

ISSN 2712-8687

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

4/2022

CONTROL  SCIENCES

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,
И. А. Каляев, академик РАН,
Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН,
В. А. Левин, академик РАН,
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,
Е. А. Федосов, академик РАН

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,
В. Н. Бурков, д-р техн. наук,
В. М. Вишнеvский, д-р техн. наук,
А. О. Калашников, д-р техн. наук,
В. В. Клочков, д-р экон. наук,
С. А. Краснова, д-р техн. наук,
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,
В. В. Кульба, д-р техн. наук,
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,
Н. Е. Максимова, канд. техн. наук
(ответственный секретарь),
А. С. Мандель, д-р техн. наук,
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,
А. И. Михальский, д-р биол. наук,
Д. А. Новиков, академик РАН
(гл. редактор),
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,
Ф. Ф. Пашенко, д-р техн. наук
(зам. гл. редактора),
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,
Волгоград – А. А. Воронин, д-р физ.-мат. наук,
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольницкий,
д-р техн. наук,
Самара – М. И. Гераськин, д-р экон. наук,
Саратов – В. А. Кушников, д-р техн. наук,
Тамбов – М. Н. Краснянский, д-р техн. наук,
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук,
Челябинск – О. В. Логиновский, д-р техн. наук

ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, RAS¹ Academician,
I. A. Kalyaev, RAS Academician,
N. V. Kuznetsov, RAS Corr. Member,
V. A. Levin, RAS Academician,
N. A. Makhutov, RAS Corr. Member,
A. F. Rezchikov, RAS Corr. Member,
S. N. Vassilyev, RAS Academician

EDITORIAL BOARD

V. N. Afanas'ev, Dr. Sci. (Tech.),
F. T. Aleskerov, Dr. Sci. (Tech.),
N. N. Bakhtadze, Dr. Sci. (Tech.),
V. N. Burkov, Dr. Sci. (Tech.),
A. O. Kalashnikov, Dr. Sci. (Tech.),
V. V. Klochkov, Dr. Sci. (Econ.),
M. V. Khlebnikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
S. A. Krasnova, Dr. Sci. (Tech.),
V. V. Kulba, D. Sc. (Tech.),
O. P. Kuznetsov, Dr. Sci. (Tech),
A. A. Lazarev, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. G. Lebedev, Dr. Sci. (Tech.),
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Phych.),
A. S. Mandel, Dr. Sci. (Tech.),
N. E. Maximova, Cand. Sci. (Tech),
Executive Editor-in-Chief,
R. V. Meshcheryakov, Dr. Sci. (Tech.),
A. I. Michalski, Dr. Sci. (Biol.),
D. A. Novikov, RAS Academician,
Editor-in-Chief,
F. F. Pashchenko, Dr. Sci. (Tech.),
Deputy Editor-in-Chief,
B. V. Pavlov, Dr. Sci. (Tech.),
L. B. Rapoport, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
S. V. Ratner, Dr. Sci. (Econ.),
E. Ya. Rubinovich, Dr. Sci. (Tech.),
A. D. Tsvirkun, Dr. Sci. (Tech.),
V. M. Vishnevsky, Dr. Sci. (Tech.),
I. B. Yadykin, Dr. Sci. (Tech)

LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Chelyabinsk – O. V. Loginovskiy, Dr. Sci. (Tech.),
Kursk – S. G. Emelyanov, Dr. Sci. (Tech.),
Lipetsk – A. K. Pogodaev, Dr. Sci. (Tech.),
Perm – V. Yu. Stolbov, Dr. Sci. (Tech.),
Rostov-on-Don – G. A. Ougolnitsky,
Dr. Sci. (Tech.),
Samara – M. I. Geraskin, Dr. Sci. (Econ.),
Saratov – V. A. Kushnikov, Dr. Sci. (Tech.),
Tambov – M. N. Krasnyanskiy, Dr. Sci. (Tech.),
Ufa – B. G. Ilyasov, Dr. Sci. (Tech.),
Vladivostok – O. V. Abramov, Dr. Sci. (Tech.),
Volgograd – A. A. Voronin, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Voronezh – S. A. Barkalov, Dr. Sci. (Tech.)

¹Russian Academy of Sciences.



CONTROL SCIENCES
Научно-технический
журнал

6 номеров в год
ISSN 1819-3161 (Print)
ISSN 2712-8687 (Online)
Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ и ИЗДАТЕЛЬ

Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор
академик РАН
Д.А. Новиков

Заместитель главного редактора
Ф.Ф. Пащенко

Ответственный секретарь
Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор
Л.В. Петракова

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410

Тел./факс (495) 198-17-20, доб. 1410

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: <http://pu.mtas.ru>
<http://controlsciences.org>

Опубликовано: 28 сентября 2022 г.

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.
выдано Министерством Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых
коммуникаций

Свидетельство о регистрации
Эл № ФС 77-80482 от 17 февраля 2021 г.
выдано Федеральной службой
по надзору в сфере связи,
информационных технологий и
массовых коммуникаций

Журнал входит в RSCI на платформе
Web of Science и Перечень
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс
научного цитирования (РИНЦ).
На сайте Научной электронной
библиотеки (www.elibrary.ru) доступны
полные тексты статей.

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

4.2022

СОДЕРЖАНИЕ

Математические проблемы управления

Базилевский М.П. Метод построения неэлементарных
линейных регрессий на основе аппарата математического
программирования 3

Анализ и синтез систем управления

Хлебников М.В., Квинто Я.И. Верхние границы отклонения
траекторий аффинного семейства дискретных систем
при внешних возмущениях 15

Управление техническими системами и технологическими процессами

Цуприков А.А. Математическая модель механической
скорости проходки с тремя параметрами для оптимизации
бурения нефтегазовых скважин 21

Управление подвижными объектами и навигация

Городецкий А.Е., Тарасова И.Л., Курбанов В.Г.
Логико-лингвистический метод выбора маршрута движения
БТС с минимальной вероятностью возникновения аварийных
ситуаций 29

Хроника

**XVI Международная конференция «Устойчивость и колебания
нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) . . . 38**



CONTROL SCIENCES
Scientific Technical
Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161 (Print)

ISSN 2712-8687 (Online)

Published since 2003

FOUNDER and PUBLISHER

V.A. Trapeznikov

Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences

Editor-in-Chief

D.A. Novikov, RAS Academician

Deputy Editor-in-Chief

F.F. Pashchenko

Executive Editor-in-Chief

N.E. Maximova

Editor

L.V. Petrakova

Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,
Moscow 117997, Russia

+7(495) 198-17-20, ext. 1410

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>

<http://controlsciences.org>

Published: September 28, 2022

Registration certificate of

ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

issued by the Ministry of Press,
Broadcasting, and Mass Media
of the Russian Federation

Registration certificate of

Эл № ФС 77-80482 of 17 February 2021

issued by the Federal Service
for Supervision of Communications,
Information Technology, and Mass Media

The Journal is indexed in RSCI (Russian
Science Citation Index) on the platform
Web of Science and in the list of peer-
reviewed scientific publications of HAC

On the website of the Scientific electronic
library (www.elibrary.ru) full texts of
articles are available

© V.A. Trapeznikov

Institute of Control Sciences

of Russian Academy of Sciences

CONTROL SCIENCES

4.2022

CONTENTS

Mathematical Problems of Control

Bazilevskiy, M.P. A Method for Constructing Nonelementary
Linear Regressions Based on Mathematical Programming 3

Analysis and Design of Control Systems

Khlebnikov, M.V. and Kvinto, Ya.I. Upper Bounds on Trajectory
Deviations for an Affine Family of Discrete-Time Systems
under Exogenous Disturbances 15

Control of Technical Systems and Industrial Processes

Tsouprikov, A.A. A Mathematical Model of Mechanical
Penetration Rate with Three Control Parameters to Optimize
Oil and Gas Well Drilling 21

Moving Objects Control and Navigation

Gorodetskiy, A.E., Tarasova, I.L., and Kurbanov, V.G.
A Logical-Linguistic Routing Method for Unmanned Vehicles
with the Minimum Probability of Accidents 29

Chronicle

16th International Conference on Stability and Oscillations
of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) 38

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИЙ НА ОСНОВЕ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М.П. Базилевский

Аннотация. Рассматривается проблема построения неэлементарных линейных регрессий, состоящих из объясняющих переменных и всевозможных комбинаций их пар, преобразованных с помощью бинарных операций минимум и максимум. Задача построения таких моделей формализована в виде задачи частично-булевого линейного программирования. Регулируя в ней ограничения на бинарные переменные, можно контролировать структурную спецификацию неэлементарной линейной регрессии, а именно количество входящих в нее регрессоров, их типы и состав объясняющих переменных. При этом оценки параметров модели находятся приближенно с помощью метода наименьших квадратов. К достоинствам сформулированной задачи относится то, что число ее ограничений не зависит от объема выборки, а знаки оценок при объясняющих переменных согласуются со знаками коэффициентов их корреляции с зависимой переменной. Показано, как на начальном этапе отсекают регрессоры, чтобы сократить время решения задачи и сделать модель вполне интерпретируемой. Построена неэлементарная линейная регрессия для моделирования железнодорожных грузоперевозок в Иркутской области и дана ее интерпретация.

Ключевые слова: неэлементарная линейная регрессия, метод наименьших квадратов, задача частично-булевого линейного программирования, отбор информативных регрессоров, коэффициент детерминации, интерпретация, железнодорожные грузоперевозки.

ВВЕДЕНИЕ

При проведении регрессионного анализа [1, 2] на основе экономических данных особое внимание уделяется построению производственных функций (ПФ), представляющих собой математические зависимости между объемами выпуска продукции и факторами производства. Теории, методам и применению ПФ целиком посвящена монография [3], выпущенная еще в 1986 г. В ней рассмотрены следующие ПФ: линейная, многорежимная, Кобба – Дугласа, Леонтьева, Аллена, CES (*Constant Elasticity of Substitution* – с постоянной эластичностью замены факторов), LES (*Linear Elasticity of Substitution* – с линейной эластичностью замены факторов), Солоу. В настоящее время появляются и исследуются новые модификации ПФ, которые активно применяются в эконометрических исследованиях [4–6]. В данной статье речь пойдет о построении неэлементарных регрессионных моделей, специфицированных на основе известной ПФ Леонтьева:

$$y_i = \min \{ \alpha_1 x_{i1}, \alpha_2 x_{i2}, \dots, \alpha_l x_{il} \} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где n – объем выборки; l – количество объясняющих переменных; $y_i, i = \overline{1, n}$, – значения объясняемой переменной y ; $x_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, l}$, – значения объясняющих переменных x_1, x_2, \dots, x_l ; $\alpha_j, j = \overline{1, l}$, – неизвестные параметры; $\varepsilon_i, i = \overline{1, n}$, – ошибки аппроксимации. С позиции теории ПФ переменная y в уравнении (1) трактуется как объем выпуска продукции, а x_1, \dots, x_n – как показатели факторов производства.

Отметим, что в монографии [3] выделена еще и «параллельная» функция Леонтьева

$$y_i = \min \{ \alpha_{11} x_{i1}, \alpha_{12} x_{i2}, \dots, \alpha_{1l} x_{il} \} + \dots + \min \{ \alpha_{k1} x_{i1}, \alpha_{k2} x_{i2}, \dots, \alpha_{kl} x_{il} \} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n},$$

отражающая процесс, в котором объем выпуска складывается из выпусков k параллельных производственных процессов с фиксированными про-

порциями факторов, использующих общие ресурсы. Для двух факторов производства x_1 и x_2 «параллельная» функция Леонтьева называется функцией линейного программирования.

В монографии [7] отмечается, что для нахождения оценок параметров ПФ Леонтьева (1) можно применять методы негладкой оптимизации [8–10], которые, как правило, являются труднореализуемыми. Поэтому в работе [7] задача точного оценивания ПФ (1) с помощью метода наименьших модулей (МНМ) сведена к задаче частично-булевого линейного программирования (ЧБЛП). Вместе с тем в монографии [7] предложен способ приближенного оценивания ПФ Леонтьева, основанный на переборе оценок из предварительно сформированной области определения.

В статье [11] предложена функция, противоположная по смыслу ПФ (1):

$$y_i = \max\{\alpha_1 x_{i1}, \alpha_2 x_{i2}, \dots, \alpha_l x_{il}\} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

а в статье [12] рассмотрен симбиоз функций (1) и (2):

$$y_i = \min\{\alpha_1 x_{i1}, \alpha_2 x_{i2}, \dots, \alpha_l x_{il}\} + \max\{\beta_1 x_{i1}, \beta_2 x_{i2}, \dots, \beta_l x_{il}\} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Задачи точного оценивания параметров регрессий (2) и (3) с помощью МНМ сведены в статьях [11] и [12] к соответствующим задачам ЧБЛП. Повышенное внимание к построению регрессионных моделей с использованием аппарата математического программирования в современной научной литературе (см., например, работы [13–15]) объясняется тем, что за последние годы была существенно развита технология решения задач ЧБЛП.

Данная статья посвящена оцениванию специфицированных на основе ПФ Леонтьева регрессионных моделей с помощью метода наименьших квадратов (МНК) [1, 2]. Впервые такая задача была сформулирована автором в работе [16] для регрессии (1) с двумя объясняющими переменными. А в статье [17] была предложена неэлементарная линейная регрессия (НЛР) вида

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l} \min\{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_j x_{i,\mu_{j2}}\} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где μ_{j1} и μ_{j2} , $j = \overline{1, C_l^2}$ – элементы первого и второго столбца индексной матрицы $M_{C_l^2 \times 2}$, содержащей по строкам всевозможные комбинации пар

индексов переменных; α_j , $j = \overline{0, l + C_l^2}$, λ_j , $j = \overline{1, C_l^2}$, – неизвестные параметры. Считается, что значения всех переменных в уравнении (4) строго положительны.

Как видно, НЛР относится к классу нелинейных по параметрам моделей. Но если придать всем параметрам λ_j , $j = \overline{1, C_l^2}$, определенные значения, то регрессия становится линейной и нахождение оценок ее параметров α_j , $j = \overline{0, l + C_l^2}$, с помощью МНК не вызывает трудностей. В статье [17] установлено, что оптимальные с точки зрения МНК оценки параметров λ_j , $j = \overline{1, C_l^2}$, для НЛР принадлежат промежуткам

$$\lambda_j \in (\lambda_{\min}^{(j)}, \lambda_{\max}^{(j)}), \quad j = \overline{1, l}, \quad (5)$$

$$\text{где } \lambda_{\min}^{(j)} = \min \left\{ \frac{x_{1,\mu_{j1}}}{x_{1,\mu_{j2}}}, \frac{x_{2,\mu_{j1}}}{x_{2,\mu_{j2}}}, \dots, \frac{x_{n,\mu_{j1}}}{x_{n,\mu_{j2}}} \right\}, \quad \lambda_{\max}^{(j)} =$$

$$= \max \left\{ \frac{x_{1,\mu_{j1}}}{x_{1,\mu_{j2}}}, \frac{x_{2,\mu_{j1}}}{x_{2,\mu_{j2}}}, \dots, \frac{x_{n,\mu_{j1}}}{x_{n,\mu_{j2}}} \right\}. \quad \text{Точки } \lambda_j = \lambda_{\min}^{(j)} \text{ и}$$

$\lambda_j = \lambda_{\max}^{(j)}$ нельзя использовать из-за возникновения совершенной мультиколлинеарности переменных.

Благодаря этим свойствам, в работе [17] был предложен способ приближенного МНК-оценивания НЛР (4), основанный на переборе значений параметров λ_j , $j = \overline{1, C_l^2}$, из промежутков (5).

К сожалению, при построении НЛР (4) с ростом числа объясняющих переменных l существенно возрастает общее количество ее регрессоров. Поэтому появляется необходимость в решении задачи отбора некоторого числа наиболее «информативных» регрессоров (ОИР) [7]. Специально для этого в работе [18] были разработаны две стратегии. Каждая из них предполагает формирование по указанному алгоритму множества альтернативных вариантов регрессий, для каждой из которых реализуется описанный в статье [17] способ приближенного МНК-оценивания, а затем выбирается модель с наименьшей величиной суммы квадратов остатков. Главным недостатком предложенного в работе [18] подхода к построению НЛР является то, что он основан на методе полного перебора всех возможных альтернатив, поэтому на решение задачи ОИР может уходить слишком много времени. Более перспективным выглядит следующий подход с использованием аппарата ЧБЛП.



В статье [19] задача ОИР при оценивании линейной регрессии с помощью МНК была сведена к задаче ЧБЛП. При этом нерешенной оставалась проблема выбора большого положительного числа M , влияющего как на скорость, так и на само решение задачи, пока не появилась работа [20]. В ней сформулирована задача ЧБЛП, которая приводит к построению линейной регрессии с заданным числом объясняющих переменных, в которой знаки МНК-оценок согласованы со знаками коэффициентов корреляции между переменными y и x_j , $j = \overline{1, l}$. В ходе вычислительных экспериментов был подтвержден сделанный в статье [21] вывод, что такая задача с ограничениями на знаки коэффициентов решается на порядок быстрее, чем без них. Главной целью данной работы является сведение задачи построения НЛР к эффективно решаемой задаче ЧБЛП, рассмотренной в статье [20].

1. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИЙ

Уравнение НЛР (4) содержит только одну бинарную операцию – минимум. Здесь и далее под бинарной операцией минимум (максимум) понимается математическая операция, принимающая два аргумента и возвращающая их минимум (максимум). Дополним эту регрессионную модель регрессорами с бинарной операцией максимум:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l} \min \{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_j x_{i,\mu_{j2}}\} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l+C_l^2} \max \{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_j x_{i,\mu_{j2}}\} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

Общее число регрессоров в уравнении (6) стало гораздо больше, чем в уравнении (4), и составляет $l + 2C_l^2$.

Уравнение НЛР вида (6) вводится впервые, поэтому ставится задача формализовать процесс построения этой модели в виде задачи ЧБЛП. Это можно сделать следующим образом.

Для каждого параметра λ_j , $j = \overline{1, C_l^2}$, из уравнения (6) определим промежутки значений по формулам (5). Затем равномерно разобьем каждый из этих промежутков p точками и сформируем матрицу $\Lambda = (\lambda_{jk}^*)$, $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$, элемент λ_{jk}^* которой показывает k -е значение параметра λ_j для j -й пары переменных. Заменяя в уравнении (6) неизвестные параметры λ_j на известные элементы матрицы Λ , получим:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \alpha_{jk}^- \min \{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{jk}^* x_{i,\mu_{j2}}\} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \alpha_{jk}^+ \max \{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{jk}^* x_{i,\mu_{j2}}\} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где α_{jk}^- , $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$, – неизвестные параметры для регрессоров с бинарной операцией минимум, а α_{jk}^+ , $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$, – неизвестные параметры для регрессоров с бинарной операцией максимум. В модели (7) общее число регрессоров еще больше, чем в модели (6), и равно $l + 2pC_l^2$. Например, если общее число переменных $l = 100$, а число разбиений $p = 10$, то регрессия (7) будет иметь 99 100 регрессоров.

Сделаем в уравнении (7) замену $z_{ijk}^- = \min \{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{jk}^* x_{i,\mu_{j2}}\}$, $z_{ijk}^+ = \max \{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{jk}^* x_{i,\mu_{j2}}\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$. Получим модель множественной линейной регрессии:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \alpha_{jk}^- z_{ijk}^- + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \alpha_{jk}^+ z_{ijk}^+ + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

Далее, как это сделано в статье [19], сведем задачу ОИР для линейной регрессии (8), оцениваемой с помощью МНК, к задаче ЧБЛП. Для этого предварительно проведем нормирование всех переменных из уравнения (8) по известному правилу, вычитая из каждого значения переменной ее среднее арифметическое и деля результат на стандартное отклонение.

Составим для модели (8) уравнение стандартизованной регрессии

$$w_i = \sum_{j=1}^l \beta_j q_{ij} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \beta_{jk}^- h_{ijk}^- + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \beta_{jk}^+ h_{ijk}^+ + \xi_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

где w – нормированная переменная y ; q_j , $j = \overline{1, l}$, – нормированные переменные x_j , $j = \overline{1, l}$; h_{jk}^- , h_{jk}^+ , $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$, – нормированные переменные z_{jk}^- , z_{jk}^+ , $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$; β_j , $j = \overline{1, l}$, и β_{jk}^- , β_{jk}^+ , $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$, – неизвестные стандартизованные коэффициенты; ξ_i , $i = \overline{1, n}$, – новые ошибки аппроксимации.

