Chereshko, A.A., Shunderyuk, M.M. Applicability Limits of Model-Based Predictive Control Algorithms Under Uncertain Control Object Dynamics // Control Sciences. – 2020. – No. 1. – P. 17–23. (In Russian)]
10. *Бахтмадзе Н.Н., Лотоцкий В.А.* Современные методы управления производственными процессами // Проблемы управления. – 2009. – № 3. – С. 56–63. [Bakhtadze, N.N., Lototskii, V.A. Contemporary Methods of Production Process Control // Control Sciences. – 2009. – No. 3. – P. 56–63. (In Russian)]
11. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 128с. [Arnold, V.I. Catastrophe Theory. – Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1990. – 128 s. (In Russian)]
12. *Iooss, G., Joseph, D.* Elementary Stability and Bifurcation Theory. – New York: Springer, 2014. – 286 p.
13. *Москаленко А.В., Тетюев Р.К., Махортых С.А.* О состоянии исследований бифуркационных феноменов памяти и запаздывания // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2019. – № 109. – С. 1–44. [Moskalenko, A.V., Tetuev, R.K., Makhortyk, S.A. On Studies of Bifurcation Phenomena such as Memory and Delay // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha. – 2019. – No. 109. – P. 1–44. (In Russian)]
14. *Работников М.А.* Стратегия реализации управления материальным балансом исчерпывающей части ректификационной колонны получения стирола // Химия. Экология. Урбанистика.: материалы Всерос. науч.-практ. конф. – Пермь, 2021. – Т. 4. – С. 242–246. [Rabotnikov, M.A. Strategy of Material Balance Control Implementation of the Styrene Rectifying Column Bottom // Chemistry. Ecology. Urbanism.: Pro-



ceedings of the All-Russian Scientific and Practical Conference. – Perm, 2021. – Vol. 4 – P. 242–246. (In Russian)]

*Статья представлена к публикации руководителем РРС  
Б.Г. Ильясовым.*

*Поступила в редакцию 1.03.2022,  
после доработки 11.09.2022.  
Принята к публикации 16.12.2022.*

**Работников Михаил Алексеевич** – ассистент  
✉ [robotnikovma@gmail.com](mailto:robotnikovma@gmail.com),

**Стафейчук Борис Григорьевич** – канд. техн. наук,  
✉ [bgstaf@mail.ru](mailto:bgstaf@mail.ru),

**Шумихин Александр Георгиевич** – д-р техн. наук,  
✉ [shumichin@gmail.com](mailto:shumichin@gmail.com),

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

## ESTIMATING INDUSTRIAL PROCESS STABILITY BY WHITNEY'S SINGULARITY THEORY WHEN CHOOSING A SUFFICIENT TIME-SAMPLING FREQUENCY OF THE CONTROL SIGNAL

M.A. Robotnikov<sup>1</sup>, B.G. Stafeichuk<sup>2</sup>, and A.G. Shumikhin<sup>3</sup>

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

<sup>1</sup>✉ [robotnikovma@gmail.com](mailto:robotnikovma@gmail.com), <sup>2</sup>✉ [bgstaf@mail.ru](mailto:bgstaf@mail.ru), <sup>3</sup>✉ [shumichin@gmail.com](mailto:shumichin@gmail.com)

**Abstract.** In this paper, we estimate the stability of continuous-type automated industrial processes and choose a sufficient time-sampling frequency of the control signal using Whitney's singularity theory. The proposed stability analysis approach is based on constructing typical bifurcations for the historical data of a technological object under different time-sampling frequencies of its control signal. The singularity equation serves for obtaining the equation of the equilibrium state curves of the system and a sufficient time-sampling frequency of the control signal corresponding to the vertex of the resulting curve. As an illustrative example, the developed method is applied to the control system of the mass balance stripping section in the purification process of a styrene distillation column of the ethylbenzene, styrene, and polystyrene plants. Based on the quantitative analysis results, we construct a bifurcation and determine a sufficient time-sampling frequency of the control signal to ensure system stability.

**Keywords:** catastrophe theory, bifurcation, dynamical systems, stability criteria.