

ISSN 2712-8687

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

3/2026

CONTROL  SCIENCES

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,
И. А. Каляев, академик РАН,
Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН,
В. А. Левин, академик РАН,
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,
В. М. Вишневский, д-р техн. наук,
О. И. Дранко, д-р техн. наук,
А. О. Калашников, д-р техн. наук,
В. В. Клочков, д-р экон. наук,
С. А. Краснова, д-р техн. наук,
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,
Н. Е. Максимова, канд. техн. наук
(ответственный секретарь),
А. С. Мандель, д-р техн. наук,
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,
А. И. Михальский, д-р биол. наук,
Д. А. Новиков, академик РАН
(гл. редактор),
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,
Ф. Ф. Пашченко, д-р техн. наук
(зам. гл. редактора),
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,
А. В. Рябинин, д-р экон. наук,
Л. Ю. Филимонюк, д-р техн. наук,
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,
А. Г. Чхартишвили, д-р физ.-мат. наук,
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,
Волгоград – А. А. Воронин, д-р физ.-мат. наук,
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольников, д-р техн. наук,
Самара – М. И. Гераськин, д-р экон. наук,
Саратов – В. А. Кушников, д-р техн. наук,
Тамбов – М. Н. Краснянский, д-р техн. наук,
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук,
Челябинск – О. В. Логиновский, д-р техн. наук

ADVISORY BOARD

I. A. Kalyaev, RAS¹ Academician,
N. V. Kuznetsov, RAS Corr. Member,
V. A. Levin, RAS Academician,
N. A. Makhutov, RAS Corr. Member,
A. F. Rezchikov, RAS Corr. Member,
S. N. Vassilyev, RAS Academician

EDITORIAL BOARD

V. N. Afanas'ev, Dr. Sci. (Eng.),
F. T. Aleskerov, Dr. Sci. (Eng.),
N. N. Bakhtadze, Dr. Sci. (Eng.),
A. G. Chkhartishvili, Dr. Sci. (Phys.–Math.),
O. I. Dranko, Dr. Sci. (Eng.),
L. Yu. Filimonyuk, Dr. Sci. (Eng.),
A. O. Kalashnikov, Dr. Sci. (Eng.),
V. V. Klochkov, Dr. Sci. (Econ.),
M. V. Khlebnikov, Dr. Sci. (Phys.–Math.),
S. A. Krasnova, Dr. Sci. (Eng.),
O. P. Kuznetsov, Dr. Sci. (Eng.),
A. A. Lazarev, Dr. Sci. (Phys.–Math.),
V. G. Lebedev, Dr. Sci. (Eng.),
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Psych.),
A. S. Mandel, Dr. Sci. (Eng.),
N. E. Maximova, Cand. Sci. (Eng.),
Executive Editor-in-Chief,
R. V. Meshcheryakov, Dr. Sci. (Eng.),
A. I. Michalski, Dr. Sci. (Biol.),
D. A. Novikov, RAS Academician,
Editor-in-Chief,
F. F. Pashchenko, Dr. Sci. (Eng.),
Deputy Editor-in-Chief,
B. V. Pavlov, Dr. Sci. (Eng.),
L. B. Rapoport, Dr. Sci. (Phys.–Math.),
E. Ya. Rubinovich, Dr. Sci. (Eng.),
A. V. Ryabinin, Dr. Sci. (Econ.),
V. M. Vishnevsky, Dr. Sci. (Eng.),
I. B. Yadykin, Dr. Sci. (Eng.)

LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Chelyabinsk – O. V. Loginovskiy, Dr. Sci. (Eng.),
Kursk – S. G. Emelyanov, Dr. Sci. (Eng.),
Lipetsk – A. K. Pogodaev, Dr. Sci. (Eng.),
Perm – V. Yu. Stolbov, Dr. Sci. (Eng.),
Rostov-on-Don – G. A. Ougolnitsky,
Dr. Sci. (Eng.),
Samara – M. I. Geraskin, Dr. Sci. (Econ.),
Saratov – V. A. Kushnikov, Dr. Sci. (Eng.),
Tambov – M. N. Krasnyanskiy, Dr. Sci. (Eng.),
Ufa – B. G. Ilyasov, Dr. Sci. (Eng.),
Vladivostok – O. V. Abramov, Dr. Sci. (Eng.),
Volgograd – A. A. Voronin, Dr. Sci. (Phys.–Math.),
Voronezh – S. A. Barkalov, Dr. Sci. (Eng.)

¹Russian Academy of Sciences.



CONTROL SCIENCES
Научно-технический
журнал

6 номеров в год

ISSN 1819-3161 (Print)

ISSN 2712-8687 (Online)

Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ и ИЗДАТЕЛЬ

Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор
академик РАН
Д.А. Новиков

Заместитель главного редактора
Ф.Ф. Пашенко

Ответственный секретарь
Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор
Л.В. Петракова

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410

Тел./факс (495) 198-17-20, доб. 1410

E-mail: ru@ipu.ru

Интернет: <http://pu.mtas.ru>
<http://controlsciences.org>

Опубликовано: 29 июня 2026 г.

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.
выдано Министерством Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых
коммуникаций

Свидетельство о регистрации
Эл № ФС 77-80482 от 17 февраля 2021 г.
выдано Федеральной службой
по надзору в сфере связи,
информационных технологий и
массовых коммуникаций

Журнал входит в RSCI на платформе
Web of Science и Перечень
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс
научного цитирования (РИНЦ).
На сайте Научной электронной
библиотеки (www.elibrary.ru) доступны
полные тексты статей.

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

3.2026

СОДЕРЖАНИЕ

Математические проблемы управления

Рей А. С., Широкий А. А., Авдеева З. К. Алгоритм
идентификации графа дихотомической свертки компонентов
риска сложных организационных систем на основе заданной
его иерархической декомпозиции 3

Анализ и синтез систем управления

Жиравок А. Н., Зуев А. В., Проценко А. А. Метод
диагностирования дефектов на основе зонотопов 22

Акманова С. В. Наблюдаемость нелинейных
непрерывно-дискретных систем и их стабилизация
с использованием асимптотических наблюдателей 29

Управление в социально-экономических системах

Угольников Г. А., Усов А. Б. Модели властных иерархий
на глобальном уровне 42

Беляков Б. Е. Применение многокритериальной функции
вознаграждения для динамического управления риском
рыночно-нейтральных портфелей 51

Команич Н. В. Применение сценарных методов
в многосубъектном управлении региональным развитием 64

Управление подвижными объектами и навигация

Карпов В. Э. Автоматное управление и метод потенциальных
полей в задаче движения мобильного робота в среде
с препятствиями 86

Исаев А. М. Сравнительный анализ процедур переверборки
при реализации фильтров частиц 100



CONTROL SCIENCES
Scientific Technical
Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161 (Print)

ISSN 2712-8687 (Online)

Published since 2003

FOUNDER and PUBLISHER

V.A. Trapeznikov

Institute of Control Sciences,
Russian Academy of Sciences

Editor-in-Chief

D.A. Novikov, RAS Academician

Deputy Editor-in-Chief

F.F. Pashchenko

Executive Editor-in-Chief

N.E. Maximova

Editor

L.V. Petrakova

Address: room 410, ul. Profsoyuznaya 65,
Moscow 117997, Russia

☎ +7(495) 198-17-20, ext. 1410

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>
<http://controlsciences.org>

Published June 29, 2026

Registration certificate
PI № FS 77-49203 of 30 March 2012,
issued by the Ministry of Press,
Broadcasting, and Mass Media
of the Russian Federation

Registration certificate of
EI № FS 77-80482 of 17 February 2021,
issued by the Federal Service
for Supervision of Communications,
Information Technology, and Mass Media

The Journal is indexed in RSCI (Russian
Science Citation Index) on the platform
Web of Science and in the list of peer-
reviewed scientific publications of HAC

On the website of the Scientific electronic
library (www.elibrary.ru) full texts of
articles are available

© V.A. Trapeznikov
Institute of Control Sciences,
Russian Academy of Sciences

CONTROL SCIENCES

3/2026

CONTENTS

Mathematical Problems of Control

- Rey, A. S., Shiroky, A. A., and Avdeeva, Z. K.** An Algorithm
for Identifying the Dichotomous Convolution Graph of Risk
Components in Complex Organizational Systems Based on
Its Expert-Defined Hierarchical Decomposition 3

Analysis and Design of Control Systems

- Zhirabok, A.N., Zuev, A.V., and Protsenko, A.A.** A Fault
Diagnosis Method Based on Zonotopes 22

- Akmanova, S. V.** Observability of Nonlinear
Continuous–Discrete Systems and Their Stabilization
Using Asymptotic Observers 29

Control in Social and Economic Systems

- Ougolnitsky, G.A. and Usov, A.B.** Models of Power Hierarchies
at the Global Level 42

- Belyakov, B.E.** Application of a Multicriteria Reward Function
to Dynamic Risk Management in Market-Neutral Portfolios 51

- Komanich, N. V.** Application of Scenario Methods
in Multi-Actor Management of Regional Development 64

Control of Moving Objects and Navigation

- Karpov, V.E.** Finite-State Machine Control
and Potential Field Method for Mobile Robot Navigation
in an Environment with Obstacles 81

- Isaev, A.M.** Comparative Analysis of Resampling Procedures
in Particle Filter Design 100

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ГРАФА ДИХОТОМИЧЕСКОЙ СВЕРТКИ КОМПОНЕНТОВ РИСКА СЛОЖНЫХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЗАДАННОЙ ЕГО ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

А. С. Рей*, А. А. Широкий**, З. К. Авдеева***

*-***Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

*✉ a.rey@ipu.ru, **✉ shiroky@ipu.ru, ***✉ avdeeva@ipu.ru

Аннотация. Большинство известных методов и алгоритмов оценки рисков сложных организационных систем построены исходя из предположения, что оцениваемые компоненты совокупного риска являются независимыми. В то же время, на практике чаще встречаются примеры, когда риски друг с другом связаны, т. е. изменение одного из них влечет за собой изменение других. Поэтому при оценке совокупного риска организационных систем следует учитывать их сложность в смысле наличия большого количества связанных между собой рисков. Сделать это можно при помощи одного из методов многокритериального оценивания, а именно – механизма комплексного оценивания. В классическом варианте его компоненты – бинарные деревья критериев и матрицы логической свертки их значений – задаются экспертами. Однако во многих случаях эксперты не могут прийти к единому мнению о структуре дерева комплексного оценивания. В таких ситуациях на практике оказываются востребованы формальные методы синтеза структуры соответствующего дерева, учитывающие специфику рассматриваемой системы. При этом даже в случае, если метод не обеспечивает единственность решения, он гарантирует логическую обоснованность последнего, что и позволяет использовать результаты его применения при решении практических задач. В предлагаемой работе метод комплексного оценивания расширяется путем замены бинарного дерева комплексного оценивания дихотомической сверткой компонентов совокупного риска сложных организационных систем, построенной на основе заданной экспертами его декомпозиции. Предложен алгоритм идентификации графа дихотомической свертки компонентов риска, включая правила и критерии верификации построения. Полученные теоретические результаты применены для построения системы оценки риска возникновения авиационного происшествия.

Ключевые слова: оценка риска, совокупный риск, комплексное оценивание, бинарное дерево, дихотомическая свертка, иерархическая декомпозиция риска, риск возникновения авиационного происшествия.

ВВЕДЕНИЕ

Существующие широко применяемые методы и подходы к управлению рисками в организационных системах в качестве основных задач, решаемых лицом, принимающим решение (ЛПР), включают в себя идентификацию рисков, их анализ и оценку, поиск управляющего воздействия и решение задачи оптимизации [1]. При этом встречаются как формальные постановки задач оценки рисков с

хорошо разработанным математическим аппаратом (обычно в работах, относящихся к математической теории управления, – см., например, [2–4]), так и слабо формализованные, характерные для работ в области менеджмента [5–7].

Основную массу работ, посвященных методам и алгоритмам оценки рисков сложных систем, в том числе и организационных, можно отнести к одному из двух следующих подходов. Следуя первому из них, авторы оценивают риски изолированно

но с целью дальнейшего их ранжирования или сравнения с пороговыми показателями, часто без учета их взаимосвязи, а совокупный (или интегральный) риск не рассчитывают [8–11]. Второй подход заключается в вычислении интегральной оценки риска системы путем суммирования локальных рисков [12–16] или, в случае применения сценарного подхода, суммируя показатели риска для каждого отдельного сценария [17]. При этом взаимное влияние рисков, как и в первом случае, чаще всего не рассматривается и не обсуждается.

С точки зрения декомпозиции интегрального риска в работах по оценке рисков организационных систем часто можно встретить классификационные [18] и причинно-следственные схемы [19], где совокупный риск или разбит на виды локальных рисков [20] или представлен в виде различных факторов [21] и других компонентов, характеризующих его. Такие схемы, составленные экспертами, можно рассматривать как иерархическую декомпозицию риска, т. е. структуру, описывающую интегральный риск системы.

Также в отдельных работах (см., например, [22, 23]) можно встретить представление структуры взаимосвязей локальных рисков в виде взвешенного ориентированного графа. Эксперименты по запуску импульсного процесса в таких структурах демонстрируют, как изменение величины отдельных локальных рисков влечет за собой изменение связанных локальных рисков и, как следствие, изменение значения интегрального риска рассматриваемой системы.

Таким образом, желание рассматривать риски комплексно, учитывая их взаимное влияние, является вполне естественным, несмотря на существенное усложнение модели риска. В настоящей статье рассматривается вопрос о получении оценки интегрального риска не как простой суммы значений идентифицированных локальных рисков, а в виде комплексной оценки, построенной на основе экспертных знаний о взаимном влиянии компонентов совокупного риска друг на друга.

Целью настоящей работы является расширение широко применяемого на практике для оценки рисков сложных организационных систем метода комплексного оценивания (МКО) путем создания формального алгоритма преобразования заданной экспертами иерархической декомпозиции совокупного риска в дихотомическую свертку его компонентов, т. е. в ориентированный граф, в каждую вершину которого либо входят две дуги, либо не входит ни одной. Такая свертка позволяет, с одной стороны, использовать характерные для МКО операции в виде дихотомической свертки оценок ком-

понентов риска для построения комплексной оценки, а с другой – напрямую учесть взаимное влияние компонентов риска, поскольку число исходящих из конкретной вершины дуг не ограничено (в классическом варианте чаще всего используется дерево, т. е. не может быть более одной исходящей дуги).

Структура изложения материала в настоящей работе следующая. Обзору работ, описывающих как сам МКО, так и известные алгоритмы идентификации дерева комплексного оценивания, посвящен § 1. В § 2 поставлена и решена задача идентификации дихотомической свертки компонентов риска, также подробно обсуждается алгоритм построения дихотомической свертки по заданной иерархической декомпозиции на синтетическом примере. В § 3 содержится описание исходных данных для экспертного построения иерархической декомпозиции риска возникновения авиационного происшествия; здесь детально рассмотрен процесс идентификации дихотомической свертки по ранее заданной иерархической декомпозиции риска возникновения авиационного происшествия и предъявлен соответствующий расширенный механизм комплексного оценивания этого риска.

1. ОБЗОР РАБОТ ПО АЛГОРИТМАМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЕРЕВЬЕВ КОМПЛЕКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Механизм комплексного оценивания является одним из методов многокритериального оценивания объектов [24] и используется в качестве механизма контроля при управлении в организационных и производственных системах для оценки и ранжирования сложных объектов [25]. К компонентам МКО относятся сами критерии оценки, надстроенные над ними бинарные деревья и матрицы логической свертки, заданные экспертным путем [26, 27]. Первоначально МКО был разработан в качестве механизма контроля в электронной промышленности [28].

В дальнейшем выяснилось, что его потенциал значительно шире, и в настоящее время он используется, например, для управления эколого-экономическими системами при оценке экологических рисков [29], для оценки потенциала или выбора наиболее эффективных проектов [30], для программ регионального развития с целью оценки и реализации поставленных целей и задач [31], для оценки эффективности управления недвижимостью [32]. Таким образом, обсуждаемый механизм демонстрирует определенную универсальность применения, в связи с чем авторы считают воз-



можным использовать его и в настоящей работе, посвященной оценке рисков в авиационной отрасли.

Критерии оценки в МКО сворачиваются попарно для получения агрегированных оценок. Эти оценки, в свою очередь, также сворачиваются попарно – до тех пор, пока не сформируется корень дерева, называемый комплексной оценкой (в случае оценивания рисков некоторой сложной системы значение в корне дерева может быть интерпретировано как величина интегрального риска). При этом порядок свертки критериев в общем случае не детерминирован и, в классическом варианте, определяется экспертным методом на основании неких общих представлений о важности критериев или предпочтений экспертов. При этом вполне естественным является желание формализовать или даже автоматизировать этот процесс тем или иным способом.

Одним из способов идентификации структуры дерева комплексного оценивания (КО) является использование обучающих наборов, основанных на преобразовании таблицы истинности [33, 34]. Авторы работ [26, 35–37] представляют МКО в виде унитарного вектора для нейросетевой идентификации и синтеза механизмов КО. На основе предварительно сгенерированных различными методами структур [38, 39] строится прогноз, какое из возможных деревьев КО следует использовать. В упомянутой серии работ был предложен алгоритм по получению групп эквивалентности (таблица ветвей, список структур). Анализ этих групп позволяет исключить заведомо нереализуемые структуры (т. е. группы эквивалентности, превышающие заданные шкалы), а также исключить зеркальные структуры.

В случае отсутствия полного обучающего набора авторы работы [40] предлагают использовать метод декомпозиции, раскладывая наборы листьев дерева до тех пор, пока все допустимые наборы не будут разложены на подгруппы. Это позволяет исключать целые семейства ветвей. Несмотря на достаточно глубокую проработанность этого подхода, авторы отмечают, что проблема выбора структуры бинарных деревьев пока сохраняется [26].

Другим известным способом является метод бинарной композиции, суть которого состоит в следующем. Вначале эксперты выделяют и ранжируют критерии оценки по степени важности. Затем ЛПР на основе некоторой заданной функции предпочтений объединяет соседние критерии в дихотомическую структуру. Преимуществом этого метода является сохранение монотонности функции предпочтений ЛПР на всех уровнях дерева КО

[41]. Однако этот способ не гарантирует, что дерево вообще удастся построить – в частности, если критерии оценки не являются рядоположенными, эксперт просто не сможет их обоснованно ранжировать. Например, при оценке качества региональной системы здравоохранения используются такие критерии, как медианный уровень квалификации профильных специалистов и средняя длительность госпитализации. Попытка сравнить их важность напрямую, без учета особенностей конкретной рассматриваемой системы здравоохранения, успешной не будет.

Еще одним способом построения дерева КО является метод последовательной дихотомии. Он предполагает деление формулировки итоговой оценки объекта или системы на две более конкретные взаимодополняющие друг друга формулировки. При этом не должна нарушаться полнота, а также обязана сохраняться непротиворечивость и соблюдаться причинно-следственная связь. Этот процесс продолжается для дочерних формулировок до тех пор, пока не появляются объективные измеримые критерии [42]. Отметим, что способов разделения общей формулировки на две более конкретные может быть больше одного. Кроме того, значения некоторых из полученных на нижнем уровне дерева объективных измеримых критериев может оказаться невозможно (точнее, нецелесообразно трудоемко) получить. Например, одним из объективных критериев востребованности образовательной программы высшего образования является средняя заработная плата выпускников после выпуска. Однако у вуза нет механизмов получения этих значений, поэтому на практике такой критерий не применяется.

Правила построения МКО позволяют использовать его для решения задач по оценке рисков с учетом взаимного влияния его компонентов. Во многих работах интегральная оценка риска осуществляется по дихотомической структуре [17, 29, 43, 44]. При классическом подходе использования МКО для оценки риска характеристики риска разбиваются экспертами на две категории: те, что можно точно посчитать, и те, значение которых точно рассчитать невозможно [45].

При этом в случае, если изначально заданная структура характеристик риска не имеет вида дерева, у экспертов могут возникнуть трудности в отношении того, как из декомпозиции построить логичную дихотомическую структуру. Для решения данной проблемы авторы работы расширяют механизм комплексного оценивания, предлагая алгоритм идентификации графа дихотомической свертки компонентов риска на основе заданной экспертами иерархической декомпозиции риска.

Стоит отметить, что дихотомическую свертку всегда можно представить в виде дерева путем разделения вершин, оказывающих влияние более чем на одну вершину предшествующего яруса. При этом могут возникать некоторые сложности при решении, к примеру, задачи поиска минимального бюджета для снижения риска до заданного уровня – метод дихотомического программирования всегда находит оптимальное решение над деревом, но в случае дихотомической структуры возможно лишь получить его нижнюю оценку. Решения подобных задач на деревьях и дихотомических структурах, а также методы перехода от нижней оценки к точному решению, обсуждались, например, в работах [46, 47].

Авторы рассматривают заданные экспертами иерархические структуры риска. Природа их может быть различной, например причинно-следственной или классификационной. К структуре компонентов риска авторы предъявляют следующие требования:

- на верхнем ярусе иерархии должна быть ровно одна – корневая – вершина (рассматриваемый риск), номера ярусов остальных вершин примем равными длине пути от нее до корневой вершины;
- подграфы, образованные подмножествами вершин соседних (с номерами, отличающимися на единицу) ярусов и соединяющих их ребер, являются двудольными.

Стоит отметить, что разработка алгоритма идентификации структуры дерева комплексного оценивания уже проводилась авторами в рамках исследования по оценке рисков системы Интернета вещей [48]. Работа же предлагаемого в настоящей статье модифицированного алгоритма продемонстрирована на примере одной из наиболее опасных угроз при деятельности авиакомпании – угрозы возникновения авиационного происшествия.

Предложенный авторами подход можно связать с концепцией критических сочетаний событий, где для каждой аварийной комбинации строится граф, отражающий структуру возникновения такой комбинации. На основании таких структур строятся дифференциальные уравнения, позволяющие определить вероятность возникновения аварий и катастроф [49].

В отличие от вероятностного анализа безопасности [см., например, работы 50–52], при котором также учитывается взаимосвязь рисков, предложенный авторами способ позволяет в перспективе рассчитать уровень риска в условиях ограниченной статистики, адаптируясь под реальное время. Несмотря на то, что вероятностный анализ без-

опасности является общепризнанным инструментом количественной оценки риска с опорой на статистику отказов, комплексная оценка с использованием алгоритма идентификации графа дихотомической свертки учитывает слабоформализуемые и качественные показатели без необходимости ввода коэффициентов с высокой степенью неопределенности.

К функциям авиакомпаний относятся организация и осуществление перевозок пассажиров, багажа, грузов, техническое обслуживание воздушных судов, выполнение коммерческих работ, таких как продажа билетов, организация маршрутов. В работах исследователей можно встретить следующие укрупненные группы рисков для авиакомпаний: отраслевой риск, связанный со спецификой организации авиаперелетов, региональный риск, зависящий от политической и экономической обстановки; правовой риск, зависящий от изменения законодательства [53]. Тем не менее, предотвращение возникновения угроз безопасности авиаперевозок, является первостепенной задачей для любой авиакомпании. Очевидно, что серьезное нарушение безопасности влечет за собой появление сопутствующих важных рисков для авиакомпании – финансовых, производственных, коммерческих, репутационных.

Увеличение объемов авиаперевозок и количества пассажиров требует от авиакомпаний совершенствования подходов к обеспечению безопасности, в том числе совершенствования методов прогнозирования и оценки рисков, а также способов их снижения. В мае 2025 г. Международный авиационный комитет (МАК) опубликовал отчет [54], в котором указано, что в сравнении с 2023 г., количество авиационных происшествий выросло до 46 случаев с 26 в предыдущий год, а количество катастроф, которые привели к гибели людей, доходит до 65, в сравнении с 31 в 2023 г. А в глобальном масштабе, по данным Международной ассоциации воздушного транспорта [55], число погибших в результате авиационных катастроф выросло до 244 человек против 72 в 2023 г.

Так как авиационное происшествие – катастрофа или авария – это событие, которое может повлечь за собой гибель людей (получение телесного повреждения со смертельным исходом), повреждение или разрушение воздушного судна, а также его пропажу [56, 57], авторами будет рассмотрен риск наступления авиационного происшествия как наиболее критичного и опасного авиационного события. Классификация авиационных происшествий закреплена в нормативных документах (см., например, [58]). К категориям происшествий по-



вышенного риска относятся: столкновение исправного воздушного судна с землей, несанкционированный выезд за пределы взлетно-посадочной полосы (ВПП), потеря управления в полете, столкновение в воздухе. В рамках данной работы будет рассмотрено одно из событий повышенного риска [59].

2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАФА ДИХОТОМИЧЕСКОЙ СВЕРТКИ НА ОСНОВЕ ЗАДАННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

2.1. Математическая постановка задачи идентификации графа свертки компонентов риска

Предположим, что для рассматриваемой системы задана иерархическая декомпозиция ее интегрального риска в форме ориентированного графа $G=(V, E)$ ярусно-параллельной формы. Вершина, соответствующая интегральному риску, – единственная в графе, имеющая нулевую степень захода. Для удобства обозначим ее $v_0 \in V$. Остальные вершины имеют степень захода 1 или больше.

Напомним, что содержательно такая декомпозиция отражает взаимное влияние компонентов риска друг на друга, их причинно-следственную связь. По этой причине непосредственной оценке в такой модели могут подвергаться только те компоненты, которым в графе G соответствуют вершины с нулевой степенью захода (в частном случае, когда G является деревом, такие вершины называются листьями). Оценки остальных компонентов на каждом ярусе иерархической декомпозиции могут быть получены как результат агрегирования оценок компонентов следующего яруса.

Процедура свертки вершин графа заключается в последовательном агрегировании оценок критериев нижнего яруса в обобщенную (агрегированную) оценку критерия вышестоящего яруса. В случае если граф представлен в виде дерева, данная процедура реализуется путем движения от листьев к корню, где каждой вершине приписано правило агрегирования – матрица свертки. Матрица определяет, каким образом сочетание оценок нижестоящих вершин преобразуется в оценку вышестоящей вершины.

Формально данное определение можно записать следующим образом. Пусть S_{v_0} – множество оценок критериев, K_{v_0} – их комплексная оценка, которая определяется в вершине v_0 . Если l_1^1 и l_1^2 –

вершины дерева, непосредственно предшествующие вершине v_0 , то $S_{v_0} = S_{l_1^1} \cup S_{l_1^2}$, а оценка K_{v_0} получается на основе матричной свертки обобщенных оценок $K_{l_1^1}$ и $K_{l_1^2}$ [60].

Процедура свертки значений критериев по методу комплексного оценивания предусматривает попарную свертку компонентов. В то же время, если некоторые компоненты риска декомпозируются на три или более подкомпонентов, то возникает вопрос о порядке сворачивания их оценок. Именно эту задачу – о выборе порядка агрегирования компонентов риска на промежуточных ярусах иерархической декомпозиции – авторы рассматривают в настоящей работе.

Формально задача заключается в поиске такого отображения

$$\mathfrak{F}: G(V, E) \rightarrow G'(V', E'), V \subseteq V',$$

что любая из вершин $v \in V'$ имеет степень захода либо 2, либо 0. Отметим, что не вводится требование о единичной степени захода для всех вершин, за исключением v_0 . Таким образом, формально $G'(V', E')$ не обязано быть бинарным деревом, что является наиболее распространенным условием реализации классического метода комплексного оценивания. Поэтому в данном случае уместно говорить о некоторой его обобщенной модификации.

2.2. Алгоритм идентификации графа дихотомической свертки компонентов риска

Пусть $n \in \mathbb{N}$ – число ярусов ориентированного графа иерархической декомпозиции интегрального риска защищаемой системы. Обозначим $L_i \subset V$, $1 < i \leq n$, подмножество вершин i -го яруса декомпозиции $G=(V, E)$.

Определение 1. Будем говорить, что подмножества вершин $V_i \subseteq L_i$ и $V_{i-1} \subseteq L_{i-1}$, $L_i, L_{i-1} \subset V$ графа $G=(V, E)$ являются сильно смежными, если $\forall u \in V_i \forall v \in V_{i-1} \exists (u, v) \in E$, т. е. если каждая вершина множества V_{i-1} имеет входящую дугу из каждой вершины множества V_i .

Определение 2. Будем говорить, что подмножества вершин $V_i \subseteq L_i$ и $V_{i-1} \subseteq L_{i-1}$, $L_i, L_{i-1} \subset V$ графа $G=(V, E)$ являются слабо смежными, если $\forall u \in V_i \exists v \in V_{i-1} \exists (u, v) \in E$, т. е. если каждая вер-

шина множества V_{i-1} имеет входящую дугу из хотя бы одной вершины множества V_i . ♦

Заметим, что сильно смежные подмножества всегда одновременно являются и слабо смежными. Обратное в общем случае неверно, поэтому число слабо смежных подмножеств не может быть меньше числа сильно смежных подмножеств.

Алгоритм представляет собой последовательность следующих действий.

Шаг 1. Зададим $i = n + 1$.

Шаг 2. Дополним иерархическую декомпозицию $G(V, E)$ «фиктивным» ярусом L_i таким, что $\forall v \in L_i \exists! u \in L_{i-1} : (u, v) \in E$.

Шаг 3. Для вершин i -го и $(i-1)$ -го яруса построим бинарные матрицы B_i и D_i размерностью не более чем $|2^{L_i}| \times |2^{L_{i-1}}|$, строки и столбцы которых комплементарны всем непустым допустимым (некоторые комбинации могут быть запрещены в силу невозможности соответствующих сочетаний) подмножествам вершин соответственно i -го и $(i-1)$ -го яруса. Элементы матриц, соответствующие смежным вершинам (подмножествам вершин), приравняем к единице, остальные – к нулю.

Шаг 4. Рассчитаем вектор-суммы $\vec{S}(B_i) = (b_i^1, \dots, b_i^{i-1})$, $\vec{S}(D_i) = (d_i^1, \dots, d_i^{i-1})$ где b_i^j , d_i^j – суммы j -х столбцов матриц B_i и D_i соответственно.

Шаг 5. Для каждой пары непустых смежных подмножеств вершин $V_{i-1}^k \subseteq L_{i-1}$ и $V_i^k \subseteq L_i$ рассчитаем величину

$$\bar{Y}_{i-1}^k = \frac{\vec{S}(B_i)}{\vec{S}(D_i)},$$

которую будем называть вектором значений *показателей зависимости* подмножеств. Отметим, что операция деления векторов $\vec{S}(B_i)$ и $\vec{S}(D_i)$ – поэлементная. Заметим, что в силу определений 1, 2 и построения величины $\bar{Y}_{i-1}^k$, значение показателя зависимости $y_{i-1}^k \in \bar{Y}_{i-1}^k$ при прочих равных условиях будет тем больше, чем меньше мощность множества V_{i-1}^k .

Шаг 6. Далее будем последовательно сворачивать пары вершин $(i-1)$ -го яруса и (на последующих подшагах) их подмножеств V_{i-1}^k ,

$V_{i-1}^m \subseteq L_{i-1}$, $k \neq m$, с максимальными среди всех ранее не свернутых вершин или их подмножеств значениями показателя зависимости, формируя таким образом дихотомическую иерархическую структуру оценки риска. На каждом подшаге в нее добавляются сворачиваемые вершины (подмножества вершин) в случае, если они не были включены в нее ранее, а также создается новая, обозначающая их объединение вершина, которую соединим двумя дугами с вершинами, сворачиваемыми на текущем подшаге. Несвернутыми вершинами (подмножествами вершин) считаются те, у которых в новой иерархии либо отсутствует соответствующая им вершина, либо ее степень захода равна нулю.

Шаг 7. Если $i > 1$, то задать $i = i - 1$ и перейти к шагу 3. В противном случае алгоритм завершен.

Результатом выполнения вышеприведенного алгоритма будет дихотомическая иерархия $G'(V', E')$, на нулевом ярусе которой находится вершина v_0 , отражающая комплексную оценку совокупности компонентов $(i-1)$ -го яруса иерархической декомпозиции интегрального риска рассматриваемой системы, а множество ее висячих вершин совпадает с таковым для исходной иерархической декомпозиции $G(V, E)$.

Отметим, что поскольку порядок агрегации вершин $(i-1)$ -го яруса определяется их связями с вершинами i -го яруса, то для сворачивания висячих вершин иерархической декомпозиции в алгоритме предусмотрено создание дополнительного яруса. В рассматриваемой чисто математической постановке задачи он носит фиктивный характер, но при решении конкретных задач он должен получить содержательный смысл – например, можно произвести декомпозицию риска более детальную, чем требуется для принятия решения, или отразить в дополнительном ярусе установленную взаимозависимость непосредственно измеряемых компонентов риска.

Для обеспечения выполнимости алгоритма необходимо также разрешить вопрос о том, как выбирать пару вершин (подмножеств вершин) L_{i-1} для свертки на текущем подшаге шага 6 в случае, если максимальное значение показателя зависимости достигается на трех или более несвернутых вершинах (их подмножествах), либо, что приводит к той же ситуации, максимум достигается на одном подмножестве, а второе после максимального значение – на двух или более кандидатах на сворачивание.

На текущем – формальном – этапе предложить конструктивный критерий, обеспечивающий единственность решения, невозможно. Тем не менее, при применении алгоритма на практике можно учесть специфику рассматриваемой сложной организационной системы и ввести дополнительные показатели приоритизации свертки (например, важность компонента риска или частоту встречаемости фактора). В п. 3.1, где рассматривается отраслевая организационная система (авиакомпания), это будет продемонстрировано.

2.3. Алгоритм идентификации графа дихотомической свертки на основе заданной иерархической декомпозиции (синтетический пример)

Для иллюстрации описанного в предыдущем разделе алгоритма идентификации графа дихотомической свертки компонентов риска рассмотрим синтетический пример. Пусть иерархическая декомпозиция интегрального риска сложной организационной системы представлена в виде ориентированного графа $G=(V, E)$ с числом ярусов $n=2$, причем $|V|=8$, $|L_1|=3$, $|L_2|=4$, $\{v_0\} \cup L_1 \cup L_2 = V$ (рис. 1).

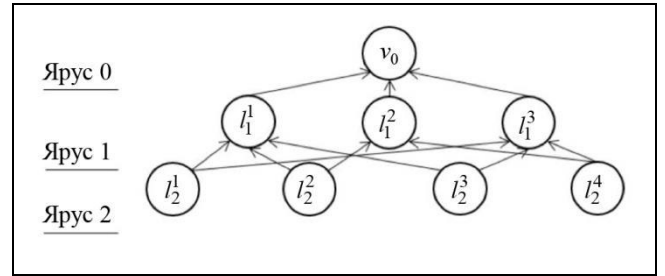


Рис. 1. Пример иерархической декомпозиции интегрального риска

Рассмотрим подробнее одну итерацию алгоритма, в которой будем сворачивать вершины яруса 1 иерархической декомпозиции на основе их взаимной зависимости через вершины следующего – яруса 2. Выполнение алгоритма начнется с шага 3 при $i=2$.

Шаг 3. Для вершин яруса 2 и яруса 1 построим бинарную матрицу B_2 , ячейки, соответствующие сильно смежным подмножествам вершин, приравняем к единице, остальные к нулю (табл. 1), а также матрицу D_2 , ячейки, соответствующие слабо смежным подмножествам вершин, приравняем к единице (табл. 2). Обе матрицы будут иметь размерность 7×15 . В таблицах для удобства восприятия матрицы приведены в транспонированном виде.

Таблица 1

Матрица сильно смежных подмножеств вершин ярусов 1 и 2 (транспонирована)

	l_1^1	l_1^2	l_1^3	l_1^1, l_1^2	l_1^1, l_1^3	l_1^2, l_1^3	l_1^1, l_1^2, l_1^3
l_2^1	1	0	1	0	1	0	0
l_2^2	1	1	0	1	0	0	0
l_2^3	1	0	1	0	1	0	0
l_2^4	0	1	1	0	0	1	0
l_2^1, l_2^2	1	0	0	0	0	0	0
l_2^1, l_2^3	1	0	1	0	1	0	0
l_2^1, l_2^4	0	0	1	0	0	0	0
l_2^1, l_2^2, l_2^4	1	0	0	0	0	0	0
l_2^2, l_2^4	0	1	0	0	0	0	0
l_2^3, l_2^4	0	0	1	0	0	0	0
l_2^1, l_2^2, l_2^3	1	0	0	0	0	0	0
l_2^1, l_2^2, l_2^4	0	0	0	0	0	0	0
l_2^1, l_2^3, l_2^4	0	0	1	0	0	0	0
l_2^2, l_2^3, l_2^4	0	0	0	0	0	0	0
$l_2^1, l_2^2, l_2^3, l_2^4$	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2

Матрица слабо смежных подмножеств вершин ярусов 1 и 2 (транспонирована)

	l_1^1	l_1^2	l_1^3	l_1^1, l_1^2	l_1^1, l_1^3	l_1^2, l_1^3	l_1^1, l_1^2, l_1^3
l_2^1	1	0	1	1	1	1	1
l_2^2	1	1	0	1	1	1	1
l_2^3	1	0	1	1	1	1	1
l_2^4	0	1	1	1	1	1	1
l_2^1, l_2^2	1	0	0	1	1	0	1
l_2^1, l_2^3	1	0	1	1	1	1	1
l_2^1, l_2^4	0	0	1	0	1	1	1
l_2^1, l_2^4	1	0	0	1	1	0	1
l_2^2, l_2^4	0	1	0	1	0	1	1
l_2^3, l_2^4	0	0	1	0	1	1	1
l_2^1, l_2^2, l_2^3	1	0	0	1	1	0	1
l_2^1, l_2^2, l_2^4	0	0	0	0	0	0	0
l_2^1, l_2^3, l_2^4	0	0	1	0	1	1	1
l_2^2, l_2^3, l_2^4	0	0	0	0	0	0	0
$l_2^1, l_2^2, l_2^3, l_2^4$	0	0	0	0	0	0	0

Шаг 4. Рассчитаем вектор-сумму $\vec{S}(B_2) = (b_2^1, \dots, b_2^{1,2,3}) = (7, 3, 7, 1, 3, 1, 0)$ и вектор-сумму $\vec{S}(D_2) = (d_2^1, \dots, d_2^{1,2,3}) = (7, 3, 7, 9, 11, 9, 12)$.

Шаг 5. Рассчитаем вектор $\vec{Y}_1$. Результаты вычислений приведены в табл. 3 с округлением до двух знаков после запятой.

Таблица 3

Значения показателей зависимости смежных подмножеств вершин ярусов 1 и 2

Показатель	l_1^1, l_1^2	l_1^1, l_1^3	l_1^2, l_1^3	l_1^1, l_1^2, l_1^3
$\vec{S}(B_2)$	1	3	1	0
$\vec{S}(D_2)$	9	11	9	12
$\vec{Y}_1$	0,11	0,27	0,11	0

Шаг 6. Как видно из табл. 3, максимальным значением показателя зависимости среди подмножеств вершин обладает показатель зависимости подмножеств l_1^1, l_1^3 , его значение равно 0,27. Следовательно, на первом подшаге требуется свернуть вершины l_1^1 и l_1^3 , а на втором – добавить ранее не свернутую вершину l_1^2 к результату их свертки. Таким образом, получится дихо-

томическая свертка (в данном случае являющаяся деревом), отражающая комплексную оценку компонентов яруса 1 иерархической декомпозиции общего риска (рис. 2).

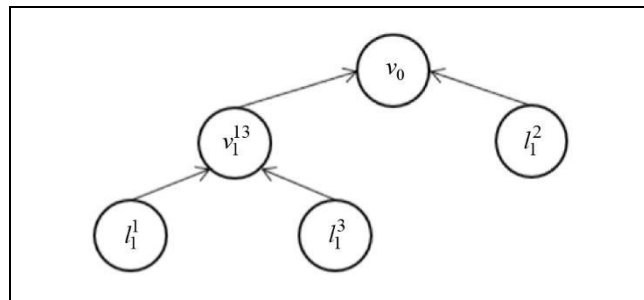


Рис. 2. Дихотомическая структура комплексной оценки

3. ПОСТРОЕНИЕ ДИХОТОМИЧЕСКОЙ СВЕРТКИ РИСКА АВИАЦИОННОГО ПРОИСШЕСТВИЯ НА ОСНОВЕ ЕГО ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

3.1. Иерархическая декомпозиция риска авиационного происшествия

В качестве иллюстрации работоспособности алгоритма идентификации графа дихотомической

свертки компонентов риска сложных организационных систем на основе заданной экспертами иерархической декомпозиции был выбран риск возникновения одного из самых опасных авиационных происшествий, а именно – столкновения исправного воздушного судна с землей (англ. *Controlled Flight Into Terrain*, CFIT). На возникновение данного авиационного происшествия влияет множество способствующих факторов и потенциальных событий. Это и неблагоприятные погодные условия, и дезориентация пилота, и ошибки в построении схем и документации, и ошибки автоматизации, и эксплуатационная нагрузка [58].