Для модели (9) МНК-оценки находятся по формуле

$$\tilde{\beta} = R_{XX}^{-1} \cdot R_{YX}, \quad (10)$$

где $R_{XX} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xz^-} & R_{xz^+} \\ R_{z^-x} & R_{z^-z^-} & R_{z^-z^+} \\ R_{z^+x} & R_{z^+z^-} & R_{z^+z^+} \end{pmatrix}$ – корреляционная

блочная матрица размера $(l + 2pC_l^2) \times (l + 2pC_l^2)$, составленная из блоков

$$R_{xx} = (r_{x_j x_k}), \quad j = \overline{1, l}, \quad k = \overline{1, l};$$

$$R_{xz^-} = (r_{x_s z_{jk}^-}), \quad s = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p};$$

$$R_{xz^+} = (r_{x_s z_{jk}^+}), \quad s = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p};$$

$$R_{z^-x} = (r_{z_{jk}^- x_s}), \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}, \quad s = \overline{1, l};$$

$$R_{z^-z^-} = (r_{z_{s_1 s_2}^- z_{kj}^-}), \quad s_1 = C_l^2, \quad s_2 = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p};$$

$$R_{z^-z^+} = (r_{z_{s_1 s_2}^- z_{kj}^+}), \quad s_1 = C_l^2, \quad s_2 = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p};$$

$$R_{z^+x} = (r_{z_{jk}^+ x_s}), \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}, \quad s = \overline{1, l};$$

$$R_{z^+z^-} = (r_{z_{s_1 s_2}^+ z_{kj}^-}), \quad s_1 = C_l^2, \quad s_2 = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p};$$

$$R_{z^+z^+} = (r_{z_{s_1 s_2}^+ z_{kj}^+}), \quad s_1 = C_l^2, \quad s_2 = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p};$$

$R_{YX} = (R_{yx} \quad R_{yz^-} \quad R_{yz^+})^T$ – корреляционный блочный вектор размера $(l + 2pC_l^2) \times 1$, составленный

из блоков $R_{yx} = (r_{yx_j}), \quad j = \overline{1, l}; \quad R_{yz^-} = (r_{yz_{jk}^-}),$

$j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}; \quad R_{yz^+} = (r_{yz_{jk}^+}), \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}.$

Коэффициент детерминации модели (9) находится по формуле

$$R^2 = \sum_{j=1}^l r_{yx_j} \beta_j + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{yz_{jk}^-} \beta_{jk}^- + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{yz_{jk}^+} \beta_{jk}^+. \quad (11)$$

Тогда с использованием формул (10) и (11) сформулируем задачу ОИР для линейной регрессии (8):

$$R^2 \rightarrow \max, \quad (12)$$

$$-(1 - \delta_j)M \leq \sum_{k=1}^l r_{x_j x_k} \beta_k + \sum_{s=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{x_j z_{sk}^-} \beta_{sk}^- + \quad (13)$$

$$+ \sum_{s=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{x_j z_{sk}^+} \beta_{sk}^+ - r_{yx_j} \leq (1 - \delta_j)M, \quad j = \overline{1, l},$$

$$-(1 - \delta_{jk}^-)M \leq \sum_{s=1}^l r_{x_s z_{jk}^-} \beta_s + \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2}^- z_{jk}^-} \beta_{s_1 s_2}^- + \quad (14)$$

$$+ \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2}^+ z_{jk}^-} \beta_{s_1 s_2}^+ - r_{yz_{jk}^-} \leq (1 - \delta_{jk}^-)M, \\ j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p},$$

$$-(1 - \delta_{jk}^+)M \leq \sum_{s=1}^l r_{x_s z_{jk}^+} \beta_s + \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2}^+ z_{jk}^+} \beta_{s_1 s_2}^+ + \quad (15)$$

$$+ \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2}^- z_{jk}^+} \beta_{s_1 s_2}^- - r_{yz_{jk}^+} \leq (1 - \delta_{jk}^+)M, \\ j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p},$$

$$-\delta_j M \leq \beta_j \leq \delta_j M, \quad j = \overline{1, l}, \quad (16)$$

$$-\delta_{jk}^- M \leq \beta_{jk}^- \leq \delta_{jk}^- M, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (17)$$

$$-\delta_{jk}^+ M \leq \beta_{jk}^+ \leq \delta_{jk}^+ M, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (18)$$

$$\delta_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (19)$$

$$\delta_{jk}^- \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (20)$$

$$\delta_{jk}^+ \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^l \delta_j + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \delta_{jk}^- + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \delta_{jk}^+ = m, \quad (22)$$

где m – заданное число регрессоров; $\delta_j, \quad j = \overline{1, l},$ – булевы переменные, заданные по правилу

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я переменная входит в регрессию,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$\delta_{jk}^-, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p},$ – булевы переменные, заданные по правилу

$$\delta_{jk}^- = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я бинарная операция минимум} \\ & \text{с } k\text{-м преобразованием входит в регрессию,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$\delta_{jk}^+, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p},$ – булевы переменные, заданные по правилу



$$\delta_{jk}^+ = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-м бинарная операция} \\ & \text{максимум с } k\text{-м преобразованием} \\ & \text{входит в регрессию,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

M – большое положительное число.

Достоинством задачи ЧБЛП (12)–(22) является то, что число ее ограничений не зависит от объема выборки n .

В задаче ЧБЛП (12)–(22) стратегия построения НЛР регулируется ограничениями на бинарные переменные. Рассмотрим следующие стратегии.

Стратегия 1. Отбор m регрессоров в линейной регрессии (7).

Для этого просто нужно решить задачу (12)–(22). В этом случае итоговая модель может содержать несколько регрессоров с одинаковой бинарной операцией и с одинаковой парой переменных, но с разными значениями параметра λ_j .

Стратегия 2. Приближенное оценивание НЛР (6) с помощью МНК (без отбора регрессоров).

Для этого нужно решить задачу с целевой функцией (12), ограничениями (13)–(21) и

$$\sum_{k=1}^p \delta_{jk}^- = 1, \sum_{k=1}^p \delta_{jk}^+ = 1, j = \overline{1, C_l^2},$$

которые отвечают за вхождение в модель каждой бинарной операции только с одним значением параметра λ_j для каждой пары переменных.

Стратегия 3. Отбор m регрессоров в НЛР (6).

Для этого нужно решить задачу с целевой функцией (12), ограничениями (13)–(22) и

$$\sum_{k=1}^p \delta_{jk}^- \leq 1, \sum_{k=1}^p \delta_{jk}^+ \leq 1, j = \overline{1, C_l^2}. \quad (23)$$

Заметим, что регулируя ограничения на бинарные переменные, можно контролировать тип входящих в НЛР (6) регрессоров. Так, например, если добавить в задачу (12)–(22) ограничения

$$\sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \delta_{jk}^- = 0, \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \delta_{jk}^+ = 0,$$

то получим задачу ОИР для линейной регрессии. Если добавить ограничение

$$\sum_{j=1}^l \delta_j = 0, \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \delta_{jk}^+ = 0,$$

то получим задачу ОИР для регрессии только с бинарными операциями минимум, а если ограничения

$$\sum_{j=1}^l \delta_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p \delta_{jk}^- = 0$$

– то задачу ОИР для регрессии только с бинарными операциями максимум.

Помимо этого можно контролировать состав входящих в модель переменных. Для этого введем бинарную матрицу $V = \{v_{ij}\}$, $i = \overline{1, l + 2pC_l^2}$,

$j = \overline{1, l}$, в которой

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я переменная входит} \\ & \text{в } i\text{-й регрессор модели (7),} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда интеграция в задачу (12)–(22) линейных ограничений

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^l v_{ij} \delta_j + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p v_{i,l+k+p(j-1)} \delta_{jk}^- + \\ & + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p v_{i,l+pC_l^2+k+p(j-1)} \delta_{jk}^+ \leq 1, i = \overline{1, l}, \end{aligned} \quad (24)$$

позволяет строить НЛР с m регрессорами, в которую каждая объясняющая переменная входит не более одного раза. В этом случае автоматически выполняются условия (23).

К сожалению, для задачи (12)–(22) не до конца ясно, как задавать большие числа M . Для решения этой проблемы поступим так, как предложено в работе [20]. Заменяем ограничения (13)–(18) на следующие:

$$-(1 - \delta_j) M_{u_j}^- \leq \sum_{k=1}^l r_{x_j x_k} \beta_k + \sum_{s=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{x_j z_{sk}^-} \beta_{sk}^- + \quad (25)$$

$$+ \sum_{s=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{x_j z_{sk}^+} \beta_{sk}^+ - r_{y x_j} \leq (1 - \delta_j) M_{u_j}^+, j = \overline{1, l},$$

$$-(1 - \delta_{jk}^-) M_{u_{jk}}^- \leq \sum_{s=1}^l r_{x_s z_{jk}^-} \beta_s + \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2}^- z_{jk}^-} \beta_{s_1 s_2}^- +$$

$$+ \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2}^+ z_{jk}^-} \beta_{s_1 s_2}^+ - r_{y z_{jk}^-} \leq (1 - \delta_{jk}^-) M_{u_{jk}}^+, \quad (26)$$

$$j = \overline{1, C_l^2}, k = \overline{1, p},$$

$$-(1 - \delta_{jk}^+) M_{u_{jk}}^- \leq \sum_{s=1}^l r_{x_s z_{jk}^+} \beta_s + \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2}^+ z_{jk}^+} \beta_{s_1 s_2}^- +$$

$$+ \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2}^+ z_{jk}^+} \beta_{s_1 s_2}^+ - r_{y z_{jk}^+} \leq (1 - \delta_{jk}^+) M_{u_{jk}}^+, \quad (27)$$

$$j = \overline{1, C_l^2}, k = \overline{1, p},$$

$$0 \leq \beta_j \leq \delta_j M_{\beta_j}, j \in J_{\beta}^+, \quad (28)$$

$$\delta_j M_{\beta_j} \leq \beta_j \leq 0, j \in J_{\beta}^-, \quad (29)$$

$$0 \leq \beta_{jk}^- \leq \delta_{jk}^- M_{\beta_{jk}^-}, j, k \in J_{\beta}^+, \quad (30)$$

$$\delta_{jk}^- M_{\beta_{jk}}^- \leq \beta_{jk}^- \leq 0, \quad j, k \in J_{\beta}^-, \quad (31)$$

$$0 \leq \beta_{jk}^+ \leq \delta_{jk}^+ M_{\beta_{jk}}^+, \quad j, k \in J_{\beta}^+, \quad (32)$$

$$\delta_{jk}^+ M_{\beta_{jk}}^+ \leq \beta_{jk}^+ \leq 0, \quad j, k \in J_{\beta}^+, \quad (33)$$

где J_{β}^+ и J_{β}^- – индексные множества, построенные из множества $\{1, 2, \dots, l\}$, элементы которых удовлетворяют условиям $r_{yx_j} > 0$ и $r_{yx_j} < 0$ соответственно; J_{β}^+ и J_{β}^- – индексные множества, построенные из множества $\{\{1, 2\}, \dots, \{1, p\}, \{2, 1\}, \dots, \{2, p\}, \dots, \{C_l^2, 1\}, \dots, \{C_l^2, p\}\}$, элементы которых удовлетворяют условиям $r_{yz_{jk}}^- > 0$ и $r_{yz_{jk}}^- < 0$; J_{β}^+ и J_{β}^- – индексные множества, построенные из множества $\{\{1, 2\}, \dots, \{1, p\}, \{2, 1\}, \dots, \{2, p\}, \dots, \{C_l^2, 1\}, \dots, \{C_l^2, p\}\}$, элементы которых удовлетворяют условиям $r_{yz_{jk}}^+ > 0$ и $r_{yz_{jk}}^+ < 0$; $M_{\beta_j} = 1/r_{yx_j}$, $j = \overline{1, l}$; $M_{\beta_{jk}}^- = 1/r_{yz_{jk}}^-$, $M_{\beta_{jk}}^+ = 1/r_{yz_{jk}}^+$, $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$.

Для нахождения чисел $M_{u_j}^-$ в ограничениях (25) нужно решить серию из l задач линейного программирования с целевыми функциями $u_j \rightarrow \min$ при ограничениях

$$0 \leq \beta_j \leq M_{\beta_j}, \quad j \in J_{\beta}^+, \quad (34)$$

$$M_{\beta_j} \leq \beta_j \leq 0, \quad j \in J_{\beta}^-, \quad (35)$$

$$0 \leq \beta_{jk}^- \leq M_{\beta_{jk}}^-, \quad j, k \in J_{\beta}^+, \quad (36)$$

$$M_{\beta_{jk}}^- \leq \beta_{jk}^- \leq 0, \quad j, k \in J_{\beta}^-, \quad (37)$$

$$0 \leq \beta_{jk}^+ \leq M_{\beta_{jk}}^+, \quad j, k \in J_{\beta}^+, \quad (38)$$

$$M_{\beta_{jk}}^+ \leq \beta_{jk}^+ \leq 0, \quad j, k \in J_{\beta}^-, \quad (39)$$

$$\sum_{k=1}^l r_{x_j z_{jk}} \beta_k + \sum_{s=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{x_j z_{sk}}^- \beta_{sk}^- +$$

$$+ \sum_{s=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{x_j z_{sk}}^+ \beta_{sk}^+ - r_{yx_j} = u_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad (40)$$

$$\sum_{s=1}^l r_{x_s z_{jk}} \beta_s + \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2} z_{jk}}^- \beta_{s_1 s_2}^- +$$

$$+ \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2} z_{jk}}^+ \beta_{s_1 s_2}^+ - r_{yz_{jk}}^- = u_{jk}^-, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (41)$$

$$\sum_{s=1}^l r_{x_s z_{jk}} \beta_s + \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2} z_{jk}}^- \beta_{s_1 s_2}^- +$$

$$+ \sum_{s_1=1}^{C_l^2} \sum_{s_2=1}^p r_{z_{s_1 s_2} z_{jk}}^+ \beta_{s_1 s_2}^+ - r_{yz_{jk}}^+ = u_{jk}^+, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (42)$$

$$\sum_{j=1}^l r_{yx_j} \beta_j + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{yz_{jk}}^- \beta_{jk}^- + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^p r_{yz_{jk}}^+ \beta_{jk}^+ \leq 1. \quad (43)$$

Для нахождения чисел $M_{u_j}^+$ нужно решить серию из l задач линейного программирования с целевыми функциями $u_j \rightarrow \max$ при ограничениях (34)–(43). Аналогично находятся числа $M_{u_{jk}}^-, M_{u_{jk}}^+, M_{u_{jk}}^-, M_{u_{jk}}^+$ решением серии из $p C_l^2$ задач линейного программирования с целевыми функциями $u_{jk}^- \rightarrow \min$, $u_{jk}^- \rightarrow \max$, $u_{jk}^+ \rightarrow \min$, $u_{jk}^+ \rightarrow \max$ соответственно при ограничениях (34)–(43).

Таким образом, решение задачи ЧБЛП с целевой функцией (12) и ограничениями (19)–(22), (25)–(33) приводит к построению линейной регрессии (7) с m регрессорами, в которой знаки оценок β -параметров согласованы со знаками соответствующих коэффициентов корреляции регрессоров с переменной y , т. е. справедливы неравенства $\beta_j r_{yx_j} > 0$, $j = \overline{1, l}$; $\beta_{jk}^- r_{yz_{jk}}^- > 0$, $\beta_{jk}^+ r_{yz_{jk}}^+ > 0$, $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$. Стратегия построения НЛР в этой задаче по-прежнему регулируется, например, ограничениями (23) и (24) на бинарные переменные.

В работах [20, 21] экспериментально установлено, что задача ЧБЛП (12), (19)–(22), (25)–(33) решается на порядок быстрее, чем задача (12)–(22). Кроме того, из-за согласованности знаков оценок β -параметров и знаков соответствующих коэффициентов корреляции для полученной регрессии становятся справедливыми формулы для абсолютных вкладов переменных в общую детерминацию R^2 :

$$C_{x_j}^{abc} = r_{yx_j} \beta_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad C_{z_{jk}}^{abc} = r_{yz_{jk}}^- \beta_{jk}^-, \quad (44)$$

$$C_{z_{jk}}^{abc} = r_{yz_{jk}}^+ \beta_{jk}^+, \quad j = \overline{1, C_l^2}, \quad k = \overline{1, p},$$

по которым можно судить о степени влияния каждого регрессора на переменную y .

Сделаем два важных замечания относительно решения задачи (12), (19)–(22), (25)–(33).

Замечание 1. Поскольку в результате решения задачи знаки оценок β -параметров согласуются со знаками соответствующих коэффициентов корреляции



ляции, то предварительно необходимо позаботиться о том, чтобы все знаки коэффициентов корреляции r_{yx_j} были согласованы с физическим смыслом переменных. Для этого можно привлекать экспертов из соответствующей предметной области. Несогласованные переменные следует исключать из рассмотрения. В противном случае полученную регрессию будет проблематично интерпретировать.

Замечание 2. Пусть, например, модель (8) имеет при параметре α_{11}^- регрессор $z_{11}^- = \min\{x_1, 8x_2\}$. Тогда при переходе к кусочно-заданному представлению при параметре α_{11}^- будет либо переменная x_1 , либо $8x_2$. Если окажется, что $r_{yz_{11}^-} > 0$, то оценка параметра α_{11}^- гарантированно будет положительной и переменные x_1 и $8x_2$ будут влиять на y со знаком «плюс». В этом случае оба коэффициента корреляции r_{yx_1} и r_{yx_2} должны быть положительны, иначе возникает проблема с интерпретацией модели. А если окажется, что $r_{yz_{11}^-} < 0$, то оценка параметра α_{11}^- гарантированно будет отрицательной и переменные x_1 и $8x_2$ будут влиять на y со знаком «минус». В таком случае оба коэффициента корреляции r_{yx_1} и r_{yx_2} должны быть отрицательны. Из всего этого следует, что после согласования с экспертами знаков коэффициентов корреляции r_{yx_j} , $j = \overline{1, l}$, необходимо сформировать переменные z_{jk}^-, z_{jk}^+ , $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$, найти их коэффициенты корреляции с переменной y и исключить те из них, для которых не выполняются условия

$$\begin{aligned} & (r_{yz_{jk}^-} > 0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j1}}} > 0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j2}}} > 0) \\ \text{или } & (r_{yz_{jk}^-} < 0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j1}}} < 0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j2}}} < 0), \quad (45) \\ & j = \overline{1, C_l^2}, k = \overline{1, p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (r_{yz_{jk}^+} > 0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j1}}} > 0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j2}}} > 0) \\ \text{или } & (r_{yz_{jk}^+} < 0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j1}}} < 0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j2}}} < 0), \quad (46) \\ & j = \overline{1, C_l^2}, k = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

Исключение противоречивых переменных естественным образом уменьшит время решения задачи построения НЛР. Это время можно еще значительно уменьшить, если дополнить выражения (45) и (46) условиями

$$\left| r_{yz_{jk}^-} \right| \geq r, \left| r_{yz_{jk}^+} \right| \geq r, j = \overline{1, C_l^2}, k = \overline{1, p}, \quad (47)$$

где r – выбранное из промежутка $[0, 1]$ число. Чем больше число r , тем меньше становится количество переменных и время решения задачи.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для построения НЛР были собраны ежегодные статистические данные за период с 2000 по 2020 г. для зависимой переменной y – отправление грузов железнодорожным транспортом общего пользования в Иркутской области (млн руб.), и шестидесяти двух переменных x_1, x_2, \dots, x_{62} , предположительно влияющих на y . Сначала из этого списка было исключено шесть переменных, у которых значение коэффициента корреляции с y по абсолютной величине не превышало 0,2. Затем значения коэффициентов корреляции для оставшихся пятидесяти шести переменных были переданы двум экспертам, представляющим Управление Восточно-Сибирской железной дороги. Их задачей было исключить те переменные, для которых знаки коэффициентов корреляции с y не соответствуют экономическому смыслу решаемой задачи. В результате работы экспертов осталось восемь факторов:

- x_2 – процент трудоспособного населения от общей численности;
 - x_3 – численность рабочей силы (тыс. чел.);
 - x_5 – численность пенсионеров (тыс. чел.);
 - x_8 – число собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения (шт.);
 - x_{18} – число предприятий и организаций;
 - x_{20} – кредиторская задолженность организаций (млн руб.);
 - x_{22} – производство электроэнергии (млрд кВт·ч);
 - x_{58} – тарифы на грузовые перевозки (железнодорожный транспорт), усл.ед.
- Значение переменной x_{58} за 2001 г. было назначено равным 1000 усл. ед. С его помощью по известным индексам тарифов были найдены оставшиеся значения переменной x_{58} .

Значения коэффициентов корреляции с переменной y для отобранных переменных составляют соответственно $r_{yx_2} = 0,785$, $r_{yx_3} = 0,543$, $r_{yx_5} = -0,483$, $r_{yx_8} = -0,446$, $r_{yx_{18}} = 0,538$, $r_{yx_{20}} = -0,204$, $r_{yx_{22}} = 0,476$, $r_{yx_{58}} = -0,465$.

Влияние выбранных переменных на переменную y можно обосновать следующим образом:

- рост численности рабочей силы x_2 и x_3 , а также числа предприятий x_{18} и количества производимой электроэнергии x_{22} , приводит к увеличению объемов производимой регионом продукции, что влечет за собой повышение спроса на грузовые перевозки ж/д транспортом, в то время как рост значения переменной x_5 тормозит развитие экономики, снижая спрос на перевозки;
- избыток собственных автомобилей x_8 у населения снижает спрос как на пассажирские, так и на грузовые перевозки ж/д транспортом;
- рост суммарного объема кредиторской задолженности организаций x_{20} негативно сказывается на экономике региона, поскольку, например, может повлечь за собой наложение различных штрафных санкций;
- увеличение тарифов на грузовые перевозки x_{58} естественно снижает спрос на перевозки грузов по железной дороге.

Затем для каждой пары отобранных переменных по формулам (5) были определены промежутки для значений параметров λ_j . После этого для формирования матрицы Λ каждый промежуток был равномерно разбит четырьмя точками. В результате удалось сформировать $4C_8^2 = 112$ переменных z_{jk}^- , $j = \overline{1, 28}$, $k = \overline{1, 4}$, преобразованных с помощью бинарной операции минимум, и столько же переменных z_{jk}^+ , $j = \overline{1, 28}$, $k = \overline{1, 4}$, преобразованных с помощью операции максимум. Далее из этих 224 переменных были исключены те, для которых не выполняются условия (45)–(47) при $r = 0,2$. Таких переменных оказалось 140. В итоге к построению НЛР мы подошли, имея в наличии 92 переменных, из которых 8 объясняющих и 84 преобразованных с помощью функций \min и \max .

Построение НЛР осуществлялось на основе решения задачи ЧБЛП с целевой функцией (12) и ограничениями (19)–(21), (25)–(33). Подчеркнем, что ограничение (22) на число входящих в модель регрессоров не ставилось. Для того чтобы в итоговую модель каждая объясняющая переменная входила не более одного раза, были учтены ограничения (24). Для решения задач ЧБЛП использовался решатель LPSolve IDE, а для формирования математических моделей задач для этого решателя была разработана специальная программа в среде программирования Delphi. Сначала с помощью

этой программы были найдены неизвестные числа в ограничениях (25)–(27). Для этого было решено 184 задачи линейного программирования с соответствующими целевыми функциями и линейными ограничениями (34)–(43). Затем с использованием найденных чисел и разработанной программы для решателя LPSolve была сформулирована задача ЧБЛП (12), (19)–(21), (24)–(33), содержащая 284 ограничения, 92 вещественных и 92 бинарных переменных. Решение осуществлялось на персональном компьютере с процессором Intel Core i5 (3.40 ГГц, 4 ядра) и объемом оперативной памяти 8 ГБ. В результате примерно за 30 секунд была построена следующая НЛР:

$$\begin{aligned} \tilde{y} = & -24,5274 + 1,1895 \min_{(13,98)}^{(0,6427)} \{x_2, 0,000933x_{18}\} - \\ & -0,0196 \min_{(-3,361)}^{(0,1129)} \{x_5, 0,006754x_{20}\} - \\ & -0,0323 \min_{(-2,182)}^{(0,0843)} \{x_8, 0,11725x_{58}\} + \\ & + 0,0254 \max_{(3,859)}^{(0,1063)} \{x_3, 23,079x_{22}\}, \end{aligned} \quad (48)$$

где в скобках под коэффициентами указаны значения t -критерия Стьюдента, а над коэффициентами – абсолютные вклады регрессоров в общую детерминацию, найденные по формулам (44). Оказалось, что все регрессоры значимы по критерию Стьюдента для уровня значимости $\alpha = 0,05$.

Предложенный в данной статье математический аппарат пока не позволяет контролировать в процессе построения НЛР значимость ее коэффициентов ни по критерию Стьюдента, ни по абсолютным вкладам переменных. Для этого в дальнейшем планируется интеграция в сформулированную задачу ЧБЛП специальных линейных ограничений.

Коэффициент детерминации НЛР (48) $R^2 = 0,946183$, что говорит о высоком качестве построенной модели.

Значения коэффициентов вздутия дисперсии для регрессоров модели (48) не превышают 10, что говорит об отсутствии в ней мультиколлинеарности. Стоит отметить, что контролировать мультиколлинеарность в сформулированной задаче ЧБЛП пока тоже нельзя.

Таким образом, выполняются все условия, чтобы отнести построенную модель (48) к вполне интерпретируемому.

Модель (48) в кусочно-заданном виде представлена в таблице.



Уравнения модели (48) для различных диапазонов значений переменных

Уравнение НЛП	Диапазоны значений переменных
$\tilde{y} = -24,527 + 0,0011x_{18} - 0,00013x_{20} - 0,0038x_{58} + 0,0254x_3$	$\frac{x_2}{x_{18}} \geq 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} \geq 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} \geq 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} \geq 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 0,0011x_{18} - 0,00013x_{20} - 0,0038x_{58} + 0,5857x_{22}$	$\frac{x_2}{x_{18}} \geq 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} \geq 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} \geq 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} < 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 0,0011x_{18} - 0,00013x_{20} - 0,0323x_8 + 0,0254x_3$	$\frac{x_2}{x_{18}} \geq 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} \geq 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} < 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} \geq 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 0,0011x_{18} - 0,00013x_{20} - 0,0323x_8 + 0,5857x_{22}$	$\frac{x_2}{x_{18}} \geq 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} \geq 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} < 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} < 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 0,0011x_{18} - 0,0196x_5 - 0,0038x_{58} + 0,0254x_3$	$\frac{x_2}{x_{18}} \geq 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} < 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} \geq 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} \geq 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 0,0011x_{18} - 0,0196x_5 - 0,0038x_{58} + 0,5857x_{22}$	$\frac{x_2}{x_{18}} \geq 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} < 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} \geq 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} < 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 0,0011x_{18} - 0,0196x_5 - 0,0323x_8 + 0,0254x_3$	$\frac{x_2}{x_{18}} \geq 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} < 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} < 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} \geq 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 0,0011x_{18} - 0,0196x_5 - 0,0323x_8 + 0,5857x_{22}$	$\frac{x_2}{x_{18}} \geq 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} < 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} < 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} < 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 1,1895x_2 - 0,00013x_{20} - 0,0038x_{58} + 0,0254x_3$	$\frac{x_2}{x_{18}} < 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} \geq 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} \geq 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} \geq 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 1,1895x_2 - 0,00013x_{20} - 0,0038x_{58} + 0,5857x_{22}$	$\frac{x_2}{x_{18}} < 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} \geq 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} \geq 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} < 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 1,1895x_2 - 0,00013x_{20} - 0,0323x_8 + 0,0254x_3$	$\frac{x_2}{x_{18}} < 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} \geq 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} < 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} \geq 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 1,1895x_2 - 0,00013x_{20} - 0,0323x_8 + 0,5857x_{22}$	$\frac{x_2}{x_{18}} < 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} \geq 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} < 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} < 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 1,1895x_2 - 0,0196x_5 - 0,0038x_{58} + 0,0254x_3$	$\frac{x_2}{x_{18}} < 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} < 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} \geq 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} \geq 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 1,1895x_2 - 0,0196x_5 - 0,0038x_{58} + 0,5857x_{22}$	$\frac{x_2}{x_{18}} < 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} < 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} \geq 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} < 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 1,1895x_2 - 0,0196x_5 - 0,0323x_8 + 0,0254x_3$	$\frac{x_2}{x_{18}} < 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} < 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} < 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} \geq 23,08$
$\tilde{y} = -24,527 + 1,1895x_2 - 0,0196x_5 - 0,0323x_8 + 0,5857x_{22}$	$\frac{x_2}{x_{18}} < 0,000933, \frac{x_5}{x_{20}} < 0,00675, \frac{x_8}{x_{58}} < 0,117, \frac{x_3}{x_{22}} < 23,08$

Из таблицы видно, что в зависимости от выполненных условий меняется состав влияющих на y переменных, а оценки параметров $\lambda_{4,1}^- = 0,000933$, $\lambda_{16,2}^- = 0,00675$, $\lambda_{22,2}^- = 0,117$, $\lambda_{12,3}^+ = 23,08$ играют роль точек переключения для следующих четырех автоматически сформированных показателей:

- отношение процента трудоспособного населения (x_2) к числу предприятий и организаций (x_{18});
- отношение численности пенсионеров (x_5) к кредиторской задолженности (x_{20});

– отношение числа собственных легковых автомобилей (x_8) к тарифам на грузовые ж/д перевозки (x_{58});

– отношение численности рабочей силы (x_3) к объему производства электроэнергии (x_{22}).

Тогда справедлива следующая интерпретация.

- Если значение показателя x_2/x_{18} не меньше, чем $0,000933$, то на отправление грузов ж/д транспортом влияет число предприятий и организаций x_{18} , а процент трудоспособного населения x_2 не влияет. При этом с увеличением числа предприятий и организаций x_{18} на одну единицу (при неиз-

менных значениях остальных переменных) отправление грузов у возрастает в среднем на 0,0011 млн руб. А если значение показателя x_2/x_{18} меньше, чем 0,000933, то на отправление грузов влияет процент трудоспособного населения x_2 , а число предприятий и организаций x_{18} не влияет. При этом с увеличением процента трудоспособного населения x_2 на одну единицу (при неизменных значениях остальных переменных) отправление грузов у возрастает в среднем на 1,1895 млн руб.

• Если значение показателя x_5/x_{20} не меньше, чем 0,00675, то на отправление грузов ж/д транспортом влияет кредиторская задолженность x_{20} , а численность пенсионеров x_5 не влияет. При этом с увеличением кредиторской задолженности x_{20} на 1 млн руб. (при неизменных значениях остальных переменных) отправление грузов у убывает в среднем на 0,00013 млн руб. А если значение показателя x_5/x_{20} меньше, чем 0,00675, то на отправление грузов влияет численность пенсионеров x_5 , а кредиторская задолженность x_{20} не влияет. При этом с увеличением численности пенсионеров x_5 на 1 тыс. человек (при неизменных значениях остальных переменных) отправление грузов у убывает в среднем на 0,0196 млн руб.

• Если значение показателя x_8/x_{58} не меньше, чем 0,117, то на отправление грузов ж/д транспортом влияют тарифы на грузовые ж/д перевозки x_{58} , а число собственных легковых автомобилей x_8 не влияет. При этом с увеличением тарифов на грузовые ж/д перевозки x_{58} на одну условную единицу (при неизменных значениях остальных переменных) отправление грузов у убывает в среднем на 0,0038 млн руб. А если значение показателя x_8/x_{58} меньше, чем 0,117, то на отправление грузов влияет число собственных легковых автомобилей x_8 , а тарифы на грузовые ж/д перевозки x_{58} не влияют. При этом с увеличением числа собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения x_8 на 1 шт. (при неизменных значениях остальных переменных) отправление грузов у убывает в среднем на 0,0323 млн руб.

• Если значение показателя x_3/x_{22} не меньше, чем 23,08, то на отправление грузов ж/д транспортом влияет численность рабочей силы x_3 , а объемы производства электроэнергии x_{22} не влияют. При этом с увеличением численности рабочей силы x_3 на 1 тыс. человек (при неизменных значениях остальных переменных) отправление грузов у возрастает в среднем на 0,0254 млн руб. А если значение показателя x_3/x_{22} меньше, чем 23,08, то на отправление грузов влияют объемы производства электроэнергии x_{22} , а численность рабочей силы x_3 не влияет. При этом с увеличением объемов про-

изводства электроэнергии x_{22} на 1 млрд кВт·ч (при неизменных значениях остальных переменных) отправление грузов у возрастает в среднем на 0,5857 млн руб.

Таким образом, интерпретационные характеристики НЛР представляются богаче и разнообразнее тех же характеристик традиционной линейной регрессионной модели. При этом аппроксимационные характеристики НЛР в зависимости от выбранной стратегии построения должны в большинстве случаев превосходить те же характеристики линейных регрессий, являющихся лишь частным случаем НЛР. Ценность предложенных НЛР заключается в том, что их можно использовать не только для прогнозирования, но и для извлечения новых интерпретируемых математических закономерностей, призванных повысить эффективность управленческих решений в различных отраслях экономики.

Также отметим, что сама по себе НЛР лучше подходит для моделирования в условиях мультиколлинеарности, чем традиционная линейная регрессия. Дело в том, что чем больше в НЛР бинарных операций, тем выше число ее степеней свободы по сравнению с линейной регрессией. Это означает, что НЛР позволяет «вместить» в себя больше переменных при меньшем числе регрессоров, чем линейная регрессия. Например, НЛР (48) содержит только четыре регрессора, но при этом восемь переменных, поэтому шанс на то, что в ней будет присутствовать мультиколлинеарность, априори ниже, чем шанс столкнуться с мультиколлинеарностью в линейной регрессии со всеми восемью переменными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена НЛР, в которой помимо бинарной операции минимум используется еще и бинарная операция максимум. Предложен метод построения НЛР, в основе которого лежит решение задачи ЧБЛП. В результате решения этой задачи определяется структурная спецификация НЛР и ее приближенные МНК-оценки. Показано, как с помощью регулирования ограничений на бинарные переменные можно контролировать структурную спецификацию НЛР. Продемонстрировано, каким образом нужно исключать на начальном этапе противоречивые переменные, чтобы уменьшить время решения задачи и гарантировать интерпретируемость НЛР. С помощью предложенного метода построена модель, позволившая выявить новые закономерности функционирования железнодорожного транспорта в Иркутской области,



недоступные при использовании классической линейной регрессии.

Предложенный в работе метод является универсальным и может применяться для построения НЛР в любой предметной области при наличии статистических данных, состоящих только из положительных переменных. Проводимое в его рамках разбиение параметров приводит к формированию задачи ЧБЛП, оптимальное решение которой при достаточно большом числе разбиений дает оценки, практически не отличающиеся от оптимальных МНК-оценок рассматриваемой НЛР. Естественно, что с ростом числа разбиений будет расти и время решения задачи. Тем не менее, как продемонстрировано в работах [20, 21] на примере линейной регрессии, такая задача ЧБЛП решается на порядок быстрее, чем при использовании стандартных переборных процедур. Тестирование скорости построения НЛР по выборкам разных объемов с помощью предложенного метода будет проведено в последующих работах автора.

ЛИТЕРАТУРА

- Arkes, J. Regression Analysis: A Practical Introduction. – Routledge, 2019. – 362 p.
- Westfall, P.H., Arias, A.L. Understanding Regression Analysis: A Conditional Distribution Approach. – Chapman and Hall/CRC, 2020. – 514 p.
- Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с. [Kleiner, G.B. Proizvodstvennyye funktsii: Teoriya, metody, primeneniye. – Moscow: Finansy i statistika, 1986. – 239 s. (In Russian)]
- Onalan, O., Basegmez, H. Estimation of Economic Growth Using Grey Cobb-Douglas Production Function: An Application for US Economy // Journal of Business Economics and Finance. – 2018. – Vol. 7, no. 2. – P. 178–190.
- Yankovyi, O., Koval, V., Lazorenko, L., et al. Modeling Sustainable Economic Development Using Production Functions // Studies of Applied Economics. – 2021. – Vol. 39, no. 5.
- Ishikawa, A. Why Does Production Function Take the Cobb–Douglas Form? // Statistical Properties in Firms' Large-scale Data. – Springer, Singapore, 2021. – P. 113–135.
- Носков С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. – Иркутск: РИЦ ГП «Облформпечать», 1996. – 320 с. [Noskov, S.I. Tekhnologiya modelirovaniya ob"ektov s nestabil'nym funktsionirovaniem i neopredelennost'yu v dannykh. – Irkutsk: RITS GP «Oblinformpechat'», 1996. – 320 s. (In Russian)]
- Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 200 с. [Shor, N.Z. Metody minimizatsii nedifferentsiruemykh funktsii i ikh prilozheniya. – Kiev: Nauk. dumka, 1979. – 200 s. (In Russian)]
- Scaman, K., Bach, F., Bubeck, S., et al. Optimal Algorithms for Non-smooth Distributed Optimization in Networks // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2018. – Vol. 31.
- Khamaru, K., Wainwright, M. J. Convergence Guarantees for a Class of Non-convex and Non-smooth Optimization Problems // Journal of Machine Learning Research. – 2019. – Vol. 20, no. 154. – P. 1–52.
- Иванова Н.К., Лебедева С.А., Носков С.И. Идентификация параметров некоторых негладких регрессий // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. – 2016. – № 17. – С. 107–110. [Ivanova, N.K., Lebedeva, S.A., Noskov, S.I. Identifikatsiya parametrov nekotorykh negladkikh regressii // Informatsionnye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh sistem. – 2016. – No. 17. – P. 107–110. (In Russian)]
- Носков С.И., Хоняков А.А. Программный комплекс построения некоторых типов кусочно-линейных регрессий // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. – 2019. – № 3 (4). – С. 47–55. [Noskov, S.I., Khonyakov, A.A. Programmnyi kompleks postroeniya nekotorykh tipov kusochno-lineinykh regressii // Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami. – 2019. – No. 3 (4). – P. 47–55. (In Russian)]
- Park, Y.W., Klabjan, D. Subset Selection for Multiple Linear Regression via Optimization // Journal of Global Optimization. – 2020. – Vol. 77. – P. 543–574.
- Chung, S., Park, Y.W., Cheong, T. A Mathematical Programming Approach for Integrated Multiple Linear Regression Subset Selection and Validation // Pattern Recognition. – 2020. – Vol. 108. – P. 107565.
- Bertsimas, D., Li, M.L. Scalable Holistic Linear Regression // Operations Research Letters. – 2020. – Vol. 48, no. 3. – P. 203–208.
- Базилевский М.П. МНК-оценивание параметров специфицированных на основе функций Леонтьева двухфакторных моделей регрессии // Южно-Сибирский научный вестник. – 2019. – № 2 (26). – С. 66–70. [Bazilevskii, M.P. MNK-otsenivanie parametrov spetsifitsirovannykh na osnove funktsii Leont'eva dvukhfaktornykh modelei regressii // Yuzhno-Sibirskii nauchnyi vestnik. – 2019. – No. 2 (26). – P. 66–70. (In Russian)]
- Базилевский М.П. Оценивание линейно-неэлементарных регрессионных моделей с помощью метода наименьших квадратов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2020. – Т. 8. – № 4 (31). [Bazilevskii, M.P. Otsenivanie lineino-nehlementarnykh regressionnykh modelei s pomoshch'yu metoda naimen'shikh kvadratov // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii. – 2020. – Vol. 8, – no. 4 (31). (In Russian)]
- Базилевский М.П. Отбор информативных операций при построении линейно-неэлементарных регрессионных моделей // International Journal of Open Information Technologies. – 2021. – Т. 9. – № 5. – С. 30–35. [Bazilevskii, M.P. Otbor informativnykh operatsii pri postroenii lineino-nehlementarnykh regressionnykh modelei // International Journal of Open Information Technologies. – 2021. – Vol. 9, no. 5. – P. 30–35. (In Russian)]
- Базилевский М.П. Сведение задачи отбора информативных регрессоров при оценивании линейной регрессионной модели по методу наименьших квадратов к задаче частично-булевого линейного программирования // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2018. – Т. 6. – № 1 (20). – С. 108–117. [Bazilevskii, M.P. Svedenie zadachi otbora informativnykh regressorov pri otsenivanii lineinoi regressiionnoi modeli po metodu naimen'shikh kvadratov k zadache chastichno-bulevogo lineinogo programmirovaniya // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii. – 2018. – T. 6. – No. 1 (20). – S. 108–117.]

- otbora informativnykh regressorov pri otsenivanii lineinoi regressionnoi modeli po metodu naimen'shikh kvadratov k zadache chastichno-bulevogo lineinogo programmirovaniya // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii. – 2018. – Vol. 6, no. 1 (20). – P. 108–117. (In Russian)]
20. *Базилевский М.П.* Способ определения параметра M в задаче частично-булевого линейного программирования для отбора регрессоров в линейной регрессии // Вестник Технологического университета. – 2022. – Т. 25. – № 2. – С. 62–66. [*Bazilevskii, M.P.* Sposob opredeleniya parametra M v zadache chastichno-bulevogo lineinogo programmirovaniya dlya otbora regressorov v lineinoi regressii // Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta. – 2022. – Vol. 25, no. 2. – P. 62–66. (In Russian)]
21. *Konno, H., Yamamoto, R.* Choosing the Best Set of Variables in Regression Analysis Using Integer Programming // Journal of Global Optimization. – 2009. – Vol. 44. – P. 273–282.