Структуризация факторов и их взаимосвязей, характеризующих ситуации авиационных происшествий, основана на извлечении факторов и связей типа причина – следствие на основе анализа документов, таких как международные стандарты и руководства ИКАО (Международная организация гражданской авиации) [58, 61–67], отраслевые стандарты и руководства ИАТА (Международная ассоциация воздушного транспорта) [68, 69], руководства и инструменты Фонда безопасности полетов [70], Воздушный кодекс РФ [71], Правила использования воздушного пространства РФ [72, 73], приказы Минтранса Российской Федерации [74, 75], официальные письма и документы Росавиации [76], базы по расследованиям авиационных инцидентов, происшествий, катастроф [77, 78].

Методика структуризации основана на применении причинно-следственных моделей представ-

ления знаний о ситуации, источником которых служит качественная и количественная информация [79]. Отношение причина – следствие, подтверждаемое экспертом ссылками, задает на множестве факторов, влияющих на авиационные события, отношения частичного порядка. При этом, используя алгоритмы преобразования получаемых причинно-следственных графов, можно построить иерархическую декомпозицию факторов как основу для модели комплексного оценивания событий, заданных состоянием факторов авиационного происшествия.

На примере авиационной безопасности экспертами была проведена структуризация факторов и их взаимосвязей, влияющих на авиационные происшествия, на основе чего была построена иерархическая декомпозиция риска авиационного происшествия в виде трехъярусного ($n = 3$) ориентированного графа (рис. 3).

На рис. 4 изображена иерархическая декомпозиция риска столкновения исправного воздушного судна с землей. Штриховыми стрелками отмечены вершины, соответствующие факторам, которые могут действовать только в комбинации с другими. Входящие в каждую конкретную вершину дуги окрашены одним цветом.

Перечень вершин каждого яруса графа с расшифровкой их содержательной интерпретации, а также со ссылками на документ, задающий причинно-следственную связь, представлены в табл. 4–6.

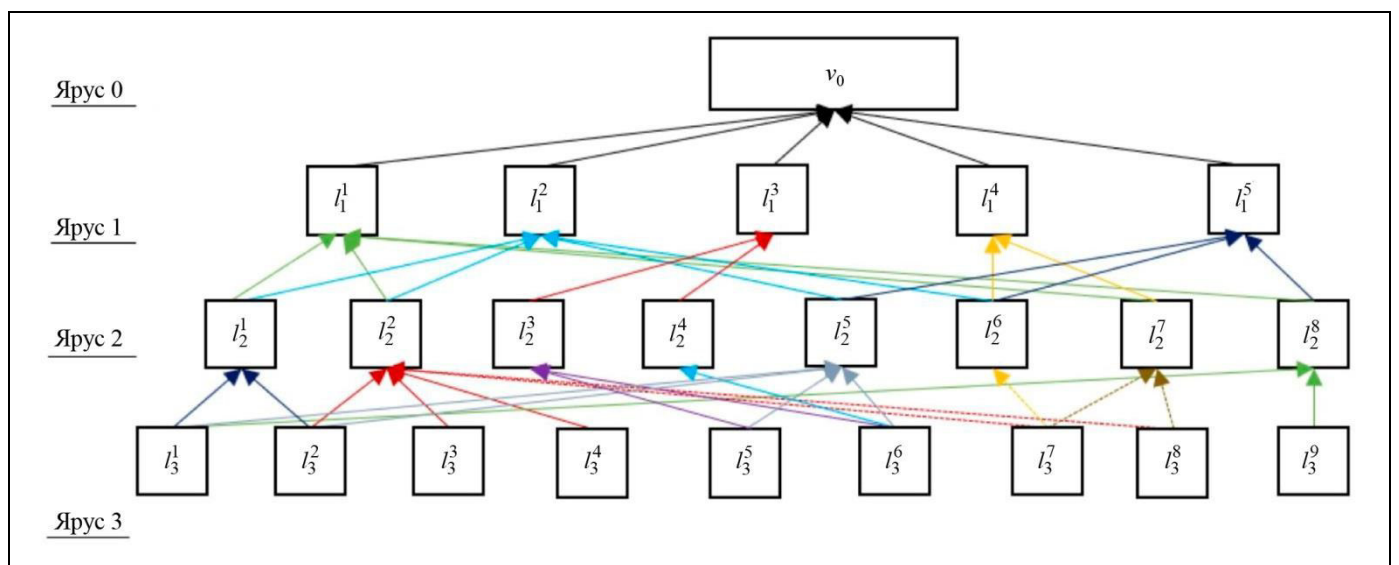


Рис. 3. Иерархическая декомпозиция риска столкновения исправного воздушного судна с землей

Таблица 4

Перечень вершин яруса 1

L_1	Расшифровка	Ссылка на источник
l_1^1	Неверные действия при управлении воздушным судном, усталость пилота, сенсорные иллюзии и потеря ситуационной осведомленности	[58, 63]
l_1^2	Ограничение обзора, потеря ориентиров, ошибка пилота при посадке или взлете, схема неточного захода на посадку и недостаточная документация	[58, 63]
l_1^3	Неверные инструкции пилоту, недопонимание ситуации, использование фразеологии (стандартной и нестандартной)	[58, 63]
l_1^4	Полет в неблагоприятных условиях окружающей среды, условия ограниченной метеорологической видимости при отсутствии видимости наземных ориентиров, несоответствие условий для взлета (посадки), потеря контроля над судном при посадке	[58, 63]
l_1^5	Проблемы с оборудованием воздушного судна: радиочастотные помехи для работы глобальной навигационной спутниковой системы, повреждение (искажение) систем предупреждения о близости с землей, радиовысотомеров. Потеря управления воздушным судном, невозможность корректировать траекторию	[58, 63]

Таблица 5

Перечень вершин яруса 2

L_2	Расшифровка	Причинно-следственная связь с вершинами яруса 1	Ссылка на источник
l_2^1	Неадекватные сбои в CRM-системе: скрытие ошибок. Невыявление потенциальных угроз, нереагирование (запоздалое реагирование) на предупреждение о близости с землей	l_1^1	[68, 69]
		l_1^2	[70, <i>ALAR Briefing Note 2.1 – Человеческий фактор</i>]
l_2^2	Ошибки пилота: неправильное управление, неадекватные действия летного экипажа – продолжение снижения ниже минимальной высоты, неверные расчеты, неверное взаимодействие с автоматикой, несоблюдение процедур, усталость, дезориентация, отсутствие осведомленности, стресс	l_1^1	[70, <i>ALAR Briefing Note 2.1 – Человеческий фактор</i>]
		l_1^2	[68, 69]
l_2^3	Отсутствие органа, обслуживающего воздушные движения или ошибка наземной службы: неправильная подготовка ВПП, некорректная информация о метеоусловиях	l_1^3	[58, 68, 69]
l_2^4	Ночь и сложные метеоусловия, аварийные ситуации на земле: обвалы, пожары, землетрясения	l_1^3	[68, 69]
l_2^5	Состояния ВПП (лед, слякоть, снег, вода), ледяные отложения: наледь на крыльях, стабилизаторах, лобовом стекле (прогнозируемый фактор)	l_1^2	[70, <i>Руководство по оценке степени риска</i>]
		l_1^5	[70, <i>Руководство по оценке степени риска</i>]
l_2^6	Нарушение метеорологического минимума при взлете, посадке, состоянии ВПП (лед, слякоть, снег, вода), ледяные отложения – наледь на крыльях, стабилизаторах, лобовом стекле (случайный погодный фактор)	l_1^2	[70, <i>Руководство по оценке степени риска при заходе на посадку</i>]
		l_1^4	[70, <i>Руководство по оценке степени риска при заходе на посадку</i>]
		l_1^5	[70, <i>Руководство по оценке степени риска при заходе на посадку</i>]



Окончание табл. 5

l_2^7	Сильный ветер: порывы ветра, турбулентность, сдвиг ветра, сильный боковой ветер, попутные ветры	l_1^1	[63; 70, <i>ALAR Briefing Note 8.7 – Посадка при боковом ветре</i>]
		l_1^4	[70, <i>ALAR Briefing Note 8.7 – Посадка при боковом ветре</i>]
l_2^8	Неисправность оборудования: сбой в работе систем управления полетом, навигации, связи, гидравлики, двигателей, в системах предупреждения о близости с землей, радиовысотомеров	l_1^1	[68; 69; 70, <i>контрольный перечень CFIT</i>]
		l_1^5	[68; 69; 70, <i>контрольный перечень CFIT</i>]

Таблица 6

Перечень вершин яруса 3

L_3	Расшифровка	Причинно-следственная связь с вершинами яруса 2	Комментарий	Ссылка на источник
l_3^1	Культура безопасности: отсутствие культуры безопасности, низкий уровень культуры компании, игнорирование рисков, нежелание сообщать о проблемах	l_2^1	—	[68; 69; 70, <i>ALAR Briefing Note 2.1 – Человеческий фактор</i>]
		l_2^5		
		l_2^8		
l_3^2	Недостаточная подготовка экипажа: недостаток опыта, неполное знание процедур, недостаточная тренировка	l_2^1	—	[58, 63, 68–70]
		l_2^2		
		l_2^5		
l_3^3	Усталость экипажа: длительные перелеты, смены часовых поясов, недостаток сна	l_2^2	—	[58]
l_3^4	Болезнь экипажа: вирусные или бактериальные инфекции	l_2^2	—	[58]
l_3^5	Неэффективная система управления: недостаточная координация действий между экипажем, диспетчерами, наземной службой	l_2^3	—	[58, 63, 68–70]
		l_2^5		
l_3^6	Недостаточная техническая поддержка: отсутствие своевременного технического обслуживания, ремонта (аэропорт)	l_2^3	—	[70]
		l_2^4		
		l_2^5		
l_3^7	Плохая видимость: туман, дождь, снег, гроза, дым	l_2^2	Работает только в совокупности с одной или несколькими вершинами яруса 3	[70, <i>Руководство по оценке степени риска</i>]
		l_2^6		
		l_2^7		
l_3^8	Неблагоприятная топография: горные хребты, холмы, леса, водоемы	l_2^2	Работает только в совокупности с одной или несколькими вершинами яруса 3	[63]
		l_2^7		
l_3^9	Недостаточная техническая поддержка: отсутствие своевременного технического обслуживания, ремонта, модернизации (флот)	l_2^8	—	[70]

3.2. Комплексная оценка риска

столкновения исправного воздушного судна с землей на основе иерархической декомпозиции риска

Прежде всего, требуется определить порядок агрегирования компонентов риска в вершинах яруса 2, т. е. какие вершины следует сворачивать для получения значений оценок вершин яруса 1. Для этого построим матрицы B_3 и D_3 . Их размерность составляет 255×511 . Рассчитаем векторы $\vec{S}(B_3)$, $\vec{S}(D_3)$ и вектор показателей зависимости $\vec{Y}_2$. Фрагмент показателей зависимости представлен в табл. 7. Для сокращения размерности таблицы не указаны показатели зависимости вершин яруса 2 со значением 0.

Для тех вершин яруса 1, что имеют только две входящие дуги (l_1^3, l_1^4), порядок свертки определен естественным образом. Для остальных – это вершины l_1^1, l_1^2, l_1^5 – воспользуемся алгоритмом, описанным в п. 2.2. Некоторые из получившихся дихотомических иерархических подструктур приведены на рис. 4.

Повторим действия алгоритма для построения дерева комплексной оценки риска столкновения исправного воздушного судна с землей. Строим матрицы B_2 и D_2 , размерности обеих – 31×255 . Рассчитываем значения векторов $\vec{S}(B_2)$, $\vec{S}(D_2)$. Затем вычислим вектор $\vec{Y}_1$. В табл. 8 приведены

показатели зависимости вершин ярусов 1 и 2 и порядок их свертки.

Таблица 7

Рассчитанные значения показателя зависимости подмножеств вершин яруса 2

Подмножества вершин	Значение показателя зависимости, округление до 4-го знака после запятой
l_2^1, l_2^2	0,0303
l_2^1, l_2^5	0,2
l_2^1, l_2^8	0,2
l_2^2, l_2^5	0,0222
l_2^2, l_2^7	0,0322
l_2^3, l_2^4	0,3333
l_2^3, l_2^5	0,2
l_2^4, l_2^5	0,0666
l_2^5, l_2^8	0,0588
l_2^1, l_2^2, l_2^5	0,0222
l_2^1, l_2^5, l_2^8	0,0588
l_2^3, l_2^4, l_2^5	0,0666

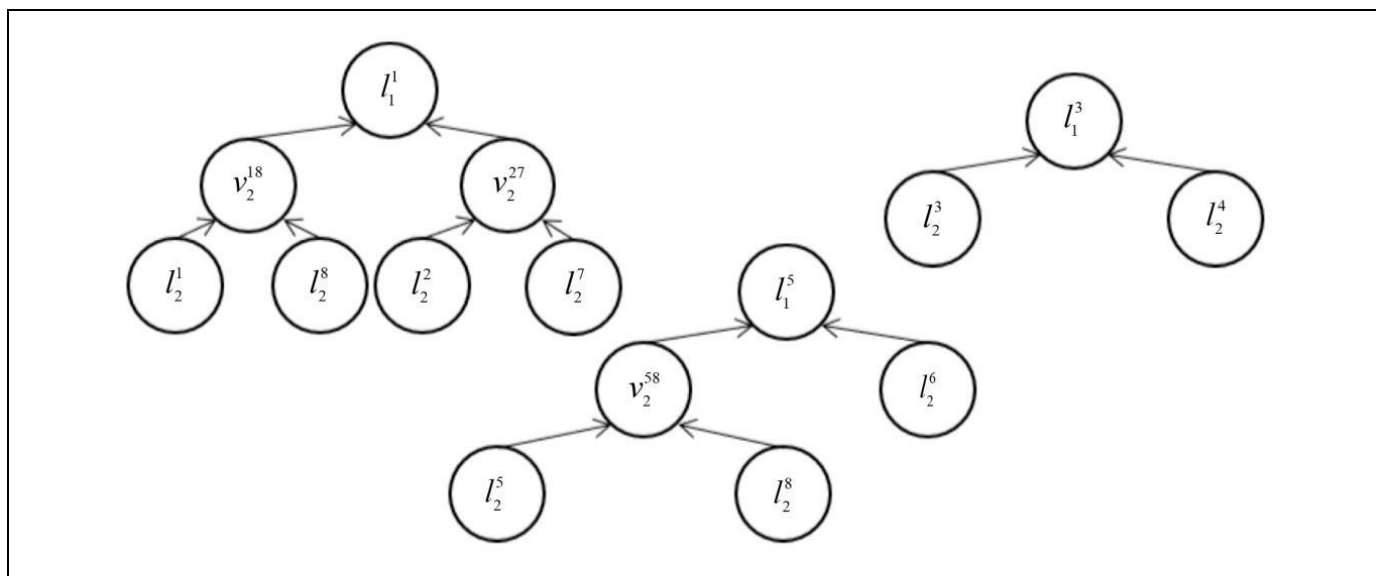


Рис. 4. Некоторые структуры комплексной оценки для вершин яруса 1

Таблица 8

**Рассчитанные значения показателя зависимости
подмножеств вершин яруса 1**

Подмно- жества вершин	Значение показателя зави- симости, округление до 4-го знака после запятой	Порядок свертки
l_1^1, l_1^2	0,1794	—
l_1^1, l_1^3	0	3
l_1^1, l_1^4	0,0588	—
l_1^1, l_1^5	0,0476	—
l_1^2, l_1^4	0,0303	—
l_1^2, l_1^5	0,2258	1
l_1^4, l_1^5	0,1111	—
l_1^1, l_1^2, l_1^5	0,0256	—
l_1^2, l_1^4, l_1^5	0,0303	2

На основании значений компонент вектора Y_1 можем построить дерево комплексной оценки интегрального риска выбранного авиационного происшествия. Корневой вершиной является интегральный риск, а листья – вершины яруса 1, значения оценок которых найдены на основании предыдущих шагов. Полученная дихотомическая структура представлена на рис. 5. Как видно из табл. 8,

пара вершин l_1^2, l_1^5 сворачивается в первую очередь, так как значение показателя у этой пары вершин является максимальным. Следом добавляем вершину l_1^4 к объединенной вершине v_1^{25} , так как значение показателя зависимости комбинации этих вершин является максимальным среди всех ранее несвернутых вершин. В последнюю очередь сворачиваем оставшиеся несвернутые вершины l_1^1 и l_1^3 , получая вершину-агрегат v_1^{13} .

Пример дихотомической свертки комплексной оценки риска столкновения исправного воздушно-го судна с землей приведен для иллюстрации предлагаемого подхода. Тем не менее, дихотомические свертки широко используются в задачах управления рисками [80, 81], а вариант с авиационными происшествиями, рассматриваемый в настоящей статье, может быть использован специалистами службы безопасности полетов для оценки текущего уровня риска. На основе оценки уровня рисков ЛПР сможет принимать решение о выборе управляющего воздействия, в том числе в рамках ГОСТ и отраслевых стандартов.

В настоящей работе не предлагается оптимальная структура. Авторы допускают, что в случае отсутствия единственности решения, когда показатели зависимости равнозначны или равны нулю, попарно сворачивать следует критерии на основании схожести природы возникновения (экипаж, наземные службы, погодные условия или технологический фактор).

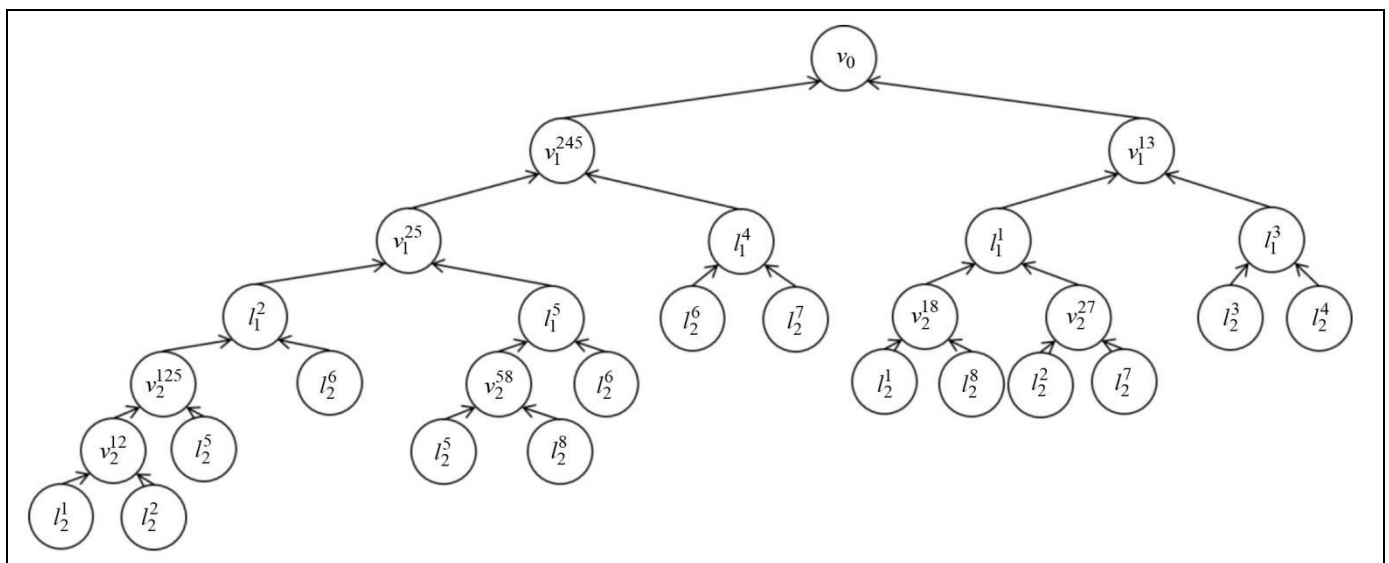


Рис. 5. Дихотомическая свертка комплексной оценки риска столкновения исправного воздушного судна с землей

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен алгоритм идентификации графа дихотомической свертки компонентов риска с целью определения порядка их агрегирования. Суть его заключается в преобразовании заданной экспертами иерархической декомпозиции риска, отражающей причинно-следственные связи его компонентов, в дихотомическую иерархию путем добавления новых вершин-агрегатов. Порядок агрегирования при этом выбирается исходя из показателя близости сворачиваемых компонентов, значение которого определяется общностью связей с «причинными» вершинами, т. е. находящимися на следующем уровне декомпозиции. Число уровней при этом в общем случае не ограничено.

Предложенный алгоритм является расширением классического метода комплексного оценивания. Необходимость расширения обусловлена тем, что сам по себе метод не предусматривает автоматической генерации структур – эта работа возлагается на экспертов – а известные публикации по методам генерации деревьев комплексного оценивания не учитывают предметную область системы. Работоспособность алгоритма продемонстрирована на примере сложной организационной системы – авиакомпании, а в качестве декомпозируемого риска был выбран риск столкновения исправного воздушного судна с землей.

Отметим, что рассматриваемый в настоящей работе вариант алгоритма полагает компоненты риска равнозначными. В дальнейших работах авторы планируют рассмотреть более общий вариант алгоритма, позволяющий выбирать порядок агрегирования компонентов риска в случае, когда значение показателя близости, рассчитанное в предположении равнозначности причинных компонентов, не позволяет его однозначно идентифицировать (например, требуется свернуть три вершины с попарно равными значениями этого показателя). Вопросы идентификации оптимальной структуры и ее валидации, а также разработки устойчивых признаков для сравнительного анализа и отбора одной из нескольких структур требуют отдельного рассмотрения и будут освещены в последующих работах авторов.

Также следует отметить еще одно ограничение: не для каждой системы существует причинно-следственный граф. Использование предложенного алгоритма может быть затруднительно в плохо формализуемых областях управления рисками, например социальных, политических, экономиче-

ских и иных системах, где причинно-следственные связи не закреплены в нормативных источниках.

С точки зрения практики предложенный алгоритм автоматизирует решение задачи построения структуры иерархии комплексного оценивания, что, во-первых, снижает нагрузку на эксперта, а во-вторых, существенно снижает вариативность структур в случае, если экспертов несколько.

ЛИТЕРАТУРА

1. Landoll, D. The Security Risk Assessment Handbook: A Complete Guide for Performing Security Risk Assessments. 3rd Edition. – Boca-Raton: CRC Press, 2021. – 512 p.
2. Gunes, B., Kayisoglu, G., Bolat, P. Cyber Security Risk Assessment for Seaports: A case Study of a Container Port // Computers & Security. – 2021. – Vol. 103, no. 1. – Art. no. 102196.
3. Fan, Z., Xu, F. Health Risks of Occupational Exposure to Toxic Chemicals in Coal Mine Workplaces Based on Risk Assessment Mathematical Model Based on Deep Learning // Environmental Technology & Innovation. – 2021. – Vol. 22, no. 6. – Art. no. 101500.
4. Hardy, A., Benford, D., Halldorsson, T., et al. Guidance on the Use of the Benchmark Dose Approach in Risk Assessment // EFSA Journal. – 2018. – Vol. 16, no. 7. – Art. no. 5327.
5. ISO/IEC 27005:2022(EN) Information Security, Cybersecurity and Privacy Protection – Guidance on Managing Information Security Risks. – Geneva: International Organization for Standardization, 2022.
6. Barraza de la Paz, J.V., Rodríguez-Picón, L.A., Morales-Rocha, V., Torres-Argüelles, S.V. A Systematic Review of Risk Management Methodologies for Complex Organizations in Industry 4.0 and 5.0 // Systems. – 2023. – Vol. 11, no. 5. – Art. no. 218.
7. Wahyudi, D., Taryana, T., Tawil, M.R., et al. SWOT Analysis in Business Risk Awareness in MSMEs // TECHNOVATE: Journal of Information Technology and Strategic Innovation Management. – 2024. – Vol. 1, no. 2. – P. 56–61.
8. Резчиков А.Ф., Цвиркун А.Д., Дранко О.И. и др. Анализ безопасности функционирования и оценка рисков в сложных транспортных системах на основе модельно ориентированного подхода // Труды 15-й Междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2015). – Москва, 2022. – С. 905–911. [Rezchikov, A.F., Cvirkun, A.D., Dranko, O.I., et al. Analiz bezopasnosti funkcionirovaniya i ocenka riskov v slozhnykh transportnykh sistemah na osnove model'no orientirovannogo podhoda // Trudy 15-i Mezhdunaradnoi konferentsii "Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnykh system" (MLSD'2015). – Moscow, 2022. – P. 905–911. (In Russian)]
9. Сиротюк В.О. Анализ и оценка рисков информационной безопасности организаций // Материалы 28-й Междунар. конф. «Проблемы управления безопасностью сложных систем». – Москва, 2020. – С. 232–238. [Sirotyuk, V.O. Analiz i ocenka riskov informacionnoj bezopasnosti organizacij // Materialy 28-i Mezhdunarodnoi konferentsii "Problemy upravleniya bezopasnost'ju slozhnykh system". – Mosocow, 2020. – P. 232–238. (In Russian)]



10. Горина М.С. Оценка рисков и угроз экономической безопасности предприятия // Естественно-гуманитарные исследования. – 2024. – № 3 (53). – С. 113–119. [Gorina, M.S. Assessment of Risks and Threats to the Economic Security of the Enterprise // Natural-Humanitarian Studies. – 2024. – No. 3 (53). – P. 113–119. (In Russian)]
11. Красных В.А. Анализ методов оценки рисков в строительном производстве // Молодежь в науке и творчестве: Материалы междунар. науч. форума. – Гомель, 2021. – С. 138–140. [Krasnyh, V.A. Analiz metodov ocenki riskov v stroitel'nom proizvodstve // Molodezh' v nauke i tvorchestve: Materialy mezhdunaradnogo nauchnogo foruma. – Gomel', 2021. – P. 138–140. (In Russian)]
12. Тетеринец Т.А. Интегральная оценка рисков устойчивого развития регионов // Наука, образование и бизнес: новый взгляд или стратегия интеграционного взаимодействия: Материалы междунар. науч.-практ. конф., посвященной 80-летию со дня рождения первого Президента Кабардино-Балкарской Республики Валерия Мухамедовича Кокова. – Нальчик, 2021. – С. 138–141. [Tsetsirtnets, T.A. Integrated Risk Assessment of Sustainable Development of Regions // Science, Education and Business: A New View or Strategy for Integration Interaction: Materials of the International Scientific and Practical Conference dedicated to the 80th anniversary of the birth of the first President of the Kabardino-Balkarian Republic Valery Mukhamedovich Kokov. – Nalchik, 2021. – P. 138–141. (In Russian)]
13. Глухов В.В., Войтюк В.Н. Модель комплексной оценки рисков проекта по созданию промышленных парков // π-Economy. – 2023. – Т. 16, № 1. – С. 114–127. [Glukhov, V.V. and Voytyuk, V.N. Comprehensive Risk Assessment Model for an Industrial Park Project // π-Economy. – 2023. – Vol. 16, no. 1. – P. 114–127. (In Russian)]
14. Xiao, L., Huang, G., Zhang, G. An Integrated Risk Assessment Method Using Z-fuzzy Clouds and Generalized TODIM // Quality and Reliability Engineering International. – 2022. – Vol. 38, no. 4. – P. 1909–1943.
15. Chang, J., Yin Z., Zhang, Z., et al. Multi-disaster Integrated Risk Assessment in City Range—A Case Study of Jinan, China // International Journal of Environmental Research and Public Health. – 2023. – Vol. 20, no. 4. – Art. no. 3483.
16. López-Saavedra, M., Martí, J. Reviewing the Multi-hazard Concept. Application to Volcanic Islands // Earth-Science Reviews. – 2023. – Vol. 236, no. 4. – Art. no. 104286.
17. Куликова Е.Ю. Методика интегральной оценки риска в шахтном и подземном строительстве // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2021. – № 2-1. – С. 124–133. [Kulikova, E.Yu. Methods of Forming an Integral Risk Assessment in Mine and Underground Construction // MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin. – 2021. – No. 2-1. – P. 124–133. (In Russian)]
18. Калашников А.О. Модели и методы организационного управления информационными рисками корпораций. – М.: ЭГВЕС, 2011. – 312 с. [Kalashnikov, A.O. Modeli i metody organizacionnogo upravlenija informacionnymi riskami korporacij. – Moscow: JeGVES, 2011. – 312 s. (In Russian)]
19. Юлгушев А.М. Иерархическая классификация предпринимательских рисков // Экономика и управление. – 2024. – Т. 30, № 3. – С. 394–402. [Yulgushev, A.M. Hierarchical Classification of Entrepreneurial Risks // Economics and Management. – 2024. – Vol. 30, no. 3. – P. 394–402. (In Russian)]
20. Брыкалов С.М., Трифонов В.Ю., Гурьева Е.А. Разработка классификатора рисков как этап успешного риск-менеджмента // Проблемы анализа риска. – 2022. – Т. 18, № 6. – С. 40–53. [Brykalov, S.M., Trifonov, V.Ju., Gureva, E.A. Development of a Risk Classifier as a Stage of Successful Risk Management // Issues of Risk Analysis. – 2022. – Vol. 18, no. 6. – P. 40–53. (In Russian)]
21. Чубурова Ж.Т., Чакеева Д.К. Факторы, влияющие на экономическую эффективность деятельности предприятия // М. Рыскулбеков атындагы Кыргыз экономикалык университетинин кабарлары. – 2021. – № 1. – С. 144–146. [Chakeyeva, D.K. Factors Affecting the Economic Efficiency of the Enterprise // Bulletin of Kyrgyz Economic University. – 2021. – No. 1. – P. 144–146. (In Russian)]
22. Chernov, I.V. Scenario-Cognitive Modeling of Complex Systems Based on Event-Driven Identification of Factor Dynamics // Control Sciences. – 2023. – No. 3. – P. 55–64.
23. Калашников А.О., Аникина Е.В. Модели управления информационными рисками сложных систем // Информация и безопасность. – 2020. – Т. 23, № 4. – С. 191–202. [Kalashnikov, A.O., Anikina, E.V. Information Risk Management Models of Complex Systems // Information and Security. – 2020. – Vol. 23, no. 4. – P. 191–202. (In Russian)]
24. Корнеев В.П. Метод решения задачи многокритериального оценивания и выбора эффективного инновационного проекта // Инновационная экономика и менеджмент: методы и технологии: Материалы 5-й Междунар. науч.-практ. конф. – Москва, 2020. – С. 251–254. [Korneenko, V.P. Method for Solving the Multi-Criterial Evaluation Problem and Selecting an Effective Innovative Project // Innovacionnaja jekonomika i menedzhment: metody i tehnologii: Materialy 5-j Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii – Moscow, 2020. – P. 251–254. (In Russian)]
25. Баркалов С.А., Новосельцев В.И., Половинкин А.И., Шипилов В.Н. Модели управления конфликтами и рисками: монография / под ред. Д.А. Новикова. – Воронеж: Научная книга, 2008. – 495 с. [Barkalov, S.A., Novoseltsev, V.I., Polovinkin, A.I., Shipilov, V.N. Modeli upravlenija konfliktami i riskami: monografija / pod red. D.A. Novikov – Voronezh: Nauchnaja kniga, 2008. – 495 s. (In Russian)]
26. Бурков В.Н., Коргин Н.А., Сергеев В.А. Идентификация механизмов комплексного оценивания на основе унитарного кода // Управление большими системами: сборник трудов. – 2020. – Вып. 87. – С. 67–85. [Burkov, V.N., Korgin, N.A., Sergeev, V.A. One-Hot Approach to Identification of Integrated Rating Mechanisms // Large-Scale Systems Control. – 2020. – Iss. 87. – P. 67–85. (In Russian)]
27. Korgin, N.A., Rozhdestvenskaya, S. Concordant Approach for R&D Projects' Evaluation and Ranking for Formation of Programs // Proceedings of the 2017 IEEE 11th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). – 2017. – P. 1–5.
28. Трапезников В.А., Гореликов Н.И., Бурков В.Н. и др. Комплексный подход к управлению научно-техническим прогрессом в отрасли // Вестник Академии наук СССР. – 1983. – № 3. – С. 33–43. [Trapeznikov, V.A., Gorelikov, N.I., Burkov, V.N., et al. Kompleksnyj podhod k upravleniju nauchno-tehnicheskim progressom v otrasli // Vestnik Akademii nauk SSSR. – 1983. – No. 3. – P. 33–43. (In Russian)]
29. Фийашко К.С., Кривогина Д.Н. Метод комплексного оценивания экологической составляющей среды на примере Кировского района г. Пермь // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. – 2021. – Т. 11. – № 1. – С. 84–93. [Fiyashko, K.S., Krivogina, D.N. A Method for a Comprehensive Assessment of the Ecological Component of the

- Environment Based on a Case Study of the Kirovsky District of the Perm City // *Izvestiya vuzov. Investitsii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost'*. – 2021. – Vol. 11, no. 1. – P. 84–93. (In Russian)]
30. Алферов В.И., Баркалов С.А., Бурков В.Н. и др. Прикладные задачи управления строительными проектами. – М.: Ай Пи Эр Медиа, 2021. – 784 с. [Alferov, V.I., Barkalov, S.A., Burkov, V.N., et al. *Prikladnye zadachi upravleniya stroitel'nymi proektami*. – М.: IPR Media, 2021. – 784 s. (In Russian)]
31. Андронникова Н.Г., Бурков В.Н., Леонтьев С.В. Комплексное оценивание в задачах регионального управления – М.: ИПУ РАН, 2002. – 58 с. [Andronnikova, N.G., Burkov, V.N., Leont'ev, S.V. *Kompleksnoe ocenivanie v zadachah regional'nogo upravleniya* – М.: IPU RAN, 2002. – 58 s. (In Russian)]
32. Стерник С.Г., Алексеев А.О., Алексеева И.Е., Ясницкий В.Л. Сравнительный анализ методов экономико-математического моделирования массовой оценки жилой недвижимости // *Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века*. – 2021. – С. 215–221. [Sternik, S.G., Alekseev, A.O., Alekseeva, I.E., Jasnitskiy, V.L. *Sravnitel'nyy analiz metodov jekonomiko-matematicheskogo modelirovaniya massovoj ocenki zhiloy nedvizhimosti* // *Iskusstvennyy intellekt v reshenii aktual'nyh social'nyh i jekonomicheskikh problem XXI veka*. – 2021. – P. 215–221. (In Russian)]
33. Alekseev, A. Identification of Integrated Rating Mechanisms with Non-serial Structures of Criteria Tree // *Proceedings of 2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency*. – Liptsk, 2021. – P. 599–603. – DOI: 10.1109/SUMMA53307.2021.9632221
34. Alekseev, A.O. Identification of Integrated Rating Mechanisms Based on Training Set // *Proceedings of the 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency*. – 2020. – P. 398–403. – DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280751
35. Burkov, V.N., Sergeev, V.A., Korgin, N.A. Identification of Integrated Rating Mechanisms as Optimization Problem // *IEEE Access*. – 2020. – P. 1–5. – DOI: 10.1109/MLSD49919.2020.9247638
36. Korgin, N., Sergeev, V. Identification of Integrated Rating Mechanisms on Complete Data Sets // *Proceedings of the IFIP International Conference on Advances in Production Management Systems*. – Cham: Springer International Publishing, 2021. – P. 610–616.
37. Сергеев В.А., Коргин Н.А. Исследование чувствительности дискретной функции для решения задачи синтеза МКО на основе дискретных наборов данных // XVI Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2023): Материалы мультиконференции. В 4-х томах. – Волгоград, 2023. – Т. 2. – С. 345–348. [Sergeev, V.A., Korgin, N.A. *Issledovanie chuvstvitel'nosti diskretnoj funkcii dlja reshenija zadachi sinteza MKO na osnove diskretnyh naborov dannyh* // XVI Vserossijskaja mul'tikonferencija po problemam upravleniya (MKPU-2023): Materialy mul'tikonferencii. V 4-h tomah. – Volgograd, 2023. – Vol. 2. – P. 345–348. (In Russian)]
38. Сергеев В.А. Разработка методов анализа и синтеза механизмов комплексного оценивания на основе наборов дискретных данных: специальность 2.3.4 «Управление организационными системами»: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Москва, 2024. – 120 с. [Sergeev, V.A. *Razrabotka metodov analiza i sinteza mehanizmov kompleksnogo ocenivaniya na osnove naborov diskretnyh dannyh: special'nost' 2.3.4 «Upravlenie organizacionnymi sistemami»*: dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kandida-ta tehniceskikh nauk. – Moscow, 2024. – 120 s. (In Russian)]
39. Sergeev, V.A., Korgin, N.A. Identification of Integrated Rating Mechanisms as an Approach to Discrete Data Analysis // *IFAC-PapersOnLine*. – 2021. – Vol. 54, Iss. 13. – P. 134–139.
40. Sergeev, V.A. Design of Integrated Rating Mechanisms Based on Separating Decomposition // *Control Sciences* – 2022. – No. 6. – P. 2–10.
41. Блачев Р.Н. Особенности процедуры бинарной агрегации многокритериальных экспертных оценок // *Автоматика и телемеханика*. – 1997. – № 5. – С. 126–132. [Blachev, R.N. *Peculiarities of the Binary Aggregation Procedure for Multi-criterial Expert Decisions* // *Automation and Remote Control*. – 1997. – Vol. 58, no. 5. – P. 817–821.]
42. Левинталь А.Б., Ефременко В.Ф., Гусев В.Б. и др. Комплексное оценивание и планирование развития региона. – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2006. – 52 с. [Levintal', A.B., Efremenko, V.F., Gusev, V.B., et al. *Kompleksnoe otsenivanie i planirovanie razvitiia regiona*. – Moscow: Institut problem upravleniia im. V.A. Trapeznikova RAN, 2006. – 52 s. (In Russian)]
43. Бурков В.Н., Гоацианский Е.В., Дзюбко С.И., Щепкин А.В. Модели и механизмы управления безопасностью. – М.: СИНТЕГ, 2001. – 160 с. [Burkov, V.N., Goacianskiy, E.V., Dzjubko, S.I., Shhepkin, A.V. *Modeli i mehanizmy upravleniya bezopasnost'ju*. – Moscow: SINTEG, 2001. – 160 s. (In Russian)]
44. Буркова И.В., Толстых А.В., Уандыков Б.К. Модели и методы оптимизации программ обеспечения безопасности // *Проблемы управления*. – 2005. – № 1. – С. 51–55. [Burkova, I.V., Tolstykh, A.V., and Ouandykov, B.K. *Models and Methods of Security Insurance Programs* // *Control Sciences*. – 2005. – No. 1. – P. 51–55. (In Russian)]
45. Бурков В.Н., Буркова И.В., Губко М.В. и др. Механизмы управления: управление организацией: планирование, организация, стимулирование, контроль: учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2013. – 216 с. [Burkov, V., Goubko, M., Kondrat'ev, V., et al. *Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations*. – New York: Nova Science Publishers, 2013.]
46. Бурков В.Н., Буркова И.В., Понок М.В. Метод дихотомического программирования // *Управление большими системами*. – 2004. – № 9. – С. 57–75. [Burkov, V.N., Burkova, I.V., Popok, M.V. *The Method of Dychotomic Programming* // *Large-Scale Systems Control*. – 2004. – No. 9. – P. 57–75. (In Russian)]
47. Буркова И.В. Метод дихотомического программирования в задачах управления проектами. – Воронеж: ВГАСУ, 2004. – 100 с. [Burkova, I.V. *Metod dikhotomicheskogo programmirovaniya v zadachakh upravleniya proektami*. – Voronezh: VGASU, 2004. – 100 s. (In Russian)]
48. Рей А.С., Широкий А.А. Комплексная оценка информационных рисков. II: Алгоритм идентификации структуры дерева комплексной оценки интегрального информационного риска // *Управление большими системами*. – 2024. – Вып. 111. – С. 97–117. [Rey, A.S., Shirokiy, A.A. *Complex Information Risks Assessment. II: Algorithm for Identifying the Structure of the Tree of Integrated Information Risk Assess-*