*Статья представлена к публикации руководителем
регионального редсовета М.И. Гераськиным.*

*Поступила в редакцию 23.04.2022,
после доработки 3.08.2022.
Принята к публикации 31.08.2022.*

Базилевский Михаил Павлович – канд. техн. наук.,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
г. Иркутск, ✉ mik2178@yandex.ru.

A METHOD FOR CONSTRUCTING NONELEMENTARY LINEAR REGRESSIONS BASED ON MATHEMATICAL PROGRAMMING

M.P. Bazilevskiy

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

✉ mik2178@yandex.ru

Abstract. This paper is devoted to constructing nonelementary linear regressions consisting of explanatory variables and all possible combinations of their pairs transformed using binary minimum and maximum operations. Such models are formalized through a 0-1 mixed integer linear programming problem. By adjusting the constraints on binary variables, we control the structural specification of a nonelementary linear regression, namely, the number of regressors, their types, and the composition of explanatory variables. In this case, the model parameters are approximately estimated using the ordinary least squares method. The formulated problem has advantages: the number of constraints does not depend on the sample size, and the signs of the estimates for the explanatory variables are consistent with the signs of their correlation coefficients with the dependent variable. Regressors are eliminated at the initial stage to reduce the time for solving the problem and make the model quite interpretable. A nonelementary linear regression of rail freight in Irkutsk oblast is constructed, and its interpretation is given.

Keywords: nonelementary linear regression, ordinary least squares method, 0-1 mixed integer linear programming problem, subset selection, coefficient of determination, interpretation, rail freight.

ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ ОТКЛОНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ АФФИННОГО СЕМЕЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

М.В. Хлебников, Я.И. Квинто

Аннотация. Предложена простая верхняя оценка величины отклонения траектории для аффинного семейства систем в дискретном времени, подверженной воздействию ограниченных внешних возмущений при ненулевых начальных условиях. Предлагаемый подход предполагает построение параметрической квадратичной функции Ляпунова для рассматриваемой системы, а в качестве технического средства используется аппарат линейных матричных неравенств и метод инвариантных эллипсоидов. Исходная задача сводится к параметрической задаче полуопределенного программирования, которая легко решается численно. Результаты численного моделирования демонстрируют сравнительно невысокий консерватизм полученной оценки. Работа продолжает цикл ранее опубликованных исследований авторов, связанных с оцениванием отклонений в линейных непрерывных и дискретных системах, подверженных воздействию системных неопределенностей и внешних возмущений. Полученные результаты могут быть распространены на различные робастные постановки задачи, а также на задачу минимизации отклонений аффинного семейства систем управления в дискретном времени при наличии внешних возмущений с помощью линейной обратной связи.

Ключевые слова: линейная дискретная система, всплеск, параметрическая функция Ляпунова, ограниченные внешние возмущения, линейные матричные неравенства, инвариантные эллипсоиды.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании переходных режимов в линейных системах большой интерес представляет поведение всей траектории системы. При этом одной из наиболее важных характеристик переходного режима является величина максимального отклонения траектории от нуля.

Существуют различные методы оценивания отклонений траекторий динамической системы (см., например, обзор в статье [1]). В частности, в этой работе был предложен регулярный подход к оцениванию величины максимального отклонения для линейной системы в непрерывном времени, а также развит подход к минимизации отклонений при помощи статической линейной обратной связи по состоянию на основе техники линейных матричных неравенств. Развитый подход был распространен [2] и на системы в дискретном времени, содержащие структурированную матричную неопределенность.

Еще одно важное и перспективное направление исследований в данной области связано с методом локализации инвариантных компактов; отметим здесь работы отечественных ученых А.П. Крищенко, А.Н. Канатникова, С.К. Коровина (см., например, статьи [3–6]).

Ситуация, когда неопределенными параметрами являются сами элементы матрицы, достаточно редкая, так как обычно коэффициенты матрицы сами по себе не имеют непосредственного физического смысла и зависят от параметров более сложным образом. Аффинная неопределенность является простейшей моделью такой *зависимой* структуры неопределенности; подробнее см. монографию [7].

Исследованию дискретных систем с параметрической неопределенностью посвящены работы [8–10]. С технической точки зрения в них применяется подход, предложенный в статье [11] и позволяющий обособить матрицу системы и матрицу функции Ляпунова в матричном неравенстве, представляющем собой достаточное

условие устойчивости рассматриваемого семейства. При этом получение менее консервативных оценок осуществляется путем построения параметрической квадратичной функции Ляпунова. Отметим также публикации [12, 13], посвященные близкой тематике.

В настоящей статье авторы продолжают развитие этой линии исследований с целью получения верхних оценок отклонений траекторий аффинного семейства дискретных систем с ненулевыми начальными условиями при воздействии ограниченных внешних возмущений. При этом основным техническим средством является аппарат линейных матричных неравенств [14, 15].

В статье используются следующие обозначения: $\|\cdot\|$ – спектральная норма матрицы и евклидова норма вектора, T – символ транспонирования, I – единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОДХОД К ЕЕ РЕШЕНИЮ

Рассмотрим линейную динамическую систему в дискретном времени

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + Dw_k \quad (1)$$

с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, ненулевым начальным условием x_0 и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$\|w_k\| \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Здесь $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а шуровские матрицы $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ принадлежат выпуклому семейству

$$\mathbb{A} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}. \quad (3)$$

Как хорошо известно, достаточное условие робастной квадратичной устойчивости линейной системы состоит в существовании *общей* квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^T P^{-1} x, \quad P > 0.$$

Как показано в работах [8–10], существенно менее консервативные оценки дает подход, основанный на построении *параметрической* квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^T P^{-1}(\alpha) x, \quad P(\alpha) > 0.$$

При этом в работе [8] была установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть существуют матрицы $0 < P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такие, что для

матриц A_i, D , определяемых соотношениями (1), (3), выполняются условия

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G & D \\ G^T A_i^T & \mu(G + G^T - P_i) & 0 \\ D^T & 0 & (1 - \mu)I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

при некотором $0 < \mu < 1$.

Тогда система (1) обладает параметрической квадратичной функцией Ляпунова с матрицей

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i.$$

Основной целью настоящей статьи является оценивание верхних границ отклонений траекторий для семейства (1) при внешнем возмущении (2).

Для дискретной системы величина максимального отклонения траектории от нуля в переходном режиме представляется выражением

$$\xi^* = \max_{k=1,2,\dots} \max_{\|x_0\|=1} \|x_k\|.$$

Оценивание величины ξ^* весьма затруднено (см. работу [1]), однако применение метода инвариантных эллипсоидов на основе техники линейных матричных неравенств позволяет получать ее простые верхние оценки.

Напомним следующий хорошо известный результат. Матрица $P > 0$ квадратичной функции Ляпунова для некоторой динамической системы определяет т.н. *инвариантный* эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P > 0.$$

Иными словами, траектория системы, начинаясь в любой его точке, будет оставаться в этом эллипсоиде. Отсюда следует, что для любого начального условия из шара $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, содержащегося в эллипсоиде \mathcal{E} , в каждый момент времени будет верна оценка

$$\|x_k\| \leq \lambda_{\max}(P) = \sqrt{\|P\|}.$$

Ввиду этого, зададимся целью поиска *минимального* инвариантного эллипсоида, ассоциированного с матрицей $P = P(\alpha)$ параметрической квадратичной функции Ляпунова рассматриваемого семейства.

Поскольку

$$\begin{aligned} \|P(\alpha)\| &= \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \right\| \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i \|P_i\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \alpha_i \max_i \|P_i\| \leq \max_i \|P_i\|, \end{aligned}$$



в рамках предлагаемого подхода будем минимизировать верхнюю оценку наибольшей полуоси инвариантного эллипсоида с матрицей $P(\alpha)$ – величину

$$\max_i \|P_i\|.$$

Далее, условие $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ эквивалентно требованию

$$P(\alpha) \geq I$$

и гарантируется выполнением условий $P_i \geq I$, $i = 1, \dots, N$. Действительно,

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \geq \sum_{i=1}^N \alpha_i I = I.$$

Наконец, заметив, что матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G & D \\ G^T A_i^T & \mu(G + G^T - P_i) & 0 \\ D^T & 0 & (1-\mu)I \end{pmatrix} \geq 0$$

по лемме Шура можно придать эквивалентный вид

$$\begin{pmatrix} P_i - \frac{1}{1-\mu} D D^T & A_i G \\ G^T A_i^T & \mu(G + G^T - P_i) \end{pmatrix} \geq 0,$$

с учетом оценки

$$\|x_k\| \leq \sqrt{\|P(\alpha)\|} \leq \max_{i=1, \dots, N} \sqrt{\|P_i\|}$$

окончательно приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть P_i^* , $i = 1, \dots, N$, — решение задачи выпуклой оптимизации

$$\min \max_{i=1, \dots, N} \|P_i\|$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P_i - \frac{1}{1-\mu} D D^T & A_i G \\ G^T A_i^T & \mu(G + G^T - P_i) \end{pmatrix} \geq 0, \\ P_i \geq I, \quad i = 1, \dots, N,$$

относительно матричных переменных $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $0 < \mu < 1$, где матрицы A_i, D определяются соотношениями (1), (3).

Тогда для решений системы (1) при всех допустимых внешних возмущениях (2) справедлива оценка

$$\|x_k\| \leq \max_{i=1, \dots, N} \sqrt{\|P_i^*\|}.$$

Оптимизационная задача, сформулированная в теореме 2, представляет собой параметрическую задачу полуопределенного программирования. Она легко решается численно путем одномерной оптимизации по параметру μ , варьируемому на интервале $(0, 1)$. В частности, для этого может быть эффективно использован пакет *cvx* [16] в среде *Matlab*.

2. ПРИМЕР

Рассмотрим (в несколько измененном виде) систему вида (1) из работы [8]:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,0061 & -0,2630 & 0,2748 \\ 0,1266 & 0,1242 & -0,3029 \\ -0,5100 & 0,4678 & -0,9712 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,1330 & 0,2009 & 0,1672 \\ 0,1224 & -0,5987 & 0,3100 \\ -0,5235 & 0,0297 & -0,4784 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0,2733 & -0,1868 & -0,0077 \\ -0,0253 & -0,2828 & 0,6112 \\ -0,2412 & -0,0844 & -0,8024 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -0,4 \\ -0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи одномерной оптимизации, сформулированной в теореме 2, доставляет (при $\mu = 0,873$) матрицы

$$P_1^* = \begin{pmatrix} 4,0127 & 0,4418 & -2,1495 \\ 0,4418 & 4,3296 & 0,6922 \\ -2,1495 & 0,6922 & 2,8445 \end{pmatrix},$$

$$P_2^* = \begin{pmatrix} 2,7515 & 0,7640 & -1,2374 \\ 0,7640 & 4,8052 & -0,1782 \\ -1,2374 & -0,1782 & 2,2964 \end{pmatrix},$$

$$P_3^* = \begin{pmatrix} 2,2435 & 1,9108 & -0,7729 \\ 1,9108 & 3,9362 & -1,1877 \\ -0,7729 & -1,1877 & 1,4804 \end{pmatrix}$$

параметрической функции Ляпунова и матрицу

$$G^* = \begin{pmatrix} 2,7991 & -0,0704 & -1,4510 \\ 2,2860 & 5,1487 & -0,6981 \\ -1,0359 & 0,2141 & 1,9738 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\sqrt{\|P_1^*\|} = 2,3791, \sqrt{\|P_2^*\|} = 2,2774, \sqrt{\|P_3^*\|} = 2,3791$$

и окончательно имеем оценку

$$\|x_k\| \leq \max \left\{ \sqrt{\|P_1^*\|}, \sqrt{\|P_2^*\|}, \sqrt{\|P_3^*\|} \right\} = \sqrt{\|P_1^*\|} = 2,3791.$$

Для сравнения: общая квадратичная функция Ляпунова для этой системы, найденная согласно работе [5], обладает матрицей

$$P_{comm}^* = \begin{pmatrix} 27,1113 & -9,3697 & -23,8293 \\ -9,3697 & 76,0285 & 6,4098 \\ -23,8293 & 6,4098 & 47,9982 \end{pmatrix}$$

и доставляет более чем втрое грубую оценку:

$$\|x_k\| \leq \sqrt{\|P_{comm}^*\|} = 9,0666.$$

На рис. 1 показаны проекции на плоскость (x_2, x_3) эллипсоидов с матрицами P_1^* , P_2^* , P_3^* (тонкие сплошные линии) и инвариантного эллипсоида с матрицей P_{comm}^* (жирная штрихпунктирная линия); точечной линией показана проекция единичного шара.

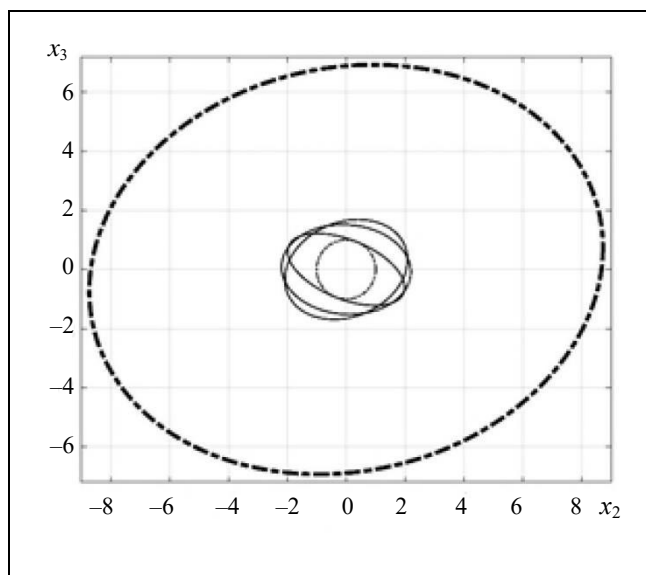


Рис. 1. Проекция эллипсоидов на плоскость (x_2, x_3)

На рис. 2 показана центральная часть рис. 1, а также проекция траектории системы при начальном условии

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1391 \\ -0,9903 \end{pmatrix}, \quad \|x_0\| = 1,$$

и допустимом внешнем возмущении

$$w_k = \text{sign}(\sin(k/4)\cos(k/7)), \quad k = 1, 2, \dots$$

(пунктирная линия).

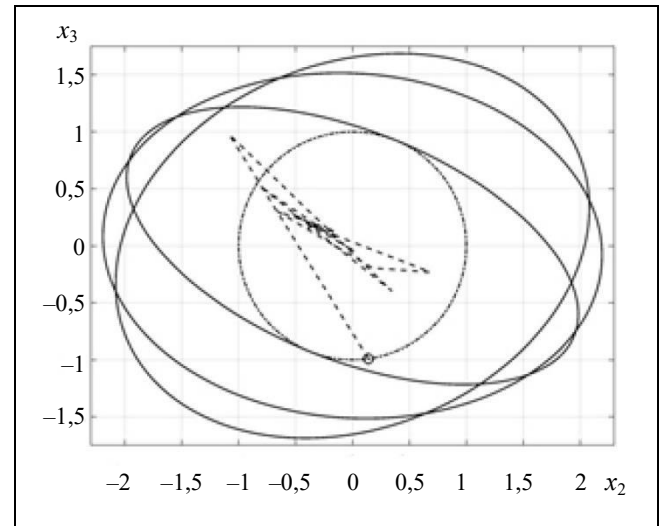


Рис. 2. Проекция эллипсоидов и траектории системы на плоскость (x_2, x_3)

На рис. 3 показана динамика величины $\|x_k\|$ (сплошная линия) и найденная оценка величины всплеска (пунктир).

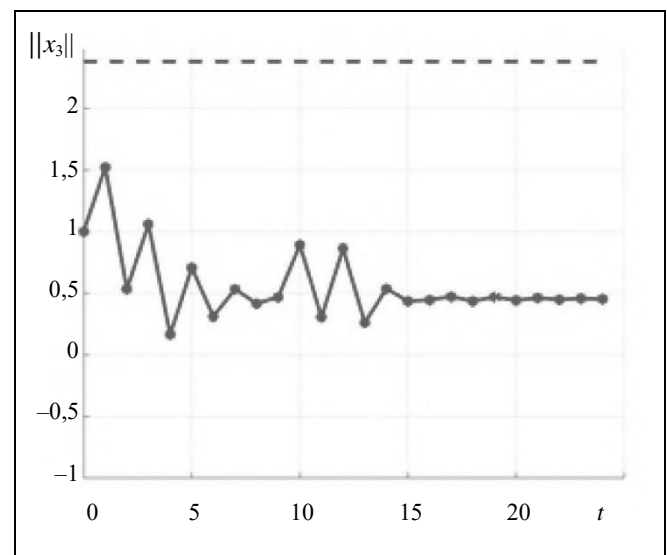


Рис. 3. Динамика величины $\|x_k\|$ и ее оценка

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложена простая верхняя оценка одной из наиболее важных характеристик переходного режима – величины максимального



отклонения траектории от нуля – для аффинного семейства систем в дискретном времени, подверженного воздействию ограниченных внешних возмущений при ненулевых начальных условиях. Предлагаемый подход, развивая предыдущие работы авторов, предполагает построение параметрической квадратичной функции Ляпунова для рассматриваемой системы, а в качестве технического средства используется аппарат линейных матричных неравенств и метод инвариантных эллипсоидов. При этом исходную задачу удалось свести к параметрической задаче полуопределенного программирования, которая легко решается численным образом, в частности – в среде Matlab с помощью пакета cvx.

Авторы предполагают распространить полученные результаты на различные робастные постановки исходной задачи, а также на задачу минимизации отклонений аффинного семейства систем управления в дискретном времени при наличии внешних возмущений с помощью линейной обратной связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В. и др. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 6. – С. 18–41. [Polyak, B.T., Tremba, A.A., Khlebnikov, M.V., et al. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, No. 6. – P. 957–976].
2. Квинто Я.И., Хлебников М.В. Верхние границы максимального отклонения траектории в линейных дискретных системах: робастная постановка // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 77. – С. 70–84. – DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.4>. [Kvinto, Ya.I., Khlebnikov, M.V. Upper Bounds of Large Deviations in Linear Discrete-Time Systems: The Robust Statement // Large-Scale Systems Control. – 2019. – Iss. 77. – P. 70–84. – DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.4> (In Russian)].
3. Канатников А.Н. Локализуемые множества и поведение траекторий неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 11. – С. 1465–1475. [Kanatnikov, A.N. Localizing Sets and Behavior of Trajectories of Time-Varying Systems // Differential Equations. – 2019. – Vol. 55. – P. 1420–1430].
4. Крищенко А.П. Поведение траекторий автономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 11. – С. 1445–1450. [Krishchenko, A.P. Behavior of Trajectories of Time-Invariant Systems // Differential Equations. – 2018. – Vol. 54. – P. 1445–1450].
5. Канатников А.Н. Об эффективности функционального метода локализации // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 11. – С. 1433–1438. [Kanatnikov, A.N. On the Efficiency of the Functional Localization Method // Differential Equations. – 2020. – Vol. 56. – P. 1402–1407].
6. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Функциональный метод локализации и принцип инвариантности Ла-Салля // Математика и математическое моделирование. – 2021. – № 1. – С. 1–12. [Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Functional Method of Localization and LaSalle Invariance Principle // Mathematics and Mathematical Modeling. – 2021. – № 1. – P. 1–12. (In Russian)]
7. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с. [Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Robastnaya ustoychivost' i upravlenie (Robust Stability and Control). – Moscow: Nauka, 2002. – 303 s. (In Russian)].
8. Хлебников М.В., Квинто Я.И. Параметрическая функция Ляпунова для дискретных систем управления с внешними возмущениями: анализ // Проблемы управления. – 2021. – № 4. – С. 21–26. – DOI: <http://doi.org/10.25728/pu.2021.4.2> [Khlebnikov, M.V., Kvinto, Ya.I. A Parametric Lyapunov Function For Discrete-time Control Systems With Bounded Exogenous Disturbances: Analysis // Control Sciences. – 2021. – No. 4. – P. 18–22. – DOI: <http://doi.org/10.25728/cs.2021.4.2>].
9. Geromel, J.C., De Oliveira, M.C., Hsu, L. LMI Characterization of Structural and Robust Stability // Linear Algebra and Its Applications. – 1998. – Vol. 285. – P. 69–80.
10. Ramos, D.C.W., Peres, P.L.D. A Less Conservative LMI Condition for the Robust Stability of Discrete-Time Uncertain Systems // Systems & Control Letters. – 2001. – Vol. 43. – P. 371–378.
11. De Oliveira, M.C., Bernussou, J., Geromel, J.C. A New Discrete-Time Robust Stability Condition // Systems & Control Letters. – 1999. – Vol. 37. – P. 261–265.
12. Deaecto G.S., Geromel J.C. Stability and Performance of Discrete-Time Switched Linear Systems // Systems & Control Letters. – 2018. – Vol. 118. – P. 1–7.
13. Egidio L.N., Deaecto G.S., Geromel J.C. Limit Cycle Global Asymptotic Stability of Continuous-Time Switched Affine Systems // IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, No. 2. – P. 6121–6126.
14. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 212 p.
15. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с. [Balandin, D.V., Kogan, M.M. Sintez zakonov upravleniya na osnove lineinykh matrichnykh neravenstv (LMI-based Control System Design). – Moscow: Fizmatlit, 2007. – 280 s. (In Russian)].
16. Grant, M., Boyd, S. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 2.1. – URL: <http://cvxr.com/cvx/>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 22.06.2022,
после доработки 14.09.2022.
Принята к публикации 19.09.2022.