- ment // Large-Scale Systems Control – 2024. – Iss. 111. – P. 97–117. (In Russian)]
49. Богомолов А.С., Иващенко В.А., Кушиников В.А. и др. Моделирующий комплекс для анализа неблагоприятных сочетаний событий в авиационных транспортных системах // Проблемы управления. – 2018. – № 1. – С. 74–79. [Bogomolov, A.S., Ivashchenko, V.A., Kushnikov, V.A. et al. Modeling Complex for Critical Events Combinations Analysis in Aviation Transport Systems // Control Sciences. – 2018. – No. 1. – P. 74–79. (In Russian)]
 50. Filimonyuk, L., Bobrov, D., Baklashov, A., Zavalov, E. The Methods for Aviation Systems' Safety Analysis during Combinations of Dangerous Heterogeneous Events Including Human Factor // Advances in Systems Science and Applications. – 2025. – Vol. 2025. – Iss. 1. – P. 99–107.
 51. Filimonyuk, L. Models and Methods for a Safe Aviation Transport Systems' Functioning Subject to the Human Factor // IFAC-PapersOnLine. – 2021. – Vol. 54. – P. 627–630.
 52. Зубков Б.В., Макаров В.П. Вероятностная оценка ошибки при техническом обслуживании воздушных судов // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. – 2011. – № 174. – С. 12–17. [Zubkov, B.V., Makarov, V.P. Probability Estimation of the Human Error at Aircraft Maintenance // Civil Aviation High Technologies. – 2011. – No. 174. – P. 12–17. (In Russian)]
 53. Измайлова Д.З., Вагнер Р.А., Посмык А.О. Эксплуатационные риски на воздушном транспорте и в деятельности аэропорта // Управление, экономика и право: проблемы, исследования, результаты: Сб. статей II Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза, 2022. – С. 138–141. [Izmailova, D.Z., Wagner, R.A., Posmyk, A.O. Operational risks in air transport and airport operations // Upravlenie, jekonomika i pravo: problemy, issledovanija, rezul'taty: Sbornik statej II Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii – Penza, 2022. – P. 138–141. (In Russian)]
 54. Отчет о состоянии безопасности полетов в гражданской авиации государств-участников соглашения о гражданской авиации и об использовании воздушного пространства в первом полугодии 2025 г. – Москва: Межгосударственный авиационный комитет, 2025. [Flight Safety Level of the Contracting States of the Agreement on Civil Aviation and Use of Airspace in the First Half of 2025. – Moscow: Interstate Aviation Committee, 2025. (In Russian)]
 55. IATA Annual Security Report. – 2024th edition. – Montreal: International Air Transport Association, 2024.
 56. Правила расследования авиационных происшествий и инцидентов с гражданскими воздушными судами в Российской Федерации: текст с изменениями на 16 мая 2024 года (утв. Постановлением правительства от 16 июня 1998 № 609). – М: Российская газета, 1998. [Rules for the Investigation of Aviation Accidents and Incidents involving Civil Aircraft in the Russian Federation: text as amended on May 16, 2024 (approved by the Government of the Russian Federation By Government Decree No. 609 of June 16, 1998). – Moscow: Rossiiskaya Gazeta, 1998. (In Russian)]
 57. Annex 13 to the Convention on International Civil Aviation. Aircraft Accident and Incident Investigation. – Montreal: International Civil Aviation Organization, 2016.
 58. ICAO Doc 10004. Global Aviation Safety Plan 2026–2028. – Montreal: International Civil Aviation Organization, 2025.
 59. Карсункин Е.В. Безопасность полетов. Классификация и категоризация авиационных событий: учебно-методическое пособие. – Ульяновск: УИ ГА, 2024. – 66 с. [Karsunkin, E.V. Bezopasnost' poletov. Klassifikacija i kategorizacija aviacionnyh sobytij: uchebno-metodicheskoe posobie. – Ul'janovsk: UI GA, 2024. – 66 s. (In Russian)]
 60. Бурков В.Н., Буркова И.В., Щепкин А.В. Метод синтеза системы комплексного оценивания // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2020. – № 4. – С. 63–72. [Burkov, V.N., Burkova, I.V., Shchepkin, A.V. Method of Synthesis of the Integrated Assessment System // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics. – 2020. – No. 4. – P. 63–72 (In Russian)]
 61. ICAO Doc 7300/9. Convention on International Civil Aviation. – Montreal: International Civil Aviation Organization, 2006.
 62. ICAO Doc 10162. Manual on Monitoring Implementation of Regional and National Aviation Safety Plans. – Montreal: International Civil Aviation Organization, 2023.
 63. ICAO Doc 9859-AN/474. Safety Management Manual. – Montreal: International Civil Aviation Organization, 2018.
 64. ICAO Doc 10161. Global Aviation Safety Roadmap (2023–2025). – Montreal: International Civil Aviation Organization, 2023.
 65. ICAO Doc 9422. Accident Prevention Manual. – Montreal: International Civil Aviation Organization, 1984.
 66. ICAO Doc 10011. Manual on Aeroplane Upset Prevention and Recovery Training. – Montreal: International Civil Aviation Organization, 2014.
 67. Annex 6 to the Convention on International Civil Aviation. Operation of Aircraft. Part II – International General Aviation – Aeroplanes. – 11th edition. – Montreal: International Civil Aviation Organization, 2022.
 68. A Study of Terrain Awareness Warning System Capability and Human Factors in CFIT Accidents 2005–2014. – 1st edition. – Montreal: International Air Transport Association, 2016.
 69. IATA Report. IATA Controlled Flight Into Terrain Accident Analysis Report 2008–2017 Data. – 2018th edition. – Montreal: International Air Transport Association, 2018.
 70. FSF ALAR Tool Kit. Briefing Notes 1.1–8.7 and additional presentation materials. – Moscow: Flight Safety Foundation International (Moscow), 2003. – 591 p.
 71. Российская Федерация. Законы. Воздушный кодекс: текст с изменениями на 31 июля 2025 года (принят Государственной думой 19 марта 1997). – М: Российская газета, 1997. [Air Code of Russian Federation: text as amended on July 31, 2025 (adopted by the State Duma on March 19, 1997). – Moscow: Rossiiskaya Gazeta, 1997. (In Russian)]
 72. Правила разработки и применения систем управления безопасностью полетов воздушных судов, а также сбора и анализа данных о факторах опасности и риска, создающих угрозу безопасности полетов гражданских воздушных судов, хранения этих данных и обмена ими в соответствии с международными стандартами Международной организации гражданской авиации (утв. Постановлением Правительства РФ от 12.04.2022 № 642). – М: Российская газета, 2022 – 7 с. [Decree of the Government of the Russian Federation dated April 22, 2022, no. 642 “Regulations for the Development and Application of Aircraft Safety Management Systems, the Collection and Analysis of Data on Hazard and Risk Factors Threatening the Safety of Civil Aircraft Flights, the Storage and Exchange of Such Data in Accordance with the International Standards of the International Civil Aviation Organization,” Moscow: Rossiiskaya Gazeta, 2022. (In Russian)]

73. *Правила использования воздушного пространства Российской Федерации с изменениями на 31 июля 2025 года* (утв. Постановлением Правительства РФ от 11 марта 2010 г. № 138). – М: Российская Бизнес-газета, 2010. [*The Rules for the Use of the Airspace of the Russian Federation as amended on July 31, 2025* (approved by Decree of the Government of the Russian Federation dated March 11, 2010 No. 138). – Moscow: Rossijskaja Biznes-gazeta, 2010. (In Russian)]
74. *Федеральные авиационные правила. Подготовка и выполнение полетов в гражданской авиации Российской Федерации: текст с изменениями на 29 мая 2023 года* (утв. Приказом Минтранса РФ от 31 июля 2009 № 128). – М: Российская газета, 2009. [*Federal Aviation Regulations. Preparation and Performance of Flights in the Civil Aviation of the Russian Federation: text as amended on May 29, 2023* (approved by Order of the Ministry of Transport of the Russian Federation dated July 31, 2009 No. 128). – Moscow: Rossiiskaya Gazeta, 2009. (In Russian)]
75. *Федеральные авиационные правила. Требования к членам экипажа воздушных судов, специалистам по техническому обслуживанию воздушных судов и сотрудникам по обеспечению полетов (полетным диспетчерам) гражданской авиации: текст с изменениями на 2 февраля 2024 года* (утв. Приказом Минтранса РФ от 12 сентября 2008 № 147). – М: Бюллетень нормативных актов федеральных органов исполнительной власти, 2008. [*Federal Aviation Regulations. Requirements for Aircraft Crew Members, Aircraft Maintenance Specialists and Flight Support Staff (Flight Controllers) of Civil Aviation: text as amended on February 2, 2024* (approved by Order of the Ministry of Transport of the Russian Federation No. 147 dated September 12, 2008). – Moscow: B'ulleten' normativnyh aktov federal'nyh organov ispolnitel'noj vlasti, 2008. (In Russian)]
76. *Росавиация*. Письмо от 20 декабря 2024 г., № Исх-44503/02. Информация по безопасности полетов № 11. – М., 2024. – URL: <https://sv-m.favt.ru/public/materials/9/0/2/7/9/902796554a5190f5c673549f212ec4a0.pdf> (дата обращения: 07.11.2025). [*Federal Air Transport Agency. Letter dated December 20, 2024, No. Ex-44503/02. Flight Safety Information No. 11.* – Moscow, 2024. (Accessed November 7, 2025). (In Russian)]
77. *Investigations*. Interstate Aviation Committee. – URL: <https://mak-iac.org/en/rassledovaniya/> (дата обращения: 06.11.2025). [Accessed November 6, 2025].
78. *Controlled Flight Into Terrain (CFIT). Accident Reports*. – URL: <https://aviation-safety.net/> (дата обращения: 06.11.2025). [Accessed November 6, 2025].
79. *Авдеева, З.К., Коврига С.В.* Когнитивные карты для анализа и моделирования в системе стратегического планирования государства // *Управление большими системами: сборник трудов*. – 2024. – № 111. – С. 147–178. [Avdeeva, Z., Kovri-ga, S. Fuzzy-Cognitive-Maps Analysis and Modelling in the State Strategic Planning System // *Large-Scale Systems Control*. – 2024. – No. 111. – P. 147–178. (In Russian)]
80. *Калашников А.О.* Управление информационными рисками организационных систем: механизмы комплексного оценивания // *Информационная безопасность*. – 2016. – Т. 3. – № 1. С. 315–322. [Kalashnikov, A.O. Information Risk Management of Organizational Systems: Integrated Rating Mechanisms // *Information and Security*. – 2016. – Vol. 3, no. 1. P. 315–322. (In Russian)]
81. *Харитонов В.А., Алексеев А.О.* Количественный анализ уровней риска на основе универсальной бинарной модели предпочтения лицом, принимающим решение (ЛПР) // *Вестник ПГУ. Серия: Экономика*. – 2009. – № 2. – С. 13–23. [Kharitonov, V.A., Alekseev, A.O. Quantitative Analysis of Risk Levels Based on the Universal Binary Model of Decision Maker (DM) Preference // *Perm University Herald. Economy*. – 2009. – No. 2. – P. 13–23. (In Russian)]

Статья представлена к публикации руководителем
PPC В. А. Кушиковым.

Поступила в редакцию 11.11.2025,
после доработки 22.02.2026.
Принята к публикации 08.04.2026.

Рей Анастасия Сергеевна – науч. сотрудник,

✉ a.rey@ipu.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7921-3062>

Широкий Александр Александрович – канд. физ.-мат. наук,

✉ shiroky@ipu.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9130-5541>

Авдеева Зинаида Константиновна – канд. техн. наук,

✉ avdeeva@ipu.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4517-6750>

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва

© 2026 г. Рей А. С., Широкий А. А., Авдеева З. К.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



AN ALGORITHM FOR IDENTIFYING THE DICHOTOMOUS CONVOLUTION GRAPH OF RISK COMPONENTS IN COMPLEX ORGANIZATIONAL SYSTEMS BASED ON ITS EXPERT-DEFINED HIERARCHICAL DECOMPOSITION

A. S. Rey*, A. A. Shiroky**, and Z. K. Avdeeva***

*-***Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*✉ a.rey@ipu.ru, **✉ shiroky@ipu.ru, ***✉ avdeeva@ipu.ru

Abstract. Most well-known methods and algorithms for assessing the risks of complex organizational systems are based on the independence assumption of aggregate risk components. At the same time, in practice, risks are often interrelated, i.e., a change in one risk entails a change in others. Therefore, when assessing the aggregate risk of organizational systems, their complexity—the presence of numerous interrelated risks—should be taken into account. This can be done using the integrated rating mechanism as a multicriteria assessment method. In the classical version, its components—the binary trees of criteria and the logical convolution matrices of their values—are set by experts. However, in many cases, experts cannot agree on the structure of the integrated rating tree. In such practical situations, formal methods for synthesizing the tree structure considering the system specifics are in demand. Even if a method yields a nonunique solution, it will ensure the latter's logical validity, and the results can be used in practical tasks. In this paper, the mechanism is extended by replacing the binary integrated rating tree with the dichotomous convolution of aggregate risk components of complex organizational systems, based on its expert-defined decomposition. An algorithm for identifying the dichotomous convolution graph of risk components is proposed, including construction rules and verification criteria. The theoretical results are applied to construct a system for assessing the risk of an aviation accident.

Keywords: risk assessment, aggregate risk, integrated rating, binary tree, dichotomous convolution, hierarchical risk decomposition, risk of an aviation accident.

МЕТОД ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ДЕФЕКТОВ НА ОСНОВЕ ЗОНОТОПОВ[#]

А. Н. Жирабок*, А. В. Зуев**, А. А. Проценко***

*—***Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток,

*—***Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток

*✉ zhirabok@mail.ru, **✉ alvzuev@yandex.ru, ***✉ pro293133@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача обнаружения дефектов в технических системах, описанных дискретными динамическими линейными моделями, при наличии внешних возмущений и шумов измерений с помощью теории зонотопов. Для построения диагностического зонотопа строится редуцированная (имеющая меньшую размерность) модель исходной системы, нечувствительная к внешним возмущениям. Для упрощения процедуры решения матрицы редуцированной модели ищутся в идентификационной канонической форме, что также позволяет обеспечить устойчивость модели. На основе этой формы строится уравнение, с помощью которого ищется решение минимальной размерности. В случае, когда нечувствительность к внешним возмущениям получить не удастся, ищется решение с минимальной чувствительностью к ним. На основе полученной модели строится диагностический наблюдатель, формирующий невязку для принятия решений о появлении или отсутствии дефекта. Соотношения, полученные при построении этого наблюдателя, положены в основу процедуры построения зонотопа, позволяющего обнаружить возникающие дефекты. Теоретические положения иллюстрируются примером решения задачи обнаружения дефектов в электроприводе подводного аппарата. Проведенное с помощью пакета MATLAB моделирование подтвердило корректность принятых теоретических положений и сделанных на их основе построений.

Ключевые слова: дискретные системы, дефекты, диагностические наблюдатели, невязка, возмущения, шумы измерений, зонотопы.

ВВЕДЕНИЕ

Современные технические системы нередко выполняют ответственные функции, поэтому очень желательным является постоянный контроль правильности их функционирования в процессе выполнения определенных операций с целью обнаружения дефектов, которые могут сделать выполнение этих операций невозможным. Такой контроль обычно осуществляется с помощью так называемых диагностических наблюдателей, которые представляют собой программно реализованные редуцированные модели рассматриваемых систем.

Сигнал, формируемый таким наблюдателем, сравнивается с показаниями датчиков, установленных в системе; разность этих сигналов, называ-

емая невязкой, служит индикатором правильности функционирования системы. В идеальном случае, когда внешние возмущения и шумы измерений отсутствуют, равенство невязки нулю говорит о правильном функционировании, т. е. об отсутствии дефектов, неравенство нулю – об их появлении.

В реальных системах внешние возмущения и шумы измерений всегда присутствуют, поэтому невязка не равна нулю даже при отсутствии дефектов. В этом случае для уменьшения числа ошибочных диагностических решений нередко используется адаптивный порог, с которым сравнивается сигнал невязки. Формирование такого порога – непростая задача; в последние годы она решается с помощью так называемых интервальных наблюдателей, разработанных для оценки вектора состояния многих классов систем: непрерывных линейных [1, 2], дискретных линейных [1, 3], а также нелинейных [4, 5]; в работах [3, 6, 7] наблюдатели

[#] Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 25-19-00590, <https://rscf.ru/project/25-19-00590/>.



характеризуются пониженной размерностью, в публикациях [8–10] на их основе решается задача диагностирования, где вместо одной невязки формируются два сигнала так, что при отсутствии дефектов значения одного из них становятся большими или равными нулю, второго – меньшими или равными нулю. То есть если нуль находится между невязками, то принимается решение о том, что дефектов в системе нет, в противном случае считается, что дефект появился. В отличие от адаптивного порога, значения невязок не зависят от управления, что делает процесс принятия решений о наличии или отсутствии дефектов более простым.

Кроме интервальных наблюдателей, для решения подобной задачи в последние годы активно используются так называемые зонотопы, которые представляют собой выпуклые фигуры в многомерном пространстве: в статьях [11–14] они строятся для линейных дискретных систем с постоянными параметрами, в работе [15] для систем с переменными параметрами, в публикациях [16–18] для нелинейных систем; в работе [15] с их помощью решается задача обнаружения дефектов. Центр зонотопа и порождающие его матрицы определяются на основе диагностического наблюдателя и формируемой им невязки. Решение о дефектах принимается по аналогии с интервальным наблюдателем: если зонотоп включает в себя нуль, то считается, что дефектов нет, в противном случае принимается решение о появлении дефекта.

Таким образом, зонотопы подобны интервальным наблюдателям, но характеризуются большими возможностями для учета особенностей возмущения и шумов измерений, в частности, их потенциальной коррелированности. Целью настоящей работы является разработка метода построения зонотопов для решения задачи диагностирования дискретных систем. В отличие от работ [11–18], где зонотопы строятся на основе исходной системы, предлагаемый метод базируется на редуцированной (имеющей меньшую размерность) модели системы. Из-за меньшей размерности модели также уменьшается размерность пространства, в котором находится зонотоп, что влечет за собой сокращение числа операций по определению его характеристик, а поскольку все такие операции выполняются в реальном масштабе времени, то уменьшается вычислительная сложность процедуры диагностирования. Кроме того, за счет использования редуцированной модели в ряде случаев удастся устранить влияние внешних возмущений на процесс диагностирования и понизить вероятность ошибочных решений.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МОДЕЛИ

Зонотоп определяется следующим образом [11, 12]. Для заданного целого $s \geq n$ (n – размерность рассматриваемой системы) и гиперкуба $B^s = [-1, 1]^s \in R^s$ зонотоп задается в виде

$$Z = \langle c, P \rangle = c + PB^s = \{z \in R^n : z = c + Pb, b \in B^s\},$$

где $c \in R^n$ – центр зонотопа; $P \in R^{n \times s}$ – порождающая матрица, которая определяет его форму и объем. Зонотоп имеет ряд свойств, описание которых можно найти в статьях [11, 12]; в настоящей работе они не потребуются. Как и гиперкуб, зонотоп представляет собой выпуклое тело, но может иметь более сложную форму. Число s называется порядком зонотопа.

Предполагается, что рассматриваемая система описывается дискретной линейной моделью

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + Lw(t) + Dd(t), \\ y(t) &= Hx(t) + v(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^l$ и $u(t) \in R^m$ – векторы состояния, выхода и управления; $F \in R^{n \times n}$, $G \in R^{n \times m}$, $L \in R^{n \times n_2}$, $D \in R^{n \times p}$ и $H \in R^{l \times n}$ – постоянные матрицы; $w(t) \in R^{n_2}$ – внешние возмущения, описываемые зонотопом $W = \langle 0, P_w \rangle$ порядка s_3 ; $v(t) \in R^l$ – шумы измерений, описываемые зонотопом $V = \langle 0, P_v \rangle$ порядка s_2 ; функция $d(t) \in R^p$ описывает дефект. Предполагается, что начальное состояние $x(0)$ неизвестно, но ограничено зонотопом $Z_x = \langle c_x(0), P_x(0) \rangle$ порядка s_1 . Кроме того, предполагается, что внешние возмущения $w(t)$ и шумы измерений $v(t)$ носят случайный характер, дефект $d(t)$ – детерминированный, при этом какие-либо ограничения на законы распределения случайных процессов $w(t)$ и $v(t)$ (кроме определяемых их зонотопами) не накладываются.

В указанных предположениях ставится задача синтеза диагностического наблюдателя, на основе информации от которого можно судить о наличии дефектов в системе. Для решения задачи строится нечувствительная к возмущению модель

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= F_*x_*(t) + J_*y(t) + G_*u(t) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t) = R_*y(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $x_* \in R^k$ – вектор состояния модели; k – ее размерность; J_* и G_* – постоянные матрицы, под-

лежащие определению; матрицы H_* и F_* задаются в идентификационной канонической форме

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, H_* = (1 \ 0 \ \dots \ 0), \quad (3)$$

которая обеспечивает устойчивость модели. Остальные матрицы определяются на основе уравнения [19, 20]

$$(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})(W^{(k)} \ L_*^{(k)}) = 0, \quad (4)$$

$$W^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix},$$

$$L_*^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & \dots & HF^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k=1, 2, \dots,$$

которое имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V^{(k)} \ L^{(k)}) < l(k+1). \quad (5)$$

Предполагается, что векторы $x(t)$ и $x_*(t)$ связаны матрицей Φ , подлежащей определению:

$$x_*(t) = \Phi x(t).$$

Известно [19, 20], что матрицы, описывающие модель, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Phi F &= F_* \Phi + J_* H, R_* H = H_* \Phi, G_* = \Phi G, \\ L_* &= \Phi L = 0, D_* = \Phi D. \end{aligned} \quad (6)$$

Для построения модели проверяется условие (5), выбирается минимальное значение k , начиная с $k=1$, далее из уравнения (4) определяется строка $(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})$, затем на основе соотношений

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= R_* H, \\ \Phi_i F &= \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i=1, k-1, \\ \Phi_k F &= J_k H, \end{aligned}$$

полученных с учетом вида (3), строится матрица Φ и из уравнений (6) определяются матрицы G_* и D_* . Если условие (5) не выполняется, следует найти другое решение уравнения (4). Если условие (5) не выполняется при всех $k < n$, необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад возмущения в модель, что детально изложено в статье [20].

2. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГНОСТИЧЕСКОГО ЗОНОТОПА

Для решения задачи вводится диагностический наблюдатель, который строится на основе модели (2) и формирует невязку $r(t)$ для принятия решений о появлении дефекта:

$$\begin{aligned} \hat{x}_*(t+1) &= F_* \hat{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t), \\ \hat{y}_*(t) &= H_* \hat{x}_*(t), \\ r(t) &= R_* y(t) - \hat{y}_*(t). \end{aligned} \quad (7)$$

В отличие от модели (2), которая является виртуальным объектом и фактически представляет собой часть системы (1), нечувствительную к возмущению, диагностический наблюдатель существует реально и формирует невязку. Диагностические решения принимаются на основе зонотопа, конструкция которого определяется следующей теоремой.

Теорема. Если $d(t)=0$, то невязка принадлежит зонотопу $Z_r(t) = \langle c_r(t), P_r(t) \rangle$, имеющему вид

$$c_r(t) = 0, \quad P_r(t) = [H_* P_*(t) \ R_* P_v(t)]. \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть переменная $\hat{x}_*(t)$ принадлежит зонотопу порядка s_1 $Z_*(t) = \langle c_*(t), P_*(t) \rangle$, т. е.

$$\hat{x}_*(t) = c_*(t) + P_*(t)b_1, \quad b_1 \in B^{s_1}. \quad (9)$$

Тогда с учетом уравнения (7) получаем

$$\hat{x}_*(t+1) = F_* c_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + F_* P_*(t)b_1.$$

Поскольку переменная $y(t)$ искажена шумами измерений, она принадлежит зонотопу порядка s_2 с центром $Hc_x(t)$ и порождающей матрицей P_v , т. е.

$$y(t) = Hc_x(t) + P_v b_2, \quad b_2 \in B^{s_2}; \quad (10)$$

где $c_x(t)$ – центр зонотопа для $x(t)$.

Преобразуем выражение для невязки при отсутствии дефектов с учетом формул (9), (10) и $R_* H = H_* \Phi$. Поскольку диагностический наблюдатель устойчив, состояния его и системы (1) согласуются после окончания переходного процесса, т. е. $c_*(t) = \Phi c_x(t)$, а тогда

$$\begin{aligned} r(t) &= R_* y(t) - H_* \hat{x}_*(t) = \\ &= R_* (Hc_x(t) + P_v b_2) - H_* (c_*(t) + P_*(t)b_1) = \\ &= H_* \Phi c_x(t) + R_* P_v b_2 - (H_* \Phi c_x(t) + H_* P_*(t)b_1) = \\ &= -H_* P_*(t)b_1 + R_* P_v b_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Минус в первом слагаемом может быть опущен, поскольку векторы b_1 и b_2 независимы. Из полученного следует, что невязка $r(t)$ принадлежит зонотопу поряд-



ка $s_1 + s_2$ с центром в нуле и порождающей матрицей $[H_*P_*(t) \ R_*P_v]$. ♦

При появлении дефекта в момент $t-1$ получаем $c_*(t) = \Phi_{c_x}(t) + D_*d(t-1)$, центр зонотопа $Z_r(t)$ смещается, и если величина дефекта превышает определенный уровень, определяемый матрицами $P_*(t)$ и P_v , зонотоп $Z_r(t)$ перестает включать в себя нуль. Из теоремы и последнего замечания тогда следует, что решения принимаются следующим образом: если $0 \in Z_r(t)$, дефектов нет; если $0 \notin Z_r(t)$, дефект появился.

Если модель чувствительна к возмущениям, то матрица (5) дополняется элементом $H_*L_*P_w$.

Пусть функции $d(t)$ соответствует зонотоп $Z_d = \langle 0, P_d \rangle$ в том смысле, что если $d(t) \in Z_d$, то это квалифицируется не как дефект, а как допустимое изменение параметров системы. Нетрудно видеть, что этому случаю соответствует расширенная матрица $P_r(t) = [H_*P_*(t) \ R_*P_v \ H_*D_*P_d]$.

Отметим, что в работах [11–18] зонотопы строятся на основе исходной системы и размерность пространства, в котором они находятся, совпадает с размерностью этой системы. В предлагаемом методе за счет меньшей размерности модели уменьшается размерность пространства, в котором находится зонотоп, что приводит к сокращению числа операций для определения его характеристик и, как результат, к уменьшению вычислительной сложности процедуры диагностирования. Кроме того, редуцированная модель нечувствительна к внешним возмущениям, что позволяет понизить вероятность ошибочных решений.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим дискретизованную модель электропривода [21]:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= k_1x_2(t) + x_1(t), \\ x_2(t+1) &= k_2x_2(t) + k_3x_3(t) + w(t), \\ x_3(t+1) &= k_4x_2(t) + k_5x_3(t) + k_6u(t) + d(t), \\ y_1(t) &= x_1(t) + v_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) + v_2(t), \end{aligned} \quad (12)$$

где переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ – это скорость и угол вращения вала двигателя и ток якоря соответственно; коэффициенты $k_1 - k_6$ представляют параметры электропривода и интервал дискретизации; возмущение $w(t)$ обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента, приведенного к валу двигателя; дефект $d(t)$ вызван изменением активного сопротивления обмотки двигателя из-за его перегрева; управление $u(t)$ –

это напряжение, подаваемое на двигатель. Модель (12) описывается матрицами

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_v = \begin{pmatrix} v_{*1} & 0 \\ 0 & v_{*2} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (4) с $k=1$ дает $J_* = (k_4 \ -k_1k_5)$ и $R_* = (k_4 \ -k_1)$, откуда $\Phi = (k_4 \ 0 \ -k_1)$, $G_* = -k_1k_6$ и $D_* = -k_1$. Диагностический наблюдатель (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{x}_*(t+1) &= k_4y_1(t) - k_1k_5y_2(t) - k_1k_6u(t) - k_1d(t), \\ \hat{y}_*(t) &= \hat{x}_*(t), \\ r(t) &= y_1(t) + y_2(t) - \hat{y}_*(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $F_* = 0$ и $H_* = 1$, то из выражения (8) получаем

$$\begin{aligned} P_*(t+1) &= [F_*P_*(t) \ J_*L_yP_v] = \\ &= (k_4 \ -k_1k_5) \begin{pmatrix} v_{*1} & 0 \\ 0 & v_{*2} \end{pmatrix} = (k_4v_{*1} \ -k_1k_5v_{*2}), \end{aligned}$$

откуда

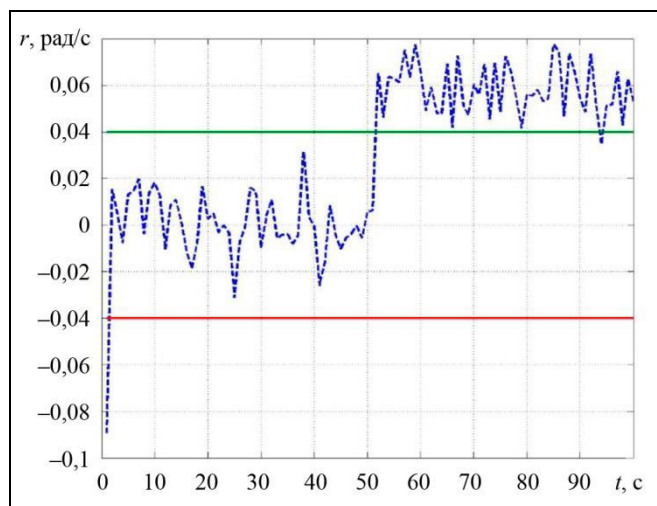
$$\begin{aligned} P_r(t+1) &= [P_*(t) \ R_*L_yP_v] = \\ &= (k_4v_{*1} \ -k_1k_5v_{*2} \ k_4v_{*1} \ -k_1v_{*2}). \end{aligned}$$

Поскольку центр зонотопа равен нулю, то из формулы (11) и независимости векторов b_1 и b_2 следует, что его нижняя $\underline{r}$ и верхняя $\bar{r}$ границы равны $-0,04$ и $0,04$ соответственно.

Отметим, что зонотоп, построенный методами, предложенными в работах [11–18], был бы трехмерным телом, в отличие от одномерного зонотопа в рассматриваемом примере, что уменьшает вычислительную сложность процедуры диагностирования, сокращает время проведения необходимых расчетов и позволяет более оперативно принимать диагностические решения.

Для моделирования рассмотрим систему (12) и диагностический наблюдатель (13), при $u(t) = 0,3\sin(t/10)$; внешнее возмущение $w(t)$ имитировалось случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(-0,05; 0,05)$; шумы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ для каждого момента t представляют собой независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $(-0,01; 0,01)$, т. е. соответствующий зонотоп $V = \langle 0, P_v \rangle$ – это квадрат со стороной, равной $0,02$, и $v_{1*} = v_{2*} = 0,01$. Для простоты примем $k_1 = k_2 = k_3 = k_6 = 1$, $k_4 = k_5 = -1$.

Результаты моделирования для начальных условий $x(0) = 0$, $\underline{x}_*(0) = 0,2$, $\hat{x}_*(0) = 0,1$ приведены на рисунке, где показано поведение невязки $r(t)$ и ее нижней и верхней границ при появлении дефекта $d = 0,06$ в момент $t = 50$. Как видно, на фоне шумов измерений дефект достоверно обнаруживается.



Поведение невязки и ее нижней и верхней границ при появлении дефекта

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача диагностирования дискретных линейных систем при внешних возмущениях и шумах измерений с помощью теории зонотопов. Для решения задачи была построена редуцированная модель исходной системы, нечувствительная к возмущениям. На базе этой модели получены соотношения, позволяющие построить зонотоп, обнаруживающий возникающие в системе дефекты. Проведенное компьютерное моделирование подтвердило корректность теоретических построений.

Достоинство предложенного метода по сравнению с известными состоит в том, что он позволяет уменьшить вычислительную сложность процедуры диагностирования и ослабить ограничения, накладываемые на исходную систему, для решения поставленной задачи. Кроме того, за счет использования редуцированной модели в ряде случаев удастся устранить влияние внешних возмущений на процесс диагностирования и понизить вероятность ошибочных диагностических решений.

Рассмотренный подход может быть распространен на дефекты, носящие случайный характер, но описанные детерминированным зонотопом. Предполагается распространить этот подход на

нелинейные системы и случай, когда модель, нечувствительную к внешним возмущениям, построить не удастся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов Д.В., Раисси Т. Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 2. – С. 5–49. [Efimov, D., Raissi, T. Design of Interval Observers for Uncertain Dynamical Systems // Automation and Remote Control. – 2016. – Vol. 77, no. 2. – P. 191–225.]
2. Chebotarev, S., Efimov, D., Raissi, T., Zolghadri, A. Interval Observers for Continuous-Time LPV Systems with L_1/L_2 Performance // Automatica. – 2015. – Vol. 58. – P. 82–89.
3. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Ким Ч.И. Интервальное оценивание в дискретных линейных системах с параметрическими неопределенностями // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2024. – № 1. – С. 139–149. [Zhirabok, A.N., Zuev, A.V., Kim C.I. Interval Estimation in Discrete-Time Linear Systems with Parametric Uncertainties // J. Computer and Systems Sciences Inter. – 2024. – Vol. 63, no. 1. – P. 1037–1047.]
4. Efimov, D., Raissi, T., Chebotarev, S., Zolghadri, A. Interval State Observer for Nonlinear Time Varying Systems // Automatica. – 2013. – Vol. 49. – P. 200–205.
5. Khan, A., Xie, W., Zhang, L., Liu, L. Design and Applications of Interval Observers for Uncertain Dynamical Systems // IET Circuits Devices Syst. – 2020. – Vol. 14, no. 6. – P. 721–740.
6. Liu, L., Xie, W., Khan, A., Zhang, L. Finite-Time Functional Interval Observer for Linear Systems with Uncertainties // IET Control Theory and Applications. – 2020. – Vol. 14, no. 18. – P. 2868–2878.
7. Meyer, L. Robust Functional Interval Observer for Multivariable Linear Systems // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2019. – Vol. 141, no. 9. – Art. no. 094502.
8. Zhang, Z., Yang, G. Event-Triggered Fault Detection for a Class of Discrete-Time Linear Systems Using Interval Observers // ISA Transactions. – 2017. – Vol. 68. – P. 160–169.
9. Yi, Z., Xie, W., Khan, A., Xu, B. Fault Detection and Diagnosis for a Class of Linear Time-Varying Discrete-Time Uncertain Systems Using Interval Observers // Proceedings of the 39th Chinese Control Conf. – Shenyang, 2020. – P. 4124–4128.
10. Zhirabok, A., Zuev, A., Shumsky, A. Interval Observer Design for Fault Diagnosis // IFAC-PapersOnLine. – 2024. – Vol. 58, no. 4. – P. 688–692.
11. Alamo, T., Bravo, J., Camacho, E. Guaranteed State Estimation by Zonotopes // Automatica. – 2005. – Vol. 41. – P. 1035–1043.
12. Combastel, C. Zonotopes and Kalman Observers: Gain Optimality under Distinct Uncertainty Paradigms and Robust Convergence // Automatica. – 2015. – Vol. 55. – P. 265–273.
13. Althoff, M., Rath, J. Comparison of Guaranteed State Estimation for Linear Time-Invariant Systems // Automatica. – 2021. – Vol. 130. – Art. no. 109662.
14. Wang, C., Liu, H., Chen, S., Xu, F. Schatten-p Radius: Optimality Criterion and Optimization for Basic Ellipsotopes with Application to Zonotopes and Ellipsoids // Automatica. – 2025. – Vol. 171. – Art. no. 111926.
15. Lamouchi, R., Amairi, M., Raissi, T., Aoun, M. Robust Fault Detection Based on Zonotopic Observers for Linear Parameter



- Varying Systems // Proceedings of the 30th Mediterranean Conf. on Control and Automation. – Athens, 2022. – P. 773–778.
16. *Rego, B., Rao, G., Scott, J., Raimondo, D.* Guaranteed Methods Based on Constrained Zonotopes for Set-Valued State Estimation of Nonlinear Discrete-Time Systems // *Automatica*. – 2020. – Vol. 111. – Art no. 108614.
 17. *de Paula, A., Raimondo, D., Raffo, G., Teixeira B.* Set-Based State Estimation for Discrete-Time Constrained Nonlinear Systems: An Approach Based on Constrained Zonotopes and DC Programming // *Automatica*. – 2024. – Vol. 159. – Art no. 111401.
 18. *Ma, Y., Wang, Z., Kinnaert, M., Shen, Y.* A Zonotope-Based Interval Estimation Method for Systems with Nonlinear Equality Constraints // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2025. – Vol. 70, no. 2. – P. 1358–1365.
 19. *Жи́рабок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., и др.* Каноническая форма Жордана в задачах диагностирования и оценивания // *Автоматика и телемеханика*. – 2022. – № 9. – С. 36–54. [*Zhirabok, A.N., Zuev, A.V., Filaretov, V.F., et al.* Jordan Canonical Form in the Diagnosis and Estimation Problems // *Automation and Remote Control*. – 2022. – Vol. 83, no. 9. – P. 1355–1370.]
 20. *Жи́рабок А.Н., Зуев А.В.* Метод диагностирования дискретных систем на основе интервальных наблюдателей // *Автоматика и телемеханика*. – 2023. – № 12. – С. 133–145. [*Zhirabok, A.N., Zuev, A.V.* An Interval Observer-Based Method to Diagnose Discrete-Time Systems // *Automation and Remote Control*. – 2023. – Vol. 84, no. 12. – P. 1321–1330.]
 21. *Филаретов В.Ф., Губанков А.С.* Управление манипуляторами при выполнении различных технологических операций. – М.: Наука, – 2018. [*Filaretov, V.F., Gubankov, A.S.*

Control of Manipulator for Different Technological Operations. Moscow: Nauka, 2018. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л. Ю. Филимоном.

*Поступила в редакцию 01.11.2025,
после доработки 21.01.2026.
Принята к публикации 28.01.2026.*

Жи́рабок Алексей Нилович – д-р тех. наук, Дальневосточный федеральный ун-т, Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток, ✉ zhirabok@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5927-7117>

Зуев Александр Валерьевич – д-р тех. наук, Дальневосточный федеральный ун-т, Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток, ✉ alvzuev@yandex.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0934-6222>

Проценко Александр Анатольевич – канд. техн. наук, Дальневосточный федеральный ун-т, Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток, ✉ pro293133@gmail.com, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0260-8031>

© 2026 г. Жи́рабок А. Н., Зуев А. В., Проценко А. А.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

A FAULT DIAGNOSIS METHOD BASED ON ZONOTOPES

A. N. Zhirabok*, A. V. Zuev**, and A. A. Protsenko***

**** Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

**** Institute of Marine Technology Problems, Russian Academy of Sciences,
Far Eastern Branch, Vladivostok, Russia

*✉ zhirabok@mail.ru, **✉ alvzuev@yandex.ru, ***✉ pro293133@gmail.com

Abstract. In this paper, zonotope theory is used to address the problem of detecting faults in technical systems described by discrete-time dynamic linear models with exogenous disturbances and measurement noise. To construct the corresponding zonotope, a reduced (lower-dimensional) model of the original system is developed; this model is insensitive to exogenous disturbances. To simplify the solution procedure, the matrices of the reduced model are written in the identification canonical form, which also ensures model stability. Based on this form, an equation is derived to find a solution of minimal dimension. If the insensitivity to exogenous disturbances cannot be achieved, a minimum sensitivity solution is obtained. Based on the resulting model, a diagnostic observer is designed that generates a residual for deciding on the presence/absence of faults. The observer design formulas are used to construct a fault-detecting zonotope. The theoretical framework is illustrated with a practical problem of detecting faults in an electric drive of an underwater vehicle as an example. According to the simulation results in MATLAB, the theoretical framework is correct.

Keywords: discrete systems, faults, diagnostic observers, residual, disturbances, measurement noise, zonotopes.

Acknowledgments. This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 25-19-00590, <https://rscf.ru/project/25-19-00590/>.



НАБЛЮДАЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И ИХ СТАБИЛИЗАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

С. В. Акманова

Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова, г. Магнитогорск

✉ svet.akm_74@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы наблюдаемости, построения наблюдателей полного и минимального порядков, стабилизации с наблюдателями нелинейных динамических систем, описываемых совокупностью дифференциальных и разностных уравнений, а также нелинейным уравнением выхода. Состояния данных систем содержат как непрерывные, так и дискретные компоненты, поэтому такие системы называют непрерывно-дискретными, или гибридными динамическими системами управления. Для исследования представленных вопросов выполнен переход от нелинейной гибридной системы к равносильной в естественном смысле нелинейной дискретной динамической системе. Установлены критерий наблюдаемости, достаточные признаки существования асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелинейных гибридных систем, достаточные признаки стабилизации нелинейной гибридной системы с построенными асимптотическими наблюдателями. Представлены примеры построения асимптотических наблюдателей и стабилизации расширенной системы с такими наблюдателями.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, гибридная система, полностью наблюдаемая система, наблюдатель, стабилизирующее управление.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные непрерывно-дискретные (гибридные) динамические системы служат адекватными математическими моделями реальных систем управления, функционирование которых носит нелинейный характер, а осуществляемые в них процессы имеют неоднородную природу. Например, это касается систем управления в авиационной, космической, металлургической, экономической и других сферах деятельности [1–4]. Для эффективного управления такими системами необходимо знать полную информацию о векторе состояния гибридной системы. Однако это условие трудно реализуемо, так как на практике зачастую измерению доступны не все компоненты вектора состояния системы. В таких случаях управление при помощи обратной связи по состоянию явля-

ется предпочтительным по сравнению с программным управлением [5], так как позволяет восстановить недоступные для измерения компоненты вектора состояния. Это восстановление называется *оценкой*, а устройство, формирующее на выходе вектор оценки состояния системы, называется *наблюдателем* и представляет собой динамическую систему, оценивающую фазовый вектор наблюдаемой гибридной системы по измеряемому выходу этой системы.

В настоящее время наработан немалый опыт по оцениванию состояний и стабилизации некоторых видов нелинейных гибридных систем. Так, для систем управления, описываемых нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями, предлагаются алгоритмы оценки состояния по данным зашумленных дискретных измерений на основе разновидностей фильтров Калмана и

фильтра частиц [6, 7], для класса нелинейных детерминированных систем управления непрерывного времени с неравномерными дискретными измерениями предложено проектирование импульсного непрерывно-дискретного наблюдателя [8]. Синтез наблюдателя на основе скользящего режима для оценки непрерывного и дискретного состояний нелинейных переключаемых систем управления представлен в работе [9]. Для нелинейных непрерывных систем управления с дискретными измерениями и неопределенными возмущениями предложен синтез управления на основе непрерывного наблюдателя в форме обратной связи [10]. В статье [11] на основе метода матричных систем сравнения и техники дифференциально-разностных линейных матричных неравенств изложены способы оценивания состояний нелинейных непрерывно-дискретных систем с неопределенными возмущениями и синтеза дискретного управления, обеспечивающего подавление начальных отклонений и влияния неопределенных возмущений. Кроме того, имеются исследования по стабилизации нелинейных гибридных систем с измеряемым выходом без использования наблюдателей, если эти системы описываются дифференциальными уравнениями с различными нелинейностями и управлением в виде дискретного регулятора обратной связи по состоянию или выходу (см., например, работы [12–14]).

Объектом данного исследования служат нелинейные детерминированные непрерывно-дискретные системы с непрерывным выходом и постоянным шагом дискретизации, состояние которых характеризуется набором из двух различных фазовых векторов, один из которых меняется непрерывно согласно дифференциальным уравнениям, а другой – дискретно с учетом разностных уравнений, содержащих управление. Для подобных систем, не содержащих уравнений выхода, проводились исследования, направленные на поиск оптимального управления (см., например, работы [1, 4] и имеющуюся в них библиографию); кроме того, для указанных систем без измеряемого выхода автором в статьях [15, 16] были установлены достаточные признаки и способы стабилизации. Однако вопросы оценивания состояний и стабилизации указанных систем с непрерывным выходом требуют дополнительного изучения.

В настоящей работе предложены общие подходы к синтезу асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелиней-

ных детерминированных непрерывно-дискретных систем с непрерывным выходом, имеющих постоянный шаг дискретизации, и к решению задач стабилизации указанных систем с использованием асимптотических наблюдателей. Данные подходы основаны на переходе от нелинейной непрерывно-дискретной (гибридной) системы к равносильной в естественном смысле нелинейной дискретной системе и учитывают идеи Д. Люенбергера [17, 18] относительно синтеза наблюдателей.

Новизна проведенного исследования состоит в следующем:

- установлены критерий наблюдаемости нелинейной гибридной системы с непрерывным выходом и необходимое условие наблюдаемости равносильной нелинейной дискретной системы с дискретным выходом;
- установлены достаточные признаки существования асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелинейной гибридной системы с непрерывным выходом и представлены новые модели наблюдателей, учитывающие линейную часть уравнений выхода и нелинейность равносильной дискретной системы;
- установлены достаточные признаки стабилизации нелинейной гибридной системы, а также разработаны алгоритмы построения асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для такой системы и ее стабилизации с использованием наблюдателей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная (гибридная) система вида

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), \\ w(t) = \varphi(x(t), y(t_k)), & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $y(t_k) \in R^m$ – векторы состояний системы (1); $u(t_k) \in R^q$ – управление (вход); $w(t) \in R^p$ – выход системы ($p \leq n + m$), моменты времени t_k задают на множестве R равномерную сетку с постоянным шагом $h = t_{k+1} - t_k > 0$ и узлами $t_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$; функции $f(x, y)$, $g(x, y, u)$, $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по



совокупности переменных, при этом выполняются соотношения

$$f(0, 0) = 0, g(0, 0, 0) = 0, \varphi(0, 0) = 0, \quad (2)$$

т. е. при $u = 0$ система (1) имеет точку равновесия $x = 0, y = 0$.

Рассмотрим систему (1) с начальными условиями $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. Тогда на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, $k \in \bar{N}$ ($\bar{N} = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$), при выбранном управлении u (т. е. при заданной последовательности $u(t_k), k \in \bar{N}$) можно найти решение $x(t) = \psi_k(t)$ задачи Коши $x'(t) = f(x(t), y(t_k)), x(t_k) = x_k$, и векторы $x(t_{k+1}) = \psi_k(t_{k+1}), y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k))$. Поэтому при выбранном управлении u состоянием системы (1) в момент времени $t \in [t_k, t_{k+1})$ назовем пару $z(t) = (x(t), y(t_k))$, где $x(t) = \psi_k(t), k \in \bar{N}$.

Важным свойством динамических систем, обеспечивающим безопасность и эффективность их функционирования, служит их (полная) наблюдаемость. Наличие свойства наблюдаемости у системы (1) зависит от шага сетки $h > 0$. Поэтому с учетом изложенного в работе [19] примем следующее

Определение 1. Система (1) называется *наблюдаемой (полностью наблюдаемой) при заданном $h > 0$* , если существует число $l \in N (l \leq n + m)$ такое, что для любых четверок $(u_1(t_k), x_1(t), y_1(t_k), w_1(t)), (u_2(t_k), x_2(t), y_2(t_k), w_2(t))$, заданных на промежутке $[t_k, t_{k+1})$ и удовлетворяющих системе (1), из равенства входов и выходов

$$u_1(t_k) = u_2(t_k), w_1(t) = w_2(t), t \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{0, l},$$

следует равенство соответствующих компонент состояний

$$x_1(t) = x_2(t), y_1(t_k) = y_2(t_k),$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{0, l}. \blacklozenge$$

Тогда по известным значениям входа $u(t_k)$ и выхода $w(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{0, l}$, можно однозначно определить состояние $z(t)$ при

$t \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{0, l}$, системы (1) и сделать выводы о процессах, происходящих в этой системе.

Отметим, что система (1) может быть ненаблюдаемой при некотором $h > 0$, если существует вход такой, что различным состояниям этой системы соответствуют одинаковые выходы, т. е. найдутся различные начальные данные $z_0 = (x_0, y_0)$, $\tilde{z}_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ и вход $u^*(t_k), k \in \bar{N}$, такие, что для соответствующих состояний $z = z(t)$ и $\tilde{z} = \tilde{z}(t)$ выходы удовлетворяют условию $w(z(t)) \equiv w(\tilde{z}(t))$ при $t \geq 0$.

Основными задачами в настоящей статье являются установление признаков наблюдаемости системы (1), условий существования асимптотических наблюдателей и их построение для этой системы, а также исследование вопроса стабилизации системы (1) с построенными наблюдателями. Для решения поставленных задач предлагается выполнить переход от гибридной системы (1) к равносильной в естественном смысле нелинейной дискретной системе с выходом.

2. ПЕРЕХОД К РАВНОСИЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ С ВЫХОДОМ

Исходя из соотношений (2), функции $f(x, y), g(x, y, u), \varphi(x, y)$ в окрестности точек $x = 0, y = 0$ и $x = 0, y = 0, u = 0$ по формуле Тейлора (Маклорена) представимы в виде

$$f(x, y) = A_1 x + B_1 y + a(x, y),$$

$$g(x, y, u) = A_2 x + B_2 y + C u + b(x, y, u),$$

$$\varphi(x, y) = D_1 x + D_2 y + c(x, y),$$

где

$$A_1 = f'_x(0, 0), B_1 = f'_y(0, 0),$$

$$A_2 = g'_x(0, 0, 0), B_2 = g'_y(0, 0, 0), C = g'_u(0, 0, 0),$$

$$D_1 = \varphi'_x(0, 0), D_2 = \varphi'_y(0, 0),$$

при этом гладкие нелинейные функции $a(x, y), b(x, y, u), c(x, y)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(x, y) = o(\|x\| + \|y\|), c(x, y) = o(\|x\| + \|y\|)$$

$$\text{при } \|x\| + \|y\| \rightarrow 0,$$

$b(x, y, u) = o(\|x\| + \|y\| + \|u\|)$ при $\|x\| + \|y\| + \|u\| \rightarrow 0$,

т. е. являются бесконечно малыми более высокого порядка малости, чем $\|x\| + \|y\|$ ($\|x\| + \|y\| + \|u\|$) при $\|x\| + \|y\| \rightarrow 0$ ($\|x\| + \|y\| + \|u\| \rightarrow 0$).

Здесь и далее запись $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора в соответствующем пространстве действительных чисел, или норму матрицы.

Пусть $x(t_k) = x_k$, $y(t_k) = y_k$, $u(t_k) = u_k$, тогда система (1) равносильна гибридной системе

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y_k + a(x(t), y_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y_{k+1} = A_2 x_{k+1} + B_2 y_k + C u_k + b(x_{k+1}, y_k, u_k), \\ w(t) = D_1 x(t) + D_2 y_k + c(x(t), y_k), & k \in \bar{N}. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть $\det A_1 \neq 0$, тогда, применяя оператор сдвига по траекториям системы $x' = f(x, y)$ за время от $t = 0$ до $t = h$ [20], выполним переход от системы (3) к дискретной системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{A_1 h} x_k + A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 y_k + \\ + \varepsilon(x_k, y_k; h), \\ y_{k+1} = A_2 e^{A_1 h} x_k + (A_2 A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 + B_2) y_k + \\ + C u_k + \delta(x_k, y_k, u_k; h), \\ w_k = D_1 e^{A_1 h} x_k + (D_1 A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 + D_2) y_k + \\ + \gamma(x_k, y_k; h), & k \in \bar{N}, \end{cases} \quad (4)$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_k, y_k; h) &= \\ &= e^{(t_k + h)A_1} \int_{t_k}^{t_k + h} e^{-sA_1} a(p(s, x_k, y_k), y_k) ds, \end{aligned}$$

причем $x = p(t, x_k, y_k)$ – решение задачи Коши $x' = A_1 x + B_1 y_k + a(x, y_k)$, $x(t_k) = x_k$,

$$\begin{aligned} \delta(x_k, y_k, u_k; h) &= \\ &= A_2 \varepsilon(x_k, y_k; h) + b(x_{k+1}, y_k, u_k), \\ \gamma(x_k, y_k; h) &= D_1 \varepsilon(x_k, y_k; h) + c(x_{k+1}, y_k). \end{aligned} \quad (5)$$

Компактная запись системы (4) имеет вид

$$\begin{cases} z_{k+1} = A(h) z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h), \\ w_k = D(h) z_k + \gamma(z_k, h), & k \in \bar{N}, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 + B_2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix}, \quad \xi(z_k, u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) \end{bmatrix},$$

$$D(h) = \begin{bmatrix} D_1 e^{A_1 h} & D_1 A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 + D_2 \end{bmatrix},$$

где O – нулевая матрица соответствующей размерности.

Используя результаты работы [20], равенства (5), можно доказать, что

$$\xi(z, u, h) = o(\|z\| + \|u\|) \text{ при } \|z\| + \|u\| \rightarrow 0,$$

$$\gamma(z, h) = o(\|z\|) \text{ при } \|z\| \rightarrow 0.$$

Системы (1) и (4) в естественном смысле равносильны, поскольку по решению $(x(t), y_k)$ системы (1) с выходом $w(t)$ можно найти решение (x_k, y_k) системы (4) с выходом w_k и наоборот [15, 20], следовательно, системы (1) и (6) также равносильны. Введем

Определение 2. Система (6) называется *наблюдаемой (полностью наблюдаемой) при заданном $h > 0$* , если существует число $l \in N (l \leq n + m)$ такое, что для любых троек $(u_k^{(1)}, z_k^{(1)}, w_k^{(1)})$, $(u_k^{(2)}, z_k^{(2)}, w_k^{(2)})$, $k = \overline{0, l}$, удовлетворяющих системе (6), из равенства входов и выходов

$$u_k^{(1)} = u_k^{(2)}, w_k^{(1)} = w_k^{(2)}, \quad k = \overline{0, l},$$

следует равенство состояний

$$z_k^{(1)} = z_k^{(2)}, \quad k = \overline{0, l}. \quad \blacklozenge$$

Тогда справедлива

Теорема 1. Гибридная система (1) наблюдаема при заданном $h > 0$ в том и только том случае, если наблюдаема дискретная система (6) при $h > 0$.

Доказательство. Пусть система (1) наблюдаема при заданном $h > 0$. Введем обозначения $u_i(t_k) = u_k^{(i)}$, $x_i(t_k) = x_k^{(i)}$, $w_i(t_k) = w_k^{(i)}$, $y_i(t_k) = y_k^{(i)}$, где $i = 1, 2$; $k = \overline{0, l}$. Если $w_1(t) = w_2(t)$, $x_1(t) = x_2(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$, то $w_k^{(1)} = w_k^{(2)}$, $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$.



Тогда из определения 1 следует: если $u_k^{(1)} = u_k^{(2)}$, $w_k^{(1)} = w_k^{(2)}$, то $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$ и $y_k^{(1)} = y_k^{(2)}$, т. е. $z_k^{(1)} = z_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$. Значит, для любых троек $(u_k^{(1)}, z_k^{(1)}, w_k^{(1)})$, $(u_k^{(2)}, z_k^{(2)}, w_k^{(2)})$, $k = \overline{0, l}$, удовлетворяющих системе (6) при данном $h > 0$, из равенства входов и выходов следует равенство состояний, что означает наблюдаемость системы (6) при $h > 0$.

Пусть теперь система (6) наблюдаема при $h > 0$. Тогда из равенства $z_k^{(1)} = z_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$, следует $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$ и $y_k^{(1)} = y_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$, т. е. $x_1(t_k) = x_2(t_k)$, $y_1(t_k) = y_2(t_k)$, и в силу единственности решения задачи Коши $x' = f(x, y_k)$, $x(t_k) = x_k$, $k = \overline{0, l}$, выполняется равенство $x_1(t) = x_2(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$. Так как $w_k^{(1)} = w_k^{(2)} \Leftrightarrow \varphi(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = \varphi(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \Leftrightarrow \varphi(x_1(t_k), y_1(t_k)) = \varphi(x_2(t_k), y_2(t_k)) \Leftrightarrow \varphi(x_1(t), y_1(t)) = \varphi(x_2(t), y_2(t)) \Leftrightarrow w_1(t) = w_2(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$, то из определения 2 и приведенного объяснения следует: если $u_1(t_k) = u_2(t_k)$, $w_1(t) = w_2(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$, то $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$ и $y_k^{(1)} = y_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$, а значит, $x_1(t) = x_2(t)$, $y_1(t_k) = y_2(t_k)$, что означает наблюдаемость системы (1) при $h > 0$. ♦

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ ПОЛНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Здесь и далее условимся рассматривать системы (1) и (6) при некотором значении $h = h_0 > 0$. Тогда системой первого приближения для дискретной системы (6) является система вида

$$\begin{cases} z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k, \\ w_k = D_0 z_k, \quad k \in \bar{N}. \end{cases} \quad (7)$$

где $A_0 = A(h_0)$, $D_0 = D(h_0)$.

Если пара (A_0, D_0) , или система (7), наблюдаема, то согласно ранговому критерию наблюдаемости линейных стационарных систем [19], выполняется условие

$$\text{rank} \left[D_0^T, A_0^T D_0^T, (A_0^T)^2 D_0^T, \dots, (A_0^T)^{n+m-1} D_0^T \right] = n + m.$$

Поэтому имеет место

Теорема 2. Если система (6) наблюдаема, то пара (A_0, D_0) наблюдаема.

Доказательство. Из условия теоремы следует наблюдаемость системы

$$\begin{cases} z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h_0), \\ w_k = D_0 z_k + \gamma(z_k, h_0), \quad k \in \bar{N}. \end{cases} \quad (8)$$

Тогда, учитывая определение 2, составим из соотношений (8) последовательно $l = n + m$ равенств

$$\begin{cases} w_0 = D_0 z_0 + \gamma(z_0, h_0), \\ w_1 = D_0 A_0 z_0 + D_0 B u_0 + D_0 \xi(z_0, u_0, h_0) + \gamma(z_1, h_0), \\ w_2 = D_0 A_0^2 z_0 + D_0 A_0 B u_0 + D_0 A_0 \xi(z_0, u_0, h_0) + D_0 B u_1 + D_0 \xi(z_1, u_1, h_0) + \gamma(z_2, h_0), \\ \dots \\ w_{n+m-1} = D_0 A_0^{n+m-1} z_0 + \sum_{i=0}^{n+m-2} D_0 A_0^{n+m-2-i} B u_i + \sum_{i=0}^{n+m-2} D_0 A_0^{n+m-2-i} \xi(z_i, u_i, h_0) + \gamma(z_{n+m-1}, h_0), \end{cases}$$

из которых следует

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ D_0 A_0 \\ D_0 A_0^2 \\ \dots \\ D_0 A_0^{n+m-1} \end{bmatrix} \cdot z_0 = \begin{bmatrix} w_0 - \gamma(z_0, h_0) \\ w_1 - D_0 B u_0 - D_0 \xi(z_0, u_0, h_0) - \gamma(z_1, h_0) \\ w_2 - D_0 A_0 B u_0 - D_0 A_0 \xi(z_0, u_0, h_0) - D_0 B u_1 - D_0 \xi(z_1, u_1, h_0) - \gamma(z_2, h_0) \\ \dots \\ w_{n+m-1} - \sum_{i=0}^{n+m-2} D_0 A_0^{n+m-2-i} B u_i - \sum_{i=0}^{n+m-2} D_0 A_0^{n+m-2-i} \xi(z_i, u_i, h_0) - \gamma(z_{n+m-1}, h_0) \end{bmatrix}.$$

Поскольку система (8) наблюдаема, то по известным значениям входов $u_k (k = \overline{0, n+m-2})$ и выходов $w_k (k = \overline{0, n+m-1})$ однозначно определяются состояния $z_k (k = \overline{0, n+m-1})$. Тогда в полученном равенстве справа стоит постоянный вектор, а произведение слева представляет собой вектор, компоненты которого являются линейными комбинациями компонент вектора состояния z_0 . Таким образом, имеется $(n+m)p$ равенств относительно компонент однозначно определенного вектора $z_0 \in R^{n+m}$, поэтому только $n+m$ строк матрицы

$$\begin{bmatrix} D_0^T, A_0^T D_0^T, (A_0^T)^2 D_0^T, \dots, (A_0^T)^{n+m-1} D_0^T \end{bmatrix}$$

являются линейно независимыми. Следовательно,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D_0^T, A_0^T D_0^T, (A_0^T)^2 D_0^T, \dots, (A_0^T)^{n+m-1} D_0^T \end{bmatrix} = n+m,$$

т. е. пара (A_0, D_0) наблюдаема [19]. ♦

Следствие 1. Если система (6) наблюдаема, то система (7) наблюдаема.

Ниже для краткости формулировок используется обозначение $|A| < 1$, подразумевающее, что все собственные значения λ квадратной матрицы A удовлетворяют условию $|\lambda| < 1$.

Исходя из результатов работы [15], теоремы 2 и учитывая подход Д. Люенбергера к синтезу наблюдателей полного порядка для линейных систем, установим справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть пара (A_0, D_0) наблюдаема.

Тогда существует матрица $K \in R^{(n+m) \times p}$ такая, что решения системы (6) и системы

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= (A_0 - KD_0)v_k + Bu_k + KD_0z_k + \\ &+ \xi(z_k, u_k, h_0), \quad k \in \bar{N}, \end{aligned} \quad (9)$$

удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - v_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q; z_0, v_0 \in R^{n+m}.$$

Доказательство. Положим $p_k = z_k - v_k, k \in \bar{N}$, где z_k, v_k – решения системы (6) и системы (9) с учетом выбранного управления u , т. е. при заданной последовательности $u_k, k \in \bar{N}$. Тогда $p_{k+1} = z_{k+1} - v_{k+1}$, т. е. имеет место система

$$p_{k+1} = (A_0 - KD_0)p_k, \quad k \in \bar{N}. \quad (10)$$

Определим, существует ли матрица $K \in R^{(n+m) \times p}$ такая, что система (10) является асимптотически устойчивой.

По условию теоремы пара (A_0, D_0) наблюдаема, тогда из принципа двойственности Калмана следует полная управляемость пары (A_0^T, D_0^T) , а значит, и полная управляемость пары $(A_0^T, -D_0^T)$. Тогда система

$$z_{k+1} = A_0^T z_k - D_0^T u_k,$$

стабилизируема [15], т. е. существует матрица $K^T \in R^{p \times (n+m)}$ такая, что $|A_0^T - D_0^T K^T| < 1$. Тогда $|A_0 - KD_0| < 1$, где $K \in R^{(n+m) \times p}$ и, следовательно, система (10) является асимптотически устойчивой. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|p_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q; z_0, v_0 \in R^{n+m}$. ♦

Следствие 2. Если система (6) наблюдаема, то для нее существует система (9).

Систему (9) назовем *наблюдателем системы* (6), при этом система (9) является асимптотическим наблюдателем полного порядка, поскольку вектор $v_k \in R^{n+m}$ оценки вектора состояния системы (6) асимптотически сходится к вектору состояния $z_k \in R^{n+m}$ этой системы. Динамическая система (9) является *асимптотическим наблюдателем полного порядка* и для гибридной системы (1) на промежутке дискретного времени $[t_0; +\infty)$, так как состояния $v_k = v(t_k), k \in \bar{N}$, системы (9) рассматриваются как оценки соответствующих состояний системы (6), а состояния систем (1) и (6) совпадают в моменты времени $t = t_k, k \in \bar{N}$.

4. СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу асимптотической стабилизации нулевого положения равновесия системы (1) при помощи динамической связи по выходу с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (9) и покажем применимость принципа разделения для решения этой задачи. Данный принцип предполагает стабилизацию системы с помощью отдельного построения стабилизирующей обратной связи по состоянию и наблюдателя для оценки состояния системы с последующей подстановкой оценки состояния в обратную связь [21]. С учетом изложенного в работе [15] имеет место

Теорема 4. Пусть система (6) имеет стабилизирующее управление $u_k = Fz_k, k \in \bar{N}$, с матрицей $F \in R^{q \times (n+m)}$ и является наблюдаемой,



при этом система (9) является наблюдателем системы (6). Тогда решение $x=0$, $y=0$, $v=0$ расширенной системы (1), (9) с управлением $u(t_k) = Fv(t_k)$, $k \in \bar{N}$, является асимптотически устойчивым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_k = Fv_k$, $k \in \bar{N}$. Запишем систему (6) (без учета выхода) и систему (9) в переменных z_k , p_k , где $p_k = z_k - v_k$, $k \in \bar{N}$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} z_{k+1} = (A_0 + BF)z_k - BFp_k + \xi(z_k, F(z_k - p_k), h_0), \\ p_{k+1} = (A_0 - KD_0)p_k, \quad k \in \bar{N}, \end{cases} \quad (11)$$

или в матричной записи

$$\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ p_{k+1} \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} z_k \\ p_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi(z_k, F(z_k - p_k), h_0) \\ O \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$k \in \bar{N},$$

где $G = \begin{bmatrix} A_0 + BF & -BF \\ O & A_0 - KD_0 \end{bmatrix}$ – блочно-треугольная матрица порядка $2(n+m)$.

Тогда $\sigma(G) = \sigma(A_0 + BF) \cup \sigma(A_0 - KD_0)$ – спектр матрицы G . Поскольку $u_k = Fz_k$, $k \in \bar{N}$, – стабилизирующее управление системы (6), то $|A_0 + BF| < 1$ [15]. Учитывая наблюдаемость системы (6), теорему 2 и доказательство теоремы 3, установим, что $|A_0 - KD_0| < 1$. Следовательно, $|G| < 1$.

Пусть $\bar{\xi}(z_k, p_k, h_0) = \begin{bmatrix} \xi(z_k, F(z_k - p_k), h_0) \\ O \end{bmatrix}$.

Тогда, учитывая, что $\xi(z, u, h) = o(\|z\| + \|u\|)$ при $\|z\| + \|u\| \rightarrow 0$, установим: $\xi(z_k, F(z_k - p_k), h_0) = o(\|z_k\| + \|p_k\|)$ при $\|z_k\| + \|p_k\| \rightarrow 0$, значит, $\bar{\xi}(z_k, p_k, h_0) = o(\|z_k\| + \|p_k\|)$ при $\|z_k\| + \|p_k\| \rightarrow 0$.

Тогда, согласно изложенному в работе [20], система (12), иначе система (11), имеет асимптотически устойчивое решение $z=0$, $p=0$. В таком случае расширенная система (6), (9) с управлением $u_k = Fv_k$, $k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $z=0$, $v=0$. Значит, соответствующая ей расширенная система (1), (9) с управлением $u(t_k) = Fv(t_k)$, $k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $x=0$, $y=0$, $v=0$ [20]. ♦

Отметим, что стабилизация динамической системы (1) с наблюдателем имеет ряд преимуществ по сравнению с ее стабилизацией без наблюдателя. Одно из них связано с повышением

надежности управления, при этом под надежностью управления системой понимается свойство, характеризующее систему с точки зрения возможности достижения поставленной цели управления [22]. А именно, во всех реальных системах, в том числе и тех, моделью которых служит система (1), всегда присутствуют внутренние шумы [23]. Эти шумы являются случайными воздействиями, которые не могут быть отражены в математической модели системы, но могут приводить к существенным изменениям в ее поведении, если, например, параметр h системы (1) находится вблизи точки бифуркации. При этом если вектор выхода $w(t)$ имеет размерность $p < n+m$, то измерению доступны не все компоненты вектора состояния системы (1), а лишь некоторые их линейные комбинации, тогда стабилизирующее управление, построенное по неполным данным о состоянии системы, может не дать желаемого результата [21]. Если же для стабилизации системы (1) использовать наблюдатель, то его состояние в некоторый момент времени является оценкой состояния системы в этот момент времени, т. е. наблюдатель моделирует систему в реальном времени и оценивает все компоненты вектора состояния этой системы, реализуя качественную обратную связь, особенно если этот наблюдатель является асимптотическим. Такой наблюдатель обеспечивает асимптотическое по времени убывание ошибки оценки состояния системы (1), а значит, задача стабилизации системы (1) с наблюдателем решается успешно. К тому же, поскольку стабилизация системы с наблюдателем позволяет восстановить недоступные для измерения компоненты вектора состояния, то исключается установка в реальной системе дополнительных физических датчиков и тем самым улучшаются эксплуатационные и стоимостные характеристики системы управления [24].

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Требование к пониженной размерности наблюдателя является актуальным в теории автоматического управления, так как наблюдатель пониженного порядка позволяет упростить анализ и синтез динамической системы, снизить требовательность к ресурсам вычислительного устройства, на котором реализуется этот наблюдатель, сократить время оценки фазового вектора системы [25].

Построение наблюдателя полного порядка для системы (1) учитывало линейную часть выхода $w_k \in R^p$ и нелинейную функцию $\xi(z_k, u_k, h_0)$ в системе (6) (см. § 3). Применим эту идею и к построению наблюдателя пониженного порядка. Имеем: $w_k \in R^p$, $z_k \in R^{n+m}$, тогда линейная часть выхода $D_0 z_k$ представляет собой p линейных комбинаций от $n+m$ переменных состояния, поэтому в общем случае необходимо восстановить не более чем $n+m-p$ переменных состояния. Данная идея реализуется при синтезе наблюдателя пониженного порядка, при этом наблюдатель порядка $n+m-p$ считается наблюдателем минимального порядка [18]. Будем называть наблюдатель минимального порядка также минимальным наблюдателем.

Для линейных динамических систем без возмущений построение минимальных наблюдателей представлено в работах [17, 18, 25, 26] и др. Воспользуемся подходом Д. Люенбергера, изложенным в работе [26], и идеей синтеза системы (9) для построения минимального наблюдателя нелинейной дискретной системы (6). Для этого будем полагать, что пара (A_0, D_0) наблюдаема и выберем матрицу $M \in R^{r \times (n+m)}$, где $r \geq n+m-p$, так, чтобы

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix} = n+m. \quad (13)$$

Пусть $s_k = Mz_k$, тогда выполняется равенство

$$\begin{bmatrix} s_k \\ D_0 z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix} z_k \quad (14)$$

и, в силу полноты ранга матрицы $\begin{bmatrix} M^T & D_0^T \end{bmatrix}$, для восстановления вектора z_k достаточно построить оценку вектора s_k . Для простоты рассуждений положим, что $r = n+m-p$, тогда из равенства (14) следует

$$z_k = \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_k \\ D_0 z_k \end{bmatrix},$$

и если полагать, что $\bar{s}_k$ – оценка вектора s_k , то оценка фазового вектора z_k системы (6) будет иметь вид

$$\bar{z}_k = \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{s}_k \\ D_0 z_k \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Для оценки вектора s_k будем использовать наблюдатель порядка $n+m-p$ вида

$$\bar{s}_{k+1} = L\bar{s}_k + ED_0 z_k + Tu_k + M\xi(z_k, u_k, h_0), \quad (16)$$

где L, E, T, M – постоянные матрицы, являющиеся параметрами наблюдателя (16) и подлежащие дальнейшему определению. Тогда справедлива

Теорема 5. Пусть пара (A_0, D_0) наблюдаема. Тогда существуют матрицы $L \in R^{(n+m-p) \times (n+m-p)}$, $E \in R^{(n+m-p) \times p}$, $T \in R^{(n+m-p) \times q}$, $M \in R^{(n+m-p) \times (n+m)}$ такие, что решения системы (6) и системы (16) удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Mz_k - \bar{s}_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q, z_0 \in R^{n+m}, \bar{s}_0 \in R^{n+m-p}.$$

Доказательство. Пара (A_0, D_0) наблюдаема, тогда существует матрица $M \in R^{(n+m-p) \times (n+m)}$, для которой выполняется условие (13). Пусть $s_k = Mz_k$, где $z_k (k \in \bar{N})$ – решение системы (6), тогда ошибка наблюдения $p_k = s_k - \bar{s}_k$ удовлетворяет разностному уравнению $p_{k+1} = s_{k+1} - \bar{s}_{k+1}$, т. е. с учетом формулы (16),

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= MA_0 z_k + MBu_k + M\xi(z_k, u_k, h_0) - \\ &- (L\bar{s}_k - Ls_k + LMz_k + ED_0 z_k + Tu_k + M\xi(z_k, u_k, h_0)), \\ p_{k+1} &= Lp_k + (MA_0 - LM - ED_0)z_k + (MB - T)u_k. \end{aligned}$$

Для того чтобы ошибка наблюдения стремилась к нулю, выберем параметры наблюдения из условий

$$\begin{cases} |L| < 1, \\ ED_0 = MA_0 - LM, \\ T = MB. \end{cases}$$

Поскольку пара (A_0, D_0) наблюдаема, то рассуждая аналогично изложенному в работах [17, 18], можно установить, что система данных условий, с учетом формулы (13), разрешима. В таком случае система $p_{k+1} = Lp_k$, $k \in \bar{N}$, асимптотически устойчива, значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|p_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q, p_0 \in R^{n+m-p}, \quad \text{т. е.}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Mz_k - \bar{s}_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q, z_0 \in R^{n+m}, \bar{s}_0 \in R^{n+m-p}. \quad \blacklozenge$$

Систему (16) назовем *асимптотическим наблюдателем минимального порядка системы (6) (системы (1))* или *асимптотическим минимальным наблюдателем системы (6) (системы (1))*, оценивающим вектор Mz_k (вектор $Mz(t_k)$) на промежутке дискретного времени $[t_0; +\infty)$, где $t_k = h_0 k$, $k \in \bar{N}$.



Для синтеза наблюдателя (16) можно воспользоваться следующим алгоритмом [26]:

1. Найти матрицу $K \in R^{(n+m) \times p}$ такую, что $|A_0 - KD_0| < 1$, и построить матрицу $\Lambda = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_{n+m}\}$, где $\mu_1, \dots, \mu_{n+m}$ – собственные значения матрицы $A_0 - KD_0$.

2. Найти матрицу $P \in R^{(n+m) \times (n+m)}$ левых собственных векторов матрицы $A_0 - KD_0$, при этом $P(A_0 - KD_0) = \Lambda P$.

3. Составить матрицу M , выбрав $n+m-p$ строк из матрицы P так, чтобы $M(A_0 - KD_0) = \Lambda_M M$ и выполнялось условие (13), где Λ_M – матрица порядка $n+m-p$, являющаяся подматрицей матрицы Λ , которая соответствует матрице M .

4. Найти матрицы $L = \Lambda_M$, $E = MK$, $T = MB$ и составить наблюдатель (16).

Замечание. Параметры наблюдателя (16) можно находить и по другому алгоритму: сначала выбрать произвольно ненулевую матрицу $L \in R^{(n+m-p) \times (n+m-p)}$, для которой выполняется условие $|L| < 1$, и постоянную матрицу $E \in R^{(n+m-p) \times p}$, затем из условия $ED_0 = MA_0 - LM$ найти неизвестную матрицу $M \in R^{(n+m-p) \times (n+m)}$ и проверить выполнимость условия (13), а затем найти матрицу $T = MB \in R^{(n+m-p) \times q}$.

Рассмотрим вопрос стабилизации системы (1) с наблюдателем (16).

6. СТАБИЛИЗАЦИЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА

Учитывая выражение (15), найдем оценку $\bar{z}_k = \bar{z}(t_k)$ фазового вектора системы (1) в моменты времени $t_k = h_0 k$, $k \in \bar{N}$. Тогда вопрос стабилизации системы (1) с наблюдателем (16) сводится к вопросу стабилизации расширенной системы (1), (16), при этом с учетом принципа разделения и изложенного в работе [15] имеет место

Теорема 6. Пусть система (6) имеет стабилизирующее управление $u_k = F\bar{z}_k$, $k \in \bar{N}$, с матрицей $F \in R^{q \times (n+m)}$ и является наблюдаемой, при этом система (16) является минимальным наблюдателем системы (6). Тогда решение $x=0$, $y=0$, $\bar{s}=0$ расширенной системы (1), (16) с

управлением $u(t_k) = F\bar{z}(t_k)$, $k \in \bar{N}$, является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Согласно теореме 2 пара (A_0, D_0) наблюдаема, при этом система (16) – наблюдатель системы (6), тогда для матрицы $M \in R^{(n+m-p) \times (n+m)}$ в формуле (16) выполняются условия (13) и (15). Следовательно,

$$\begin{aligned} z_{k+1} - \bar{z}_{k+1} &= \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ D_0 z_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{s}_{k+1} \\ D_0 \bar{z}_{k+1} \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} p_{k+1} = Sp_{k+1}, \end{aligned}$$

где $S = \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}$. Отсюда получим $\bar{z}_k = z_k - Sp_k$, где $p_k = s_k - \bar{s}_k$, $k \in \bar{N}$.

Запишем систему (6) (без учета выхода) и систему (16), с учетом доказательства теоремы 5, в переменных z_k, p_k с $u_k = F\bar{z}_k$, $k \in \bar{N}$, тогда $z_{k+1} = A_0 z_k + BF(z_k - Sp_k) + \xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0)$, т. е. $z_{k+1} = (A_0 + BF)z_k - BFS p_k + \xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0)$, и $p_{k+1} = Lp_k$, $k \in \bar{N}$, где $|L| < 1$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} z_{k+1} = (A_0 + BF)z_k - BFS p_k + \xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0), \\ p_{k+1} = Lp_k, \quad k \in \bar{N}, \end{cases}$$

или в матричной записи

$$\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ p_{k+1} \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} z_k \\ p_k \end{bmatrix} + \bar{\xi}(z_k, p_k, h_0), \quad k \in \bar{N},$$

где $G = \begin{bmatrix} A_0 + BF & -BFS \\ O & L \end{bmatrix}$ – матрица порядка $2(n+m)-p$, $\bar{\xi}(z_k, p_k, h_0) = \begin{bmatrix} \xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0) \\ O \end{bmatrix}$.

Поскольку $u_k = F\bar{z}_k$, $k \in \bar{N}$, – стабилизирующее управление системы (6), то $|A_0 + BF| < 1$ [15], $|L| < 1$, значит, $|G| < 1$. При этом $\xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0) = o(\|z_k\| + \|p_k\|)$ при $\|z_k\| + \|p_k\| \rightarrow 0$, тогда $\bar{\xi}(z_k, p_k, h_0) = o(\|z_k\| + \|p_k\|)$ при $\|z_k\| + \|p_k\| \rightarrow 0$. Следовательно, полученная система имеет асимптотически устойчивое решение $z=0$, $p=0$ [20]. Тогда расширенная система (6), (16) с управлением $u_k = F\bar{z}_k$, $k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $z=0$, $\bar{s}=0$, значит, расширенная система (1), (16) с управлением $u_k = F\bar{z}(t_k)$, $k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $x=0$, $y=0$, $\bar{s}=0$ [20]. ♦

7. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу построения асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелинейной гибридной системы

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t_k) + y^2(t_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = -x(t_{k+1}) - y(t_k) + 2u(t_k) + u(t_k)y(t_k), \\ w(t) = 4x(t) + 3y(t_k) - 2x(t)y(t_k), & k \in \bar{N}, \end{cases}$$

$$x, y, w \in R,$$

и задачу стабилизации этой системы с построенными наблюдателями.

Из теорем 3 и 5 следует, что решение задачи построения наблюдателей возможно, если пара (A_0, D_0) наблюдаема, т. е. если $\text{rank}[D_0^T, A_0^T D_0^T] = 2$. Заметим,

что при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ данная система равносильна дискретной системе, компактная запись которой имеет вид (8), где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\xi(z_k, u_k, h_0) = \begin{bmatrix} y_k^2/2 \\ -y_k^2/2 + u_k y_k \end{bmatrix},$$

$$D_0 = [6 \quad 1], \quad \gamma(z_k, h_0) = 3y_k^2 - 3x_k y_k - y_k^3.$$

Поэтому при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ пара (A_0, D_0) наблюдаема.

Пусть $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$, тогда $A_0 - KD_0 =$
 $= \begin{bmatrix} 1,5 - 6k_1 & -0,5 - k_1 \\ -1,5 - 6k_2 & -0,5 - k_2 \end{bmatrix}$, и характеристическое уравнение полученной матрицы можно записать в виде

$$\mu^2 + (6k_1 + k_2 - 1)\mu + 1,5(k_1 - 3k_2 - 1) = 0.$$

Найдем значения k_1, k_2 такие, чтобы $|\mu_{1,2}| < 1$.

Например, если $\mu_1 = -\frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{1}{3}$ то $K = \begin{bmatrix} 79/342 \\ -25/114 \end{bmatrix}$.

Значит, получим следующий наблюдатель второго порядка (9) для данной системы:

$$\begin{cases} v(t_{k+1,1}) = \frac{13}{114}v(t_{k,1}) - \frac{125}{171}v(t_{k,2}) + \frac{79}{57}x(t_k) + \\ + \frac{79}{342}y(t_k) + \frac{1}{2}y^2(t_k), \\ v(t_{k+1,2}) = -\frac{7}{38}v(t_{k,1}) - \frac{16}{57}v(t_{k,2}) + 2u(t_k) - \frac{25}{19}x(t_k) - \\ - \frac{25}{114}y(t_k) - \frac{1}{2}y^2(t_k) + u(t_k)y(t_k), & k \in \bar{N}. \end{cases} \quad (17)$$

Используя изложенное в работах [15] или [16], построим стабилизирующее управление для системы $z_{k+1} = A_0 z_k + Bu_k + \xi(z_k, u_k, h_0)$. Так, применяя алгоритм, изложенный в статье [16] (полагая $g = [1 \ 0], \lambda_1 = -\frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{2}{3}$), построим стабилизирующее управление

$$u_k = \frac{53}{24}x_k - \frac{7}{24}y_k, \quad k \in \bar{N}.$$

Тогда, согласно теореме 4, стабилизирующим управлением для данной системы с наблюдателем (17) является

$$u(t_k) = \frac{53}{24}v(t_{k,1}) - \frac{7}{24}v(t_{k,2}), \quad k \in \bar{N}.$$

Действительно, равносильная данной системе при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ соответствующая дискретная система (6) с наблюдателем (17) и найденным стабилизирующим управлением примет вид

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ v_{k+1,1} \\ v_{k+1,2} \end{bmatrix} = \bar{G} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ v_{k,1} \\ v_{k,2} \end{bmatrix} + \eta(x_k, y_k, v_{k,1}, v_{k,2}),$$

где

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 53/12 & -7/12 \\ 79/57 & 79/342 & 13/114 & -125/171 \\ -25/19 & -25/114 & 965/228 & -197/228 \end{bmatrix},$$

$$\eta(x_k, y_k, v_{k,1}, v_{k,2}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{y_k^2}{2} \\ -\frac{y_k^2}{2} + \frac{53}{24}v_{k,1}y_k - \frac{7}{24}v_{k,2}y_k \\ \frac{y_k^2}{2} \\ -\frac{y_k^2}{2} + \frac{53}{24}v_{k,1}y_k - \frac{7}{24}v_{k,2}y_k \end{bmatrix},$$

при этом $\sigma(\bar{G}) = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$ и

$\eta(x_k, y_k, v_{k,1}, v_{k,2}) = o(|x_k| + |y_k| + |v_{k,1}| + |v_{k,2}|)$ при $|x_k| + |y_k| + |v_{k,1}| + |v_{k,2}| \rightarrow 0$, что и означает асимптотическую устойчивость нулевого решения расширенной дискретной системы с наблюдателем (17). Тогда, согласно теореме 4, данная нелинейная гибридная система с наблюдателем (17) при управлении $u(t_k) = \frac{53}{24}v(t_{k,1}) - \frac{7}{24}v(t_{k,2}), \quad k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $x = 0, y = 0, v = 0$.