Хлебников Михаил Владимирович – д-р физ.-мат. наук,
✉ khlebnik@ipu.ru,

Квинто Яна Игоревна – канд. техн. наук,
✉ yanakvinto@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

UPPER BOUNDS ON TRAJECTORY DEVIATIONS FOR AN AFFINE FAMILY OF DISCRETE-TIME SYSTEMS UNDER EXOGENOUS DISTURBANCES

M.V. Khlebnikov¹ and Ya.I. Kvinto²

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹✉ khlebnik@ipu.ru, ²✉ yanakvinto@mail.ru

Abstract. We propose a simple upper bound on trajectory deviations for an affine family of discrete-time systems under nonzero initial conditions subjected to bounded exogenous disturbances. It involves the design of a parametric quadratic Lyapunov function for the system. The apparatus of linear matrix inequalities and the method of invariant ellipsoids are used as technical tools. The original problem is reduced to a parametric semidefinite programming problem, which is easily solved numerically. Numerical simulation results demonstrate the relatively low conservatism of the upper bound. This paper continues the series of our previous publications on estimating trajectory deviations for linear continuous- and discrete-time systems with parametric uncertainty and exogenous disturbances. The results presented below can be extended to various robust formulations of the original problem and also the problem of minimizing trajectory deviations for an affine family of discrete-time control systems under exogenous disturbances via linear feedback.

Keywords: linear discrete-time system, trajectory deviations, parametric Lyapunov function, bounded exogenous disturbances, linear matrix inequalities, invariant ellipsoids.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ПРОХОДКИ С ТРЕМЯ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ БУРЕНИЯ НЕФТЕГАЗОВЫХ СКВАЖИН

А.А. Цуприков

Аннотация. Рассмотрены виды разрушения породы на забое при различных значениях нагрузки на долото, проанализированы известные отечественные и зарубежные модели скорости проходки. Выявлено, что как функции степенного вида они экстремумов не имеют, поэтому для оптимизации бурения непригодны. Кроме того, с их помощью можно оперативно управлять регулированием только одного параметра – нагрузки на долото. Построена математическая модель на базе кривой синусоиды, позволяющая одновременно управлять тремя параметрами режима бурения – осевой нагрузкой на долото, частотой его вращения и расходом бурового раствора для промывки скважины. Проверена адекватность модели процессу бурения, выполнена её программная реализация. Модель позволяет автоматически в ходе бурения распознавать породу на забое, адаптироваться под неё и вычислять параметры управления, оптимальные для разрушения проходимой породы. Модель предназначена для применения в интеллектуальной системе оптимального адаптивного управления бурением нефтегазовых скважин.

Ключевые слова: анализ математических моделей скорости бурения, экстремум функции, модель с тремя параметрами управления, оптимальное адаптивное управление, адекватность модели.

ВВЕДЕНИЕ

Основным буровым процессом при строительстве скважин является механическое разрушение породы долотом на забое, которое описывается уравнением механической скорости проходки v_m . На величину скорости бурения оказывают влияние многочисленные факторы – нагрузка на долото, крутящий момент на долоте, частота его вращения, расход и давление бурового раствора, реологические свойства раствора, литологические характеристики породы на забое и др.

На большом массиве промысловых и экспериментальных данных бурения М.Г. Бингхэм (США) подробно изучил функцию $v_m = f(\bar{G})$, где \bar{G} – удельная (т.е. приведённая к площади забоя $S_3 = \pi D_d^2/4$, D_d – диаметр долота) осевая нагрузка на долото [1, 2]. Он пришёл к выводу, что эта функция является степенной и унимодальной, а также имеет форму S-образной кривой, приведённой на рис. 1. Качественная связь функции с физико-механическими свойствами проходимого пласта породы и параметрами промывочной жидкости

также определена Бингхэмом. Отечественная и зарубежная практика бурения подтверждает эти выводы, см. работы [2 – 9] и др.

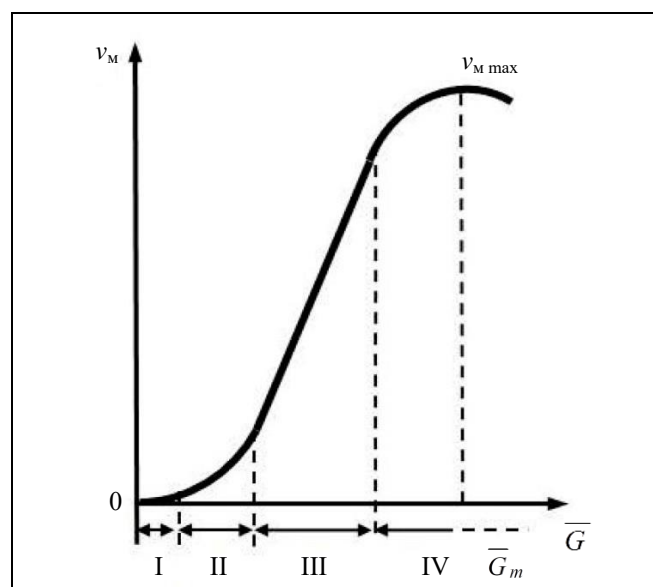


Рис. 1. S-образная кривая Бингхэма

Согласно М.Г. Бингхэму, функция скорости v_m имеет несколько зон:

- зона I – осевые нагрузки малы, разрушение породы несущественное, в виде поверхностного истирания, давление зубьев долота на породе меньше предела её прочности;
- зона II – контактное давление зубьев долота на забой возрастает, от породы откалываются небольшие кусочки, что приводит к заметному росту скорости v_m по нелинейному закону степенного вида;
- зона III – значение нагрузки G становится больше, чем предел прочности породы, это приводит к значительному объёмному разрушению породы по закону, близкому к линейному, но с наклоном, существенно большим, чем в зоне I;
- зона IV характеризуется тем, что промывочная жидкость не успевает выносить выбуренную

породу на поверхность, шлам оседает на забой и повторно перемалывается. При этом значение скорости v_m становится максимальным при осевой нагрузке G_m и затем уменьшается.

Математическая модель скорости бурения должна достоверно отражать описанные зоны разрушения породы и иметь экстремум для расчёта оптимальных значений режимных параметров. Важным также является определение состава управляющих параметров модели.

1. МОДЕЛИ БУРЕНИЯ

Для описания процесса разрушения породы разработано множество математических моделей скорости проходки, как в России, так и за рубежом [1–3, 5–8, 10–12]. Основные и наиболее характерные модели и формы кривых для механической скорости проходки приведены в табл. 1.

Таблица 1

Математические модели и графики изменения механической скорости бурения

Модели	Графики функций
<p>Модель ВНИИБТ [6, 7]</p> $v_m = k_b G^\delta n^\alpha,$ <p>где k_b – коэффициент буримости породы, зависит от типа долота, свойств породы и раствора; n – частота вращения долота, об/мин; δ, α – показатели, задающие крутизну кривой</p>	
<p>Модель А.А. Погарского [5–7]</p> $v_m = \frac{a n^\alpha \bar{G}^2}{1 + b^4 \bar{G}^4},$ <p>где a – коэффициент буримости; α – показатель, влияющий на крутизну кривой; b – коэффициент, зависящий от расхода раствора</p>	

См. окончание табл. 1

<p>Модель фирмы “Теннеко Oil Company”(США) [2, 7]</p> $v_m = \frac{k_6 (G - G_0) n^\alpha}{f(h)},$ <p>где G_0 – критическая нагрузка на долото, обеспечивающая внедрение зубьев в породу; $f(h)$ – функция, характеризующая состояние долота</p>	
<p>Модель Галле – Вудса – Лубинского (США) [2, 7]</p> $\frac{dh}{dt} = k_6 \frac{\bar{G}^\beta r}{[a(D_3)]^b},$ <p>где β – показатель степени при осевой нагрузке; r – функция, зависящая от оборотов n и рассчитываемая отдельно для пород разной твёрдости; $a(D_3)$ – функции износа вооружения долота; D_3 – степень относительного износа вооружения долота; b – показатель степени для функции $a(D_3)$;</p>	

Анализ показывает, что приведённые модели с различной степенью точности описывают работу долота преимущественно на линейном участке III кривой М.Г. Бингхэма, максимума не имеют, поэтому для оптимизации непригодны. Кроме того, в практике бурения управление скоростью проходки по этим моделям производится в основном путём регулирования только осевой нагрузки на долото G , а параметры n и Q принимаются в ходе рейса неизменными, что также не обеспечивает оптимальность режимов бурения.

Вклад осевой нагрузки на долото G в скорость проходки количественно составляет до 43 %, частоты вращения долота n – до 14 %, расхода бурового раствора Q – до 7 % [13], поэтому их обязательно следует учитывать при расчёте оптимальных параметров режимов бурения.

2. МОДЕЛЬ БУРЕНИЯ С ТРЕМЯ ПАРАМЕТРАМИ

Как уравнение регрессии, кривая М.Г. Бингхэма в виде функции $v_m = f(G)$ может быть представлена фрагментом синусоиды, сдвинутой в первый квадрант координатной плоскости (рис. 2), для че-

го нужно поднять график на единицу по оси y и сдвинуть его вправо на 1,57 рад по оси x .

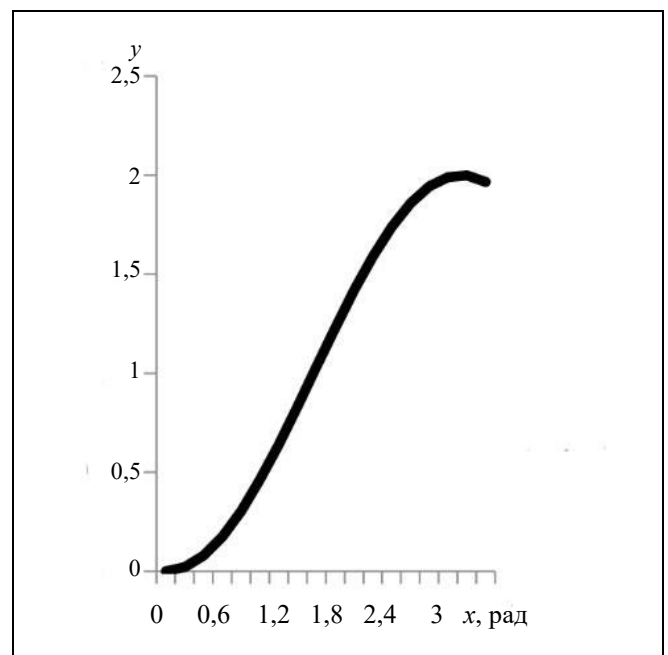


Рис. 2. График фрагмента синусоиды $\sin(x - \pi/2) + 1$, смещённой в I квадрант

Поскольку при рабочих режимах бурения, в зависимости от мощности бурового станка и глубины скважины осевая нагрузка на долото G изменяется в диапазоне от 0 до 40 Н, а величина скорости бурения может достигать 10–14 м/ч и выше [4–8, 10–12, 14], то для соответствия аргумента x величинам нагрузки на долото G , а функции y – реальной скорости бурения v_m их нужно перемасштабировать, для чего ввести в уравнение соответствующие коэффициенты:

– константу C_G , предназначенную для преобразования радианной меры измерения аргумента x в единицы измерения нагрузки на долото G , Н;

– коэффициент пропорциональности k_v , предназначенный для масштабирования функции y по вертикали.

В результате зависимость $v_m = f(G)$ примет вид

$$v_m = k_G \sin(C_G G - 1,57) + 1.$$

Согласно работам [3, 10–12] и др. функции $v_m = f(n)$ при $G = \text{const}$, $Q = \text{const}$ и $v_m = f(Q)$ при $G = \text{const}$, $n = \text{const}$ тоже являются унимодальными, их графики представлены на рис. 3 и также могут быть аппроксимированы фрагментами синусоиды.

Кривая $v_m = f(n)$ описывается уравнением $v_m = k_n \sin(C_n n)$, а кривая $v_m = f(Q)$ – уравнением $v_m = k_Q (\sin(C_Q Q - 0,7) + 0,645)$, где величины k_n , k_Q , C_n и C_Q имеют тот же смысл, что и k_G , C_G для кривой нагрузки на долото. Рабочий диапазон из-

менения частоты вращения долота для скважин находится в пределах от 10 до 120 об/мин, а расхода бурового раствора – от 20 до 80 л/сек [4 – 8, 10–12, 14].

Полная математическая модель скорости бурения $v_m = f(G, n, Q)$ как функция трёх параметров для оптимального управления процессом бурения содержит их произведение и имеет вид

$$v_m = k_v (\sin(C_G G - 1,57) + 1) \times \sin(C_n n) \times (\sin(C_Q Q - 0,7) + 0,645), \quad (1)$$

где $k_v = k_G k_n k_Q$ – общий коэффициент формы кривой, эквивалентный коэффициенту буримости проходимой долотом породы на забое.

Проверка достоверности полученной модели и её адекватности реальным условиям бурения проведена с использованием данных, содержащихся в буровых рапортах по законченным в Краснодарском крае скважинам Восточно-Прибрежная № 9, Песчаная № 7 и Крупская № 1 (на рис. 4 – скв. № 1, скв. № 2 и скв. № 3 соответственно). Средние отклонения экспериментальных данных от данных, определённых по модели (1), составили 12%, 13% и 23% соответственно, что является хорошим показателем, так как скважины бурились согласно проекту на бурение, а не на оптимальных режимах. Самые близкие к оптимальным результаты были получены на скважине Восточно-Прибрежная № 9 (скв № 1).

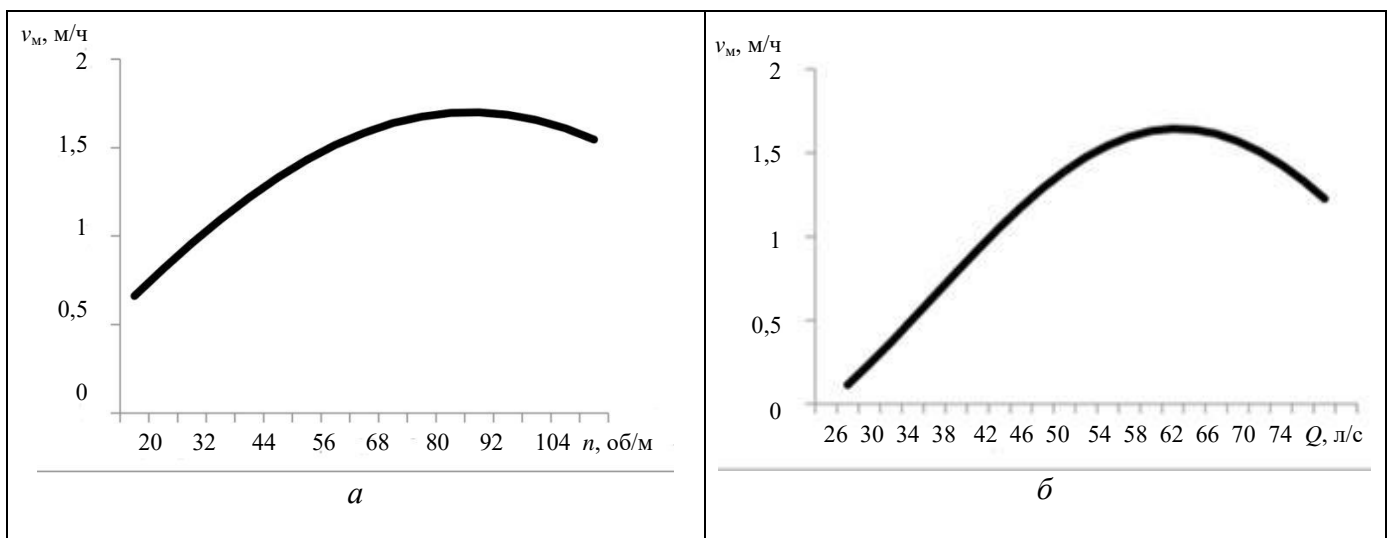


Рис. 3. Графики функций: а – $v_m = f(n)$; б – $v_m = f(Q)$

График функции (1), её составляющих и буровые данные трёх скважин приведены на рис. 4.

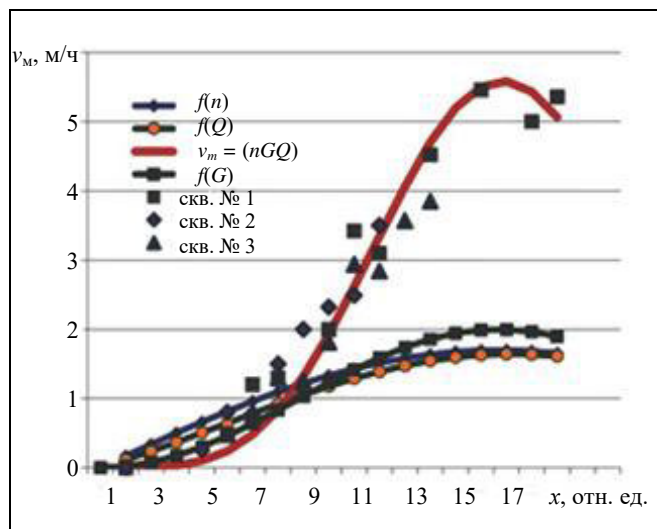


Рис. 4. Графики функций $v_m = f(G)$, $v_m = f(n)$, $v_m = f(Q)$, $v_m = f(n, G, Q)$

Для изображения четырёхмерной функции $v_m = f(G, n, Q)$ на двумерной плоскости координат аргумент функций x на рис. 4 представлен в относительных единицах, при этом $x = G$ для функции $v_m = f(G)$, $x = n/6$ для функции $v_m = f(n)$ и $x = Q/4$ для функции $v_m = f(Q)$.

В итоге можно сделать следующие выводы.

- Данные, полученные с пробуренных скважин, подтверждают, что модель бурения (1) достаточно точно, со средними погрешностями 12 – 23 % описывает процесс механического разрушения породы. При этом стоит учитывать, что бурение скважин проводилось на значениях параметров, рекомендованных проектами, которые составляются по результатам проводки соседних скважин, но для данной скважины они практически не являются оптимальными.
- В ходе бурения были достигнуты оптимальные режимы только на отдельных интервалах глубины, в основном, для скважины № 1.
- Опытные и модельные данные подтверждают, что кривая М.Г. Бингхэма имеет S-образную форму.

3. ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

Рекомендуется [15] использовать общепринятые статистические критерии для оценки адекватности и качества созданных математических моделей, которые позволяют быстро оценивать их основные параметры. Указанные рекомендации разработаны применительно к транспортным сетям,

но так как статистические критерии являются универсальными, то они могут быть применены к моделям любых процессов и объектов.

Согласно рекомендациям [15], для оценки моделей используются пять показателей:

- абсолютная средняя ошибка δ_a ;
- относительная средняя ошибка δ_p ;
- отклонение среднее квадратическое ϑ_a ;
- относительное отклонение среднее квадратическое ϑ_p ;
- коэффициент корреляции r .

В настоящее время пока не выработаны четкие значения этих критериев, при которых модель считается достоверной, но для практического применения рекомендовано, что относительные показатели не должны быть более 10 %, а коэффициент корреляции не должен быть менее 0,9 [15].

Значения критериев для модели (1) представлены в табл. 2.

Таблица 2

Значения критериев адекватности модели

Критерий	Скв. № 1	Скв. № 7	Скв. № 9
δ_a	0,33	0,16	0,38
δ_p	10,01 %	9,08 %	18,40 %
ϑ_a	2,02	0,93	1,21
ϑ_p	6,13 %	5,59 %	5,85 %
r	0,98	0,74	0,89

Результаты показывают, что модель хорошо коррелирует с буровыми процессами и пригодна для управления оптимальной проводкой скважин, коэффициент корреляции модели с буровыми данными близок к единице.

4. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Работа модели проверялась с помощью метода «брянских партизан» [16] – интеллектуального метода поиска глобальных экстремумов функции нескольких переменных. Суть метода такова: на первом этапе («разведка») область определения функции делится пополам по каждому аргументу, в каждой полученной зоне посредством генератора случайных чисел инициализируется до 30 агентов, находится экстремум каждой зоны и выбирается зона с наилучшим оптимумом. На втором этапе («диверсия») в выделенной зоне инициализируется до 500 агентов, рассчитываются их экстремумы и выбирается наилучший оптимум всей функции. Программа поиска экстремумов разработана на языке Python, запускалась при числе разбиений

зоны первого этапа от одной до четырёх, числе агентов этапа «разведки» от 10 до 50 и числе агентов этапа «диверсии» от 200 до 500, полученные результаты совпадают, один из вариантов расчёта максимума скорости бурения представлен на рис. 5.

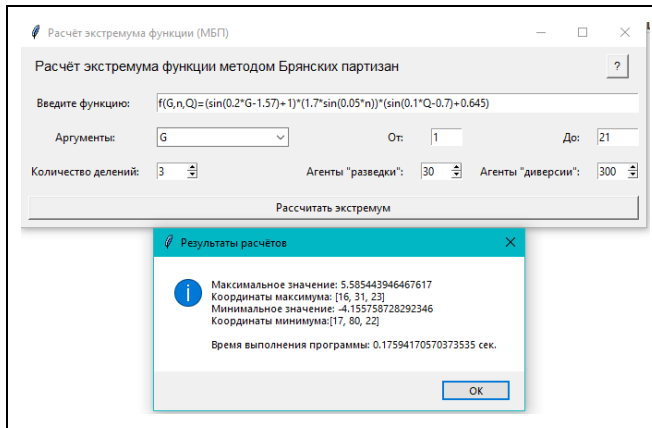


Рис. 5. Интерфейс программы поиска экстремумов

Результат расчёта – максимум механической скорости $v_{M \max} = 5,58$ м/ч – достигается при значениях параметров $G_{\text{опт}} = 16$ Н, $n_{\text{опт}} = 31$ об/м, $Q_{\text{опт}} = 23$ л/с, что соответствует реальным параметрам управления буровым процессам.

5. АДАПТИВНЫЙ СПОСОБ БУРЕНИЯ

Модель (1) предназначена для адаптивного способа оптимального управления бурением.

В статье [17] описана методика адаптации компьютерных систем к внешним воздействиям (вторжениям) через их классификацию, которая состоит из пяти модулей – этапов: обработка воздействия – входящих данных, их преобразование (автокодирование), поиск аналогов в базе данных (БД), классификация и обратная связь – выработка реакции системы на входные воздействия. Для процесса бурения данный принцип адаптации модифицирован и заключается в следующем:

– через выбранный шаг интервала проходки, например, через каждые 0,3 м проходки в модель вводятся текущие значения параметров бурения G , n , Q и полученная на них скорость проходки v_M ;

– пересчитываются величины коэффициентов модели k и C при введённых значениях G , n , Q и v_M тем самым модель адаптируется к породе на забое. При этом автоматически распознаётся тип проходимой долотом породы;

– по адаптированной модели рассчитываются оптимальные значения параметров $G_{\text{опт}}$, $n_{\text{опт}}$, $Q_{\text{опт}}$

(согласно критерию «максимум механической скорости $v_M = \max$ »);

– значения параметров $G_{\text{опт}}$, $n_{\text{опт}}$, $Q_{\text{опт}}$ устанавливаются на буровой и проводка следующего интервала в 0,3 м выполняется в оптимальном режиме.

Далее цикл ввода новых значений G , n , Q и v_M , распознавания породы и адаптации к ней модели, расчёта оптимальных параметров и бурения на них повторяется до достижения заданной проектом глубины скважины или износа долота. Преимущество данной методики заключается в том, что не требуется этап идентификации разбуриваемой на забое породы с имеющейся в литологической базе данных скважины и её классификация, тем более что порода может отсутствовать в БД.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Анализ основных известных моделей бурения показал, что они используют в основном линейный участок кривой М.Г. Бингхэма, регулируют только один параметр управления, экстремума не имеют, поэтому для оптимизации непригодны.

Новая модель бурения, построенная на базе кривой синусоиды, позволяет одновременно и оптимально управлять тремя буровыми параметрами – нагрузкой на долото, частотой его вращения и расходом бурового раствора, имеет общий для них экстремум, её достоверность подтверждена результатами, полученными на пробуренных скважинах, коэффициент корреляции модели с буровыми данными близок к единице.

Результаты расчёта оптимальных параметров с помощью компьютерной программы поиска экстремумов подтвердили пригодность модели для оптимального управления процессом бурения нефтегазовых скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bingham, M.G. A New Approach to Interpreting Rock Drillability, Petroleum Publishing Company, 1965.
2. Совершенствование технологии и оптимизация режимов бурения. – М.: МНП, ВНИИОЭНГ, сер. Бурение, 1970. – 172 с. [Sovershenstvovanie tekhnologii i optimizatsiya rezhimov bureniya. – М.: MNP, VNIIOEHNG, ser. Burenie, 1970. – 172 s. (In Russian)].
3. Козловский Е.А. Кибернетика в бурении / Е.А. Козловский, В.М. Питерский, М.А. Комаров. – М.: Недра, 1982. – 300 с. [Kozlovsky, E.A. Cybernetics in drilling / E.A. Kozlovsky, V.M. Petersky, M.A. Komarov. – М.: Nedra, 1982. – 300 p. (In Russian)]
4. Мусанов А.М. Техника и технология бурения нефтегазовых скважин: учебник. – М.: Фолиант, 2017. – 222 с. [Mu-



- sanov, A.M. Tekhnika i tekhnologiya bureniya neftegazovykh skvazhin: uchebnyk. – M.: Foliant, 2017. – 222 s. (In Russian)].
5. *Григулецкий В.Г.* Оптимальное управление при бурении скважин. – М.: Недра, 1988. – 227 с. [*Griguletskii, V.G.* Optimal'noe upravlenie pri burenii skvazhin. – M.: Nedra, 1988. – 227 s. (In Russian)].
 6. *Погарский А.А., Чефранов К.А., Шишкин О.П.* Оптимизация процессов глубокого бурения / А.А. Погарский, К.А. Чефранов, О.П. Шишкин. – М.: Недра, 1981. – 296 с. [*Pogarsky, A.A., Chefranov, K.A., Shishkin, O.P.* Optimization of deep drilling processes / A.A. Pogarsky, K.A. Chefranov, O.P. Shishkin. – M.: Nedra, 1981. – 296 p. (In Russian)].
 7. *Погарский, А.А.* Автоматизация процесса бурения глубоких скважин / А.А. Погарский. – М.: Недра, 1972. – 216 с. [*Pogarsky, A.A.* Automation of the process of drilling deep wells / A.A. Pogarsky. – M.: Nedra, 1972. – 216 p. (In Russian)].
 8. *Басарыгин Ю.М., Булатов А.И., Проселков Ю.М.* Бурение нефтяных и газовых скважин: учебное пособие / Ю.М. Басарыгин, – М.: Недра, 2002. – 631 с [*Basarygin, Yu.M. Bulatov, A.I., Proselkov, Yu.M.* Drilling of oil and gas wells: a textbook / Yu.M. Basarygin. – M.: Nedra, 2002. – 631 p. (In Russian)].
 9. *Sun, T., Fu, H.* Rheological Analysis of Soft Rock Unloading Combined with Finite Element Analysis Based on H-K Constitutive Model // *Hindawi Mathematical Problems in Engineering*. – Vol. 2022. – Article ID 8949590. – 7 p. – DOI: <https://doi.org/10.1155/2022/8949590>
 10. *Шмелев В.А., Сердобинцев Ю.П.* Повышение эффективности бурения скважин. 1 часть. Моделирование процесса разрушения горных пород при бурении скважин // *Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море: науч.-техн. журн.* – М.: ОАО «ВНИИОЭНГ». – 2020. – № 7 (331). – С. 5-12. [*Shmelev, V.A., Serdobintsev, Yu.P.* Improving the efficiency of drilling wells. 1 part. Modeling of the process of rock destruction during well drilling // *Construction of oil and gas wells on land and at sea: scientific and technical journal*. – M.: JSC «VNIIOENG», 2020. – № 7 (331). – P. 5–12. (In Russian)].
 11. *Irwan, S.* Optimization of Weight on Bit during Drilling Operation Based on Rate of Penetration Model / *Journal Universitas Pasir Pengaraian*. – 2012. – Vol. 4, no. 12. – P. 1690–1695.
 12. *Dupriest, F.E., and Koederitz, W.L.* Maximizing Drill Rates with Real-Time Surveillance of Mechanical Specific Energy / *Proceedings of the SPE/IADC Drilling Conference, Society of Petroleum Engineers, Amsterdam, The Netherlands, February 2005*.
 13. *Цуприков А.А.* Чувствительность показателей механического бурения к изменению параметров управления / А.А. Цуприков // *Научно-технические ведомости СПбГПУ*. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – № 3(80). – С. 131–134. [*Tsouprikov, A.A.* Chuvstvitel'nost' pokazatelei mekhanicheskogo bureniya k izmeneniyu parametrov upravleniya / A.A. Tsouprikov // *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPBGPU*. – SPb.: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2009. – № 3(80). – С. 131–134. (In Russian)].
 14. *Цуприков А.А.* Интеллектуальный буровой автомат для оптимального управления бурением нефтегазовых скважин / А.А. Цуприков. Автоматизация и информатизация ТЭК. – М.: Изд-во «Издательский дом «Губкин», 2022. – № 4(585). – С. 52–54. [*Tsouprikov, A.A.* Intelligent drilling machine for optimal control of drilling oil and gas wells / A.A. Tsouprikov. Automation and informatization of the fuel and energy complex. – M.: Publishing House «Gubkin», 2022. – № 4(585). – P. 52–54. (In Russian)].
 15. *Методические рекомендации по разработке и реализации мероприятий по организации дорожного движения* Использование программных продуктов математического моделирования транспортных потоков при оценке эффективности проектных решений в сфере организации дорожного движения. – М.: Минтранс РФ, 2017. – 72 с. [*Metodicheskie rekomendatsii po razrabotke i realizatsii meropriyatii po organizatsii dorozhnogo dvizheniya* Ispol'zovanie programmykh produktov matematicheskogo modelirovaniya transportnykh potokov pri otsenke ehffektivnosti proektnykh reshenii v sfere organizatsii dorozhnogo dvizheniya. – M.: Mintrans RF, 2017. – 72 s. (In Russian)].
 16. *Цуприков А.А.* Интеллектуальный метод поиска экстремума функции / А.А. Цуприков. *World Science: Problems and Innovations*. Сб. статей LXIV Международной научно-практической конференции. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – 2022. – С. 50–53. [*Tsouprikov, A.A.* Intellektual'nyi metod poiska ehkstreumuma funktsii / A.A. Tsouprikov. *World Science: Problems and Innovations*. Sbornik statei LXIV Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii. – Penza: MTSNS «Nauka i ProsveshcheniE». – 2022. – S. 50–53. (In Russian)].
 17. *Ugendhar, A., Illuri, B., Vulapula, S.R., et al.* A Novel Intelligent-Based Intrusion Detection System Approach Using Deep Multilayer Classification. – 2022. *Hindawi, Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2022, Article ID 8030510, – P. 1–10. – DOI: <https://doi.org/10.1155/2022/8030510>

Статья представлена к публикации членом редколлегии
Н.Н. Бахтмадзе.

Поступила в редакцию 31.05.2022,
Принята к публикации 11.07.2022.

Цуприков Александр Александрович – канд. техн. наук,
Кубанский государственный технологический университет,
г. Краснодар, ✉ tsouprikov@mail.ru.

A MATHEMATICAL MODEL OF MECHANICAL PENETRATION RATE WITH THREE CONTROL PARAMETERS TO OPTIMIZE OIL AND GAS WELL DRILLING

A.A. Tsouprikov

Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

✉ tsouprikov@mail.ru

Abstract. The types of rock destruction at the bottom hole under different loads on the drilling bit are considered, and well-known domestic and foreign models of the penetration rate are analyzed. As shown, they have no optima as power-type functions, being unsuitable for drilling optimization. In addition, they can be used for quick drilling control by adjusting only one parameter (the load on the bit). A mathematical model based on a sinusoid curve is constructed. This model allows the simultaneous control of three drilling mode parameters, namely, the axial load on the bit, its rotation frequency, and the mud flow rate for flushing the well. The adequacy of the model to the drilling process is verified, and its software implementation is performed. This model automatically recognizes the rock at the bottom hole during drilling, adapts to it, and calculates the optimal control parameters for destructing the traversed rock. The model is intended for an intelligent optimal adaptive control system for oil and gas well drilling.

Keywords: analysis of mathematical models of drilling rate, the optimum of a function, a model with three control parameters, optimal adaptive control, adequacy of the model.

ЛОГИКО-ЛИНГВИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫБОРА МАРШРУТА ДВИЖЕНИЯ БТС С МИНИМАЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АВАРИЙНЫХ СИТУАЦИЙ¹

А.Е. Городецкий, И.Л. Тарасова, В.Г. Курбанов

Аннотация. Формирование оптимальных законов управления движением беспилотных транспортных средств (БТС) на основе анализа сенсорных данных об окружении выбора, т. е. о параметрах окружающей среды и БТС, является неотъемлемой частью процесса формирования систем их ситуационного управления. Плохо предсказуемая изменчивость среды функционирования БТС и несовершенство средств измерений снижает возможность получения исчерпывающей информации о состоянии окружающей среды, что приводит к ситуации, когда принятие решения о маршруте движения с минимальными временем движения и вероятностью аварии производится в условиях неполной определенности. Одним из эффективных путей решения данной проблемы является использование логико-вероятностных и логико-лингвистических моделей и алгоритмов. Цель исследования заключается в разработке новых методов оптимизации маршрута движения БТС с учетом оценки вероятности аварии на основе логико-лингвистической классификации участков движения. Для достижения поставленной цели применяются следующие методы: создание строк параметров и характеристик эталонных участков движения и сопоставление их с логико-вероятностными и логико-лингвистическими параметрами и характеристиками классифицируемых участков маршрутов движения с учетом их значимости при принятии решения. На базе предложенных логико-вероятностных и логико-лингвистических методов после обработки сенсорных и статистических данных получены оценки вероятностей аварий, сформированы функционал и метод его минимизации, позволяющие повысить точность и скорость выбора оптимального маршрута движения БТС. Результаты исследований могут быть использованы в центральной нервной системе интеллектуальных роботов для классификации участков маршрутов движения, полученных на основе анализа сенсорных и статистических данных, что обеспечит повышение качества управления движением в условиях неполной определенности окружающей среды.

Ключевые слова: оптимизация, законы управления, вероятность аварии, сенсорные и статистические данные, атрибуты эталонов, логико-вероятностный и логико-лингвистический анализ и классификация.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время крайне востребованными становятся разработки беспилотных транспортных средств (БТС), в том числе беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [1, 2]. Направления развития разработок БТС определяются следующими ключевыми проблемами:

- 1) увеличение длительности автономной работы;
- 2) улучшение систем навигации;
- 3) увеличение полезной нагрузки;
- 4) повышение автономности на основе применения искусственного интеллекта.

Четвертая проблема в последнее время связывается в основном с использованием нейросетевых технологий [3–7], существенными недостатками которых являются противоречивые проблемы выбора достаточной обучающей выборки, не приводящей к переобучению нейронной сети, и пробле-

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Государственного задания по контракту № FFNF-2021-0008121112500304-4.

ма охвата наибольшего числа возможных ситуаций выбора при принятии решений [8]. Кроме того, при формировании принципов и алгоритмов управления учитываются проблемы информационной безопасности БТС [9], но не учитываются вопросы безопасности движения при выборе оптимальных маршрутов [10, 11]. Однако предотвращение аварийных ситуаций – это главный принцип работы систем управления движением БТС и других робототехнических устройств, способных передвигаться в автоматическом режиме [12]. Для реализации этого принципа необходимо разработать алгоритмы оценки вероятности аварии на маршруте движения и выбора наиболее безопасного маршрута с учетом имеющихся ограничений. Кроме того, при решении задачи управления движением нужно учитывать дополнительные сложности, связанные с необходимостью обеспечения координации между участниками движения, каждый из которых должен удовлетворять своим кинематическим уравнениям, а также существующим фазовым ограничениям, включая динамические ограничения [13, 14], обеспечивающие минимизацию вероятности столкновения и связанных с ним рисков.

Оценки рисков носят прогнозный характер, так как их неопределенность связана с влиянием множества факторов, которые не поддаются точной оценке. Неопределенность прогнозируемых рисков вызывает возникновение ситуаций, снижающих вероятность безаварийного движения БТС по маршруту.

При оценке рисков в условиях неопределенности используют качественные и количественные методы [15–17]. Причем при качественном подходе определяются возможные виды рисков аварий на рассматриваемом маршруте, а также определяются области возникновения и источники возможных рисков [18]. Далее такой подход может служить основой для получения количественных оценок рисков. При количественном подходе определяется численное значение как отдельных рисков на отрезках маршрута, так и на маршруте в целом [19, 20]. При этом обычно используются методы, основанные на теории вероятностей и математической статистики. В этом случае необходим анализ сценариев, в рамках которых моделируется и анализируется одновременное непротиворечивое изменение всех факторов на участках маршрута с учетом их взаимозависимости. При этом множество условий реализации алгоритмов управления БТС предполагает экспертное описание условий реализации управления либо в форме сценариев (например, пессимистический, оптимистический и

наиболее вероятный), либо в виде системы ограничений на значения основных параметров реализуемого маршрута и отвечающих им показателей, характеризующих вероятность аварии.

Реализация такого подхода требует использования экспертных оценок, получаемых путем применения сложных процедур [21], начиная с выбора количества и квалификации экспертов. Результаты многоэтапной процедуры обрабатываются методами статистики и качественного анализа. Для более полного анализа рисков применяются инструменты регрессионного и корреляционного анализа, а для детализации и анализа структурно сложных маршрутов – методы в рамках логико-вероятностного подхода [22].

При прогнозировании рисков с учетом ограниченности статистических данных целесообразно создание базы эталонных участков маршрута движения, содержащей качественные атрибуты участков и их экспертные количественные оценки в виде значений функций принадлежности указанных атрибутов и значений коэффициентов их значимости, как это предлагается при логико-лингвистической классификации [23]. Тогда при сценарном подходе, использующем методы теории нечетких множеств для вычисления значений функций принадлежности, возможно ранжирование совокупности сценариев реализации маршрута путем сопоставления его с эталонными маршрутами из базы данных [24]. При этом для оценки вероятности аварии на эталонных участках маршрута движения можно использовать имитационное компьютерное моделирование движения БТС в условиях неопределенности [25], генерирующее сотни возможных комбинаций аварийных ситуаций, и имеющиеся статистические данные. Тогда после анализа результатов моделирования и данных статистики можно получить распределения вероятностей аварий на эталонных участках движения и дать интегральную оценку эффективности управления и уровня интеллекта БТС [26] после выбора оптимального маршрута движения. В частности, такой подход был применен для определения вероятностей аварий на эталонных участках движения при формировании базы данных эталонов в предлагаемом логико-лингвистическом методе. При этом ставится задача разработки метода выбора системой автоматического управления (САУ) оптимального маршрута движения БТС в процессе его движения в условиях неопределенности с применением логико-лингвистических методов отнесения участков движения к тем или иным эталонным моделям, для которых ранее были определены оценки рисков или вероятностей возникновения аварийных ситуаций.



1. ЗАДАЧА РАНЖИРОВАНИЯ МАРШРУТОВ ДВИЖЕНИЯ

Обычно при решении задачи поиска наилучших сочетаний законов управления движением БТС требуется найти такое управление, которое обеспечивало бы минимизацию функционала

$$J_i = k_T T_i + k_R P_i,$$

где $T_i = t_{if} - t_{i0}$ – время перевода i -го ($i=1,2,\dots$) БТС, находящегося в момент времени t_0 в точке s_i окружающего ограниченного пространства $L^3 \subset E^3$, (E^3 – трехмерное евклидово пространство), в целевую точку f_i этого пространства к моменту времени t_f ; k_T – коэффициент значимости скорости достижения цели, значение которого устанавливается экспертом или группой экспертов; P_i – оценка вероятности аварии с участием i -го БТС при движении по маршруту за время T_i ; k_P – коэффициент значимости оценки вероятности аварии, значение которого устанавливается экспертом или группой экспертов.