Построим минимальный наблюдатель порядка $n + m - p = 1$ вида (16) для данной системы. Для синтеза такого наблюдателя воспользуемся приведенным в § 5 алгоритмом и матрицей $K = \begin{bmatrix} 79/342 \\ -25/114 \end{bmatrix}$, тогда $\Lambda = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -21 & 25 \end{bmatrix}$, $M = [3 \ 10]$, $\Lambda_M = -\frac{1}{2}$, $E = -\frac{3}{2}$, $ED_0 = \begin{bmatrix} -9 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $T = 20$. Следовательно, иско-мый наблюдатель для оценки вектора $s(t_k) = Mz(t_k)$ данной системы имеет вид

$$\bar{s}_{k+1} = -\frac{1}{2}\bar{s}_k - 9x_k - \frac{3}{2}y_k + 20u_k - \frac{7}{2}y_k^2 + 10u_k y_k. \quad (18)$$

Рассмотрим матрицу $\begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, тогда

$$\begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/57 & 10/57 \\ 2/19 & -1/19 \end{bmatrix}, \text{ и оценка (15) фазового}$$

вектора $z_k = z(t_k)$ данной системы примет вид

$$\bar{z}_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/57 & 10/57 \\ 2/19 & -1/19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{s}_k \\ D_0 z_k \end{bmatrix}, \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_k = -\frac{1}{57}\bar{s}_k + \frac{20}{19}x_k + \frac{10}{57}y_k, \\ \bar{y}_k = \frac{2}{19}\bar{s}_k - \frac{6}{19}x_k - \frac{1}{19}y_k. \end{cases}$$

Пусть $u_k = \frac{53}{24}x_k - \frac{7}{24}y_k$, $k \in \bar{N}$, – стабилизирующее управление соответствующей системы (6) при

$h_0 = \ln \frac{3}{2}$. Составим стабилизирующее управление

$$u_k = \frac{53}{24}\bar{x}_k - \frac{7}{24}\bar{y}_k, \text{ иначе } u_k = \frac{29}{12}x_k + \frac{29}{72}y_k - \frac{5}{72}\bar{s}_k,$$

$k \in \bar{N}$. Тогда при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ расширенная система,

составленная из равносильной дискретной системы и построенного наблюдателя (18) при данном управлении примет вид

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \bar{s}_{k+1} \end{bmatrix} = \bar{G} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \bar{s}_k \end{bmatrix} + \eta(x_k, y_k, \bar{s}_k),$$

где

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{10}{3} & \frac{11}{36} & -\frac{5}{36} \\ \frac{118}{3} & \frac{59}{9} & -\frac{17}{9} \end{bmatrix},$$

$$\eta(x_k, y_k, \bar{s}_k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y_k^2 \\ -\frac{7}{72}y_k^2 - \frac{5}{72}\bar{s}_k y_k + \frac{29}{12}x_k y_k \\ \frac{19}{36}y_k^2 - \frac{25}{36}\bar{s}_k y_k + \frac{145}{6}x_k y_k \end{bmatrix},$$

$$\sigma(\bar{G}) = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3} \right\} \text{ и } \eta(x_k, y_k, \bar{s}_k) = o(|x_k| + |y_k| + |\bar{s}_k|)$$

при $|x_k| + |y_k| + |\bar{s}_k| \rightarrow 0$, значит, построенная расширен-ная система с наблюдателем имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. Тогда, согласно теореме

6, исходная гибридная система при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ с построенным минимальным наблюдателем (18) при стабилизирующем управлении

$u_k = \frac{29}{12}x_k + \frac{29}{72}y_k - \frac{5}{72}\bar{s}_k$, $k \in \bar{N}$, имеет также асимптотически устойчивое нулевое решение. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе установлены критерий наблюдаемости нелинейной детерминированной непрерывно-дискретной (гибридной) системы с непрерывным выходом, имеющей постоянный шаг дискретизации, и необходимое условие наблюдаемости равносильной нелинейной дискретной системы с дискретным выходом. Представлены математические модели и достаточные признаки существования асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелинейной гибридной системы, а также достаточные признаки стабилизации нелинейной гибридной системы с построенными наблюдателями. На конкретном примере продемонстрированы алгоритмы построения асимптотических наблюдателей и представлены соответствующие расширенные нелинейные системы управления с наблюдателями, имеющие асимптотически устойчивые нулевые решения.

Полученные результаты могут быть полезны в решении вопросов эффективного управления нелинейными детерминированными гибридными динамическими системами с постоянным шагом дискретизации, в частности в решении вопроса управления данными системами в режиме бифуркаций [27].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными

- системами // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 7. – С. 57–66. [Bortakovskii, A.S., Panteleev, A.V. Sufficient Conditions for Optimal Control of Batch Systems // Automation and Remote Control. – 1987. – No. 7. – P. 57–66. (In Russian)]
2. Максимов В.П., Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вест. Пермского ун-та. Экономика. – 2011. – № 2(9). – С. 13–23. [Maksimov, V.P., Chadov, A.A. Hybrid Models in Problems of Economic Dynamics // Bulletin of Perm University. – 2011. – No. 2(9). – P. 13–23. (In Russian)]
3. Логунова О.С., Агапитов Е.Б., Баранкова И.И. и др. Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами // Электротехнические системы и комплексы. – 2019. – № 2 (43). – С. 25–34. [Logunova, O.S., Agapitov, E.B., Barankova, I.I. et al. Mathematical Models for Investigation of the Heat Condition of Objects and Heat Processes Control // Electrotechnical Systems and Complexes. – 2019. – No. 2 (43). – P. 25–34. (In Russian)]
4. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // Тр. МАИ. – 2020. – Вып.113. – DOI: <https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17> [Bortakovskiy, A.S., Uryupin, I.V. Routes Optimization of Continuous-Discrete Movement of Controlled Objects in the Presence of Obstacles // Trudy MAI. – 2020. – No. 113. – DOI: <https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17> (In Russian)]
5. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. – 240 с. [Aleksandrov, V.V., Lemak, S.S., Parusnikov, N.A. Lektsii po mekhanike upravlyaemykh sistem. – Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 2011. – 240 s. (In Russian)]
6. Nielsen, M., Ritschel, T., Christensen, I., et al. State Estimation Methods for Continuous-Discrete Nonlinear Systems Involving Stochastic Differential Equations // arXiv:2205.02730v1. – 2022. – DOI: 10.48550/arXiv.2205.02730
7. Wang, Y., Zhang, H., Mao, X., et al. Accurate Smoothing Methods for State Estimation of Continuous-Discrete Nonlinear Dynamic Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2019. – Vol. 64, iss. 10. – P. 4284–4291.
8. Farza, M., Saad, M.M., Fall, M.L., et al. Continuous-Discrete Time Observers for a Class of MIMO Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2014. – Vol. 59, iss. 4. – P. 1060–1065. – DOI: 10.1109/TAC.2013.2283754
9. Davila, J., Pisano, A., Usai, E. Finite-Time Observation of the Continuous and Discrete State for a Class of Nonlinear Switched Dynamics // IFAC Proceedings Volumes. – 2009. – Vol. 42, no.17. – P. 358–363.
10. Malikov, A.I. Observer Based Control for Continuous Systems with Discrete Measurements and Uncertain Disturbances // Lobachevskii J. Math. – 2023. – Vol. 44, no. 5. – P. 1728–1737.
11. Маликов А.И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывно-дискретных систем с неопределенными возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2025. – № 3. – С. 3–19. [Malikov, A.I. State Estimation and Stabilization of Continuous-Discrete Systems with Uncertain Disturbances // Automation and Remote Control. – 2025. – Vol. 86, no. 3. – P. 191–202.]
12. Qian, C., Du, H. Global Output Feedback Stabilization of a Class of Nonlinear Systems via Linear Sampled-Data Control // IEEE Trans. Autom. Control. – 2012. – Vol. 57, no. 11. – P. 2934–2939.
13. Karafyllis, L., Krstic, M. Nonlinear Stabilization under Sampled and Delayed Measurements, and with Inputs Subject to Delay and Zero-Order Hold // IEEE Transact. Autom. Control. – 2012. – Vol. 57, no. 5. – P. 1141–1154.
14. Seifullaev, R.E., Fradkov, A.L. Event-Triggered Control of Sampled-Data Nonlinear Systems // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – Vol. 49, no. 14. – P. 12–17.
15. Акманова С.В. О стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации // Автоматика и телемеханика. – 2024. – № 9. – С. 41–58. [Akmanova, S.V. Stabilization of Nonlinear Continuous-Discrete Dynamic Systems with a Constant Sampling Step // Automation and Remote Control. – 2024. – Vol. 85, no. 9. – P. 864–878.]
16. Акманова С.В. Об управляемости и стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2025. – Т. 52. – С. 3–20. [Akmanova, S.V. On Controllability and Stabilization of Nonlinear Continuous-discrete Dynamic Systems. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2025. – Vol. 52. – P. 3–20. (In Russian)]
17. Luenberger, D.G. Determining the State of Linear System with Observers of Low Dynamic Order: PhD Thesis. – Stanford: Stanford University, 1963.
18. O'Reilly. Observers for Linear Systems. – London: Academic Press, 1983. – 245 p.
19. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. – 306 с. [Leonov, G.A., Shumafov, M.M. Problemy stabilizatsii lineinykh upravlyaemykh sistem. – SPb.: Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2002. – 306 s. (In Russian)]
20. Юмагулов М.Г., Акманова С.В. Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Уфим. мат. журн. – 2023. – Т. 15, № 2. – С. 85–100. [Yumagulov, M.G., Akmanova, S.V. On the Stability of Equilibrium Points of Nonlinear Continuous-Discrete Dynamical Systems // Ufa Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 15, no. 2. – P. 85–99.]
21. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №7. – С. 3–42. [Golubev, A.E., Krishchenko, A.P., Tkachev, S.B. Stabilization of Nonlinear Dynamic Systems Using the System State Estimates Made by the Asymptotic Observer // Automation and Remote Control. – 2005. – Vol. 66, no. 7. – P. 1021–1058.]
22. Берколайко М.З., Долгих Ю.В., Иванова К.Г. Трудности в смысле И.Б. Руссмана и оценка надежности управления // Вестник ВГУ. Серия Системный анализ и информационные технологии. – 2008. – № 2. – С. 5–9. [Berkolajko, M.Z., Dolgih, Yu.V., Ivanova, K.G. Difficulties in the Sense I.B. Russman and the Estimation of the Reliability of Management // Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies. – 2008. – № 2. – P. 5–9. (In Russian)]
23. Захарова А.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Влияние шума на автогенератор спирального хаоса // Изв. вузов «ПНД». – 2006. – Т. 14, № 5. – С. 44–60. [Zakharova, A.S., Vadivasova, T.E., Anishchenko, V.S. Influence of Noise on Chaotic Self-Sustained Oscillations in the Regime of Spiral Attractor // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. – 2006. – Vol. 14, no 5. – P. 44–60. (In Russian)]



24. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. – М.: Наука, 2006. – 272 с. [*Krasnova, S.A., Utkin, V.A. Kaskadnyi sintez nablyudatelei sostoyaniya dinamicheskikh sistem.* – Moscow: Nauka, 2006. – 272 s. (In Russian)]
25. Каменщиков М.А. Методы построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для линейных стационарных динамических систем: дисс. ...канд. физ.-мат. наук. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2023. – 156 с. [*Kamenshchikov, M.A. Metody postroeniya optimal'nykh nablyudatelei ponizhennogo poriyadka dlya lineynykh statsionarnykh dinamicheskikh sistem: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk.* – Moscow: MGU im. M.V. Lomonosova, 2023. – 156 s. (In Russian)]
26. Фомичев В.В. Функциональные наблюдатели и наблюдатели состояния при неопределенности: дисс. ... док. физ.-мат. наук. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009. – 327 с. [*Fomichev, V.V. Funktsional'nye nablyudateli i nablyudateli sostoyaniya pri neopredelennosti: diss. ... dok. fiz.-mat. nauk.* – Moscow: MGU im. M.V. Lomonosova, 2009. – 327 s. (In Russian)]
27. Зулпикаров М.–Г.М., Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. Пример решения обратной задачи теории бифуркаций в динамической системе с шумом // Изв. вузов «ПНД». –

2005. – Т. 13, № 5–6. – С. 3–23. [*Zulpikarov, M.M., Malinetskii, G.G., Podlazov, A.V. Bifurcation Theory Inverse Problem in a Noisy Dynamical System. Example Solution // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* – 2005. – Vol. 13, iss. 6. – P. 3–23. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии С. А. Красновой.

*Поступила в редакцию 30.11.2025,
после доработки 12.03.2026.
Принята к публикации 08.04.2026.*

Акманова Светлана Владимировна – канд. пед. наук, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск,
✉ svet.akm_74@mail.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7211-1610>

© 2026 г. Акманова С. В.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная

OBSERVABILITY OF NONLINEAR CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS AND THEIR STABILIZATION USING ASYMPTOTIC OBSERVERS

S. V. Akmanova

Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia

✉ svet.akm_74@mail.ru

Abstract. This paper considers nonlinear dynamic systems described by a set of differential and difference equations and a nonlinear output equation. The states of such systems contain both continuous and discrete components, so they are called continuous–discrete, or hybrid, dynamic control systems. For this class of systems, the issues of observability, design of full- and minimum-order observers, and stabilization with observers are investigated. A transition is performed from an original nonlinear hybrid system to a nonlinear discrete-time dynamic system equivalent in a natural sense. An observability criterion, sufficient conditions for the existence of full- and minimum-order asymptotic observers for nonlinear hybrid control systems, and sufficient conditions for the stabilization of a nonlinear hybrid system with designed asymptotic observers are established. Examples of designing asymptotic observers and stabilizing the augmented system with such observers are provided.

Keywords: continuous–discrete system, hybrid system, fully observable system, observer, stabilizing control.

МОДЕЛИ ВЛАСТНЫХ ИЕРАРХИЙ НА ГЛОБАЛЬНОМ УРОВНЕ[#]

Г. А. Угольницкий*, А. Б. Усов**

***Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

*✉ gaugolnickiy@sfedu.ru, **✉ abusov@sfedu.ru

Аннотация. Исследуются глобальные властные иерархии. Глобальная властная иерархия представляет собой трёхуровневую систему управления глобального уровня, на верхнем уровне которой находится Центр. Вторым уровнем образуют агенты влияния, подчинённые Центру. На третьем уровне находятся базовые агенты, подчинённые своим агентам влияния. Модель рассматривается в динамической дискретной постановке. Сформулирован алгоритм нахождения решения игры Гермейера Γ_{1r} . Проведено исследование модели путём компьютерной имитации для модельных входных параметров и для данных, соответствующих мировым реалиям в период с 1990 по 2025 гг. Дан анализ полученных результатов. В частности, проанализированы условия возникновения однополярной, двухполярной и многополярной властной иерархии на глобальном уровне. Показано, что основным условием многополярности мира является достаточно большое значение начального количества ресурса. Если эта величина достаточно велика, то независимо от значений параметров конкуренции, мир становится многополярным. Однако на практике все ресурсы ограничены, поэтому возникает двухполярный или однополярный мир в зависимости от силы властных иерархий и значений параметров конкуренции.

Ключевые слова: властные иерархии, имитационное моделирование, игры Гермейера, равновесие Нэша, разностные игры.

ВВЕДЕНИЕ

Современные исследования властных иерархий опираются на междисциплинарные подходы, объединяющие социологию, политологию и психологию с использованием математических моделей и информационных технологий. Отметим работы А. П. Михайлова [1–3], в которых подчёркивается необходимость комплексного анализа, учитывающего разнообразие факторов, влияющих на властные структуры. Большой интерес представляют работы М. Л. Хазина [4, 5], описывающие теорию властных иерархий, но в них математические модели не используются. Интересны подходы к постановке задачи, предложенные в работах [6–9].

В данной статье используются постановки и результаты статьи [10]. По сравнению с работой [10] уточнён алгоритм исследования модели при использовании информационного регламента игры

Гермейера Γ_{1r} , использованы данные для моделирования властных иерархий глобального уровня, образующих основу многополярного мира. Отметим, что агентами многополярного мира выступают цивилизации [11, 12], организации которых присуща двойственность. С одной стороны, в состав цивилизации входят юридически независимые суверенные государства, обладающие определённой экономической и культурной самостоятельностью. С другой стороны, фактически цивилизация представляет собой властную иерархию, участники которой делегируют своему ведущему государству или некоторому координирующему органу основные полномочия по взаимодействию с другими полюсами, обеспечению обороны, расчётам в единой валюте и т. д. В статье рассматривается цивилизация именно с этой точки зрения.

Статья организована следующим образом. В § 1 приведена математическая постановка задачи для случая трёхуровневых властных иерархий типа «Центр – агенты влияния – базовые агенты». В § 2 приведены результаты численных расчётов для

[#] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 25-11-00094.



модельных примеров и реальных данных и их анализ. В заключении представлены основные выводы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При построении математической модели глобальных властных иерархий будем следовать авторскому подходу, сформулированному в статье [10]. Глобальная властная иерархия представляет собой многоуровневую структуру управления. Ниже при исследовании глобальных властных иерархий будем использовать трёхуровневые системы управления.

В таких системах управления имеется:

- несколько конкурирующих между собой за власть (властный ресурс) субъектов верхних уровней иерархии (Центров властных структур, полюсов многополярного мира);

- несколько подчинённых каждому Центру субъектов управления среднего уровня (агентов влияния), конкурирующих между собой;

- несколько подчинённых каждому агенту влияния субъектов управления нижнего уровня (базовых агентов), также конкурирующих между собой.

Ресурс создаётся общими усилиями базовых агентов всех властных структур. Достаточно сильное модельное предположение состоит в том, что агенты влияния и Центры не создают ресурс, а только регулируют процесс его создания. Поэтому в каждый момент времени доля ресурса, контролируемая властной группировкой (её объём власти), пропорциональна совокупным усилиям базовых агентов этой группировки. Каждый агент (в том числе каждый из Центров) располагает некоторыми ресурсами и делит их между усилиями по увеличению доли властного ресурса своей группировки и усилиями, направленными на конкуренцию с другими агентами или Центрами. Выигрыш каждого агента складывается из полезности от увеличения совместно создаваемого ресурса и от победы над конкурентами. В такой формулировке задачи используется идеология согласования общественных и частных интересов (СОЧИ) [13, 14]. Базовые агенты в качестве управлений используют свои усилия, ресурсы – например, время, которое они тратят на увеличение властного ресурса своей группировки. Агенты влияния в качестве управления используют контроль деятельности своих базовых агентов (ограничивают снизу их усилия по созданию ресурса, т. е. накладывают ограничения на «эгоизм» базовых агентов). Аналогично, Центры контролируют деятельность своих агентов влияния. Именно в этом выражается основная ре-

гулирующая функция Центров и агентов влияния, отмеченная в начале абзаца. В качестве примера можно привести требование США к своим союзникам по НАТО тратить не менее чем определённую долю своего ВВП на военные расходы, т. е. фактически на покупку оружия у самих США. Подобные требования к подчинённым агентам (допустим, использовать в расчётах только валюту Центра или те же системы вооружений) могут на основе своего влияния предъявлять и другие Центры.

Итак, модель системы трёхуровневых властных иерархий имеет следующий вид [10].

$$J_i = \sum_{t=1}^T \delta^t \left[\left(A - \sum_{p=1}^N v_p^t \right) v_i^t + R_i^t \right] \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$0 \leq q_{ij}^t \leq 1; \quad (2)$$

$$J_{ij} = \sum_{t=1}^T \delta^t \left[\left(A_{ij} - \sum_{r=1}^{n_i} v_{ir}^t \right) v_{ij}^t + R_{ij}^t \right] \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$q_{ij}^t \leq q_{ijk}^t \leq 1, \quad (4)$$

$$J_{ijk} = \sum_{t=1}^T \delta^t \left[\left(A_{ij} - \sum_{s=1}^{m_{ij}} v_{ijs}^t \right) v_{ijk}^t + R_{ijk}^t \right] \rightarrow \max, \quad (5)$$

$$q_{ijk}^t \leq u_{ijk}^t \leq 1, \quad (6)$$

$$R^t = \left(1 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t \right) R^{t-1}, \quad R^0 = R_0, \quad (7)$$

$$R_i^t = \begin{cases} \frac{R^t \left(\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t \right)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t}, & \text{если } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8)$$

$$R_{ij}^t = \begin{cases} \frac{R_i^t \left(\sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t \right)}{\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t}, & \text{если } \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (9)$$

$$R_{ijk}^t = \begin{cases} \frac{R_{ij}^t u_{ijk}^t}{\sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t}, & \text{если } \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (10)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i,$$

$$k = 1, \dots, m_{ij}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Здесь:

i – индекс Центра (руководимой им властной иерархии);

j – индекс агента влияния;

k – индекс базового агента;

t – временной индекс;

N – число властных иерархий;

n_i – число властных группировок i -й иерархии;

m_{ij} – число базовых агентов j -го агента влияния i -й иерархии;

J_i, J_{ij}, J_{ijk} – выигрыши Центра, агента влияния и базового агента соответственно;

$R^t, R_i^t, R_{ij}^t, R_{ijk}^t$ – общий ресурс, ресурс властной иерархии (Центра), властной группировки (агента влияния) и базового агента соответственно в момент времени t ;

q_{ij}^t – управление Центра, применяемое к данному агенту влияния в момент времени t ;

$\sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}^t$ – усилия Центра, затрачиваемые на контроль своей иерархии;

$$v_i^t = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}^t, & \text{если } 1 - \sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}^t > 0 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{– доля усилий}$$

Центра на конкуренцию с другими Центрами;

q_{ijk}^t – управление агента влияния, применяемое к данному базовому агенту в момент времени t ;

$\sum_{k=1}^{m_{ij}} q_{ijk}^t$ – доля усилий агента влияния на контроль своей группировки в момент времени t ;

$$v_{ij}^t = \begin{cases} 1 - \sum_{k=1}^{m_{ij}} q_{ijk}^t, & \text{если } 1 - \sum_{k=1}^{m_{ij}} q_{ijk}^t > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{– доля уси-$$

лий агента на конкуренцию с другими агентами влияния своей иерархии;

$$v_{ijk}^t = \begin{cases} 1 - u_{ijk}^t, & \text{если } 1 - u_{ijk}^t > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{– доля усилий}$$

агента на конкуренцию с другими базовыми агентами своей группировки;

u_{ijk}^t – доля усилий базового агента на увеличение ресурса;

A, A_i, A_{ij} – параметры конкуренции;

$\delta \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования;

R_0 – начальное значение общего ресурса;

T – горизонт планирования.

При $i=1, \dots, N$ соотношения (1)–(10) определяют разностную игру N лиц в нормальной форме.

Система властных иерархий может быть однополярной, двухполярной или многополярной. Однополярная система возникает при наличии явного доминирования одной иерархии, превосходящей все остальные по совокупности экономических, военных и политических показателей. Условия для её возникновения: значительное ослабление потенциальных конкурентов; экономический прорыв, обеспечивающий технологическое превосходство и военное доминирование. Двухполярная система возникает при наличии двух сопоставимых по силе Центров, конкурирующих за своё влияние. Для её формирования необходимы примерно равные экономические и военные потенциалы двух иерархий, значительно превосходящие потенциалы остальных иерархий. Многополярная система властных иерархий характеризуется наличием нескольких центров силы, ни один из которых не обладает достаточным превосходством для единоличного доминирования. Условия для её образования – относительное равенство экономического, политического и военного потенциала нескольких иерархий.

Дадим математическую формализацию вышесказанного.

Определение [10]. Система властных иерархий в момент времени t :

– *однополярная*, если $\exists i \in \{1, \dots, N\} R_i^t \geq 0,75R^t$;

– *двухполярная*, если $\exists i, j \in \{1, \dots, N\} R_i^t + R_j^t \geq 0,75R^t \wedge |R_i^t - R_j^t| \leq 0,15R^t$;

– *многополярная*, иначе. ♦

Конечно, свойство однополярности определено субъективно: значение коэффициента 0,75 взято из достаточно общих соображений «квалифицированного большинства», коэффициент «сравнимости полюсов» 0,15 тоже произволен. Так или иначе, представляют большой интерес условия возникновения систем властных иерархий с различным числом полюсов. Эти условия и анализируются далее.

2. ИМИТАЦИОННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Исследование модели (1)–(10) проводится численно путём имитационного моделирования согласно следующему алгоритму.

1. Решается параметрическая задача нелинейной оптимизации (5), (6), (10), представляющая собой игру в нормальной форме $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}$ игроков (базовых агентов всех властных группировок). В



результате строится равновесие Нэша, параметрически зависящее от управлений агентов влияния.

2. Найденные в п. 1 алгоритма стратегии базовых агентов всех властных группировок $\{u_{ijk}^t\}_{t=1k=1}^T m_{ij}$ подставляются в формулы (7)–(9). Решается n_i ($i = 1, 2, \dots, N$) задач оптимизации агентов влияния (3), (4) при ограничениях (9), т. е. игра среднего уровня (3), (4), (9). Каждая такая задача представляет собой задачу параметрического оптимального управления. Определяется набор оптимальных стратегий агентов влияния, параметрически зависящих от управления своего Центра (стратегий $\{q_{ijk}^t\}_{t=1k=1}^T m_{ij}$). При этом у каждого агента влияния оптимальной оказывается стратегия, порождённая некоторым равновесием Нэша из игры базовых агентов.

3. Найденные в п. 1 алгоритма стратегии базовых агентов всех властных группировок $\{u_{ijk}^t\}_{t=1k=1}^T m_{ij}$ подставляются в формулы (1), (2), (8). Решается игра верхнего уровня (1), (2), (8). Полученное равновесие Нэша обозначим $\{q_{ij}^t\}_{t=1j=1}^T n_i$.

4. Полученный набор $\{q_{ij}^t, q_{ijk}^t, u_{ijk}^t\}_{t=1j=1k=1}^T n_i m_{ij}$ есть решение игры Гермейера Γ_{lr} (1)–(10) при фиксированном i , а совокупность этих решений для всех $i = 1, \dots, N$ есть решение общей разностной игры.

Аналитическое решение задачи (1)–(10) затруднено нелинейностью модели и наличием

большого числа субъектов, принимающих решения. Поэтому решение модели было проведено численно согласно указанному выше алгоритму.

2.1. Модельные примеры

В связи с ограниченностью ресурсов исследования все эксперименты были проведены для случая $N = 3$; $n_i = 2$; $m_{ij} = 2$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$; $T = 4$. Перед проведением вычислительных экспериментов был разработан следующий план.

1. Выбирались входные параметры модели $R_0, A, A_1, A_2, A_3, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}$.

2. Все величины перебирались с шагом 2.

3. Значение R_0 варьировалось от 1 до 200; A от 2 до 60; A_1, A_2, A_3 и $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}$ от 0,1 до 60 каждое.

4. Для каждого прогона модели находилось равновесие игры Гермейера Γ_{lr} и определялось, является ли мир однополярным, двухполярным или многополярным.

Всего было проведено порядка 1000 вычислительных экспериментов, результаты части которых приведены в табл. 1. Расчёты показали, что при различных значениях параметров конкуренции A, A_i, A_{ij} всегда находится такое значение начального количества ресурса R_{00} , что при $R_0 > R_{00}$ мир является многополярным, а при $R_0 \leq R_{00}$ имеется сразу несколько различных равновесий Нэша, при некоторых из которых мир становится однополярным, при других – двухполярным, и есть ровно одно равновесие Нэша, при котором мир остаётся многополярным.

Таблица 1

Входные данные и результаты счета

№	A	A_1	A_2	A_3	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{31}	A_{32}	R_{00}
1	10	5	0,3	1	1	2	2	2	0,1	0,1	2,4
2	5	2	1	2	2	2	5	5	1	0,1	1,1
3	2	1	0,3	5	10	2	2	5	1	1	0,8
4	10	0,1	1	10	5	1	5	28	0,1	0,1	2,7
5	5	10	2	15	2	2	5	2	0,2	0,1	1,7
6	2	5	5	20	2	1	2	1	0,2	0,5	0,3
7	10	2	10	25	5	1	1	2	0,5	0,5	2,6
8	20	2	15	30	5	0,5	1	1	0,5	0,1	6,2
9	30	0,1	15	25	10	0,5	0,2	0,5	0,5	1	8,7
10	2	1	20	20	10	1	0,2	0,5	1	0,5	5,2
11	5	2	20	15	5	1	0,5	1	1	0,5	1,1
12	10	5	1	10	5	0,5	0,5	0,2	1	0,1	2,8
13	20	10	2	5	1	0,5	2	1	0,5	1	5,8
14	2	15	0,2	2	5	0,5	1	1	0,5	1	4,2
15	5	20	5	1	5	2	1	5	0,2	0,1	4,5
16	10	25	5	0,1	5	0,2	1	5	0,2	0,2	2,6
17	20	30	10	5	1	1	2	2	0,2	0,2	6,8
18	5	20	10	10	2	1	2	2	0,1	0,1	3,9
19	2	25	2	15	2	0,1	0,5	1	0,1	0,2	0,3
20	10	40	5	0,3	1	2	2	2	0,1	0,1	2,5

Так, в случае $A = 10$; $A_1 = 40$; $A_2 = 5$; $A_3 = 0,3$; $A_{11} = 1$; $A_{12} = A_{21} = 2$; $A_{3j} = 0,1$; $j = 1, 2$ этим значением оказывается $R_{00} = 2,5$ у. е. (условных единиц).

При $R_0 > 2,5$ у. е. имеется только одно равновесие Нэша. Во всех случаях мир получается многополярным и, например, в случае $R_0 = 8$ у. е. получим, что в равновесии Нэша $J_1 = J_2 = J_3 = 53,3$ у. е.; $R^1 = 32$; $R^2 = 128$; $R^3_i = 10,66$; $R^2_i = 42,66$; $i = 1, 2, 3$; при $R_0 = 3$ у. е. и остальных входных данных предыдущего примера получаем $J_1 = J_2 = J_3 = 20$ у. е.; $R^1 = 12$; $R^2 = 48$; $R^3_i = 4$; $R^2_i = 16$; $i = 1, 2, 3$.

При $R_0 = 2,5$ у. е. имеется четыре равновесия Нэша, в трёх из которых мир является двухполярным, а в одном случае – многополярным.

При $R_0 < 2,5$ у. е. имеется семь равновесий Нэша, в трёх из которых мир является двухполярным, в трёх – однополярным и в одном – многополярным.

В целом, во всех проведённых имитационных экспериментах удалось определить значение величины R_{00} , обладающей указанными выше свойствами.

Таким образом, при достаточно большом значении начального количества ресурса R_0 мир многополярен независимо от значений параметров конкуренции; если количество ресурса ограничено, то возникает двухполярный или однополярный мир в зависимости от силы иерархий и значений параметров конкуренции.

На рис. 1 показана зависимость величины R_{00} от параметра конкуренции A для входных данных примеров 1 (жирная линия), 2 (пунктирная), 3 (штрихпунктирная) (номера примеров указаны в первом столбце табл. 1). С ростом значения параметра A величина R_{00} растёт линейно или степенным образом.

Значение параметра конкуренции A определяет значение величины R_{00} . При любых значениях параметров конкуренции A_i , A_{ij} существует значение начального количества ресурса R_{00} , отделяющее случай многополярного мира от случая, когда имеется семь разных равновесий Нэша, соответствующих одно-, двух- и многополярному миру. Но значение величины R_{00} зависит только от параметра конкуренции на верхнем уровне A и не зависит от параметров конкуренции на нижних и средних уровнях иерархии A_i , A_{ij} .

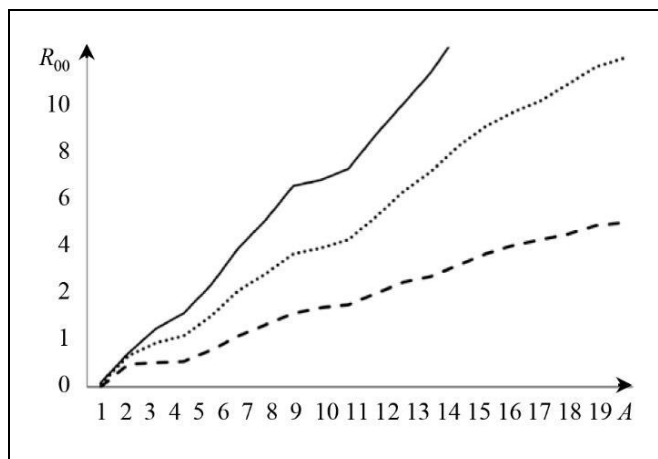


Рис. 1. Зависимость величины R_{00} от параметра конкуренции A

На рис. 2 показана зависимость количества равновесий Нэша (M) от начального количества ресурса R_0 для входных данных примеров 1 (сплошная жирная линия), 8 (штрихпунктирная) и 9 (пунктирная линия). Все линии начинаются в точке $(0, 7)$ и вначале совпадают с горизонтальной прямой $y = 7$, потом терпят разрыв с перескоком через точку $(x_1, 4)$ в горизонтальную прямую $y = 1$; точка разрыва (x_1) зависит от входных параметров примера.

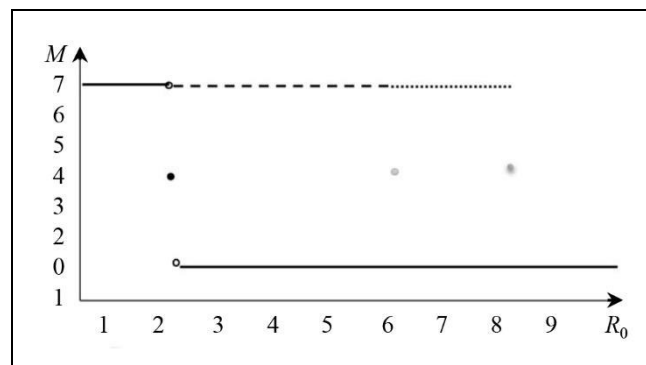


Рис. 2. Зависимость числа равновесий Нэша от начальной величины ресурса R_0

2.2. Примеры глобальных властных иерархий

В роли глобальных властных иерархий выступают объединения государств, отношения между которыми строятся на основе иерархии. Властные иерархии соединяют государства, создавая между ними сложный механизм взаимодействий, где одни страны выступают в роли лидеров (ведущих), а другие – в роли последователей (ведомых).

При моделировании таких иерархий важно правильно провести идентификацию входных данных модели. Для описания силы и влияния государства необходимо учесть его экономическую мощь, ресурсные возможности по наращиванию экономического и оборонного потенциала, наличие военной мощи, способной оказывать силовое давление на другие страны.

Определение мощи государства – сложная и многогранная задача, требующая учёта множества взаимосвязанных факторов. Мощь государства не сводится лишь к военной силе или экономическому благосостоянию, но представляет собой комплексную характеристику его потенциала и влияния на международной арене, включающую в себя его военную и экономическую мощь, политическую стабильность, демографический потенциал и культурное влияние на другие страны. Все эти показатели взаимосвязаны и влияют друг на друга.

Одним из показателей мощи государства является индекс национальной силы Global Power Index (Индекс глобальной мощи), разработанный американской компанией Gullibility Intelligence. Индекс национальной силы – это комплексный показатель, предназначенный для оценки и сравнения мощи государств на международной арене. Он учитывает широкий спектр факторов, от экономических показателей и военной мощи до де-



мографических характеристик и технологического развития.

Показатели национальной силы для 193 стран – членов ООН за 2024 г. представлены на сайте Индекса национальной силы [15]. В табл. 2 приведены данные по наиболее мощным странам согласно этому индексу на 01.01.2025.

На основании данных табл. 2 были выведены входные данные для модели (1)–(10) для расчёта силы властных иерархий.

Таблица 2

Индекс национальной силы ведущих стран мира по состоянию на 01.06.2025

Страна	Значение
КНР	12,95
США	10,19
РФ	5,68
Индия	5,3
Бразилия	3,31
Канада	2,37
Германия	2,09
Япония	1,89
Индонезия	1,74
Франция	1,7
Австралия	1,64
Иран	1,63
Республика Корея	1,52
Саудовская Аравия	1,52

В качестве глобальных властных иерархий с определённой условностью были приняты:

– первая властная коалиция – США (агенты влияния Канада и Германия, базовые агенты Япония, Франция, Австралия и Великобритания);

– вторая коалиция – Китай (агенты влияния Пакистан, Бразилия, базовые агенты Нигерия, Вьетнам, Египет, ДР Конго);

– третья коалиция – Россия (агенты влияния Индия, Иран, базовые агенты Индонезия, Республика Корея, Венесуэла, Казахстан).

Для расчётов были взяты следующие входные данные: $N = 3$; $n_i = 2$; $i = 1, 2, 3$; $m_{ij} = 2$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$; $R_0 = 100$ у. е.; $A = 100$; $A_1 = 10,19$; $A_2 = 12,05$; $A_3 = 5,68$; $A_{11} = 2,37$; $A_{12} = 1,89$; $A_{21} = 1,04$; $A_{22} = 3,29$; $A_{31} = 5,89$; $A_{32} = 1,63$.

В ходе проведённого эксперимента было найдено только одно равновесие Нэша, соответствующее многополярному миру.

В этом случае $J_1 = J_2 = J_3 = 666,7$ у. е.; $R^1 = 400$; $R^2 = 600$; $R^1_i = 133$; $R^2_i = 533$; $i = 1, 2, 3$.

Действительно, в настоящее время мир становится многополярным с центрами в Китае, США и России с учётом их союзников.

В табл. 3 приведено сравнение интегральных макроэкономических показателей США, России и Китая с 1990 по 2025 гг. на основе работ [16–18]. Эти показатели включают валовый внутренний продукт, уровни инфляции и безработицы, производительность труда и т.д.

На основании данных, приведённых в табл. 3, с учётом изложенного в работах [16–18] для остальных стран, были проведены расчёты всех входных параметров глобальных властных иерархий (центры властных иерархий – США, Китай, Россия) за 1990–2025 гг. для случая $N = 3$; $n_i = 2$; $i = 1, 2, 3$; $m_{ij} = 2$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$ и входных данных из табл. 4.

Таблица 3

Индекс национальной силы трёх ведущих стран мира

Страна	Год						
	1990	1995	2000	2010	2015	2020	2025
США	6,2	8,1	6,3	8,5	8,6	7,1	10,19
Китай	4,5	6,2	4,7	10,7	11,5	12,0	12,95
Россия	3,1	2,7	3,5	5,3	5,5	5,6	5,68

Таблица 4

Входные параметры за 1990–2025 гг.

Год	R_0	A	A_1	A_2	A_3	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{31}	A_{32}
1990	8	20	6	5	3	1,2	1,1	0,8	0,6	0,76	1,03
1995	11	27	8	6	2	1,8	1,6	1,0	0,9	0,65	0,91
2000	7	21	6,3	5,4	2,9	1,7	1,9	1,8	1,9	1,1	0,9
2005	5	26	7,1	8,7	2,9	2,0	2,5	1,9	2,3	1,1	0,86
2010	13	29	7,5	10,4	3,2	2,3	2,9	2,4	2,7	1,3	1,0
2015	15	30	8,1	12,5	3,4	3,1	3,2	3,2	2,9	1,5	1,2
2020	18	32	8,8	13,3	3,7	3,3	3,5	3,4	3,4	1,7	1,5
2024	22	34	9,1	13,9	3,9	3,7	3,9	3,8	3,8	1,9	1,8

В 1990, 2020 и 2025 гг., согласно проведённым расчётам, было получено по одному равновесию Нэша и мир является многополярным, а в 1995, 2000, 2005, 2010, 2015 гг. найдено по семь равновесий Нэша, в трёх из которых мир оказывается двухполярным, в трёх – однополярным и в одном многополярным. При однополярном мире существует один доминирующий центр власти, влияния и принятия решений. Обычно это связано с тем, что одна страна или блок стран (в рассматриваемом примере США) имеет значительно большее влияние на глобальные политические, экономические и военные процессы по сравнению с другими государствами. Такая система может привести к игнорированию интересов других стран и возникновению конфликтов. С течением времени мир стал более многополярным с ростом влияния таких стран, как Китай и Россия, что привело к более сложной и конкурентной международной политике.

Наличие нескольких равновесий Нэша в один и тот же момент времени говорит о том, что при таком наборе входных данных мир может с разной вероятностью быть одно-, двух- или многополярным. В этом случае существует несколько устойчивых стратегий, которые разные страны могут выбрать, и каждая из этих стратегий оптимальна с точки зрения каждой страны, учитывая стратегии остальных стран. В этом случае субъекты управления сталкиваются с трудностью в выборе, какую стратегию принять. Это приводит к неопределённости и нестабильности в их поведении, так как каждый из них может рассчитывать на то, что другие выберут разные стратегии. В результате субъекты управления нуждаются в механизмах координации, чтобы выбрать одно из равновесий. В целом, наличие нескольких равновесий Нэша подчёркивает сложность стратегического взаимодействия между странами и важность учёта контекста и механизмов, которые могут повлиять на выбор стратегий. Все эти особенности наблюдаются в поведении отдельных стран в настоящее время.

В табл. 5 приведены значения величины R_{00} по годам за 1990–2015 гг.

Таблица 5

Значения величины R_{00} по годам за 1990–2015 гг.