В предлагаемом методе САУ БТС вначале необходимо определить время движения БТС на всех возможных маршрутах движения. Поэтому с учетом имеющихся логико-вероятностных, логико-лингвистических и других ограничений для вычисления произведения $J(R_v) = k_T T_i$ на каждом маршруте движения R_v , САУ БТС необходимо вычислить значение функционала [3]

$$J(R_v) = k_T \left(\sum_{i,j} a \frac{L_{ij}}{V_{ij}} + \sum_{i,j} b \frac{\Psi_{ij}}{W_{ij}} + \sum_{i,j} c \tau_{i,j} \right), \quad (1)$$

где a, b, c – коэффициенты предпочтения; V_{ij} – линейная и W_{ij} – угловая скорости движения, связанные с окружающей средой, – например, влажностью воздуха и температурой; τ_{ij} – время задержки на перекрестке, зависящее от типа и загрузки перекрестка, Ψ_{ij} – углы поворота на перекрестках; L_{ij} – длины участков между перекрестками.

Как показано в работе [23], значения (i,j) – это элемент упорядоченного множества, характеризующий рассматриваемый маршрут движения от начальной точки к конечной.

После вычисления значений функционала (1) для всех возможных маршрутов движения БТС из точки s_i в точку f_i они могут быть ранжированы по времени прибытия в точку f_i . Однако наиболее быстрый маршрут может оказаться и наиболее аварийно опасным. Поэтому следующим шагом в поиске оптимального маршрута движения должно быть ранжирование маршрутов R_v по вероятности аварии $P_i(R_v)$.

2. БАЗА ДАННЫХ ЭТАЛОНОВ УЧАСТКОВ ДВИЖЕНИЯ

В предлагаемом методе при определении вероятности аварии на маршрутах движения БТС и, соответственно, произведения $k_R P_i$ применяется алгоритм логико-лингвистической классификации участков маршрутов движения, т. е. отнесения анализируемого участка движения БТС к одному из эталонов. Этот алгоритм, как показано в работе [23], обладает высокой скоростью и эффективностью работы. Для его реализации в процессе разработки САУ БТС создается база данных эталонов участков движения, содержащая строки их параметров (атрибутов) и значения вероятности аварии на участке движения, определенные заранее на основе имитационного моделирования и статистических данных. При этом в строках атрибутов наличие какого-либо атрибута соответствует единице, а отсутствию – нулю.

Каждый маршрут содержит некоторое количество участков движения на перекрестке и участков движения между перекрестками. Поэтому в базе данных будут строки, характеризующие движение на перекрестке, и строки, характеризующие движение между перекрестками. Приведем пример эталонных строк из базы данных (табл. 1–8).

2.1. База данных эталонных строк для перекрестков

Таблица 1

Варианты проезда перекрестков

Строка базы данных	Вид перекрестка, направление движения	Вероятность аварии
$C_1 = /10000000000/$	┘ с проездом направо	$P_{C1} = 0,12$
$C_2 = /01000000000/$	┘ с проездом налево	$P_{C2} = 0,15$
$C_3 = /00100000000/$	┘ с проездом прямо	$P_{C3} = 0,13$
$C_4 = /00010000000/$	┘ с проездом направо	$P_{C4} = 0,11$
$C_5 = /00001000000/$	┘ с проездом прямо	$P_{C5} = 0,14$
$C_6 = /00000100000/$	┘ с проездом налево	$P_{C6} = 0,17$
$C_7 = /00000010000/$	┘ с проездом прямо	$P_{C7} = 0,18$
$C_8 = /00000001000/$	┘ с проездом направо	$P_{C8} = 0,16$
$C_9 = /00000000100/$	┘ с проездом налево	$P_{C9} = 0,20$
$C_{10} = /00000000010/$	┘ с проездом налево	$P_{C10} = 0,10$
$C_{11} = /00000000001/$	┘ с проездом направо	$P_{C11} = 0,09$

Таблица 2

Углы поворота

Строка базы данных	Угол и направление поворота	Вероятность аварии
$\Psi_1 = /100000000/$	-180° (налево)	$P_{\Psi_1} = 0,11$
$\Psi_2 = /010000000/$	-135° (налево)	$P_{\Psi_2} = 0,12$
$\Psi_3 = /001000000/$	-90° (налево)	$P_{\Psi_3} = 0,13$
$\Psi_4 = /000100000/$	-45° (налево)	$P_{\Psi_4} = 0,14$
$\Psi_5 = /000010000/$	0° (прямо)	$P_{\Psi_5} = 0,06$
$\Psi_6 = /000001000/$	$+45^\circ$ (направо)	$P_{\Psi_6} = 0,10$
$\Psi_7 = /000000100/$	$+90^\circ$ (направо)	$P_{\Psi_7} = 0,09$
$\Psi_8 = /000000010/$	$+135^\circ$ (направо)	$P_{\Psi_8} = 0,08$
$\Psi_9 = /000000001/$	$+180^\circ$ (направо)	$P_{\Psi_9} = 0,07$

Таблица 3

Угловые скорости

Строка базы данных	Угловая скорость, град./с	Вероятность аварии
$W_1 = /1000/$	2	$P_{W_1} = 0,10$
$W_2 = /0100/$	4	$P_{W_2} = 0,11$
$W_3 = /0010/$	6	$P_{W_3} = 0,12$
$W_4 = /0001/$	8	$P_{W_4} = 0,13$

Таблица 4

Число полос движения

Строка базы данных	Число полос движения	Вероятность аварии
$S_1 = /1000/$	1	$P_{S_1} = 0,10$
$S_2 = /0100/$	2	$P_{S_2} = 0,12$
$S_3 = /0010/$	3	$P_{S_3} = 0,13$
$S_4 = /0001/$	4	$P_{S_4} = 0,14$

2.2. База данных эталонных строк для участков движения между перекрестками

Таблица 5

Скорость движения

Строка базы данных	Скорость движения, м/с	Вероятность аварии
$V_1 = /1000/$	5	$P_{V_1} = 0,10$
$V_2 = /0100/$	10	$P_{V_2} = 0,11$
$V_3 = /0010/$	15	$P_{V_3} = 0,12$
$V_4 = /0001/$	20	$P_{V_4} = 0,13$

Таблица 6

Число полос движения

Строка базы данных	Число полос движения	Вероятность аварии
$S_1 = /1000/$	1	$P_{S_1} = 0,10$
$S_2 = /0100/$	2	$P_{S_2} = 0,12$
$S_3 = /0010/$	3	$P_{S_3} = 0,13$
$S_4 = /0001/$	4	$P_{S_4} = 0,14$

Таблица 7

Время суток

Строка базы данных	Время суток	Вероятность аварии
$T_1 = /10000/$	от 0 до 6 часов	$P_{T_1} = 0,10$
$T_2 = /01000/$	от 6 до 10 часов	$P_{T_2} = 0,13$
$T_3 = /00100/$	от 10 до 15 часов	$P_{T_3} = 0,15$
$T_4 = /00010/$	от 15 до 20 часов	$P_{T_4} = 0,14$
$T_5 = /00001/$	от 20 до 24 часов	$P_{T_5} = 0,20$

Таблица 8

Длина участка движения

Строка базы данных	Длина участка движения	Вероятность аварии
$L_1 = /10000/$	очень короткая, 200 м	$P_{L_1} = 0,10$
$L_2 = /01000/$	короткая, 400 м	$P_{L_2} = 0,12$
$L_3 = /00100/$	средняя, 600 м	$P_{L_3} = 0,13$
$L_4 = /00010/$	большая, 800 м	$P_{L_4} = 0,14$
$L_5 = /00001/$	очень большая, 1000 м	$P_{L_5} = 0,15$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ АВАРИИ НА МАРШРУТЕ ДВИЖЕНИЯ

Для ранжирования маршрутов R_i по вероятности аварии $P_i(R_i)$ САУ БТС для каждого анализируемого маршрута движения создает список входящих в них перекрестков. Затем для каждого из списка перекрестков сенсорная система САУ БТС определяет примерные значения их параметров, соответствующих атрибутам эталонных строк, и путем фаззификации этих значений определяет значения функций принадлежности к атрибутам соответствующих эталонных строк. После этого САУ БТС проводит классификацию анализируемых строк для перекрестков путем сопоставления их с эталонными строками из базы данных по алгоритму, описанному в работе [23], и присваивает значения вероятностей аварий, соответствующие выявленным эталонам, и далее вычисляет вероятности аварий на всех перекрестках и суммарную вероятность аварии на перекрестках по всему маршруту.

Например, некоторый анализируемый перекресток характеризуется следующими значениями параметров (атрибутов): вид \perp с проездом прямо; число полос движения 1; угол поворота 30° ; угловая скорость 5,6 град./с.

В этом случае характеризующая вид проезда перекрестка строка будет иметь вид /00001000000/ и в результате классификации с применением ло-



гико-лингвистического алгоритма [23] она будет отнесена к эталону C_5 , для которого вероятность аварии $P_{C_5} = 0,14$. Характеризующая число полос движения строка /1000/ будет классифицирована как эталон S_1 с вероятностью аварии $P_{S_1} = 0,10$. Характеризующая угол поворота строка после фаззификации примет вид /0 0 0 0 0,3 0,7 0 0 0/ и будет классифицирована как эталон Ψ_6 с вероятностью аварии $P_{\Psi_6} = 0,10$. Характеризующая угловую скорость строка после фаззификации примет вид /0 0,3 0,7 0 / и будет классифицирована как эталон W_3 с вероятностью аварии $P_{W_3} = 0,12$.

При проезде перекрестка возможны аварии либо при событии C_i ($i=1,2,\dots$), либо при Ψ_j ($j=1,2,\dots$), либо при W_q ($q=1,2,\dots$), либо при S_g ($g=1,2,\dots$), которым соответствуют вероятности аварий P_{C_i} , P_{Ψ_j} , P_{W_q} и P_{S_g} . Тогда в соответствии с правилами вычисления вероятности логической функции, логическая функция $F_{1,2,\dots,n}$ в алгебре Жегалкина [27] имеет вид:

$$F_{1,2,\dots,n} \leftrightarrow f_1 \oplus f_2 \oplus f_3 \oplus \dots \oplus f_n,$$

где $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ – логические функции или переменные (события); символ \oplus обозначает сложение по модулю 2, а символ \leftrightarrow – эквивалентность. В соответствии с изложенным в работе [24] вероятность аварии при проезде такого перекрестка ($n = 4$) будет равна

$$\begin{aligned} P = & (-2)^0(P_{C_i} + P_{\Psi_j} + P_{W_q} + P_{S_g}) + \\ & + (-2)^1(P_{C_i}P_{\Psi_j} + P_{C_i}P_{W_q} + P_{C_i}P_{S_g} + P_{\Psi_j}P_{W_q} + \\ & + P_{\Psi_j}P_{S_g} + P_{W_q}P_{S_g}) + (-2)^2(P_{C_i}P_{\Psi_j}P_{W_q} + \\ & + P_{C_i}P_{\Psi_j}P_{S_g} + P_{C_i}P_{W_q}P_{S_g} + P_{\Psi_j}P_{W_q}P_{S_g}) + \\ & + (-2)^3(P_{C_i}P_{\Psi_j}P_{W_q}P_{S_g}). \end{aligned} \quad (2)$$

При большом количестве логических функций ($n > 8$) можно, согласно изложенному в работе [24], воспользоваться приближенным вычислением вероятности, ограничившись 8–10 членами ряда. Если на маршруте движения будет N перекрестков, то для каждого из них аналогично с использованием фаззификации, классификации и формулы вида (2) вычисляются значения вероятностей аварии, а затем по формуле вида (2) вычисляется вероятность аварии на всех перекрестках маршрута P_N .

После этого для каждого анализируемого маршрута движения САУ БТС создает список входящих в них участков между перекрестками. Для каждого из списка участков между перекрестками сенсорная система САУ БТС определяет примерные значения их параметров, соответствующих атрибутам эталонных строк, и путем фаззификации этих значений определяет значения функций принадлежности к атрибутам соответствующих

эталонных строк. После этого САУ БТС проводит классификацию анализируемых строк для участков между перекрестками путем сопоставления их с эталонными строками из базы банных по алгоритму, описанному в работе [24], присваивает значения вероятностей аварий, соответствующие выявленным эталонам и далее вычисляет значения вероятностей аварий на всех участках между перекрестками и суммарную вероятность аварии на участках между перекрестками по всему маршруту.

Например, некоторый анализируемый участок между перекрестками характеризуется следующими значениями параметров (атрибутов): число полос движения 1; время проезда 8 часов; линейная скорость 12,7 м/с; протяженность 500 м.

В этом случае характеризующая число полос движения строка будет иметь вид /1000/ и будет классифицирована как эталон S_1 с вероятностью аварии $P_{S_1} = 0,10$. Характеризующая время проезда строка будет иметь вид /01000/ и будет классифицирована как эталон T_2 с вероятностью аварии $P_{T_2} = 0,13$. Характеризующая линейную скорость строка после фаззификации примет вид /0 0,45 0,55 0/ и будет классифицирована как эталон V_3 с вероятностью аварии $P_{V_3} = 0,12$. Характеризующая протяженность участка строка после фаззификации примет вид /0 0,5 0,5 0 / и в результате классификации может быть отнесена в равной степени к эталону L_2 с вероятностью аварии $P_{L_2} = 0,12$ или к эталону L_3 с вероятностью аварии $P_{L_3} = 0,13$. Поэтому вероятность аварии, связанной с протяженностью участка между перекрестками, будем оценивать по среднему значению $(P_{L_2} + P_{L_3})/2 = 0,125$.

При проезде участка между перекрестками возможны аварии либо при событии T_i ($i=1,2,\dots$) либо при V_j ($j=1,2,\dots$), либо при L_q ($q=1,2,\dots$), либо при S_g ($g=1,2,\dots$), которым соответствуют вероятности аварий P_{T_i} , P_{V_j} , P_{L_q} и P_{S_g} . Тогда в соответствии с изложенным в работе [12] вероятность аварии при проезде такого перекрестка ($n = 4$) будет равна

$$\begin{aligned} P = & (-2)^0(P_{T_i} + P_{V_j} + P_{L_q} + P_{S_g}) + \\ & + (-2)^1(P_{T_i}P_{V_j} + P_{T_i}P_{L_q} + P_{T_i}P_{S_g} + P_{V_j}P_{L_q} + \\ & + P_{V_j}P_{S_g} + P_{L_q}P_{S_g}) + (-2)^2(P_{T_i}P_{V_j}P_{L_q} + \\ & + P_{T_i}P_{V_j}P_{S_g} + P_{T_i}P_{L_q}P_{S_g} + P_{V_j}P_{L_q}P_{S_g}) + \\ & + (-2)^3(P_{T_i}P_{V_j}P_{L_q}P_{S_g}). \end{aligned} \quad (3)$$

Если на маршруте движения будет M участков между перекрестками, то для каждого из них аналогично с использованием фаззификации, классификации и формулы вида (3) вычисляются значе-

ния вероятностей аварии, а затем по формуле вида (3) вычисляется вероятность аварии P_M на всех участках между перекрестками маршрута.

Далее производится вычисление вероятности аварии на всех анализируемых маршрутах R_v по формуле

$$P(R_v) = P_N(R_v) + P_M(R_v) - 2 P_N(R_v) P_M(R_v).$$

4. РАНЖИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ МАРШРУТОВ ДВИЖЕНИЯ

В связи с неполной определенностью окружающей среды при движении БТС по анализируемому маршруту при вычислении функционала (1) необходимо учитывать ограничения, описываемые в виде логико-вероятностных и логико-лингвистических уравнений по модулю 2 [25]. Эти ограничения, как показано в работе [14], можно свести к логико-интервальным. В этом случае для каждого анализируемого маршрута R_v будут получены два значения функционала (1), $\min J(R_v)$ и $\max J(R_v)$. Поэтому выбрав значения коэффициента k_p , в целях ранжирования маршрутов R_v нужно для каждого маршрута вычислить по два значения функционалов:

$$\min J_v = \{\min\{k_T J_T(R_v)\} + \min\{k_P P(R_v)\}\}; \quad (6)$$

$$\max J_v = \{\max\{k_T J_T(R_v)\} + \max\{k_P P(R_v)\}\}. \quad (7)$$

Обычно значения $\min\{k_P P(R_v)\}$ и $\max\{k_P P(R_v)\}$ совпадают, а $\min\{k_T J_T(R_v)\}$ и $\max\{k_T J_T(R_v)\}$ – нет. Поэтому ранжирование проводят по минимуму и максимуму или по среднему значению:

$$J_v = 1/2(\max J_v + \min J_v).$$

При этом выбор оптимального маршрута движения БТС может зависеть от мнения эксперта или группы экспертов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выборе оптимального маршрута движения беспилотных транспортных средств необходимо исходить из условия минимизации вероятности возникновения аварийных ситуаций. Для этого разрабатываются различные алгоритмы оценок рисков аварий на каждом этапе планирования маршрута движения с учетом «воспринимаемого» на нем участка местности.

Оценки рисков носят прогнозный характер, так как их неопределенность связана с влиянием множества факторов, которые не поддаются точным

математическим описаниям. Поэтому при создании базы данных эталонов участков движения численные значения вероятностей аварий на эталонных участках определяются на этапе проектирования САУ БТС путем использования имитационного моделирования и статистических данных. При этом прогнозирование рисков аварии при ограниченности статистических данных целесообразно осуществлять с применением логико-лингвистических и логико-вероятностных методов, для реализации которых создаются базы данных эталонных участков маршрута движения, содержащих качественные атрибуты участков и полученные после моделирования значения вероятностей аварий.

При определении САУ БТС вероятности аварии на маршруте движения сенсорная система САУ БТС определяет количественные значения атрибутов на участках движения. Далее путем их фаззификации система определяет значения функций принадлежности для указанных атрибутов и создает из них строки, аналогичные эталонным строкам из базы данных. Затем САУ БТС находит для каждого анализируемого участка движения наиболее близкую эталонную строку из базы данных и присваивает анализируемому участку значение вероятности аварии, соответствующее выбранному эталону. Используя полученные значения вероятностей аварий на участках движения, САУ БТС вычисляет вероятность аварии на всем маршруте с использованием правил вычисления вероятности логических функций «либо».

При выборе оптимального маршрута движения необходимо соблюдать компромисс между временем движения по маршруту и вероятностью аварии и осуществлять поиск минимума функционала, представляющего собой сумму времени движения, умноженного на установленный коэффициент значимости, и вероятности аварии, также умноженной на установленный коэффициент значимости. Указанные коэффициенты значимости устанавливаются экспертами и заносятся в базу данных САУ БТС на этапе ее формирования. Обычно вычисленный функционал имеет интервальное значение, поэтому выбор оптимального маршрута будет зависеть от предпочтений эксперта.

Рассмотренные задачи потребуют, наряду с применением традиционных подходов, использования технологий искусственного интеллекта при определении вероятностей аварий на эталонных участках. Подчеркнем, что ранее задачи поиска оптимальных маршрутов рассматривались только ограниченно и вероятности возникновения аварийных ситуаций не учитывались.