	Год							
	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2020	2025
R_{00}	6,8	11,6	8,1	6,8	14,3	16,2	19,2	23,1

Отметим, что начиная с 2005 г. количество ресурса, при котором происходит изменение количества равновесий Нэша, непрерывно растёт.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, на основе приведённой выше модели показано, что основным условием многополярности мира является достаточно большое значение начального количества ресурса. Если эта величина достаточно велика, то независимо от значений па-

раметров конкуренции, мир становится многополярным. Однако на практике все ресурсы ограничены, поэтому возникает двухполярный или однополярный мир в зависимости от силы властных иерархий и значений параметров конкуренции. Данный вывод подтверждается всей мировой историей. Одна из ключевых предпосылок многополярности заключается в изменении глобальной экономической структуры. Растущие экономики стран, таких как Китай, Индия и Бразилия, становятся всё более влиятельными на международной арене. Эти государства продолжают увеличивать свои экономические показатели и стремятся занять более активную позицию в мировой политике.

Как подтвердили проведённые имитационные эксперименты, до распада СССР в мире была двухполярная система властных иерархий с центрами в СССР и США. После распада СССР образовалась однополярная система с центром в США, которая впоследствии постепенно превратилась в двухполярную систему с центрами в США и Китае. Наконец, в последнее время происходит преобразование мировой системы в многополярную систему властных иерархий с центрами в США, Китае и России; возможно, и другие государства смогут стать центрами властных иерархий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А.П. Математическое моделирование динамики распределения власти в иерархических структурах // Математическое моделирование. – 1994. – Т. 6, № 6. – С. 108–138. [Mikhailov, A.P. Mathematical Modelling of Power Distribution Dynamics in Hierarchical Structures // Mathematical Models and Computer Simulations. – 1994. – Vol. 6, no. 6. – P. 108–138. (In Russian)]
2. Михайлов А.П., Ланкин Д.Ф. О конструкциях властных иерархий // Математическое Моделирование. – 2009. – Т. 21, № 8. – С. 108–120. [Mikhailov, A.P., Lankin, D.F. The Structures of Power Hierarchies // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2009. – Vol. 2, no. 2. – P. 200–210.]
3. Михайлов А.П., Петров А.П., Подлипская О.Г. Сравнительный анализ стратегий в модели противостояния власти и оппозиции // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 11. – С. 67–76. [Mikhailov, A.P., Petrov, A.P., Podlipskaya, O.G. Comparative Analysis of Strategies in the Model of a Confrontation between the Government and Opposition // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2022. – Vol. 15, no. 3. – P. 496–501.]
4. Хазин М. Лестница в небо. Диалоги о власти, карьере и мировой элите. – М.: РИПОЛ классик, 2022. – 624 с. [Hazin, M. Lestnica v nebo. Dialogi o vlasti, kar'ere i mirovoj ehlyte. – M.: RIPOL klassik, 2022. – 624 s. (In Russian)]
5. Хазин М., Щеглов С. Кризис и Власть. Т. I. Лестница в небо. – 544 с. – Т. II. Люди Власти. – 528 с. – М.: РИПОЛ классик, 2023. [Hazin, M., Shcheglov, S. Krizis i Vlast'. T. I. Lestnica v nebo. – 544 s. – T. II. Lyudi Vlasti. – 528 s. – M.: RIPOL klassik, 2023. (In Russian)]



6. *Fix, B.* Personal Income and Hierarchical Power // *J. of Econ. Issues.* – 2019. – Vol. 53, no. 4. – P. 928–945.
7. *Fix, B.* How the Rich Are Different: Hierarchical Power as the Basis of Income Size and Class // *J. of Computational Social Science.* – 2021. – Vol. 4. – P. 403–454.
8. *Koliba, C.* Liberal Democratic Accountability Standards and Public Administration // *Public Administration Review.* – 2024. – Vol. 84, No. 4. – P. 561–571.
9. *Nieto-Morales, F., Peeters, R., Lotta, G.* Burdens, Bribes, and Bureaucrats: The Political Economy of Petty Corruption and Administrative Burdens // *J. of Public Administration Research and Theory.* – 2024. – Vol. 34, No. 4. – P. 481–497.
10. Горбанёва О.И., Угольников Г.А. Модели управления во властных иерархиях // *Проблемы управления.* – 2024. – № 1. – С. 43–55. [*Gorbaneva, O.I., Ougolnitsky, G.A.* Control Models in Power Hierarchies // *Control Sciences.* – 2024. – No. 1. – P. 34–45.]
11. Дугин А.Г. Многополярный мир. От идеи к реальности. – М.: Академический проект, 2024. – 383 с. [*Dugin, A.G.* *Mnogopolyarnyi mir. Ot idei k real'nosti.* – М.: Akademicheskii projekt, 2024. – 383 s. (In Russian)]
12. Дугин А.Г. Теория многополярного мира. Плюриверсум. – М.: Академический проект, 2024. – 364 с. [*Dugin, A.G.* *Teoriya mnogopolyarnogo mira. Plyuriversum.* – М.: Akademicheskii projekt, 2024. – 364 s. (In Russian)]
13. Горбанёва О.И., Угольников Г.А. Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов // *Математическая теория игр и её приложения.* – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 50–73. [*Gorbaneva, O.I., Ougolnitsky, G.A.* Price of Anarchy and Control Mechanisms in Models of Concordance of Public and Private Interests // *Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya.* – 2015. – Vol. 7, no. 1. – P. 50–73. (In Russian)]
14. Угольников Г.А., Усов А.Б. Динамические модели согласования частных и общественных интересов при продвижении инноваций // *Математическая теория игр и её приложения.* – 2019. – Т. 11, № 1. – С. 96–114. [*Ougolnitsky, G.A., Usov, A.B.* Dynamic Models of Private and Public Interests Combining in Promoting Innovations // *Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya.* – 2019. – Vol. 11, no. 1. – P. 96–114. (In Russian)]
15. National Power Index. – URL: <https://nationpowerindex.com/> (дата обращения: 08.11.2025). [Accessed November 8, 2025.]
16. Бахтизин А.Р. Гибридные войны и национальная безопасность России // *Экономическое возрождение России.* – 2024. – Т. 80, № 2. – С. 54–64. [*Bakhtizin, A.R.* Hybrid Wars and Russian National Security // *Economic Revival of Russia.* – 2024. – Vol. 80, no. 2. – P. 54–64. (In Russian)]
17. Каранина Е.В., Лобанов В.И. Сравнение ключевых индикаторов экономической безопасности США, России и Китая в разрезе глобальной социально-экономической повестки // *Russian Journal of Management.* – 2023. – Т. 11, № 1. – С. 38–72. [*Karanina, E.V., Lobanov, V.I.* Comparison of Key Indicators of Economic Security of the USA, Russia and China in the Context of the Global Socio-Environmental Agenda // *Russian Journal of Management.* – 2023. – Vol. 11, no. 1. – P. 38–72. (In Russian)]
18. Калабеков И.Г. Россия, Китай и США в цифрах, 2008 – 2022 гг. Справочное издание. – М., 2022. – 141 с. [*Kalabekov, I.G.* *Rossiya, Kitaj i SSHA v cifrach, 2008 – 2022 gg. Spravochnoe izdanie.* – Moscow, 2022. – 141 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии
А. Г. Чхартишвили.

Поступила в редакцию 08.12.2025,
после доработки 08.01.2026.
Принята к публикации 18.02.2026.

Угольников Геннадий Анатольевич – д-р физ.-мат. наук,
✉ gaugolnickiy@sfedu.ru,
ORCID iD: 0000-0001-5085-5144

Усов Анатолий Борисович – д-р техн. наук,
✉ abusov@sfedu.ru,
ORCID iD: 0000-0003-1279-7291

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону.

© 2026 г. Угольников Г. А., Усов А. Б.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

MODELS OF POWER HIERARCHIES AT THE GLOBAL LEVEL

G. A. Ougolnitsky* and A. B. Usov**

***Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

*✉ gaugolnickiy@sfedu.ru, **✉ abusov@sfedu.ru

Abstract. This paper is devoted to global power hierarchies. A global power hierarchy is a three-level control system, with the upper level occupied by a Principal. The second (middle) level consists of influence agents subordinate to the Principal. At the third (lower) level, there are basic agents subordinate to influence agents. The model is considered in a dynamic discrete-time setting. An algorithm is formulated to solve the Germeier game Γ_{1l} . The model is studied via computer simulations using both model input parameters and data corresponding to global realities for the period from 1990 to 2025. The simulation results are analyzed. In particular, conditions for the emergence of a unipolar, bipolar, and multipolar power hierarchy at the global level are established. As shown, the main condition for a multipolar world is a large initial quantity of resources. If this quantity is sufficiently large, then regardless of the values of competition parameters, the world becomes multipolar. In practice, however, all resources are limited; therefore, a bipolar or unipolar world emerges, depending on the strength of power hierarchies and the values of competition parameters.

Keywords: power hierarchies, simulation modeling, Germeier games, Nash equilibrium, difference games.

Acknowledgments. This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 25-11-00094.



ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ВОЗНАГРАЖДЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ РЫНОЧНО-НЕЙТРАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

Б. Е. Беляков

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова НИУ ВШЭ;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва

✉ work.belyakov@gmail.com

Аннотация. Разработана и апробирована многокритериальная функция вознаграждения в рамках рыночно-нейтральной методологии управления инвестиционным портфелем на основе глубокого обучения с подкреплением, формализующая задачу оптимального распределения капитала как марковский процесс последовательных решений в нестационарной среде. Целевая функция вознаграждения одновременно оптимизирует избыточную доходность на единицу риска, нейтральность к рынку через введенный штраф за корреляцию с целевым рыночным индексом и трансакционные издержки. Таким образом, контроль системного риска и учет стоимости ребалансировки портфеля становятся частью процесса моделирования и обучения. Обучение и анализ модели выполняется при помощи кросс-валидации для снижения смещения и адаптации к смене режимов. Экспериментальная валидация на ведущих фондовых индексах США, Европы и Азии за десятилетний период показывает работоспособность предложенной методологии, в частности устойчивое улучшение метрик: более высокий коэффициент Шарпа, меньшую максимальную просадку портфеля и существенно сниженную корреляцию с рыночным индексом по сравнению с классическими алгоритмами оптимизации и подходами на основе обучения с подкреплением на основе одного критерия.

Ключевые слова: рыночно-нейтральная стратегия, оптимизация портфеля, обучение с подкреплением, рыночно-нейтральный портфель, глубокое обучение, управление портфелем.

ВВЕДЕНИЕ

Финансовые рынки характеризуются стохастичностью динамики доходностей при наличии устойчивых поведенческих и структурных аномалий, таких как импульс, избыточная волатильность и мультифакторные премии [1–4]. С учетом указанных характеристик рыночно-нейтральные стратегии сформировали ядро современной количественной торговли, где целью агента является извлечение избыточной доходности при минимальной экспозиции к систематическому риску, т. е. получение инвестиционного преимущества, не объяснимого пассивными рыночными факторами [2, 5, 6]. Исторически истоки данного подхода восходят к ранним хедж-фондам Альфреда Джонса

(1940-е гг.), использовавшим конструкции из длинных и коротких позиций для хеджирования систематических рисков [7]. Теоретический фундамент заложен факторными моделями (Фамы – Френча, Кархарта) и классическими стратегиями относительной стоимости, включая торговлю парами или синтетическими контрактами [1, 2, 8].

При практической востребованности традиционные реализации подобных моделей опираются на статические факторные структуры с фиксированными экспозициями и подвержены ряду системных уязвимостей: деградации факторов при смене рыночных режимов [4, 9, 10], переобучению в высокоразмерных пространствах признаков [9, 11, 12] и отсутствию механизмов динамической адаптации к кластерам волатильности и макроэко-

номическим шокам [4, 10, 13]. Современные разработки в области тайминга факторных премий и адаптивного распределения капитала демонстрируют пользу динамических предикторов относительно статических арбитражных конструкций [11, 14], однако практическая польза таких моделей деградирует, когда целевая постановка задачи требует нулевой экспозиции к бенчмарку при реалистичных рыночных условиях и транзакционных издержках [3, 5, 14].

Глубокое обучение с подкреплением естественным образом формулирует управление портфелем как марковский процесс принятия решений, в котором агент обучается политике ребалансировки, оптимизирующей долгосрочную целевую функцию вознаграждения с учетом транзакционных издержек, ограничений на оборотный или заемный капитал, а также рисков просадки (снижения стоимости) стоимости портфеля [14–18]. Предлагаемая постановка задачи позволяет: обновлять представления по мере поступления данных [15, 17], эксплуатировать динамическую структуру доходностей и ковариаций [9, 11, 17], реализовывать замкнутый контур «наблюдение – действие – обратная связь», устраняя необходимость в жестко заданных наборах факторов [14, 15, 17].

Для практической реализации и стабильного обучения политик полезно опираться на современные алгоритмы оптимизации и техники регуляризации и предотвращения переобучения при высоких размерностях признаков [12, 16, 19].

Целью настоящей работы является разработка и эмпирическая оценка методологии для динамического рыночно-нейтрального распределения капитала на основе глубокого обучения с подкреплением (рис. 1). Управление портфелем формализуется как марковский процесс последовательных решений в нестационарной среде, где агент выбирает вектор весов портфеля с учетом ограничений на экспозицию (выделенную долю капитала в отдельный актив и в стратегию в целом) и оборот (изменение весов).

Ключевым элементом разработанной методологии является многокритериальная функция вознаграждения, специально сконструированная для одновременного учета трех взаимосвязанных критериев:

- 1) максимизации избыточной доходности на единицу волатильности портфеля;
- 2) минимизации сопряженности с целевым рыночным индексом через штраф за корреляцию;
- 3) ограничения торгового оборота через штраф за транзакционные издержки.

Таким образом, контроль риска, рыночной нейтральности и стоимости ребалансировки включается непосредственно в целевую функцию агента, а не реализуется в виде внешних постобработок или жестких ограничений, что ранее не рассматривалось в подобных задачах.

Архитектура методологии включает конвейер альфа-сигналов (предикторов избыточной доходности; показатели, связанные с будущей динамикой цен активов), гибридный модуль извлечения признаков на основе глубоких нейронных сетей и рекуррентный алгоритм актор – критик, отображающий скрытое состояние в вектор целевых весов [16, 17]. Оценка проводится при помощи кросс-валидации с ежедневной ребалансировкой портфеля, с учетом проскальзывания и комиссий, в том числе стоимости коротких позиций [5, 10, 13].

В совокупности это отличает работу от актуальных подходов, ориентированных преимущественно на максимизацию доходности агента без явного контроля нейтральности и торгового оборота [10, 13]. На данных ключевых региональных индексов (США, Европа, Азия) предлагаемый подход последовательно демонстрирует повышение коэффициента Шарпа, снижение максимальной просадки портфеля (снижения стоимости портфеля по сравнению с последним пиком) и поддержание низкой или нулевой корреляции с бенчмарками.

Научная новизна работы состоит в интеграции многокритериальной функции вознаграждения, одновременно включающей риск-скорректированную доходность, штраф за рыночную корреляцию и транзакционные издержки, в рекуррентную нейронную сеть агента для построения рыночно-нейтральных портфелей. Предложенная в работе постановка задачи и функция вознаграждения ранее систематически не рассматривались в контексте агентного моделирования и обучения с подкреплением для рыночно-нейтральных стратегий.

В последующих разделах представлены обзор литературы, формализация процесса принятия решений, подробное описание архитектуры и целевой функции, постановку эксперимента и метрики, результаты численных экспериментов и направления дальнейших исследований.

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1. Рыночно-нейтральные портфели

Истоки рыночно-нейтральных стратегий восходят к первым хедж-фондам А. Джонса, где прибыль формировалась из отбора акций при одновременном хеджировании рыночного риска через



длинные и короткие позиции [5, 7]. Теоретическая база опирается на многокомпонентные модели ценообразования активов: трехфакторную модель Фамы – Френча и ее расширение Кархарта за счет фактора импульса [1, 2, 6]. Практические методы включают регрессионную нейтрализацию факторов и оптимизационные постановки с нулевой экспозицией на систематические факторы [9, 13]. Классические стратегии относительной стоимости – парный трейдинг, арбитраж конвертируемых облигаций и арбитраж слияний – демонстрировали экономически значимые премии; для парного трейдинга на акциях США за 1962–2002 гг. показаны статистически устойчивые избыточные доходности порядка 11 % годовых [8, 20].

Развитие машинного обучения расширило инструментарий статистического арбитража: ансамблевые модели и глубокие нейронные сети применяются для построения длинно-коротких портфелей и демонстрируют положительные результаты в задачах эмпирического ценообразования и прогнозирования доходностей [10, 11, 21]. Методы глубокого обучения и обучения с подкреплением используются для совместного построения портфелей, моделирования и оптимизации торговых правил [10, 14, 15]. В регрессионных моделях доходности проецируются на отраслевые и рыночные факторы с последующей нейтрализацией факторных нагрузок (например, через факторную регрессию Фамы–Френча) [1, 2, 9]. В оптимизационных постановках критерий Марковица служит базой для формулировок с жесткими ограничениями на экспозиции и риски, что применимо и к портфелям малой капитализации при корректной оценке ковариаций в высоких размерностях [6, 9]. Понятие нейтральности неоднородно: различные операционные критерии (регрессионная нейтрализация, прямые ограничения на экспозиции или целевые оптимизационные функции) приводят к различным практическим результатам применения стратегий [2, 9, 13]. Альтернативные оптимизационные формулировки, нацеленные на снижение корреляции с бенчмарком или на контроль торгового оборота, потенциально дают более строгий контроль нейтральности по сравнению с регрессиями, однако сопоставление эффектов зависит от конкретной постановки задачи и данных и требует глубокой эмпирической валидации [13, 22]. Наконец, несмотря на существенный прогресс методов обучения с подкреплением в задачах управления портфелем и учета рыночных ограничений [10, 23–25], их применение к рыночно-нейтральным портфелям и интеграция в функцию вознаграждения остаются недостаточно проработанными в литературе.

1.2. Обучение с подкреплением в торговых задачах

Обучение с подкреплением противопоставляется традиционным эконометрическим подходам благодаря его способности к онлайн-обучению и использованию глубоких нейросетевых архитектур, что делает его особенно востребованным в условиях шума, нестационарности и тяжелых хвостов распределений финансовых временных рядов [10, 11, 14, 15, 26].

Сравнительные обзоры указывают на сопоставимую эффективность ключевых семейств алгоритмов (методы градиента политики, алгоритм актор – критик) при решении задач управления портфелем, причем выбор конкретного подхода определяется формулировкой задачи и структурными ограничениями [15, 16, 26]. На практике ряд исследований демонстрирует применимость алгоритмов глубоких нейронных сетей и их рекуррентных модификаций к частично наблюдаемым финансовым задачам, а также выявляет преимущества методов градиента политики и алгоритма актор – критик, включая их детерминистические и стохастические разновидности, например проксимальную оптимизацию политики, для оптимизации целевых функций портфеля [10, 16, 18, 19]. Следует отметить, что критическим фактором остаются спецификация марковского процесса принятия решений и выбор признакового пространства. Включение нефинансовых индикаторов, например показателей рыночных настроений, наряду с ценовыми характеристиками, по данным ряда исследований, способствует улучшению прогнозных свойств моделей и приводит к повышению показателей доходности и снижению рисковых характеристик в эмпирических экспериментах. Вместе с тем величина этого эффекта существенно зависит от состава признаков, выбранной схемы регуляризации и методов оценки ковариационных структур в пространствах высокой размерности [10, 12, 21, 26]. В задачах маркетинга (поддержания ликвидности торгового инструмента путем регулярного выставления заявок на покупку и продажу) и многопрофильного распределения капитала обучение с подкреплением эффективно масштабируется на большие, включая непрерывные, пространства действий и снижает зависимость от ручной параметризации за счет глубоких политик и детерминистических схем обучения [16–18, 19, 26]. Риск-скорректированные функции вознаграждения позволяют формализовать баланс доходности и риска [22, 27], а учет транзакционных издержек и проскальзывания является ключевым условием корректной оценки [5, 13, 20]. Указанные соображения положены в основу разрабо-

танной методологической схемы, которая формирует новый подход к обучению агента рыночно-нейтральным стратегиям.

2. МЕТОДОЛОГИЯ

2.1. Основные обозначения

Рассматривается дискретное время $t = 0, 1, \dots, T$ и множество активов из N финансовых инструментов. Обозначим через

$$r_{t+1} = (r_{t+1}^1, \dots, r_{t+1}^N)^T$$

вектор доходностей активов за период $[t, t+1]$. Доходность выбранного рыночного индекса (бенчмарка) за тот же период обозначим через m_{t+1} .

Портфель в момент времени t описывается вектором весов

$$w_t = (w_t^1, \dots, w_t^N)^T,$$

где w_t^i интерпретируется как позиционный вес, экспозиция i -го инструмента, выраженная в доле капитала, выделенной в актив. Так, $w_t^i > 0$ соответствует длинной позиции, $w_t^i < 0$ – короткой, $w_t^i = 0$ – отсутствию позиции. В отличие от классического полностью инвестированного портфеля с бюджетным ограничением $\sum_{i=1}^N w_t^i = 1$, в рыночно-

нейтральной постановке задачи масштаб портфеля фиксируется ограничением на валовую экспозицию (см. формулу (2) ниже).

Требование рыночно-нейтральной нетто-экспозиции портфеля формализуется условием

$$\sum_{i=1}^N w_t^i = 0, \quad (1)$$

а ограничение на валовую (брутто-) экспозицию портфеля – неравенством

$$\sum_{i=1}^N |w_t^i| \leq \Gamma, \quad (2)$$

где $\Gamma > 0$ – заданный порог максимальной совокупной позиции.

Ограничение (2) задает верхнюю границу валовой экспозиции портфеля, т. е. ограничение на заемный капитал. В стратегиях порог Γ отражает максимально допустимую брутто-экспозицию (сумму абсолютных значений длинных и коротких

позиций) и служит ограничением на заемный капитал. В рамках данной работы порог Γ фиксирован на уровне 100 %, что соответствует консервативному ограничению на совокупную позицию и обеспечивает нулевую нетто-экспозицию.

Совместно с условием (1) это означает, что суммарная длинная экспозиция равна суммарной короткой (в абсолютном выражении) и каждая из них не превышает $\Gamma/2$.

Изменение весов при ребалансировке портфеля в момент t равно

$$\Delta w_t = w_t - w_{t-1}.$$

Трансакционные издержки TC_t задаются в виде линейно-квадратичной функции от изменения портфеля:

$$TC_t = c_{\text{lin}} \sum_{i=1}^N |\Delta w_t^i| + c_{\text{quad}} \sum_{i=1}^N (\Delta w_t^i)^2, \quad (3)$$

где $c_{\text{lin}}, c_{\text{quad}} > 0$ – параметры комиссий и проскальзывания.

Доходность портфеля p (приращение капитала на единицу выделенного капитала) с учетом издержек за период $[t, t+1]$ определяется как

$$r_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_t^i r_{t+1}^i - TC_t. \quad (4)$$

Формула (4) записана для указанных позиционных весов.

Если q_t^i обозначает денежный размер позиции, а C_t – капитал стратегии, то $w_t^i = \frac{q_t^i}{C_t}$ и

$$\frac{\sum_{i=1}^N w_t^i r_{t+1}^i}{C_t} = \sum_{i=1}^N w_t^i r_{t+1}^i.$$

Таким образом, $r_{p,t+1}$ является доходностью на капитал стратегии, тогда как нетто-номинал $\sum_{i=1}^N q_t^i$ в рыночно-нейтральном портфеле равен нулю.

Трансакционные издержки TC_t в выражении (3) также заданы в долях капитала (через Δw_t) и поэтому вычитаются непосредственно в формуле (4).

Текущая рыночная сопряженность портфеля оценивается через коэффициент корреляции доходности портфеля с доходностью бенчмарка на скользящем окне длиной L_{corr} :



$$\rho_t = \text{Corr}(r_{p,t+1}, m_{t+1}) \quad (5)$$

по данным на интервале $[t - L_{\text{corr}} + 1, t + 1]$.

Вектор наблюдаемых признаков среды в момент времени t обозначим через

$$x_t \in R^d,$$

где d – число показателей; в него входят ценовые, макроэкономические и альтернативные переменные.

2.2. Постановка задачи в терминах обучения с подкреплением

Обучение с подкреплением – парадигма оптимального управления, в которой агент взаимодействует со средой во времени, выбирая действия и получая оценки качества (вознаграждения) [15]. Цель агента – максимизировать математическое ожидание суммарного дисконтированного вознаграждения.

Среда описывается марковским процессом принятия решений, задаваемым пятеркой

$$M = (S, A, P, R, \gamma),$$

где S – множество состояний; A – множество действий; $P(s|s, a)$ – вероятностный закон переходов; $R(s, a)$ – вознаграждение; $\gamma \in (0, 1)$ – фактор дисконтирования.

Политика агента $\pi(a|s)$ задает условное распределение действий a при данном состоянии s . В условиях финансового рынка агент наблюдает не полное состояние, а лишь конечный набор признаков x_t . Для учета частичной наблюдаемости используется рекуррентное скрытое состояние h_t , аккумулирующее информацию о прошлых наблюдениях.

В работе рассматривается приближенная постановка задачи, в которой состоянием считается вектор

$$s_t = (x_t, w_{t-1}, h_{t-1}) \in S.$$

Действием является вектор целевых весов

$$\hat{w}_t \in R^N,$$

генерируемый политикой агента [10, 17, 18, 26].

Фактические веса портфеля получаются проекцией на множество допустимых портфелей:

$$w_t = \Pi(\hat{w}_t),$$

где оператор $\Pi(\cdot)$ реализует приведение к ограничениям (1), (2); переход среды $s_t \rightarrow s_{t+1}$ определяется реализацией рыночных доходностей r_{t+1} , обновлением весов w_t , пересчетом признаков x_{t+1} и обновлением скрытого состояния h_t ; вознаграждение R_t в момент t задается разработанной автором многокритериальной функцией вознаграждения:

$$R_t = r_{p,t+1} - \lambda_1 \rho_t^2 - \lambda_2 TC_t,$$

где первое слагаемое соответствует доходности портфеля после вычета издержек (4), второе – штрафу за сопряженность с бенчмарком (5), третье – штрафу за транзакционные издержки, зависящие от торгового оборота (3); коэффициент $\lambda_1 > 0$ задает относительный вес требований рыночной нейтральности, $\lambda_2 > 0$ – относительный вес требований к уровню издержек.

В экспериментальной постановке коэффициенты штрафов фиксировались на уровнях $\lambda_1 = 10$ для штрафа за корреляцию с бенчмарком и $\lambda_2 = 5$ для штрафа за транзакционные издержки.

Эти значения использовались во всех основных экспериментах и были выбраны по результатам кросс-валидации. Такой выбор коэффициентов обеспечивает баланс между снижением корреляции с бенчмарком и контролем транзакционных издержек при ребалансировке портфеля.

Цель агента – найти политику π , максимизирующую дисконтированную сумму вознаграждений:

$$J(\pi) = E_{\pi} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t R_t \right].$$

В предлагаемой методологии политика $\pi_{\theta}(a|s)$ параметризуется глубокой нейронной сетью. Обновление параметра θ выполняется с использованием алгоритма Proximal Policy Optimization (PPO), при этом рекуррентное скрытое состояние h_t реализуется на базе рекуррентного блока с вентильным механизмом Gated Recurrent Unit (GRU) и аппроксимирует скрытое состояние частично наблюдаемой среды.

2.3. Архитектура решения

В предлагаемой архитектуре используется иерархический экстрактор признаков на основе сверточных сетей (англ. *Convolutional Neural Network*, CNN) и рекуррентных блоков (GRU), поверх которого реализуется рекуррентный алгоритм

актор – критик (рис. 1). Целью разработки архитектуры является построение пространственно-временного представления состояния среды агента для оптимизации портфеля, которое одновременно учитывает различия между активами и динамику во времени.

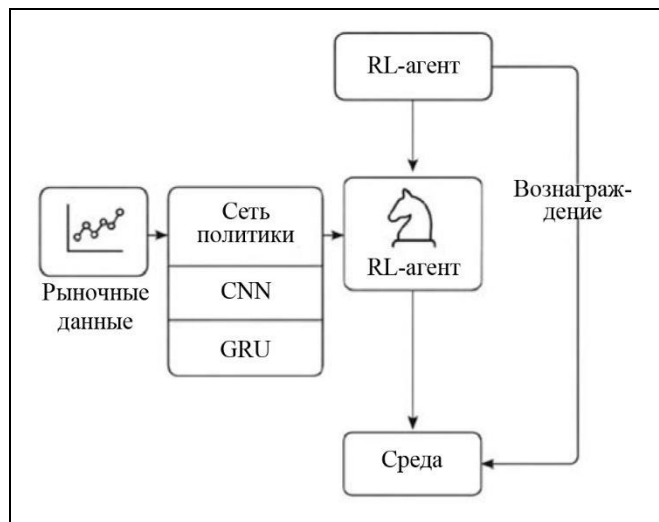


Рис. 1. Верхнеуровневая схема работы системы с интегрированной функцией вознаграждения для управления агентом

Пусть на шаге t на вход подается тензор признаков

$$X_t \in R^{N \times L \times F},$$

где N – число активов; L – число временных лагов; F – число признаков, характеризующих актив. Такой тензор интерпретируется как кросс-секционная карта признаков: по одной оси перечисляются активы, по второй – лаги, по третьей – признаковое описание.

Сверточные слои применяются к тензору X_t и реализуют локальную фильтрацию по оси актив – лаг, что позволяет выявлять пространственные и краткосрочные временные зависимости [10, 12, 26].

Результатом работы этого блока является тензор признаков

$$Z_t = CNN(X_t) \in R^{N \times F},$$

который далее агрегируется в вектор фиксированной размерности $z_t \in R^{d_z}$, где d_z – размерность агрегированного вектора признаков после сверточного блока.

Последовательность векторов $\{z_t\}$ подается в рекуррентный модуль GRU, реализующий эволюцию скрытого состояния:

$$h_t = GRU(z_t, h_{t-1}), h_t \in R^{d_h},$$

где d_h – размерность скрытого состояния рекуррентного блока GRU.

Скрытое состояние h_t аккумулирует информацию о прошлой динамике признаков и служит аппроксимацией состояния в частично наблюдаемой среде [17, 18, 26]. Поверх скрытого состояния строятся два выхода:

- Актор π_0 , отображающий состояние h_t (совместно с позиционной информацией, в том числе w_{t-1}) в вектор параметров действия $\hat{w}_t$, который затем проецируется на допустимое множество портфельных весов.

- Критик V_ϕ , отображающий состояние h_t в скалярную оценку ценности $V_\phi(h_t)$, используемую при вычислении преимуществ и стабилизации обучения [12, 13, 16, 19, 22].

Таким образом, реализуется рекуррентная архитектура актор – критик, в которой скрытое состояние h_t выступает общим представлением для политики и функции ценности.

Таким образом, комбинация нейронных сетей позволяет одновременно захватывать локальные пространственные закономерности и долгосрочную временную динамику, формируя расширенное представление состояния, на основании которого рекуррентный алгоритм актор – критик оптимизирует стратегию принятия инвестиционных решений [10, 17, 18].

На рис. 2 представлена схема архитектуры решения, где показаны основные блоки нейронных сетей и их интеграция в алгоритм.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ВАЛИДАЦИЯ МЕТОДОЛОГИИ

3.1. Данные и методы

Для валидации методологии использовался панельный набор рыночных данных по компонентам фондовых индексов США, Европы и Азии. В выборку включены индексы: S&P 500 (GSPC), NASDAQ-100 (NDX), DJIA (DJI), FTSE 100 (FTSE), DAX (GDAXI), Hang Seng (HSI) и SSE Composite (SSEC). Данные загружены из терминала Bloomberg и охватывают период с января 2010 г. по декабрь 2020 г. Частота наблюдений – дневная. Для каждого индекса использовался полный состав компонентов, действующий на начало соответствующего обучающего окна; изменения состава учитывались автоматически в процессе

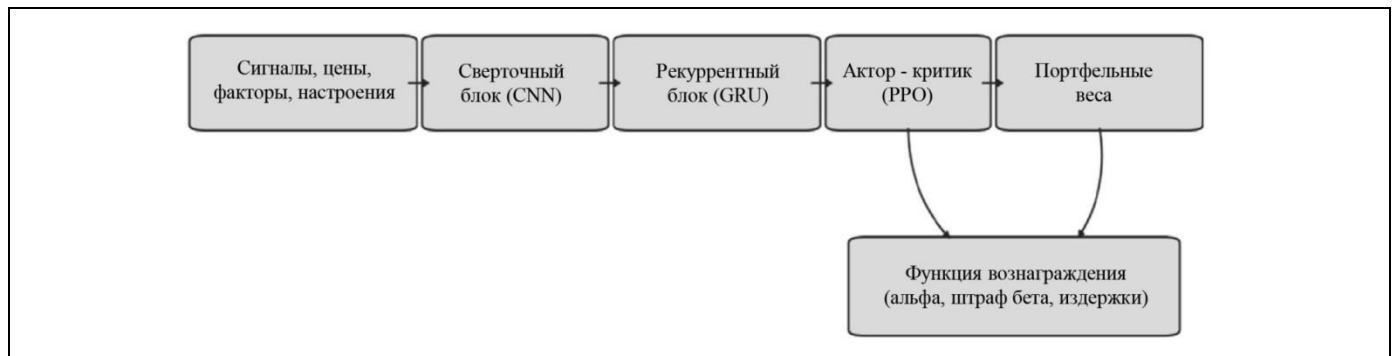


Рис. 2. Замкнутый контур обучения и принятия решений агентов в предлагаемой методологии

формирования панельного набора. Для каждого актива формировался вектор признаков, включающий следующие группы переменных: ценовые характеристики (логарифмические доходности за горизонты 1, 5, 10 и 20 дней); скользящие средние цен; реализованную волатильность; показатели ликвидности и объема: нормализованный объем торгов, спред, оборот; меры риска (коэффициенты вариации доходностей, индикаторы рыночной волатильности); макроэкономические и альтернативные признаки (процентные ставки, инфляционные показатели, индексы деловой активности, индикаторы настроений), т. е. стандартные показатели из терминала Bloomberg.

Для каждого момента времени t формировался тензор признаков

$$X_t \in R^{N_t \times L \times F},$$

где N_t – число активов; L – число временных лагов.

Предобработка выполнялась отдельно на каждом обучающем окне и включала следующие процедуры: синхронизацию данных по календарю и перенос последнего наблюдения в случае пропуска; винсоризацию по первому и 99-му перцентилям; стандартизацию признаков по обучающему сегменту; создание временных лагов показателей; формирование позиционных признаков (веса портфеля на предыдущем шаге, агрегированные показатели риска и ликвидности). Такая процедура исключает утечку информации и обеспечивает корректное разделение данных по временным сегментам.

Оценка обобщающей способности модели выполнялась по схеме пошаговой оптимизации. Каждый цикл включал обучающее окно длиной 750 дней, затем валидационное окно длиной 250 дней и далее тестовое окно длиной 250 дней. После завершения цикла окно сдвигалось на 250 дней, и процедура повторялась. На каждом цикле модель обучалась заново. На тестовом участке проводи-

лась ежедневная ребалансировка портфеля с учетом транзакционных издержек и стоимости удержания коротких позиций. Метрики эффективности рассчитывались только на строго тестовых данных и усреднялись по всем тестовым окнам. Состояние среды включало тензор наблюдений, вектор весов портфеля и дополнительные агрегированные параметры (ликвидность, волатильность, скрытое состояние рекуррентного блока).

Псевдокод алгоритма приведен в Приложении.

3.2. Сравнительные модели и метрики

Было проведено сопоставление модели с перечнем референсных подходов для глубокого анализа рассматриваемой методологии:

- Mean–Variance – классическая оптимизация портфеля Марковица, где на каждом обучающем окне оцениваются ожидаемые доходности и ковариационная матрица, после чего строится портфель, минимизирующий дисперсию при заданной целевой доходности; в рамках валидации применяется с учетом реалистичных транзакционных издержек и дневной ребалансировки [5, 6, 9, 20].

- FF3 – факторная стратегия на базе модели Фамы – Френча, реализуемая через репликацию факторных портфелей; служит эталоном для измерения систематической факторной экспозиции портфеля [1, 2].

- Pairs Trading – парная стратегия, основанная на выборе коинтегрированных ликвидных пар из состава индекса; она запускается и используется на отклонениях спреда от равновесного значения. Такая стратегия обеспечивает локальную рыночно-нейтральную позицию, но остается чувствительной к ликвидности и параметрам отбора торговых пар [5, 8, 20].

- RL-Baseline – примитивный агент обучения с подкреплением, использующий те же входные признаки и схему валидации, что и продвинутый агент; служит контрольной точкой для оценки

преимуществ сложных планирующих глубоких методов продвинутого агента [10, 17, 21, 26].

- AlphaZeroBeta – предлагаемая модель, которая объединяет рекуррентную нейронную архитектуру и многокритериальную функцию вознаграждения, направленную на одновременное повышение риск-скорректированной доходности, снижение корреляции с рыночным индексом и ограничение оборота.

Используются три метрики:

- Коэффициент Шарпа (англ. *Sharpe ratio*, *Sharpe*) – характеризует риск-скорректированную отдачу, т. е. отношение средней избыточной доходности портфеля к волатильности этой доходности; более высокие значения указывают на более эффективное сочетание доходности и риска [28]:

$$Sharpe = \frac{E[r_{p,t+1} - r_f]}{\sqrt{\text{Var}(r_{p,t+1})}},$$

где r_f – безрисковая ставка (ставка, приведенная к дневному исчислению из годовой).

- Максимальная просадка (англ. *Max Drawdown*, *MDD*) – отражает наихудшее относительное падение накопленной стоимости портфеля от предшествующего пика до локального минимума за рассмотренный период и показывает уязвимость стратегии к крупным просадкам [13, 22]:

$$MDD = \max_{0 < t < s < T} \frac{W_t - W_s}{W_t},$$

где W_t – накопленная стоимость портфеля в момент t , т. е. стоимость портфеля до начала падения; W_s – накопленная стоимость портфеля в более поздний момент s , после снижения.

- Корреляция с рыночным индексом характеризует линейную зависимость между доходностями портфеля и бенчмарка, служит проксимальной оценкой экспозиции к рыночной бете (положительная корреляция означает, что стоимость портфеля изменяется параллельно рынку) [2, 6]:

$$\text{Corr} = \frac{\text{Cov}(r_{p,t+1}, m_{t+1})}{\sqrt{\text{Var}(r_{p,t+1}) \text{Var}(m_{t+1})}}.$$

3.3. Параметры модели, архитектуры и данных

В экспериментах использовались следующие фиксированные параметры:

- Для пошаговой оптимизации применялись окна длиной $T_{\text{train}} = 750$ дней (≈ 3 года) для обуче-

ния, $T_{\text{train}} = 250$ дней (≈ 1 год) для подбора гиперпараметров и ранней остановки и $T_{\text{test}} = 250$ дней для оценки метрик, с последующим сдвигом на T_{test} .

- Размер временного лага признаков $L = 20$ дней.

- Архитектура CNN включала два сверточных слоя с 32 и 64 фильтрами и ядром 3×3 , за которыми следовали агрегация и полносвязный слой размерности 128. Рекуррентный модуль GRU имел скрытое состояние размерности $d_h = 128$.

- Актор представлялся двухслойной полносвязной сетью $128 \rightarrow 64 \rightarrow N$, критик – сетью $128 \rightarrow 64 \rightarrow 1$.

- Обучение выполнялось алгоритмом PPO со следующими параметрами: коэффициентом дисконтирования $\gamma = 0,99$, коэффициентом обобщенной оценки преимущества $\lambda_{\text{GAE}} = 0,95$, коэффициентом клиппинга $\epsilon_{\text{ppo}} = 0,20$.

- Коэффициент регуляризации критика $c_v = 1,0$.

- Коэффициент энтропийной регуляризации $c_{\text{ent}} = 0,01$.

- Длина окна составляла 64 шагов, размер мини-батча – 256, количество эпох оптимизации PPO на один шаг обучения – 10.

- В функции вознаграждения использовались коэффициенты штрафов $\lambda_1 = 10$ (корреляция с бенчмарком), $\lambda_2 = 5$ (транзакционные издержки).

- Стоимость линейной компоненты издержек $c_{\text{lin}} = 1 \cdot 10^{-4}$, квадратичной $c_{\text{quad}} = 1 \cdot 10^{-6}$.

- Параметры ограничения портфеля: максимальная валовая экспозиция $\Gamma = 1,0$, ограничение изменения весов до 0,2 на одну инвестированную единицу капитала.

В качестве источника данных использовался терминал Bloomberg; для компонент индексов GSPC, NDX, DJI, FTSE, GDAXI, HSI, SHCOMP применялись ценовые ряды PX_LAST, PX_OPEN, PX_HIGH, PX_LOW, объемы VOLUME и, при наличии, показатели ликвидности (BID, ASK, BID_ASK_SPREAD). Для построения рыночных и макроэкономических факторов использовались: индикаторы волатильности VIX, V2X, HSIV; процентные ставки USGG2YR, USGG5YR, USGG10YR, US0003M; инфляционные и макроэкономические ряды CPI YOY, PPI YOY, GDP CQOQ, UNRATE, IP CHNG; индикаторы деловой активности NAPMPMI, NAPMNM, ECOPMIM, CHPMAN; прокси настроений и риск-аппетита NHBUS, CPSENT, BAMLELL,



NEWS_SENTIMENT; опционные показатели SDEX, SPX SKEW, GVZ, OVX; а также глобальные валютные и товарные индикаторы DXY, EURUSD, JPYUSD, CL1, GC1. Все данные загружались с дневной частотой за период 2010–2020 гг., синхронизировались по календарю и проходили процедуру нормализации по статистике обучающих окон.