ЛИТЕРАТУРА

1. *Евтодьева М.Г., Целицкий С.В.* Беспилотные летательные аппараты военного назначения: тенденции в сфере разработок и производства // Пути к миру и безопасности. — 2019. — № 2 (57). — С. 104–111. [*Evtod'eva, M.G., Celickij, S.V.* Bepilotnye letatel'nye apparaty voennogo naznacheniya: tendencii v sfere razrabotok i proizvodstva // Puti k miru i bezopasnosti. — 2019. — № 2 (57). — S. 104–111. (In Russian)]
2. *Divis, D.A.* Military UAV Market to Mop \$83B // Inside Unmanned Systems. 24.04.2018. URL: <http://insideunmannedsystems.com/military-uav-market-to-top-83b>.
3. *Li, C.* Artificial Intelligence Technology in UAV Equipment // 2021 IEEE/ACIS 20th International Fall Conference on Computer and Information Science (ICIS Fall). — Xi'an, China, 2021. — P. 299–302. — DOI: 10.1109/ICISFall51598.2021.9627359.
4. *Xia, C. and Yudi, A.* Multi — UAV Path Planning Based on Improved Neural Network // 2018 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). — Shenyang, China, 2018. — P. 354–359. — DOI: 10.1109/CCDC.2018.8407158.
5. *Varatharasan, V., Rao, A.S.S., Toutounji, E., et al.* Target Detection, Tracking and Avoidance System for Low-cost UAVs using AI-Based Approaches // 2019 Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED UAS). — Cranfield, UK, 2019. — P. 142–147. — DOI: 10.1109/REDUAS47371.2019.8999683.
6. *Zheng, L., Ai, P., and Wu, Y.* Building Recognition of UAV Remote Sensing Images by Deep Learning // IGARSS 2020 - 2020 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. — Waikoloa, HI, USA, 2020. — P. 1185–1188. — DOI: 10.1109/IGARSS39084.2020.9323322.
7. *Zhang, Y., McCalmon, J., Peake, A., et al.* A Symbolic-AI Approach for UAV Exploration Tasks // 2021 7th International Conference on Automation, Robotics and Applications (ICARA). — Prague, Czech Republic, 2021. — P. 101–105. — DOI: 10.1109/ICARA51699.2021.9376403.
8. *Аггарвал Ч.* Нейронные сети и глубокое обучение: учебный курс. Пер. с англ. — СПб.: Диалектика, 2020. — 752 с. [*Aggarwal, C.* Neural Networks and Deep Learning. A Textbook. — Springer International Publishing, 2018.]
9. *Kim, H., Ben-Othman, J., Mokdad, L., et al.* Research Challenges and Security Threats to AI-Driven 5G Virtual Emotion Applications Using Autonomous Vehicles, Drones, and Smart Devices // IEEE Network. — 2020. — Vol. 34, no. 6. — P. 288–294. — DOI: 10.1109/MNET.011.2000245.
10. *Ким М.Л., Костеренко В.Н., Певзнер Л.Д. и др.* Система автоматического управления тракторным движением шахтного беспилотного летательного аппарата // Горная промышленность. — 2019. — № 3 (145). — С. 60–64. [*Kim, M.L., Kosterenko, V.N., Pevzner, L.D., et al.* Sistema avtomaticheskogo upravleniya traktornym dvizheniem shakhtnogo bepilotnogo letatel'nogo apparata // Gornaya promyshlennost'. — 2019. — № 3 (145). — S. 60–64 (In Russian)]
11. *Кутахов В.П., Мещеряков Р.В.* Управление групповым поведением беспилотных летательных аппаратов: постановка задачи применения технологий искусственного интеллекта // Проблемы управления. — 2022. — № 1. — С. 67–74. [*Kutahov, V.P., Meshcheryakov, R.V.* Group Control of Unmanned Aerial Vehicles: A Generalized Problem Statement of Applying Artificial Intelligence Technologies // Control Sciences. — 2022. — No. 1. — P. 55–60. — DOI: <http://doi.org/10.25728/cs.2022.1.5>]
12. *Долгий П.С., Немыкин Г.И., Думитраш Г.Ф.* Беспилотное управление транспортными средствами // Молодой ученый. — 2019. — № 8.2 (246.2). — С. 13–15. [*Dolgiy, P.S., Nemykin, G.I., Dumitrash, G.F.* Bepilotnoe upravlenie transportnymi sredstvami // Molodoi uchenyi. — 2019. — No. 8.2 (246.2). — S. 13–15. (In Russian)]
13. *Власов С.М., Бойков В.И., Быстров С.В., Григорьев В.В.* Бесконтактные средства локальной ориентации роботов. — СПб.: Университет ИТМО, 2017. — 169с. [*Vlasov, S.M., Boikov, V.I., Bystrov, S.V., Grigor'ev, V.V.* Beskontaktnye sredstva lokal'noi orientatsii robotov. — SPb.: Universitet ITMO, 2017. — 169s. (In Russian)]
14. *Gorodetskiy A.E., Tarasova I.L., Kurbanov V.G.* Reduction of Logical-Probabilistic and Logical-Linguistic Constraints to Interval Constraints in the Synthesis of Optimal SEMS / In: Smart Electromechanical Systems. Group Interaction. Eds. Gorodetskiy Andrey E., Tarasova Irina L. / Studies in Systems, Decision and Control. — Springer International Publishing, 2019. — Vol. 174. — P. 77–90. — DOI:10.1007/978-3-319-99759-9_7.
15. *Москвин В.А.* Риски инвестиционных проектов. — М.: Курс: ИНФРА-М, 2016. — 320 с. [*Moskvin, V.A.* Riski investitsionnykh proektov. — M.: Kurs: INFRA-M, 2016. — 320 s. (In Russian)]
16. *Решетняк Е.И.* Методы оценки инвестиционных рисков в бизнес-планировании // БИЗНЕС ИНФОРМ. — 2017. — №12. — С.189–194. [*Reshetnyak, E.I.* Metody otsenki investitsionnykh riskov v biznes-planirovanii // BIZNES INFORM. — 2017. — №12. — S.189–194. (In Russian)]
17. *Попова А.Ю.* Оценка риска инвестиционного проекта. // Научный журнал КубГАУ. — 2006. — №19. — С. 73–98. [*Popova, A.Yu.* Otsenka riska investitsionnogo proekta. // Nauchnyi zhurnal KuBGU. — 2006. — №19. — S. 73–98. (In Russian)]
18. *Кулик Ю. А., Волович В. Н., Привалов Н. Г., Козловский А. Н.* Классификация и качественная оценка рисков инновационных проектов // Записки Горного института. — 2012. — Т. 197. — С.124–128. [*Kulik, Yu.A., Volovich, V.N., Privalov, N.G., Kozlovskii, A.N.* Klassifikatsiya i kachestvennaya otsenka riskov innovatsionnykh proektov // Zapiski Gornogo instituta. — 2012. — Vol. 197. — S.124–128. (In Russian)]
19. *Ведмедь И.Ю.* Анализ количественных методов оценки рисков инвестиционных проектов // «Вероятностные математические модели экономических процессов»: XII конференция «Российские регионы в фокусе перемен»: Сборник трудов. — Екатеринбург, 2017. — С. 52–61. [*Vedmed', I.Yu.* Analiz kolichestvennykh metodov otsenki riskov investitsionnykh proektov // «Veroyatnostnye matematicheskie modeli ehkonomicheskikh protsessov»: XII konferentsiya «Rossiiskie regiony v fokuse peremen»: Sbornik trudov. — Ekaterinburg, 2017. — S. 52–61. (In Russian)]
20. *Королькова Е.М.* Риск-менеджмент: управление проектными рисками. — Тамбов: ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. — 159 с. [*Korol'kova, E.M.* Risk-menedzhment: upravlenie proektnymi riskami. — Tambov: FGBOU VPO «TGTU», 2013. — 159 s. (In Russian)]
21. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. — М.: Наука, 1974. — 256 с. [*Mirkin, B.G.* Problema gruppovogo vybora. — M.: Nauka, 1974. — 256 s. (In Russian)]
22. *Соложенцев Е.Д.* Управление риском и эффективностью в экономике: логико-вероятностный подход. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. — 242 с. [*Solozhentsev, E.D.* Upravlenie riskom i ehffektivnost'yu v ehkonomike: logiko-veroyatnostnyi podkhod. — SPb.:Izd-vo SPBGU, 2009. — 242 s. (In Russian)]

23. Gorodetskiy, A.E., Tarasova, I.L., Kurbanov, V.G. Classification of Images in Decision Making in the Central Nervous System of SEMS / In: Smart Electromechanical Systems. Behavioral Decision Making. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Irina L. Tarasova / Studies in Systems, Decision and Control. – Springer Nature Switzerland AG, 2021. – Vol. 352. – P. 187–196. – DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-030-68172-2-15>
24. Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л. Способ классификации изображений: Патент РФ № 2756778. Зарег. 05.10.2021. [Gorodetskiy, A.E., Kurbanov, V.G., Tarasova, I.L. Sposob klassifikatsii izobrazhenii. Patent RF no. 2756778. Registered 05.10.2021. (In Russian)]
25. Городецкий А.Е., Тарасова И.Л. Нечеткое математическое моделирование плохо формализуемых процессов и систем. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. — 335 с. [Gorodetskiy, A.E., Tarasova, I.L. Nechetkoe matematicheskoe modelirovanie plokho formalizuemyykh protsessov i sistem. — SPb.: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2010. — 335 с. (In Russian)]
26. Gorodetskiy, A.E., Tarasova, I.L., Kurbanov, V.G. Assessment of UAV Intelligence Based on the Results of Computer Modeling/ In: Smart Electromechanical Systems. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Irina L. Tarasova / Studies in Systems, Decision and Control. – Springer Nature Switzerland AG, 2022. – Vol. 419. – P. 105-116. – DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-030-97004-8_8.
27. Жегалкин И.И. Арифметизация символической логики // Математический сборник. — 1928. — Т. 35. — Вып. 3–4. — С. 311–377. [Zhegalkin, I.I. Arifmetizatsiya simvolicheskoi logiki // Matematicheskii sbornik. — 1928. — Vol. 35, iss. 3–4. — S. 311–377. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.В. Мецераковым.

*Поступила в редакцию 20.04.2022,
после доработки 23.08.22.
Принята к публикации 5.09.2022.*

Городецкий Андрей Емельянович – д.т.н.,
✉ g27764@yandex.ru

Тарасова Ирина Леонидовна – к.т.н., ✉ g17265@yandex.ru

Курбанов Вугар Гариб оглы – к.ф.-м.н.,
✉ vugar_borchali@yahoo.com

Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург



A LOGICAL-LINGUISTIC ROUTING METHOD FOR UNMANNED VEHICLES WITH THE MINIMUM PROBABILITY OF ACCIDENTS

A.E. Gorodetskiy¹, I.L. Tarasova², and V.G. Kurbanov³

Institute for Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia

¹✉ g27764@yandex.ru, ²✉ g17265@yandex.ru, ³✉ vugar_borchali@yahoo.com

Abstract. Forming optimal motion control laws for unmanned vehicles (UVs) by analyzing sensory data about the choice environment is an integral part of designing their situational control systems. The weakly predictable variability of the UV operating environment and the imperfection of measuring means reduce the possibility of obtaining comprehensive information about the environment state. Therefore, routing to minimize travel time and the probability of an accident is performed under uncertainty. An effective way to solve this problem is using logical-probabilistic and logical-linguistic models and algorithms. This paper is intended to develop new optimal routing methods for UVs with estimating the probability of an accident based on the logical-linguistic classification of route segments. For this purpose, the rows of parameters and characteristics of reference route segments are created and compared with the logical-probabilistic and logical-linguistic parameters and characteristics of classified route segments considering their significance for routing. After processing sensory and statistical data, the proposed logical-probabilistic and logical-linguistic methods are used to estimate the probabilities of accidents and minimize a performance criterion. As a consequence, the accuracy and speed of optimal routing for UVs are both increased. The results of this research can be used in the central nervous system of intelligent robots to classify route segments obtained by analyzing sensory and statistical data, which will improve the quality of motion control in an uncertain environment.

Keywords: optimization, control laws, the probability of an accident, sensory and statistical data, the attributes of reference route segments, logical-probabilistic and logical-linguistic analysis and classification.

Funding. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the State order under contract No. FFNF-2021-00081281112500304-4.



XVI МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ» (КОНФЕРЕНЦИЯ ПЯТНИЦКОГО)

С 1 по 3 июня 2022 г. в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН состоялась очередная XVI Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). Конференция была организована ИПУ РАН при информационной поддержке IEEE Russia Section. Председатель Оргкомитета конференции – главный научный сотрудник лаборатории «Динамики нелинейных процессов управления им. Е.С. Пятницкого» ИПУ РАН *В.Н. Тхай*.

Конференция была посвящена представлению и обсуждению новых результатов, полученных российскими и зарубежными учеными в рамках следующих научных направлений:

- общие вопросы теории устойчивости и стабилизации движения;
- общие вопросы и методы теории нелинейных колебаний;
- методы функций Ляпунова;
- гладкая и негладкая динамика;
- вопросы управляемости и наблюдаемости;
- проблемы робастного управления;
- управление в механических и электромеханических системах;
- управление роботами и мехатронными системами;
- колебания, устойчивость и стабилизация в сетевых и взаимосвязанных системах;
- устойчивость и управление гибридными системами и системами с переключениями.

Конференция была проведена в формате онлайн с использованием российского программного обеспечения для видеоконференцсвязи. В течение трех дней состоялись 14 заседаний, включая две пленарные сессии. На конференции были представлены четыре пленарных и 137 секционных докладов. В мероприятии приняли участие ученые из Армении, Германии, Казахстана, Киргизии, России, Узбекистана, Франции. Ученые из России представляли научные организации и университеты из 19 городов.

На первом пленарном заседании 1 июня были представлены два доклада. С первым докладом выступил *С. Дашковский* из Института математики университета Вюрцбурга (Германия). Доклад был посвящен концепции устойчивости от входа к состоянию. Была представлена история возникновения этого понятия как естественного расширения классической устойчивости по Ляпунову на системы со входом. Были представлены различные примеры применения концепции, в рамках которой развивалась теория систем с малым коэффициентом усиления. Было отмечено, что теория устойчивости от входа к состоянию для конечномерных систем к настоящему времени приобрела заверченный вид. Был приведен обзор современных результатов по обсуждаемой теории, в частности, расширение теории на системы с запаздыванием, гибридные системы и системы с переключениями, бесконечномерные системы. В заключение были представлены некоторые открытые проблемы теории.

Второй доклад этого пленарного заседания назывался «Выбор обратной связи в задачах управления как задача оптимизации», его авторы – *Б.Т. Поляк* и *М.В. Хлебников* (ИПУ РАН, МФТИ). В работе обсуждался подход к линейным системам управления с точки зрения оптимизации. Так, в классической задаче о линейно-квадратичном регуляторе можно рассматривать матрицу линейной обратной связи как переменную и свести проблему к минимизации показателя качества по этой переменной; этот подход восходит к работам Р. Калмана середины прошлого века. Помимо линейно-квадратичной задачи, с этих же позиций в докладе рассматривались задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений путем построения статической линейной обратной связи по выходу, а также при помощи динамической обратной связи по выходу с использованием наблюдателя. Для каждой из трех рассматриваемых задач был выписан градиентный метод отыскания обратной связи и дано его обоснование. Был приведен ряд примеров, включающих в себя простой и двойной маятники.



Второе пленарное заседание, прошедшее 2 июня, также включало два доклада. Первый доклад под названием «Теория однородных динамических систем и ее приложения» представил *Д. Ефимов* из Национального исследовательского института цифровых наук и технологий (Лилль, Франция). В докладе был дан обзор теории однородных динамических систем с кратким описанием новых результатов и разработок для различных классов моделей, в том числе задаваемых уравнениями с запаздыванием или дифференциальными уравнениями в частных производных, системами с дискретным временем. Объяснялись связи однородности со сходимостью за конечное или фиксированное время и устойчивостью от входа к состоянию.

Во втором докладе «Притягивающий цикл в управляемой механической системе» *В.Н. Тхай* (ИПУ РАН) рассказал о стабилизации колебания управляемой механической системы посредством конструирования орбитально асимптотически устойчивого цикла. В докладе был изложен общий принцип стабилизации консервативных систем произвольной природы с помощью управляющих воздействий, которые формируются на основе сигналов генератора автоколебаний. В системе управления, рассматриваемой как связанная система, в качестве генератора применяется осциллятор Ван дер Поля, который односторонней связью-управлением действует на механическую систему, допускающую семейство невырожденных колебаний. Система управления состоит из электрической и механической частей: получается мехатронная схема стабилизации колебаний, в которой притяжение к циклу обеспечивается в большом.

Программа секционных заседаний была построена в соответствии с научными направлениями конференции.

На заседаниях, посвященных общим вопросам теории устойчивости и стабилизации движения рассматривались как теоретические задачи, так и задачи, связанные с управлением, устойчивостью и стабилизацией конкретных объектов, например, задачи управления в математической модели мозгового кровотока (*А.Е. Голубев*, ИПМех РАН), модели распространения ВИЧ-инфекции (*А.Н. Канатников*, МГТУ им. Н.Э. Баумана, *О.С. Ткачева*, ИПУ РАН), модели рынков (*А.М. Котюков*, ИПУ РАН, *Н.Г. Павлова*, РУДН) и др. Среди теоретических задач можно выделить применение аппарата теории матричных неравенств для исследования устойчивости (*В.А. Каменецкий*, ИПУ РАН), задачи исследования устойчивости периодических разностных включений (*М.В. Морозов*, ИПУ РАН),

задачи устойчивости и стабилизации систем с запаздыванием (*А.Ю. Александров*, СПбГУ), задачи оценки состояния непрерывной системы по дискретным наблюдениям (*А.И. Маликов*, КНИТУ-КАИ) и др.

Задачи управления и устойчивости колебаний были рассмотрены на заседаниях секции теории нелинейных колебаний и секции колебаний, устойчивости и стабилизации в сетевых и взаимосвязанных системах. Среди объектов исследований – гамильтоновы системы при различных резонансах (*О.В. Холостова*, МАИ), автоколебания аэродинамического маятника (*Д.В. Беляков*, МАИ), хаотические и периодические аттракторы (*И.М. Буркин*, ТулГУ; *Н.В. Кузнецов* и *Т.Н. Мокаев*, СПбГУ), а также связанные консервативные системы (*И.Н. Барабанов*, *В.Н. Тхай*, ИПУ РАН), многоагентные системы (*Р.П. Агаев*, *Д.К. Хомутов*, ИПУ РАН) и др.

Большая группа докладов была посвящена задачам управления в механических, электромеханических и мехатронных системах. Рассматривались задачи управления колебаниями струны (*В.Р. Барсегян*, Ереванский государственный университет, *С.В. Солoduша*, ИСЭМ СО РАН), задачи стабилизации вращений искусственного спутника Земли (*А.Ю. Александров*, *А.А. Тихонов*, СПбГУ), задачи управления различными роботами-манипуляторами (*Ю.Ф. Долгий*, *И.А. Чупин*, УрФУ; *В.А. Соболев*, *Е.А. Щепаккина*, ФИЦ ИУ РАН и СамГУ; *А.С. Андреев*, *О.А. Перегудова*, УлГУ и др.), а также были рассмотрены задачи оптимального управления для механических систем, в частности, оптимальное гашение колебаний гибкого ротора в электромагнитных подшипниках (*Д.В. Баландин*, *Р.С. Бирюков*, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; *М.М. Коган*, ННГАСУ), задача оптимального по быстродействию перемещения платформы с осцилляторами (*О.Р. Каюмов*, Филиал ОмГПУ, г. Тара) и др.

В отдельное заседание были выделены доклады, посвященные различным задачам управления для космических аппаратов и беспилотных летательных аппаратов. В частности, рассматривались задачи управления космическим роботом-манипулятором (*Е.И. Сомов*, *С.А. Бутырин*, *С.Е. Сомов*, СамГТУ), задачи управления ориентацией спутника (*Е.И. Сомов*, *С.А. Бутырин*, *Т.Е. Сомова*, СамГТУ), задачи управления движением космического аппарата с солнечным парусом (*Е.Н. Поляхова*, *В.С. Королев*, СПбГУ; *А.В. Родников*, МАИ; *Д.В. Шиманчук*, *А.С. Шмыров*, *В.А. Шмыров*, СПбГУ); для беспилотных квадрокоптеров рассматривались задачи планирования траектории, ее стабилизации, управления ориента-

цией аппарата (В.А. Александров, И.Г. Резков, ИПУ РАН; А.И. Глуценко, К.А. Ласточкин, ИПУ РАН; И.С. Тренёв, ИПУ РАН) и др.

С программой конференции и материалами докладов можно ознакомиться на сайте конференции <https://stab22.ipu.ru/>.

Отметим высокий уровень научной дискуссии на заседаниях, а также высокую степень заинтересованности участников конференции.

Благодаря выбранному Оргкомитетом из-за эпидемической обстановки онлайн-формату проведения конференции процесс решения многих организационных вопросов для организаторов и участников мероприятия упростился, и ученым из достаточно удаленных от Москвы городов России, таких как Благовещенск, Хабаровск, Иркутск, Новосибирск и др., а также ученым из-за рубежа легче было принять участие в заседаниях. В то же время в рамках заключительной общей дискуссии была выражена надежда на то, что улучшающаяся эпидемическая обстановка позволит в скором времени перейти к традиционным формам организа-

ции конференции и тем самым преодолеть дефицит живого общения между учеными.

По итогам конференции опубликован сборник материалов на английском языке «Proceedings of 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)» в электронной библиотеке IEEE Xplore: <https://ieeexplore.ieee.org/xpl/conhome/9807427/proceeding>.

Также опубликован сборник материалов конференции на русском языке (в электронном виде), который размещен в свободном доступе на сайте конференции: https://stab22.ipu.ru/sites/default/files/news/Stab_2022_Rus%20%281%29.pdf.

*Заместитель председателя Оргкомитета
И.Н. Барабанов*

Барабанов Иван Николаевич – канд. физ.-мат. наук,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва, ✉ ivbar@ipu.ru.

16TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON STABILITY AND OSCILLATIONS OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS (PYATNITSKIY'S CONFERENCE)

I. N. Barabanov

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ ivbar@ipu.ru

Abstract. The 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) was held on June 1–3, 2022. The conference was organized by Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, with the technical co-sponsorship of IEEE Russia Section. During the conference, new results concerning various aspects of the theory of stability and nonlinear oscillations were discussed. The selected conference proceedings were published in the IEEE Xplore digital library and indexed by Scopus.

Keywords: conference, control systems, stability, oscillations.