3.4. Результаты и диагностика обучения

Результаты анализа показателей эффективности (табл. 1–3) демонстрируют, что рассматриваемый подход AlphaZeroBeta уверенно лидирует по коэффициенту Шарпа, сохраняет близкую к нулю корреляцию с рыночным индексом и заметно уменьшает максимальную просадку портфеля в периоды рыночных шоков. Такое сочетание высокой риск-скорректированной доходности и низкой систематической зависимости свидетельствует о наличии инвестиционного преимущества подхода, а также об эффективных механизмах управления рисками [5, 10, 13, 20, 22, 28].

Таблица 1

Значения коэффициента Шарпа для разных стратегий

Стратегия	США	Европа	Азия
Mean-Variance	0,90	0,80	0,70
FFE (Fama-French)	0,95	0,85	0,75
Pairs Trading	0,80	0,70	0,65
RL-Baseline	1,10	0,90	0,80
AlphaZeroBeta (предлагаемый подход)	1,35	1,20	1,05

Таблица 2

Корреляция стратегий с рыночными индексами

Стратегия	США	Европа	Азия
Mean-Variance	0,55	0,60	0,50
FFE (Fama-French)	0,45	0,50	0,40
Pairs Trading	0,35	0,30	0,25
RL-Baseline	0,20	0,15	0,10
AlphaZeroBeta (предлагаемый подход)	0,02	0,01	0,00

Таблица 3

Максимальная просадка стратегий, %

Стратегия	США	Европа	Азия
Mean-Variance	–35	–32	–30
FFE (Fama-French)	–28	–26	–24
Pairs Trading	–25	–22	–20
RL-Baseline	–18	–17	–15
AlphaZeroBeta (предлагаемый подход)	–12	–11	–10

Экспериментальные результаты показывают, что агент адаптивно оптимизирует распределение капитала, сохраняя эффективность в кризисные и волатильные периоды; включение в функцию вознаграждения штрафа за корреляцию с бенчмарком поддерживает близкую к нулю рыночную экспозицию без жестких ограничений, что снижает чувствительность к макроэкономическим шокам [1, 2, 13]. Учет оборота и транзакционных издержек непосредственно на этапе обучения повышает практическую реализуемость и уменьшает риск систематической переоценки результатов в тестировании [5, 13, 14].

В совокупности алгоритм демонстрирует улучшенные риск-скорректированные значения метрик, меньшие максимальные просадки портфеля по сравнению с альтернативными подходами. Ключевые ограничения связаны с калибровкой весов целевой функции, качеством данных и моделью издержек. Метод выделяется целевой оптимизацией нейтральности через компонент вознаграждения (перевод «нулевой беты» из побочного эффекта в целевую характеристику стратегии); гибридный нейросетевой экстрактор в связке с рекуррентной политикой повышает устойчивость к смене режимов и частичной наблюдаемости, а учет оборота приближает работу моделей к реальным торговым условиям [5, 16–18, 20, 22, 28].

Все вычисления проводятся на GPU-инфраструктуре класса V100/A100; один запуск обучается несколько часов, а полная серия из 20–30 скользящих окон на один индекс укладывается в 5–10 дней на единичном GPU (или в 1–3 дня при параллелизации запусков на 4–8 GPU).

На рис. 3 приведено сравнение коэффициентов Шарпа для пяти стратегий (Mean-Variance, FF3, Pairs Trading, RL-Baseline и AlphaZeroBeta) по трем регионам (США, Европа, Азия); для расчета коэффициента Шарпа использовалась отложенная

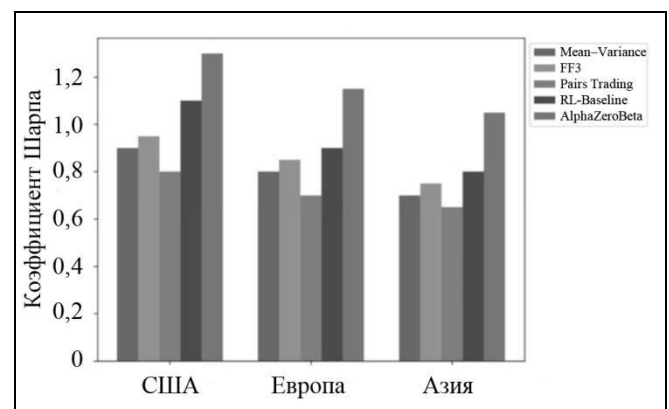


Рис. 3. Средние коэффициента Шарпа на отложенной выборке (OOS) для разных стратегий по регионам

выборка (англ. *out-of-sample*, OOS), что соответствует стандартной практике оценки эффективности алгоритма. Результаты показывают, что предлагаемый подход демонстрирует наивысшие значения коэффициента Шарпа по всем регионам, опережая и классические портфельные модели, и портфели однофакторных RL-агентов [5, 10, 20, 26, 28]. На рис. 4 показана динамика корреляции (рыночной беты) стратегий с соответствующими бенчмарками: подход поддерживает близкую к нулю или отрицательную корреляцию благодаря целевому штрафу за сопряженность с рынком в функции вознаграждения, тогда как референтные подходы (включая факторные и парные стратегии) сохраняют заметную положительную связь с индексом [1, 2, 6, 8, 13].

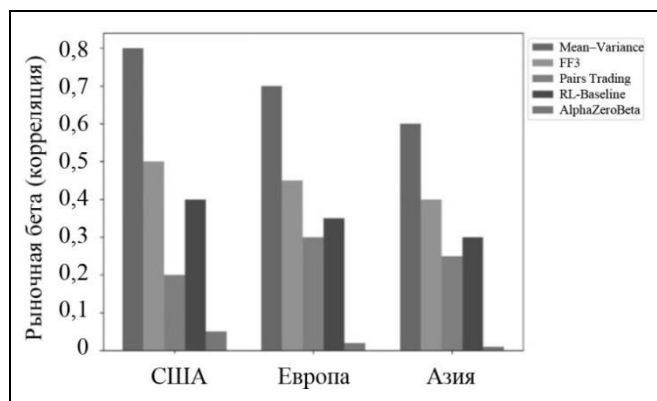


Рис. 4. Средние значения коэффициента корреляции Пирсона на отложенной выборке (OOS) с бенчмарками

Нормализация признаков и вычисление метрик выполнялись строго на тестовых сегментах с исключением любой информации из обучающих окон, чтобы избежать утечки данных [9, 11]. Транзакционные издержки моделировались и вычитались при формировании портфельных доходностей, что приближает результаты к реалистичному исполнению [5, 13, 14].

4. НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В качестве приоритетных направлений дальнейших исследований можно выделить следующие:

- Усилить интерпретируемость модели – применить методы анализа моделей машинного обучения, чтобы напрямую сопоставлять вклад сигналов стратегии с классическими факторами (FF3, Carhart) и демонстрировать экономическую интерпретируемость и атрибуцию выявленного инвестиционного преимущества; такие инструменты помогают отличить «черный ящик» от воспроиз-

водимого экономического эффекта и связать инвестиционное преимущество с известными факторами фундаментальной экономической литературы.

- Адаптировать алгоритм для работы на кросс-активных торговых вселенных с учетом маржинальных требований и клиринговых ограничений, что потребует интеграции моделей ликвидности в торговую среду агента и стресс-тестирования под различными маржинальными шоками.

- Разработать и формализовать онлайн-обучение и стабилизирующие механизмы, например ограничение дивергенции при обновлении политики агента.

- Усилить устойчивость модели через симуляцию шоков ликвидности, искажение признаков, а также применение риск-чувствительных метрик (более продвинутые метрики риска) при оптимизации и оценке вознаграждения, чтобы контролировать экспозицию портфеля в стресс-сценариях.

- Провести систематическую валидацию по компонентам архитектуры, анализ чувствительности модели по параметрам функции вознаграждения и проскальзывания; задокументировать и сделать слепок данных и метрик для воспроизводимости.

- Объединить перечисленные техники с инфраструктурными требованиями, такими как задержки исполнения и реалистичные модели стоимости активов, чтобы обеспечить воспроизводимость результатов тестирования на исторических данных в реальных условиях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена методология построения рыночно-нейтральных стратегий, формализующая распределение капитала как последовательный процесс принятия решений с учетом транзакционных издержек и прямого контроля корреляции с рыночным индексом. Включение реалистичной модели издержек и эксплуатационных ограничений снижает риск систематической переоценки результатов и повышает практическую пользу подхода путем учета издержек на этапе обучения. Многоцелевой функционал вознаграждения, который балансирует доходность, штрафы за экспозицию к рынку и торговый оборот, объединен с рекуррентной архитектурой актор – критик. Такое сочетание обеспечивает адаптивность к нестационарности, устойчивость к смене рыночных режимов и снижение дисперсии градиентных оценок. Статические факторные методы проще с точки зрения реализации и интерпретируемости, но уступают предлагаемому подходу по адаптивности



и учету эксплуатационных ограничений. Для контроля рисков в дальнейшем важно учитывать долю риска в целевой функции, что повысит экономическую интерпретируемость и устойчивость результатов в стресс-сценариях.

Благодарности. Автор выражает благодарность коллегам из Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) за ценные обсуждения, конструктивные отзывы и постоянную поддержку при подготовке этой работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Псевдокод алгоритма

Алгоритм 1. Обучение и тестирование рыночно-нейтральной стратегии

Входные данные: D – панель рыночных данных, M – доходности бенчмарка, U – множество активов, H – гиперпараметры модели, обучения и ограничений портфеля.

Результат: лучшая обученная политика для каждого окна, метрики вне выборки по всем окнам

```

1:  S ← Построить последовательность скользящих окон (обучение, валидация, тест)
2:  Для каждого окна  $s \in S$ :
3:      (X_train, R_train, M_train, stats) ← Предобработка(D_train, M_train, только по обучающему окну)
4:      (X_val, R_val, M_val) ← Предобработка(D_val, M_val, stats)
5:      (X_test, R_test, M_test) ← Предобработка(D_test, M_test, stats)
6:      Инициализировать параметры кодировщика, актора и критика
7:      best_score ←  $-\infty$ 
8:      Пока не выполнено условие ранней остановки:
9:          Очистить буфер траекторий
10:          $h \leftarrow 0$ ;  $w_{\text{prev}} \leftarrow 0$ 
11:         Инициализировать состояние онлайн-оценки корреляции
12:         Для каждого момента  $t$  на обучающем окне:
13:              $h_t \leftarrow$  Кодировщик( $X_{\text{train}}[t]$ ,  $h_{t-1}$ )
14:              $a_t \leftarrow$  Актор( $h_t$ )
15:              $w_t^* \leftarrow$  Преобразовать действие в целевые веса
16:              $w_t \leftarrow$  Проецировать на допустимое множество
17:              $w_{\text{pre}} \leftarrow$  Обновить веса после рыночного движения
18:              $\Delta w_t \leftarrow$  Ограничить изменение весов по обороту
19:              $TC_t \leftarrow$  Рассчитать транзакционные издержки( $\Delta w_t$ )
20:              $w_t \leftarrow$  Применить исполнение сделки
21:              $p_t^{\text{gross}} \leftarrow$  Доходность портфеля за следующий шаг до вычета издержек
22:              $\rho_t \leftarrow$  Обновить онлайн-оценку корреляции( $p_t^{\text{gross}}$ ,  $M_{\text{train}}[t+1]$ )
23:              $r_t \leftarrow p_t^{\text{gross}} - \lambda_{\text{corr}} \cdot \rho_t^2 - \lambda_{\text{tc}} \cdot TC_t$ 
24:              $V_t \leftarrow$  Критик( $h_t$ )
25:             Сохранить ( $h_t$ ,  $a_t$ ,  $w_t$ ,  $p_t^{\text{gross}}$ ,  $\rho_t$ ,  $TC_t$ ,  $r_t$ ,  $V_t$ ) в буфер
26:              $w_{\text{prev}} \leftarrow w_t$ 
27:         Оценить преимущества и целевые значения критика по буферу
28:         Обновить параметры модели методом PPO на усечённых последовательностях
29:          $\text{score}_{\text{val}} \leftarrow$  Проверить политику на валидационном окне по выбранному критерию
30:         Если  $\text{score}_{\text{val}}$  лучше  $\text{best\_score}$ :
31:             Сохранить текущие параметры как лучшие
32:              $\text{best\_score} \leftarrow \text{score}_{\text{val}}$ 
33:         Загрузить лучшую модель для данного окна
34:          $\text{test\_metrics} \leftarrow$  Протестировать политику на тестовом окне
35:         Сохранить  $\text{test\_metrics}$ 
36:     Объединить метрики по всем окнам
37:     Вернуть агрегированные результаты и результаты по окнам

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Carhart, M.M. On Persistence in Mutual Fund Performance // The Journal of Finance. – 1997. – Vol. 52, no. 1. – P. 57–82.
2. Fama, E.F., French, K.R. Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds // Journal of Financial Economics. – 1993. – Vol. 33, no. 1. – P. 3–56.
3. Goyal, A., Welch, I. A Comprehensive Look at the Empirical Performance of Equity Premium Prediction // The Review of Financial Studies. – 2008. – Vol. 21, no. 4. – P. 1455–1508.
4. Lettau, M., Ludvigson, S. Consumption, Aggregate Wealth, and Expected Stock Returns // The Journal of Finance. – 2001. – Vol. 56, no. 3. – P. 815–849.
5. Pedersen, L.H. Efficiently Inefficient: How Smart Money Invests and Market Prices Are Determined. – Princeton: Princeton University Press, 2015. – 368 p.
6. Markowitz, H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, no. 1. – P. 77–91.
7. Loomis, C.J. The Jones Nobody Keeps up with // Fortune Magazine. – April 1, 1966. – P. 237–247.
8. Gatev, E., Goetzmann, W.N., Rouwenhorst, K.G. Pairs Trading: Performance of a Relative-Value Arbitrage Rule // The Review of Financial Studies. – 2006. – Vol. 19, no. 3. – P. 797–827.
9. Choi, I. Efficient Estimation of Factor Models // Econometric Theory. – 2012. – Vol. 28, no. 2. – P. 274–308.
10. Jiang, R., Xu, D., Liang, Z. A Deep Reinforcement Learning Framework for the Financial Portfolio Management Problem // arXiv:1706.10059. – 2017. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.10059>
11. Gu, S., Kelly, B., Xiu, D. Empirical Asset Pricing via Machine Learning // The Review of Financial Studies. – 2020. – Vol. 33, no. 5. – P. 2223–2273.
12. Srivastava, N., Hinton, G., Krizhevsky, A., et al. Dropout: A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting // Journal of Machine Learning Research. – 2014. – Vol. 15, no. 56. – P. 1929–1958.
13. Buehler, H., Gonon, L., Teichmann, J., Wood, B. Deep Hedging // Quantitative Finance. – 2019. – Vol. 19, no. 8. – P. 1271–1291.
14. Moody, J., Saffell, M. Learning to Trade via Direct Reinforcement // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2001. – Vol. 12, no. 4. – P. 875–889.
15. Sutton, R.S., Barto, A.G. Reinforcement Learning: An Introduction. – 2nd ed. – Cambridge, MA: MIT Press, 2018. – 552 p.
16. Schulman, J., Wolski, F., Dhariwal, P., et al. Proximal Policy Optimization Algorithms // arXiv:1707.06347. – 2017. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.06347>
17. Heess, N., Wayne, G., Silver, D., et al. Memory-Based Control with Recurrent Neural Networks // arXiv:1512.04455. – 2015. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1512.04455>
18. Hausknecht, M., Stone, P. Deep Recurrent Q-Learning for Partially Observable MDPs // arXiv:1507.06527. – 2015. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1507.06527>
19. Silver, D., Lever, G., Heess, N., et al. Deterministic Policy Gradient Algorithms // Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning (ICML 2014). – Beijing, 2014. – Vol. 32, no. 1. – P. 387–395.
20. Bali, T.G., Brown, S.J., Caglayan, M.O. Macroeconomic Risk and Hedge Fund Returns // Journal of Financial Economics. – 2014. – Vol. 114, no. 1. – P. 1–19.
21. Kogan, L., Papanikolaou, D. Firm Characteristics and Stock Returns: The Role of Investment-Specific Shocks // The Review of Financial Studies. – 2013. – Vol. 26, no. 11. – P. 2718–2759.
22. Rockafellar, R.T., Uryasev, S. Optimization of Conditional Value-at-Risk // Journal of Risk. – 2000. – Vol. 2, no. 3. – P. 21–41.
23. Liu, X., Xiong, Z., Zhong, S., et al. Practical Deep Reinforcement Learning Approach for Stock Trading // arXiv:1811.07522. – 2018. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.07522>
24. Liu, X., Yang, H., Gao, J., Wang, C.D. FinRL: Deep Reinforcement Learning Framework to Automate Trading in Quantitative Finance // arXiv:2111.09395. – 2021. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.09395>
25. Gu, F., Jiang, Z., García-Fernández, Á.F., et al. MTS: A Deep Reinforcement Learning Portfolio Management Framework with Time-Awareness and Short-Selling // arXiv:2503.04143. – 2025. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.04143>
26. Arulkumaran, K., Deisenroth, M.P., Brundage, M., Bharath, A.A. Deep Reinforcement Learning: A Brief Survey // IEEE Signal Processing Magazine. – 2017. – Vol. 34, no. 6. – P. 26–38.
27. Choudhary, H., Orra, A., Sahoo, K., Thakur, M. Risk-Adjusted Deep Reinforcement Learning for Portfolio Optimization: A Multi-reward Approach // International Journal of Computational Intelligence Systems. – 2025. – Vol. 18, no. 1. – P. 1–19.
28. Sharpe, W.F. Mutual Fund Performance // The Journal of Business. – 1966. – Vol. 39, no. 1. – P. 119–138.

Статья представлена к публикации членом редколлегии
В. В. Ключковым.

Поступила в редакцию 03.10.2025,
после доработки 11.03.2026.
Принята к публикации 08.04.2026.

Беляков Борис Евгеньевич – аспирант, Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова НИУ ВШЭ; приглашенный преподаватель, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва
✉ work.belyakov@gmail.com,
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0007-8237-9833>

© 2026 г. Беляков Б. Е.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



APPLICATION OF A MULTICRITERIA REWARD FUNCTION TO DYNAMIC RISK MANAGEMENT IN MARKET-NEUTRAL PORTFOLIOS

B. E. Belyakov

HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (HSE MIEM), Moscow, Russia
National Research University Higher School of Economics (HSE), Moscow, Russia

✉ work.belyakov@gmail.com

Abstract. In this paper, a multicriteria reward function is developed and empirically validated within a market-neutral portfolio management framework based on deep reinforcement learning. This function formalizes the optimal capital allocation problem as a Markov decision process in a nonstationary environment. The reward function simultaneously optimizes excess return per unit of risk, market neutrality via an explicit penalty on the correlation with a target market index, and transaction costs. As a result, systemic risk control and the cost of portfolio rebalancing are embedded into the modeling and training procedure. The model is trained and analyzed using cross-validation to mitigate the bias and adapt to regime shifts. According to the experimental validation results on leading equity indices of the USA, Europe, and Asia over a ten-year horizon, the above framework is effective, particularly showing consistent improvements in key metrics: higher Sharpe ratios, lower maximum drawdowns, and a substantially reduced correlation with the market index relative to classical optimization algorithms and reinforcement learning approaches with a single criterion.

Keywords: market-neutral strategy, portfolio optimization, reinforcement learning, market-neutral portfolio, deep learning, portfolio management.

Acknowledgments. The author is grateful to HSE colleagues for their valuable discussions, constructive feedback, and continued support of this work.

ПРИМЕНЕНИЕ СЦЕНАРНЫХ МЕТОДОВ В МНОГОСУБЪЕКТНОМ УПРАВЛЕНИИ РЕГИОНАЛЬНЫМ РАЗВИТИЕМ

Н. В. Команич

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

✉ komanich.n@ipu.ru

Аннотация. Рассматривается применение сценарных методов в управлении регионом несколькими субъектами для исследования и оценки проблем повышения эффективности принятия управленческих решений, направленных на обеспечение устойчивого и согласованного развития в условиях неопределенности и воздействия деструктивных факторов различного характера. Объектом исследования является система информационно-аналитической поддержки регионального управления. Цель работы заключается в применении сценарного подхода для формирования и обоснования системы критериев оценки эффективности сценариев многосубъектного регионального управления. Критерии разработаны на основе анализа результатов имитационного моделирования: пособытийного описания сценариев и степени близости к заданным параметрам целевого сценария. На основе математического аппарата знаковых ориентированных графов создана комплексная имитационная сценарно-событийная модель многосубъектного регионального управления для анализа и оценки различных стратегий управления несколькими субъектами, а также для прогнозирования последствий их реализации. По итогам проведенных исследований сценарно-событийной модели получены сценарии региональной динамики и отдельных ее составляющих, которые позволили выявить ключевые тенденции и факторы, влияющие на устойчивость и эффективность управления региональными системами в условиях нарастающих внешних и внутренних угроз. Анализ сценариев (на основе пособытийного кодирования последовательности событий и близости к целевым параметрам) показал, что в динамично изменяющейся среде предпочтительной стратегией управления, формируемой на основе сценарно-прогнозного мониторинга развития ситуации, является перенос центра принятия решений на государство, так как оно обладает наибольшим количеством возможностей и методов воздействия. Данная стратегия должна осуществляться на принципах многосубъектного управления с опорой на согласованность действий субъектов управления, направленных на снижение влияния внешних деструктивных действий со стороны потенциальных и существующих противников и на поддержание социально-экономических процессов и стабильности в регионе. При выборе стратегии управления следует учитывать, что механизмы стимулирования экономических субъектов управления способствуют предотвращению конфликтов и равномерному распределению существующих возможностей управления и ресурсов в региональной системе.

Ключевые слова: многосубъектное управление, имитационное моделирование, сценарный анализ, региональная безопасность, оценка эффективности, кодирование событий.

ВВЕДЕНИЕ

В контексте современного регионального развития эффективная стратегия управления становится ключевым фактором обеспечения стабильности и безопасности. В силу своей особой системной природы понятие многосубъектного реги-

онального управления представляет собой сложную систему, интегрирующую экономические, политические, правовые, организационно-управленческие, социально-демографические и научно-технические аспекты [1]. Данное понятие характеризует региональное управление кооперативного типа, при котором стратегические решения прини-



маются совместно несколькими субъектами (прежде всего государством и частным бизнесом). Его актуальность существенно возрастает в современных условиях, когда задачи регионального развития приобретают комплексный характер, внешняя среда демонстрирует повышенную динамику и неопределенность. Большинство подходов к изучению проблем стратегического регионального управления лежат в плоскости системного анализа, который включает в себя оценку внешней обстановки, региональной специфики, перспектив расширения управленческих возможностей [2, 3]. В прикладном аспекте основными проблемами являются:

- отсутствие четких сценарных критериев и методов определения управленческих стратегий,
- отсутствие оценок эффективности стратегий управления,
- отсутствие формализованного представления сценарных моделей, методов и алгоритмов моделирования процессов многосубъектного управления.

Данные проблемы затрудняют процессы координации и перераспределения управляющих воздействий между различными субъектами регионального управления, прогнозирование и оценку их последствий. Традиционные методы моделирования (линейное программирование, балансовые модели), основанные на допущении о наличии полной информации о сложной управляемой системе, оказываются неэффективными в условиях сложной, адаптивной среды. Современные вызовы, такие как неопределенность, риски, внешние угрозы и деструктивные воздействия, требуют перехода к гибридным моделям (например, к сценарному планированию), которые учитывают неполноту данных и нелинейность процессов.

В контексте теории сценарного планирования и прогнозирования сценарий редко воспринимается как формализованная последовательность уникальных событий, что существенно ограничивает возможности для объективной оценки его эффективности. Данный подход особенно необходим в многоэтапных сценарных моделях, при использовании которых наблюдается парадоксальная динамика расхождений: начальные отклонения от целевого сценария могут временно компенсироваться путем применения стабилизирующих механизмов, однако на финальных этапах даже незначительные накопленные погрешности способны привести к качественным изменениям траектории развития как отдельных ключевых факторов, так и системы в целом. Отсутствие формализованных

критериев и методологий для пособытийной оценки сценариев приводит к субъективности в интерпретации данных и затрудняет процесс принятия обоснованных решений на основе сценарного моделирования. Определим ключевые понятия.

Состояние – совокупность текущих значений параметров факторов, которые значимы для системы управления.

Событие – изменение состояния одного или нескольких факторов, при этом переход из одного состояния в другое представляется мгновенным.

Сценарий поведения объекта – модель изменения обстановки, связанной с возникновением и развитием той или иной ситуации (последовательностью событий) и определяемой в дискретном временном пространстве с заданным временным шагом.

Целью данной статьи является разработка и обоснование системы критериев оценки эффективности сценариев, полученных при имитационном моделировании процессов многосубъектного регионального управления, на основе анализа их пособытийного представления и степени близости к заданным параметрам целевого сценария. К числу задач, обеспечивающих достижение цели, относятся:

- необходимость выделить возможные критерии оценки эффективности сценариев многосубъектного регионального управления;
- формирование системы оценки близости полученных сценариев к целевым в рамках предполагаемых стратегий управления;
- сценарное имитационное моделирование рассматриваемых стратегий;
- дальнейший анализ полученных результатов на основе сценарно-событийной идентификации и попарного сравнения полученных сценариев с целевым.

1. СЦЕНАРНЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Организационная структура регионального управления

Организационная структура регионального управления – это сложная система взаимодействия нескольких субъектов разных уровней, принимающих управленческие решения разного уровня иерархии, основанная как на постоянных, так и на ситуационных социально-экономических организационных связях, направленная на достижение совместных целей. Она функционирует на основе устойчивых социально-экономических связей и

ситуативных факторов, которые определяются стратегическими задачами, методами, инструментами, ресурсами и возможностями каждого субъекта [4, 5].

В данной работе внимание уделено государственным (представленным на уровне государства как центра принятия решений и на уровне региональных субъектов управления) и коммерческим субъектам (в лице частного бизнеса), их взаимоотношениям и взаимодействию в процессе управления и достижения поставленных целей. В процессе принятия управленческих решений на региональном уровне особое значение приобретают территориально обусловленные взаимосвязи: между экономическими кластерами, инфраструктурными системами, природными ресурсами и демографическими группами. Эти связи носят не только прямой, но и обратный характер. Именно на региональном уровне эффект от обратных связей проявляется наиболее остро из-за ограниченности ресурсов, гетерогенности территорий и высокой зависимости между отраслями и населением. Региональное управление требует системного подхода, учитывающего внутренние социально-экономические особенности территории и ее взаимодействие с внешними уровнями – федеральным, межрегиональным и глобальным.

Такой анализ направлен на выявление ключевых целей, интересов, уязвимостей и возможностей управления, что является основополагающим для формирования целостной и стратегически обоснованной концепцией.

Применение методов прогнозирования в рамках системного подхода способствует разработке превентивных стратегий, ориентированных на минимизацию потенциальных угроз и рисков.

Интеграция такого подхода в систему управления обеспечивает формирование комплексной и адаптивной системы принятия решений, способной эффективно реагировать на изменения внешней и внутренней обстановки.

Для детализации возможностей и интересов субъектов управления в работе приведена табл. 1, заполненная на основе анализа стратегических документов государственного уровня [6–9], включая национальные проекты, стратегии социально-экономического развития регионов, документов государственно-частного партнерства (ГЧП) [10, 11]. Выделены интересы государства и частного бизнеса (стратегические цели, приоритеты развития, ожидания от ГЧП) и возможности (ресурсная и институциональная база обеих сторон, организационный потенциал для участия в региональном

развитии). Такой подход позволяет четко соотнести стратегические задачи с имеющимися возможностями управления и перейти к механизмам взаимодействия государства и субъектов частного бизнеса при реализации целей регионального управления.

При этом следует отметить, что представленный перечень не претендует на исчерпывающую полноту. В рамках данного исследования автор сознательно ограничился рассмотрением наиболее релевантных факторов, непосредственно влияющих на достижение целей настоящей работы и играющих существенную роль в формировании управленческой динамики.

1.2. Управление региональной безопасностью на основе сценарных методов

Региональное управление осуществляется на трех уровнях: стратегическом, тактическом и оперативном.

Стратегическое управление представляет собой процесс установления долгосрочных целей и задач организации, а также принятия основополагающих решений, которые могут включать реструктуризацию или оптимизацию функционирующей системы. Этот уровень управления предполагает анализ внешних и внутренних факторов, влияющих на региональную систему, и разработку долгосрочных планов и стратегий развития.

Тактическое управление фокусируется на реализации конкретных управленческих воздействий, направленных на достижение поставленных стратегических целей. На этом уровне осуществляется оперативное планирование и координация ресурсов для достижения краткосрочных и среднесрочных задач, что позволяет обеспечить поступательное движение к стратегическим ориентирам.

Оперативное управление представляет собой решение текущих и неотложных проблем, возникающих в рамках функционирования региональной системы. Этот уровень управления характеризуется высокой степенью адаптивности и гибкости, поскольку требует оперативного реагирования на изменения внутренней и внешней среды.

В данной работе региональное управление рассматривается как комплексная совокупность методов, принципов и инструментов, предназначенных для целенаправленного и систематического воздействия на социально-экономические процессы и другие аспекты регионального развития несколькими субъектами управления. Эта система координирует управленческую деятельность различных



Таблица 1

Интересы и возможности государства и частного бизнеса

	Государство	Частный бизнес
Интересы	• Модернизация системы стратегического регионального управления. • Развитие региональной транспортной, энергетической и социальной инфраструктуры. • Оптимизация управления государственными природными ресурсами и земельными фондами. • Применение инноваций в управлении и промышленности в рамках повышения конкурентоспособности региона. • Снижение рисков в региональных проектах, информирование бизнеса и увеличение доходов от госактивов. • Улучшение жизни людей, повышение качества образования и создание рабочих мест. • Поддержание экономической, политической и социальной стабильности	• Долгосрочные контракты на эксплуатацию государственных объектов, получение стабильного дохода и возврат инвестиций. • Участие в ключевых инфраструктурных проектах для расширения бизнеса. • Согласование планов регионального развития с государственными программами и сотрудничество с надежными партнерами, где государство выступает гарантом. • Привлечение бюджетных средств к совместным инвестициям и разделение рисков с государством. • Участие в проектах по обеспечению безопасности для поддержки стабильного развития бизнеса
Возможности	• Правовая среда и государственная политика (создание благоприятной правовой и законодательной базы, включающей налоговые льготы, преференциальные режимы и субсидии, играющие ключевую роль в стимулировании экономического роста). • Управление госимуществом (государственные механизмы перераспределения собственности, такие как передача объектов в управление и аренду, важные для эффективного использования активов и привлечения частных инвестиций). • Институты и социальная сфера (развитие социальных агентств, центров поддержки предпринимательства и компетенций). • Региональная безопасность (федеральные и региональные власти, вооруженные силы РФ, обеспечивающие безопасность на местах, что необходимо для устойчивого развития). • Межрегиональное взаимодействие (развитие межрегиональных связей способствует интеграции экономик, обмену опытом и ресурсами). • Наука и инновации (внедрение результатов передовых научных исследований, инноваций и современных методов управления)	• Привлечение частных инвестиций, банковского и проектного финансирования. • Внедрение инноваций, разработка новых технологий и бизнес-моделей, повышение эффективности управления жизненным циклом проектов благодаря имеющимся компетенциям и экспертной оценке. • Создание рабочих мест и обучение новых специалистов. • Влияние на социально-экономические процессы региона, участие в формировании его приоритетов. • Гибкость в принятии решений, сотрудничество с другими компаниями в кластерах и отраслевых консорциумах. • Государственные гарантии поддержки бизнеса в условиях неопределенности и активных деструктивных воздействий

субъектов, стремясь достичь стратегических целей обеспечения стабильности и безопасности. Важные задачи включают улучшение качества жизни населения, обеспечение политической стабильности и региональной безопасности.

На рис. 1 представлена структурная схема многосубъектного управления на основе сценарных методов. Данная схема описывает процесс управления, осуществляемый несколькими субъектами

управления, которые, исходя из поставленных целей, наличия аппарата воздействия и имеющихся ресурсов, осуществляют управление обеспечением региональной безопасности, определяя свои возможности и формируя сценарные альтернативы на основе прогноза вероятных последствий управляющих воздействий для выбора наиболее эффективного варианта управления с целью воздействия на объект управления.

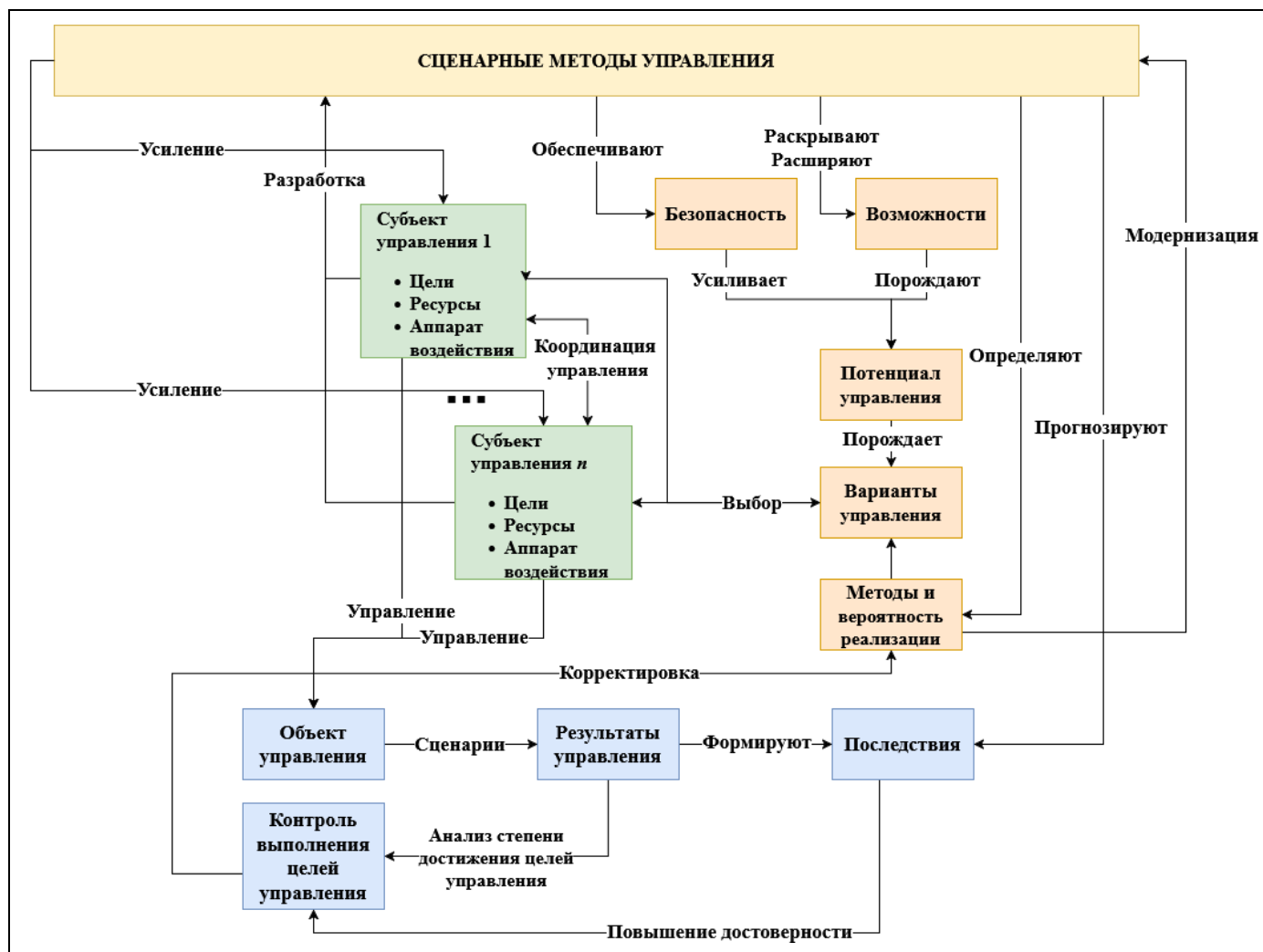


Рис. 1. Структурная схема многосубъектного управления на основе сценарных методов

Стратегическое управление представляет собой целенаправленный процесс системной трансформации управленческого потенциала субъектов управления, основанный на согласовании и оптимизации трех взаимосвязанных подсистем: целеполагания, ресурсного обеспечения и аппарата воздействия. Его сущностная особенность заключается в переходе от реактивной модели реагирования к проактивной стратегии формирования траектории развития. Разработка сценарных методов регионального управления на стратегическом уровне преследует две основные задачи:

- обеспечение безопасности объекта управления,
- выявление и активизацию новых управленческих возможностей, адаптированных к текущим условиям и внешней среде.

Таким образом, формируется потенциал управления – системная характеристика, отражающая совокупную способность субъектов управления в различной степени влиять на объект управления,

осуществлять выбор управленческих альтернатив, оценивать реализуемость этих альтернатив через определение доступных методов воздействия и вероятности их успешной реализации. Проведя оценку альтернативных управленческих воздействий, спрогнозировав результаты их реализации и проанализировав возможные сценарии развития ситуации, субъект управления принимает решение о выборе оптимального варианта воздействия. Окончательный выбор базируется на сопоставлении ожидаемой эффективности каждого сценария с точки зрения достижения целевых показателей управления.

На схеме также продемонстрирована взаимосвязанная природа процессов управления – обработанная информация о результатах примененных управляющих воздействий подается на вход блока контроля выполнения целей управления, который выполняет функцию обратной связи:

- отслеживает фактическое выполнение управленческих решений,



- выявляет отклонения от запланированных показателей,
- служит основанием для корректировки методов управления.

Анализ последствий управления (как прогнозируемых на этапе планирования, так и фактически возникающих в процессе реализации) выступает ключевым источником верификации достоверности контрольных процедур и повышения обоснованности управленческих решений. Таким образом, формируется замкнутый цикл управления. Эта цикличность обеспечивает непрерывное совершенствование системы управления:

- благодаря оперативной адаптации методов к меняющимся условиям,
- постепенному повышению точности прогнозов,
- снижению неопределенности при принятии решений.

1.3. Показатели эффективности регионального управления

Для объективного и точного анализа эффективности регионального управления, особенно в контексте взаимодействия государства и частного бизнеса, необходима система критериев (показателей) регионального развития, отражающих ключевые цели и приоритеты страны. Эти критерии должны охватывать различные аспекты, включая национальную безопасность, модернизацию экономики, улучшение социальной поддержки и развитие инфраструктуры. На основе анализа стратегических документов [6–8, 12], а также ряда научных работ и литературы по затрагиваемой тематике [1, 3, 13–15] были выделены следующие показатели, которые в дальнейшем были использованы для формирования сценарной имитационной модели регионального управления несколькими субъектами управления:

- **Социально-экономическое развитие:** увеличение валового регионального продукта (ВРП), рост экспорта, инвестиций и снижение уровня безработицы, демографический рост, снижение миграции.

- **Качество социальной инфраструктуры:** доступность здравоохранения, жилья, социальной и правовой поддержки.

- **Инвестиционная привлекательность региона:** повышение рентабельности региона.

- **Целеполагание и стратегическое планирование:** эффективность работы административного и институционального аппарата, наличие страте-

гии развития, планов и индикаторов.

- **Развитие региональной инфраструктуры:** состояние дорог, водоснабжения и энергоснабжения.

- **Удовлетворенность населения работой органов власти:** уровень доверия к власти, поддержка в СМИ.

- **Качество управленческих решений:** обоснованность, своевременность и эффективность.

- **Уровень инновационного развития:** внедрение новых технологий, развитие науки и образования.

- **Региональная безопасность:** готовность к чрезвычайным ситуациям, адаптивность к изменениям и гибкость в бюджетной и управленческой политике.

Выбор представленных факторов для построения сценарной модели региональной безопасности, по мнению автора, обоснован их комплексным влиянием на устойчивость и развитие региона. Они охватывают ключевые сферы, которые определяют способность региона противостоять угрозам и адаптироваться к изменениям. Следует отметить, что все показатели, включенные в сценарную модель, рассматриваются только в качественном виде, т. е. для формирования событий сценария важен тип их динамики (рост, падение, колебание и др.). Следовательно, в качестве источников для формирования моделей можно использовать как динамику факторов, определенную из статистических данных показателей регионального развития, так и данные, полученные с применением экспертных методов. В данном случае рассмотренная ниже модель используется без привязки к конкретному региону и служит в качестве примера применимости сценарного подхода в региональном управлении. В дальнейшем при рассмотрении конкретных регионов, безусловно, следует использовать уже накопленные статистические данные, а также дополнительные параметры расчетных динамик факторов модели, в частности скорость изменения их характеристик. Ниже рассмотрены краткие характеристики факторов модели в контексте данной работы.

Экономический рост является основой устойчивого развития региона, создает ресурсную базу для решения социальных задач, повышения инвестиционной привлекательности региона и модернизации объектов критически важной инфраструктуры.

Качество социальной инфраструктуры влияет на уровень жизни населения; его недостаток может стать источником социальной напряженности и снижения доверия к власти.

Инвестиционная привлекательность определяет заинтересованность субъектов управления в развитии региона и уровень притока капитала. Традиционно в качестве расчетных индикаторов рентабельности региона наиболее часто используют валовой региональный продукт (ВРП) на душу населения, уровень доходов населения, а также рентабельность активов бизнеса. В данной работе рассматривается фактор рентабельности в качественном виде, т. е. направление его изменения: повышение рентабельности создает условия для долгосрочного роста инвестиционной привлекательности региона и снижения зависимости от внешних факторов и деструктивных воздействий. Таким образом, фактор рентабельности региона рассматривается как качественный параметр, динамика которого прямо или косвенно оказывает влияние на формирование событий моделируемых сценариев.

Целеполагание и стратегическое планирование отражают степень эффективности принятия управленческих решений. Слабое развитие институциональных механизмов может стать источником неэффективного использования ресурсов и роста рисков стратегического планирования.

Развитие региональной инфраструктуры является основой социально-экономического развития региона. Дефицит или износ инфраструктуры ограничивает возможности региона по привлечению инвестиций и обеспечению потребностей населения. В работе рассматривается только качественное влияние данного фактора на развитие региона – как изменение его состояния. Увеличение или уменьшение значения данного показателя (в зависимости от финансирования) положительно или отрицательно влияет на перспективы развития региона.

Фактор «Уровень инновационного развития» является источником повышения конкурентоспособности региона и снижения зависимости от других регионов, способствуя диверсификации экономики. В работе он демонстрирует: развитие науки (разработку новых технологий и методов управления) и образовательных программ в рамках подготовки квалифицированных кадров; внедрение новых технологий в производство и сельское хозяйство для повышения их эффективности.

Региональная безопасность отражает способность субъектов управления регионом противостоять внешним и внутренним угрозам и вызовам, включая чрезвычайные ситуации, деструктивные действия со стороны потенциальных и существующих противников и гибкое реагирование на изменения в экономической, социальной и политической среде.

Таким образом, подчеркнем: представленный список факторов носит фундаментальный характер. Однако его адаптация к конкретным региональным условиям может потребовать расширения за счет включения дополнительных факторов и учета специфических особенностей.

1.4. Сценарное имитационное моделирование в управлении развитием региональных систем

Среди инструментов, используемых для разработки и анализа альтернативных сценариев функционирования сложных социально-экономических систем регионального уровня, значительное место занимает метод имитационного моделирования. Данный метод, основанный на компьютерном моделировании и симуляции, предоставляет возможность глубокого анализа динамики происходящих процессов, выявления потенциальных рисков и факторов неопределенности, что является источником для принятия обоснованных управленческих решений и обеспечения устойчивого развития региональных систем в условиях динамично изменяющейся внешней среды.

Разработка имитационных моделей базируется на их комплексной структуре, включающей наборы эндогенных и экзогенных факторов и их взаимосвязи. Эндогенные факторы представляют собой внутренние процессы и характеристики региональной системы, в то время как экзогенные факторы отражают внешние воздействия, исходящие от потенциальных и существующих противников, политических условий, социальных изменений и других факторов. Взаимосвязи между этими элементами позволяют моделировать эволюцию системы и прогнозировать ее поведение при различных сценариях развития.

Ключевым элементом имитационного моделирования регионального развития является анализ, основанный на формализованных методах создания моделей и генерации сценариев их поведения при различных условиях. Сценарные модели помогают прогнозировать последствия разных управленческих решений, обнаруживать внешние и внутренние угрозы и снижать риски [16–18].

Рассматриваемый сценарный подход к многосубъектному управлению основывается на использовании нескольких субъектов управления в качестве дополнительного ресурса. Возможность определения их исключительного или кооперативного участия в условиях изменяющейся обстановки позволяет разрабатывать комплексные стратегии регионального управления. Процесс решения задачи включает два основных этапа.

1. Определение субъекта управления, обладающего необходимыми ресурсами и потенциалом для формирования и реализации управляющих воздействий, направленных на достижение безопасного или целевого сценария в текущей или прогнозируемой обстановке. Этот этап является ключевым аспектом стратегического анализа и планирования, рассматриваемого в данной работе.

2. Определение конкретных управляющих воздействий, которые выбранный субъект управления должен предпринять для достижения целевого сценария.

Предлагаемые стратегии должны быть разработаны с учетом анализа текущих рисков и факторов неопределенности, что позволяет минимизировать или полностью нейтрализовать потенциальные угрозы и обеспечить достижение целевого сценария развития ситуации [16, 19].

В рамках работы проведено сценарное имитационное моделирование управления региональной безопасностью на основе нескольких стратегий;

в контур управления включен алгоритм оценки эффективности сценариев исходя из сравнения с целевым сценарием. Моделирование произведено на базе программно-аналитического комплекса (ПАК) «Полюс», разработанного в Институте проблем управления РАН.

На рис. 2 представлена структурная схема процесса сценарного имитационного моделирования регионального управления.

На основе полученных при моделировании данных сформирована система оценки эффективности сценариев исследуемых стратегий исходя из следующих критериев:

- согласованность (степень согласованности воздействий субъектов управления);
- степень релевантности конечным целям управления (близость к целевым параметрам);
- степень отклонения от целевой траектории (степень близости к целевому (безопасному) сценарию);
- ресурсные и временные ограничения.

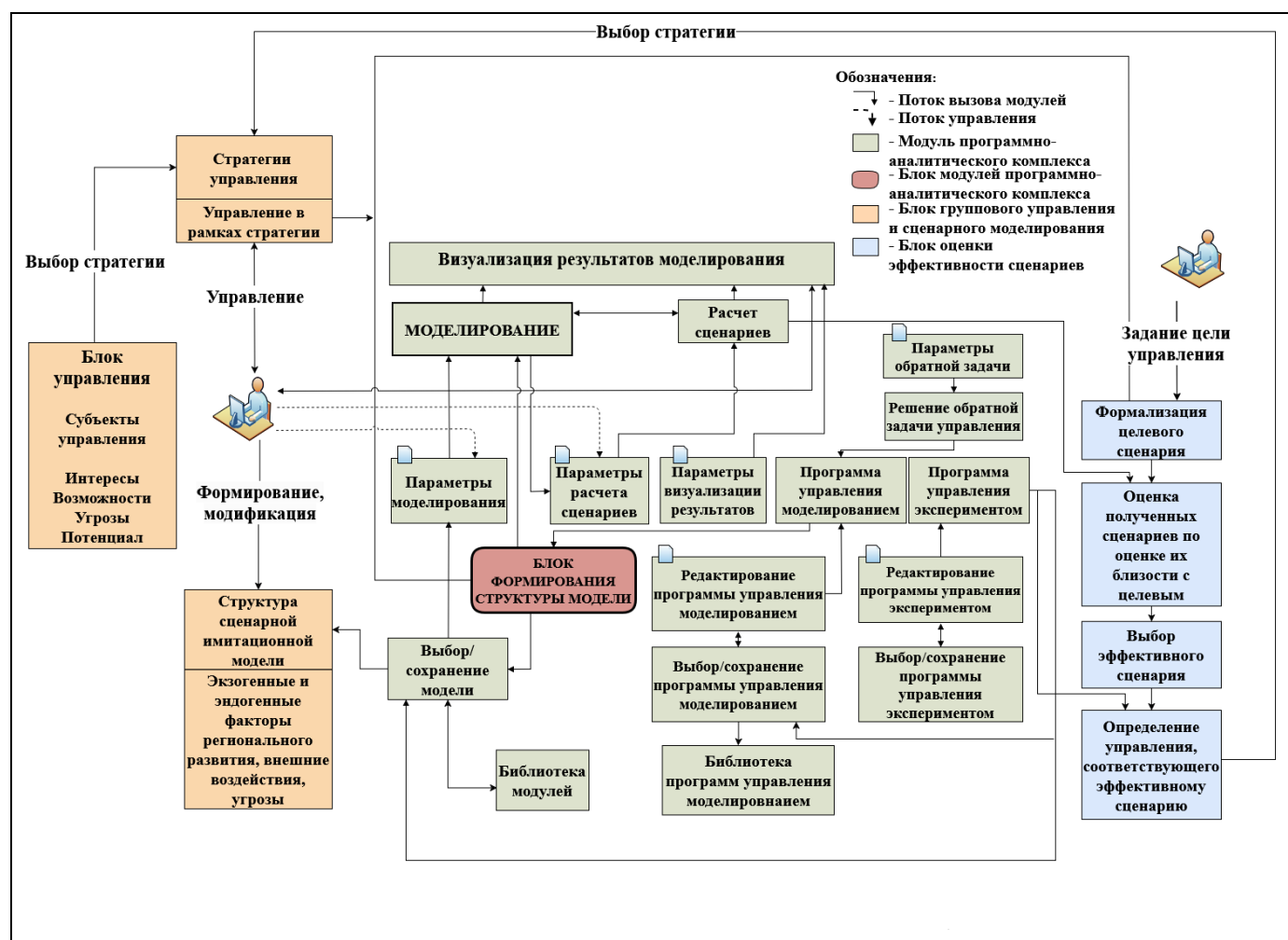


Рис. 2. Структурная схема сценарного имитационного моделирования регионального управления

2. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ РЕГИОНАЛЬНОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ

2.1. Математическая постановка задачи

Зададим множество субъектов регионального управления (СУ): $Sm = \{Sm^j\}$, $j = 1, N^{Sm}$.

Для описания исследуемой региональной системы S введем следующие основные параметры:

– вектор эндогенных переменных $y \in Y$, характеризующий фазовое пространство факторов и состояний объекта S ;

– вектор экзогенных переменных $x \in X$, характеризующий фазовое пространство факторов и состояний внешней среды системы S ;

– вектор управляемых переменных для каждого СУ $Sm^j : u^j \in U^j \in U$;

– вектор выделенных ресурсов для каждого СУ $Sm^j : p^j \in P^j \in P$.

Расширенное фазовое пространство $z = Y \cup X$ представим как объединение фазового пространства факторов и состояний объекта S и его внешней среды.

Для дальнейшего учета вариантов развития системы S (внешней среды (обстановки) и (или) динамики поведения объекта управления) в работе рассматриваются альтернативы развития ситуации, описываемые и исследуемые на основе сценариев.

Основой разрабатываемых и исследуемых имитационных моделей является комплексная система показателей и их взаимосвязей, которая адекватно описывает состояние и динамику развития региональной системы, включая как субъекты, так и объекты управления. Такой подход позволяет максимально точно учитывать внешние факторы, влияющие на функционирование и развитие региональной системы, что существенно повышает точность и релевантность результатов моделирования.

Определим $G(V, E)$ – структуру сценарной имитационной модели системы S , где V – конечное множество факторов (вершин графа), E – множество взаимосвязей между факторами.

Каждой вершине поставим в соответствие ее параметр, который является переменной, характеризующей ее состояния на i -м шаге моделирования $v_i \in V$, $i = 1, 2, \dots$

В рамках сценарно-событийного подхода будем рассматривать выявленный характер динамики изменения значений определенного фактора, требующий установления (коррекции) опосредован-

ной связи в процессе моделирования, как *событие*, и в соответствии с этим данную связь назовем *сценарно-событийной*. Для краткости будем называть динамикой фактора характер временной зависимости изменения его значений в процессе моделирования.

Тогда пусть в основе определения событий лежат изменения в динамике поведения множества значимых для анализа ситуации и управления факторов: $V^{(3H)} \subseteq V = \{v_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, где N – количество факторов (вершин) модели G . Тогда событие на i -м шаге (t_i) является функцией от динамик поведения значимых для формирования этого события факторов: $E^{(3H)}(t_i) = f(FSc(v_n, t_i))$,

$$v_n \in V^{(3H)}, n = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots$$

Сценарием $FSc(v_n, t_i)$ является тип преобладающей динамики (рост, падение, колебания, постоянные значения, расходящиеся и сходящиеся колебания) фактора v на заданном дискретном отрезке времени Δt , измеряемом в шагах моделирования. По сути рассматриваемый сценарий является переменной величиной, отражающей характер изменения фактора сценарной модели во времени и принимающей целочисленные значения, соответствующие одному из базовых типов его динамик (табл. 2) на некотором временном интервале процесса моделирования. Таким образом, для каждого n -го фактора в процессе моделирования определяется соответствующий идентификатор текущей динамики $FSc(v_n, t_i)$.

Зададим $Z = Z^{(nav)}(t) \cup Z^{(sec)}(t)$ – множество расширенных состояний системы S в фазовом пространстве z , где $Z^{(nav)}(t)$ – множество недопустимых состояний в момент времени t ; $Z^{(sec)}(t)$ – множество безопасных состояний системы S в момент времени t . Обозначим множество желаемых состояний системы S следующим образом: $Z^{(tar)}(t) \subseteq Z^{(sec)}(t)$.

В основе сценарного управления лежит множество возможностей управления, а также рисков и уязвимостей, влияющих на достижение цели, т. е. нахождение системы S в состоянии $Z^{(tar)}(t)$ или $Z^{(sec)}(t)$.

Под уязвимостью в рамках работы понимается степень открытости системы S деструктивным воздействиям, которые приводят к отклонению от цели управления.

Таблица 2

Идентификаторы динамик факторов

Значение сценария $FSc(v_n, t_i)$	Обозначение	Динамика факторов модели	Тип динамики i -го фактора	Название по умолчанию
0		—	Не определен (не рассчитывается)	Не определено
1			Рост	Растет
2			Падение	Уменьшается
3			Постоянное значение	Постоянно
4			Колебания, ограниченные по амплитуде	Устойчивое состояние
5			Расходящиеся колебания	Нестабильно
6			Сходящиеся колебания	Стабилизируется

Определим целевой сценарий поведения системы $\mathfrak{R}(t)$ как множество значимых для управления событий $\{E^{(3H)}(t_i)\}$, $i = 0, 1, \dots, N$, $t_0 = 0$, в дискретные моменты времени, определенных на множестве Z :

$$\mathfrak{R}(t) = \mathfrak{R}\{E^{(3H)}(t_i) = f(Z(t)), (t - t_r) \leq t_i \leq t\},$$

где t_r – глубина сценария.

Определим целевой сценарий поведения системы как

$$\mathfrak{R}^{(\text{tar})}(t) = \mathfrak{R}\{E^{(3H)}(t_i) = f(Z^{(\text{tar})}(t)), (t - t_r) \leq t_i \leq t\},$$

а безопасный сценарий – как

$$\mathfrak{R}^{(\text{sec})}(t) = \mathfrak{R}\{E^{(3H)}(t_i) = f(Z^{(\text{sec})}(t)), (t - t_r) \leq t_i \leq t\}$$

Необходимо определить стратегию участия каждого субъекта управления $Sm^j \in Sm$ и для него найти такое управление $u^j \in U^j$ с учетом влияния всех неуправляемых факторов $\zeta^j \in \Gamma^j$, обеспечивающих:

$$\theta = (z, \zeta^j, u^j) M^{\mathfrak{Z}^j} \in Z^{(\text{tar})}, \theta = (z, \zeta^j, u^j) M^{\mathfrak{Z}^j} \in Z^{(\text{sec})} : \\ \{u | \theta = (z, \zeta^j, u^j) \in Z^{(\text{tar})} \vee \theta = (z, \zeta^j, u^j) \in Z^{(\text{sec})}\}$$

при реализации сценариев $\mathfrak{R}^{(\text{tar})}$ или $\mathfrak{R}^{(\text{sec})}$, где $\theta = Z \times S^{(\text{cs})}$ – прогноз возможных переходов системы S в следующее состояние, где $M^{\mathfrak{Z}} \subseteq Z$ – множество возможных событий (состояний).

Задача: для оценки эффективности выбранной стратегии определить близость (сходство) сценариев $\mathfrak{R}^{(\text{tar})}(t)$ и $\mathfrak{R}^j(t)$ по сходству последовательностей событий, где $\mathfrak{R}^j(t)$ – j -й сценарий из множества полученных сценариев.

2.2. Решение задачи

При оценке эффективности сценариев для расчета событий сценариев вводятся следующие параметры (рис. 3) [20]:

$p(t)$ – период расчета или обновления расчетных динамик факторов (имитация процессов принятия решений) в шагах моделирования, т. е. параметр, с помощью которого определяется частота событийного мониторинга (диагностирования событий в процессе моделирования, т. е. в соответствии с введенными выше определениями – обнаружения и идентификации характера динамики изменения значений факторов из заданного подмножества);

$k^{FSc}(t)$ – количество шагов моделирования, принимаемое во внимание при анализе динамики факторов, которое отражает глубину событийного мониторинга моделируемой системы;

$z^{FSc}(t)$ – количество итераций моделирования, необходимых для имитации временной задержки в процессе анализа исследуемой ситуации и последующего принятия решений, которое представляет собой период запаздывания управленческого реагирования, выраженный в шагах моделирования.

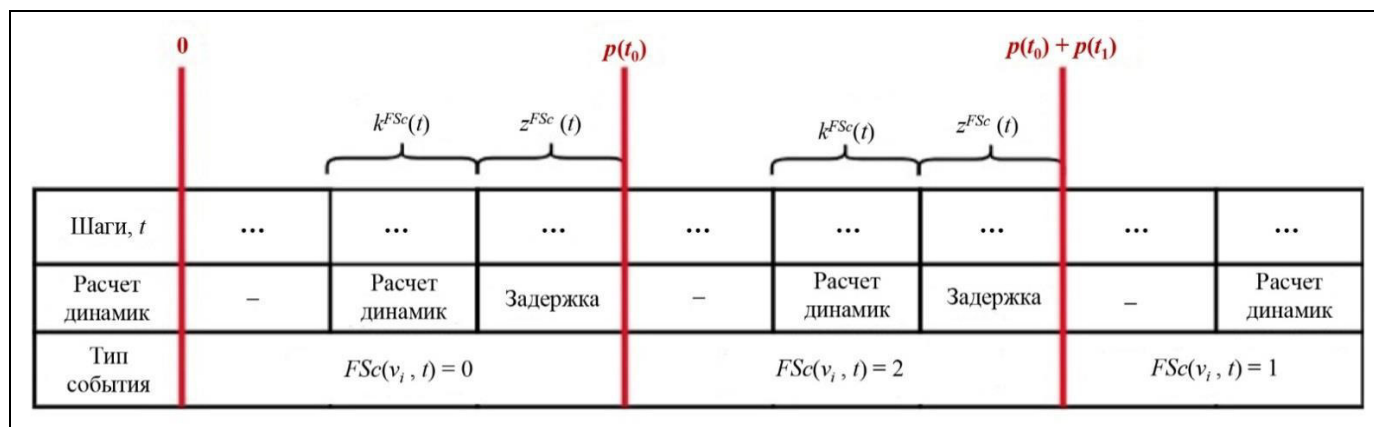


Рис. 3. Взаимосвязь параметров расчета динамики факторов

Таким образом, попарное сравнение сценариев (одного из полученных с целевым) сводится к оценке близости текстовых строк, состоящих из идентификаторов типов последовательности событий, иными словами, формирующихся на основе склейки всех значений $FSc(v_n, t_i)$. Например, представление сценария в виде текстовой строки $TSc = "1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 4, 4, \dots"$ означает, что на первых пяти шагах моделирования реализуется тип события «1», затем на следующих четырех шага – тип события «2», далее на шести шагах – тип события «3», затем на трех шагах повторяется событие «1» и т. д.

Типы событий формируются следующим образом. Пусть, например, из всего множества факторов только пять факторов влияют на формирование события. При моделировании происходит непрерывный анализ динамики этих факторов в соответствии с табл. 2. Формирование нового события и присвоение ему идентификатора 0, 1, 2, ... происходит, если изменился тип динамики одного или нескольких из отслеживаемых значимых факторов.

Таким образом, получаем для каждого сценария массив строк, отражающих последовательное целочисленное представление наборов типов меняющихся или не меняющихся событий. На рис. 4 представлен алгоритм кодирования сценариев в строковые представления и их попарного сравнения.

Обозначим множество всех рассматриваемых сценариев как совокупность целевого сценария (размещаемого в начале множества) и множества альтернативных сценариев $\mathcal{A}$. Каждый элемент множества $\mathcal{A}$ представляет собой упорядоченную последовательность значимых событий.

Процедура пособытийного сопоставления

1. Идентификация значимых событий. Каждому значимому событию присваивается уникальный целочисленный идентификатор из табл. 2. Данный идентификатор однозначно характеризует событие и обеспечивает дифференциацию событий в рамках всего множества.

2. Формирование строкового представления сценариев. Для каждого сценария создается строковая запись, формируемая последовательным включением идентификаторов в порядке следования событий.

3. Построение массива уникальных событий. Формируется упорядоченный массив, содержащий все уникальные события из множества $\mathcal{A}$. При заполнении массива соблюдаются следующие правила:

- события добавляются в порядке их первичного обнаружения при последовательном анализе сценариев,
- каждому уникальному событию присваивается идентификатор (позиция в массиве),
- идентификатор включается в строковое представление соответствующего сценария.

4. Обработка дублирующих событий. При обнаружении события, уже присутствующего в массиве, ему присваивается идентификатор m без повторного включения в массив.

Реализуемый алгоритм обеспечивает:

- унификацию представления – все сценарии описываются посредством целочисленных идентификаторов событий;
- сопоставимость на событийном уровне – появление одинаковых идентификаторов в строковых представлениях разных сценариев указывает на совпадение соответствующих событий;

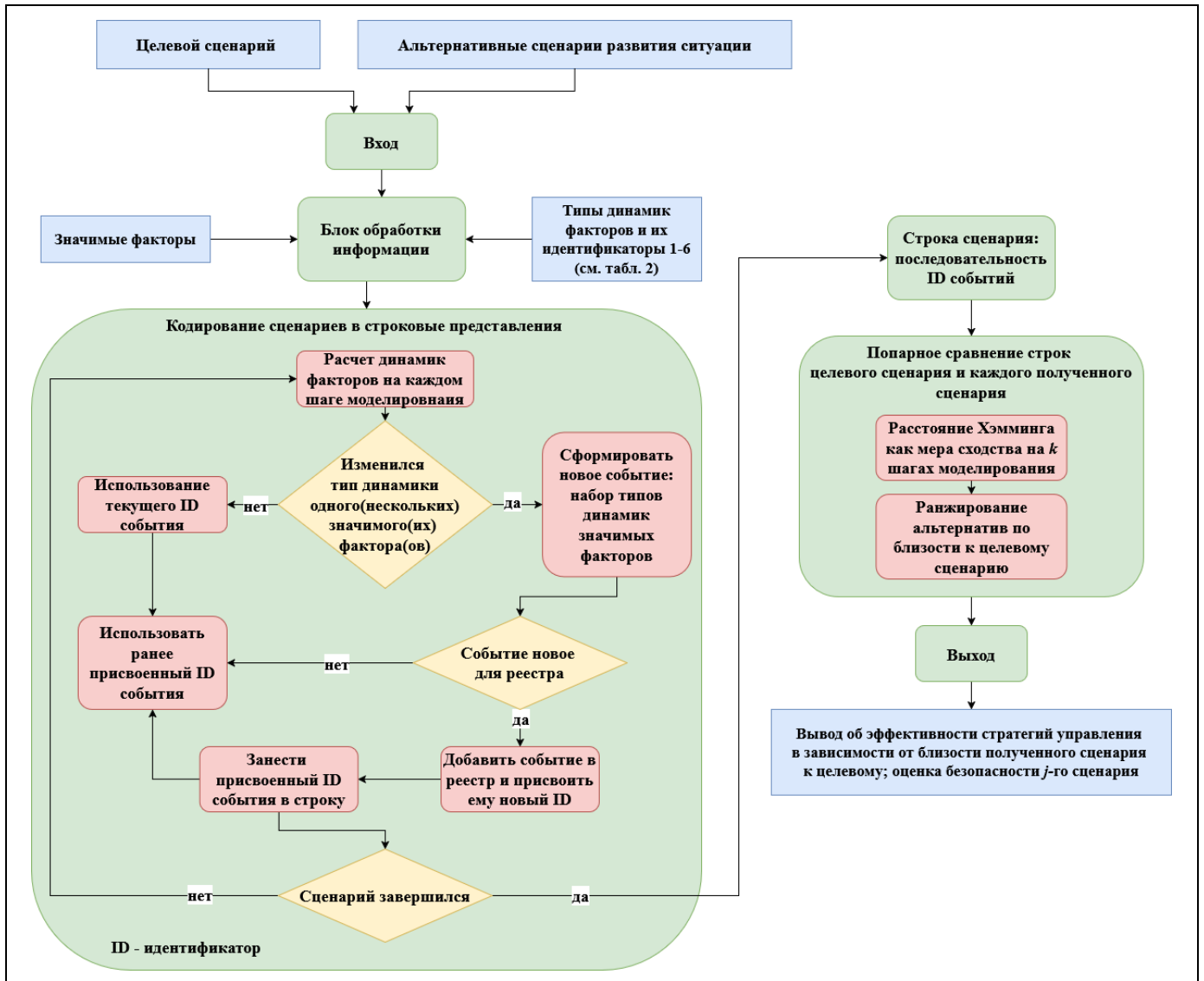


Рис. 4. Алгоритм кодирования сценариев в строковые представления и их попарного сравнения

• оптимизацию хранения – исключается дублирование информации путем повторного использования идентификаторов уже зарегистрированных событий.

Таким образом, исходное множество сценариев преобразуется в набор строковых представлений, пригодных для формального сравнения посредством анализа последовательностей идентификаторов. Следовательно, можно использовать известные метрики оценки близости текстовых строк. Например, в качестве меры близости двух сценариев $\mathcal{R}^{(\text{tar})}$ (целевого) и $\mathcal{R}^j$ (одного из полученных), представленных в виде текстовых строк на интервале шагов моделирования $[t_r, -t]$, можно использовать метрику на основе расстояния Хемминга [21]. В этом случае мера сходства δ_H для K

шагов моделирования определяется как

$$\delta_H(\mathcal{R}^{(\text{tar})}, \mathcal{R}^j) = 1 - \frac{d_H(\mathcal{R}^{(\text{tar})}, \mathcal{R}^j, K)}{K},$$

$$d_H(\mathcal{R}^{(\text{tar})}, \mathcal{R}^j, K) = \sum_{k=t-K}^t \theta(TSc^{(\text{tar})0}(k), TSc^j(k)),$$

$$\theta(TSc^{(\text{tar})}(k), TSc^j(k)) = \begin{cases} 0, & \text{если } TSc^{(\text{tar})}(k) = TSc^j(k), \\ 1, & \text{если } TSc^{(\text{tar})}(k) \neq TSc^j(k), \end{cases}$$

где $TSc^{(\text{tar})}(k)$ и $TSc^j(k)$ представляют собой типы событий этих двух сценариев на k -м шаге.

3. СЦЕНАРНОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГИОНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Сценарное моделирование процессов многосубъектного регионального управления в условиях реализации угроз

В предшествующей статье [22] уже были приняты шаги по оценке эффективности регионального управления несколькими субъектами управления. На основе оценки согласованности процессов управления несколькими субъектами управления и близости к целевым параметрам управления (на основе анализа выходных данных сценарного имитационного моделирования и их соответствия целевым состояниям факторов модели) были выделены наиболее предпочтительные стратегии. В рамках проведенного исследования было установлено, что административные (государство и региональные субъекты) и экономические (частный бизнес и предприниматели) субъекты управления обладают уникальными инструментами воздействия и возможностями влияния на региональную систему, а также имеют как схожие, так и различные интересы в процессе управления. На основе их анализа была разработана система взаимовыгодной поддержки управления региональной безопасностью и создана сценарная имитационная модель регионального развития в условиях влияния внешних угроз, структура которой представлена на рис. 5.

На рис. 5 зеленым цветом отражена область воздействия субъектов управления, красным обозначена основная область уязвимости, желтым отмечены целевые факторы поддержания региональной безопасности.

Целевыми факторами, которые также составляют множества значимых для анализа ситуации и управления факторов $V^{(3H)} = \{v_1, v_{28}, v_{31}, v_{38}, v_{47}, v_{49}, v_{50}, v_{51}, v_{53}\}$, в исследовании являлись: «Региональная безопасность»; «Рентабельность региона»; «Государственное финансирование»; «Отраслевое и частное финансирование»; «Действенность санкций и влияния деструктивных воздействий»; «Дезинформация населения и пропаганда»; «Отток населения»; «Зависимость от импорта» (данный фактор отражает уровень зависимости региона от иностранных технологий, инноваций, оборудования, сырья, материалов, комплектующих и т. д.).

В ходе исследования был выполнен ряд сценарных экспериментов, которые базировались на наборе гипотетических стратегий управления, каждая из которых предполагала различную конфигурацию взаимодействий между субъектами управления и специфику воздействия на ключевые факторы развития региона. Оценка эффективности сценариев осуществлялась по единому критерию – степени близости полученных в ходе моделирования результатов к заранее определенным целевым параметрам. Результаты анализа систематизированы и представлены в табл. 3 и 4.

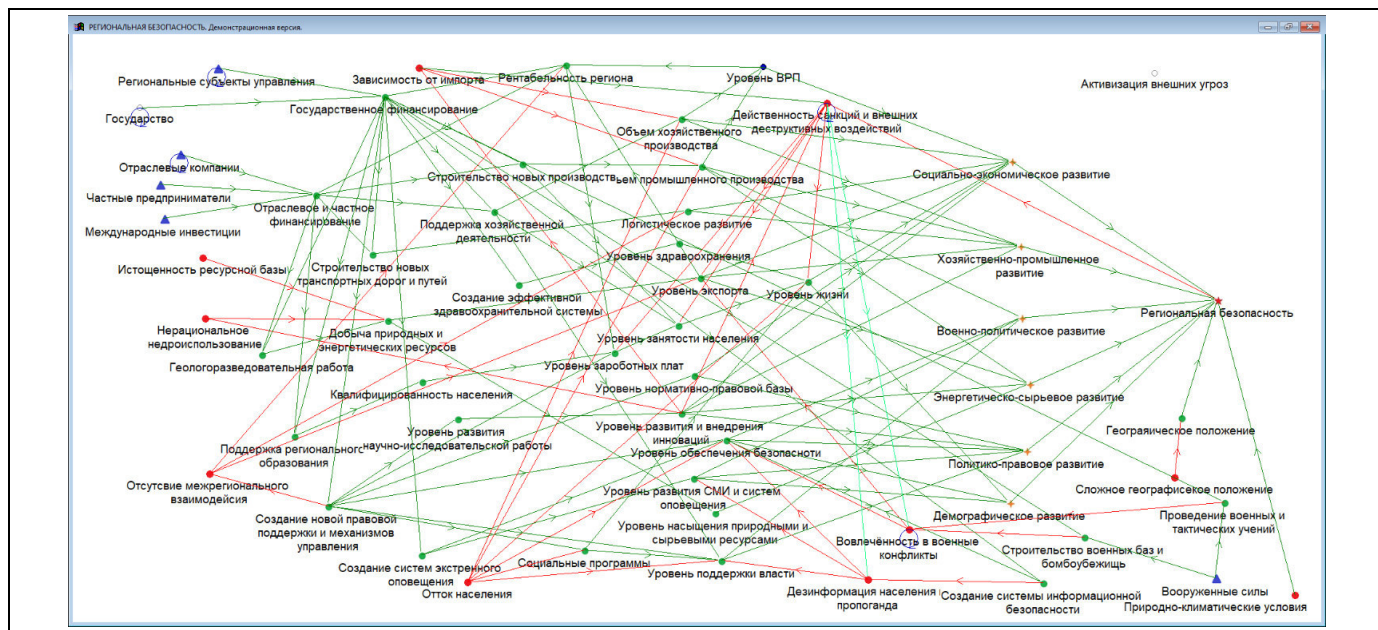


Рис. 5. Структура сценарной имитационной модели регионального развития



Таблица 3

Анализ результатов моделирования сценария 1

Фактор	Тип динамики		Совпадение
	Цель	Результат	
Региональная безопасность	$FSc(v_{12}) = 1$	$FSc(v_{12}) = 2$	–
Отраслевое и частное финансирование	$FSc(v_{28}) = 1$	$FSc(v_{28}) = 2$	–
Рентабельность региона	$FSc(v_{31}) = 1$	$FSc(v_{31}) = 2$	–
Государство	$FSc(v_{38}) \neq 2$	$FSc(v_{38}) = 1$	+
Дезинформация населения и пропаганда	$FSc(v_{47}) = 2$	$FSc(v_{47}) = 1$	–
Зависимость от импорта	$FSc(v_{49}) \neq 1$	$FSc(v_{49}) = 1$	–
Вовлеченность в военные конфликты	$FSc(v_{50}) \neq 1$	$FSc(v_{50}) = 1$	–
Отток населения	$FSc(v_{50}) \neq 1$	$FSc(v_{50}) = 1$	–
Действенность санкций	$FSc(v_{51}) = 2$	$FSc(v_{51}) = 1$	–

Таблица 4

Анализ результатов моделирования сценария 2

Фактор	Тип динамики		Совпадение
	Цель	Результат	
Региональная безопасность	$FSc(v_{12}) = 1$	$FSc(v_{12}) = 1$	+
Отраслевое и частное финансирование	$FSc(v_{28}) = 1$	$FSc(v_{28}) = 1$	+
Рентабельность региона	$FSc(v_{31}) = 1$	$FSc(v_{31}) = 1$	+
Государство	$FSc(v_{38}) \neq 2$	$FSc(v_{38}) = 1$	+
Дезинформация населения и пропаганда	$FSc(v_{47}) = 2$	$FSc(v_{47}) = 2$	+
Зависимость от импорта	$FSc(v_{49}) \neq 1$	$FSc(v_{49}) = 2$	+
Вовлеченность в военные конфликты	$FSc(v_{50}) \neq 1$	$FSc(v_{50}) = 1$	–
Отток населения	$FSc(v_{50}) \neq 1$	$FSc(v_{50}) = 2$	+
Действенность санкций	$FSc(v_{51}) = 2$	$FSc(v_{51}) = 2$	+

Первый сценарий демонстрирует стратегию оперативного реагирования, при которой центром принятия решений становится государственный субъект управления. В рамках этой модели экономические субъекты управления оказываются в невыгодном положении: при снижении показателя «Рентабельность региона» и отсутствии системы мотивационной поддержки они утрачивают стимулы к достижению собственных целей. Это, в свою очередь, приводит к сокращению их ресурсной вовлеченности в развитие региона – что является источником ослабления партнерских связей между государством и бизнесом. Итог такого сценария выражается в снижении согласованности действий субъектов управления.

Второй сценарий отражает упреждающую стратегию управления, которая базируется на прогнозировании потенциальных угроз и скоординированном взаимодействии нескольких субъектов управления. Ключевая особенность сценария – пе-

реход от реактивных мер к проактивному управлению. Координация управления реализуется через синхронизацию действий государственных и негосударственных субъектов и совместное использование ресурсных возможностей, а также выработку единых критериев оценки угроз и эффективности мер. Как показано в исследовании [22], анализ результирующих динамик ключевых показателей модели подтверждает эффективность данной стратегии. Количественные и качественные показатели демонстрируют соответствие траектории развития целевым параметрам и устойчивость системы к моделируемым угрозам.

В рамках настоящего исследования осуществлен анализ управленческих сценариев с опорой на ранее полученные результаты. Работа сосредоточена на комплексной оценке двух ключевых аспектов:

– близости сценария к целевому сценарию и его траектории,

– логической согласованности действий субъектов управления через соответствие целевых установок различных субъектов общей стратегии развития и наличие (отсутствие) противоречий в принимаемых решениях.

В рамках проведенного исследования согласованность действий субъектов управления оценивается посредством систематического отслеживания их воздействий на целевые и сопутствующие факторы модели.

Методика анализа включает следующие этапы:

1. Фиксация управляющих импульсов. Регистрируются все воздействия, исходящие от субъектов управления и направленные на реализацию цели. Для каждого импульса фиксируются:

- источник (конкретный субъект управления),
- направленность (на какой фактор оказывается воздействие),
- интенсивность (сила воздействия),
- временные параметры (момент и продолжительность воздействия).

2. Анализ взаимовлияния воздействий. Проводится сопоставление импульсов от разных субъектов с целью выявления:

- синергетических эффектов (совпадающие по направлению и усиливающие друг друга воздействия);
- нейтрализующих взаимодействий (противонаправленные воздействия, снижающие общий эффект);
- противоречивых сигналов (одновременные воздействия на один фактор с разными целями).

Данный этап необходим не только для анализа эффективности сценариев, но и для верификации модели и подаваемых сигналов.

В качестве метрики здесь можно использовать известные меры связности пары сценариев, реализуемых двумя субъектами управления на основе их совпадения с целевым. В частности, проведенное выше кодирование сценариев в виде последовательности идентификаторов событий позволяет использовать меры Сокола – Мигнера, Танимото – Роджерса, Кульчинского и др. [21].

Близость к безопасной траектории отражает результаты качественного анализа степени отклонения сценария от целевой траектории даже в случаях, когда целевые параметры формально достигнуты. Такой анализ оценивает состояние факторов не только по итоговому результату моделирования, но и на протяжении всего процесса. Это позволяет:

- оценивать состояние объекта управления или его отдельных подсистем на каждом шаге моделирования,

– проводить пособытийный анализ для каждого фактора и системы в целом.

Таким образом, удастся выявить критические состояния системы и определить причины их возникновения.

На основе анализа сходства пособытийного кодирования последовательностей событий полученных сценариев (целевой сценарий представлен на рис. 6, результаты моделирования представлены на рис. 7 с использованием обозначений динамик факторов для визуализации и облегчения восприятия) и качественного анализа согласованности процессов осуществления управляющих воздействий в процессе моделирования, затраченного времени и ресурсов на подавление имитируемых угроз сформирована следующая оценка эффективности полученных сценариев, представленные в табл. 5. В ходе анализа были определены целевые параметры управления, представленные в табл. 3 и 4. При этом заданы (например) следующие требования к динамике ключевых факторов:

- фактор «Региональная безопасность» должен демонстрировать устойчивый рост,
- для факторов «Зависимость от импорта», «Вовлеченность в военные конфликты» и «Отток населения» допустимы любые типы динамики, кроме роста (снижение или стабильность рассматриваются как приемлемые результаты управления).

Таблица 5

Оценка эффективности полученных сценариев

Критерии эффективности	Сценарий 1	Сценарий 2
Согласованность субъектов управления	–	+
Близость к целевым параметрам ($\mathcal{R}^{(tar)}$)	–	+
Близость к безопасной траектории ($\mathcal{R}^{(sec)}$)	–	–
Ресурсная и временная затратность	–	+

Для обеспечения прозрачности методологии моделирования необходимо дать следующие пояснения: в рамках конкретного имитационного моделирования каждый фактор принимал лишь два типа динамики – рост или падение – что было отражено в таблицах. При этом в ходе экспериментов с различными стратегиями управления были выявлены и иные типы динамики, не вошедшие в итоговые таблицы.

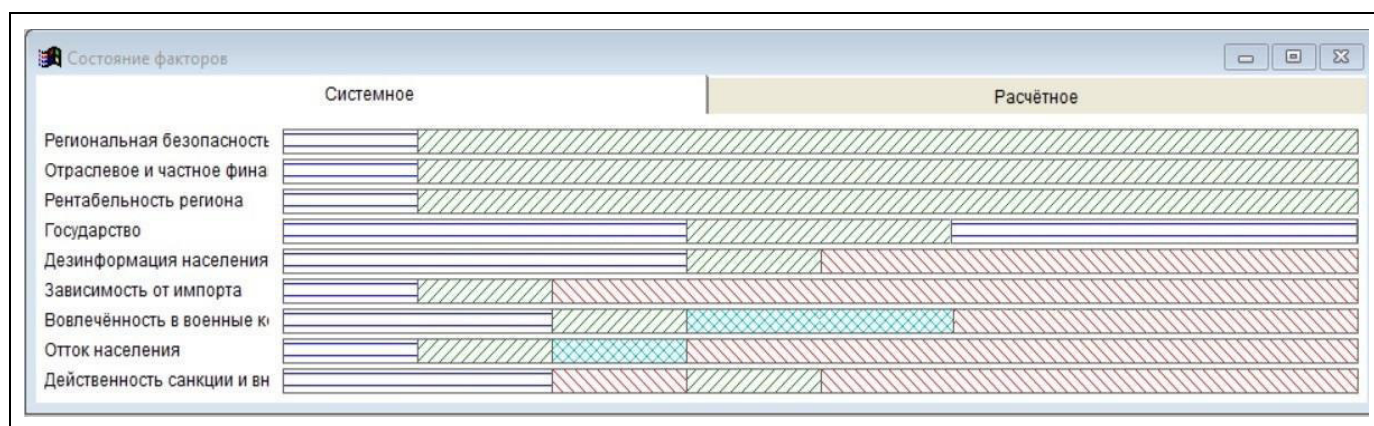


Рис. 6. Результаты моделирования целевого сценария

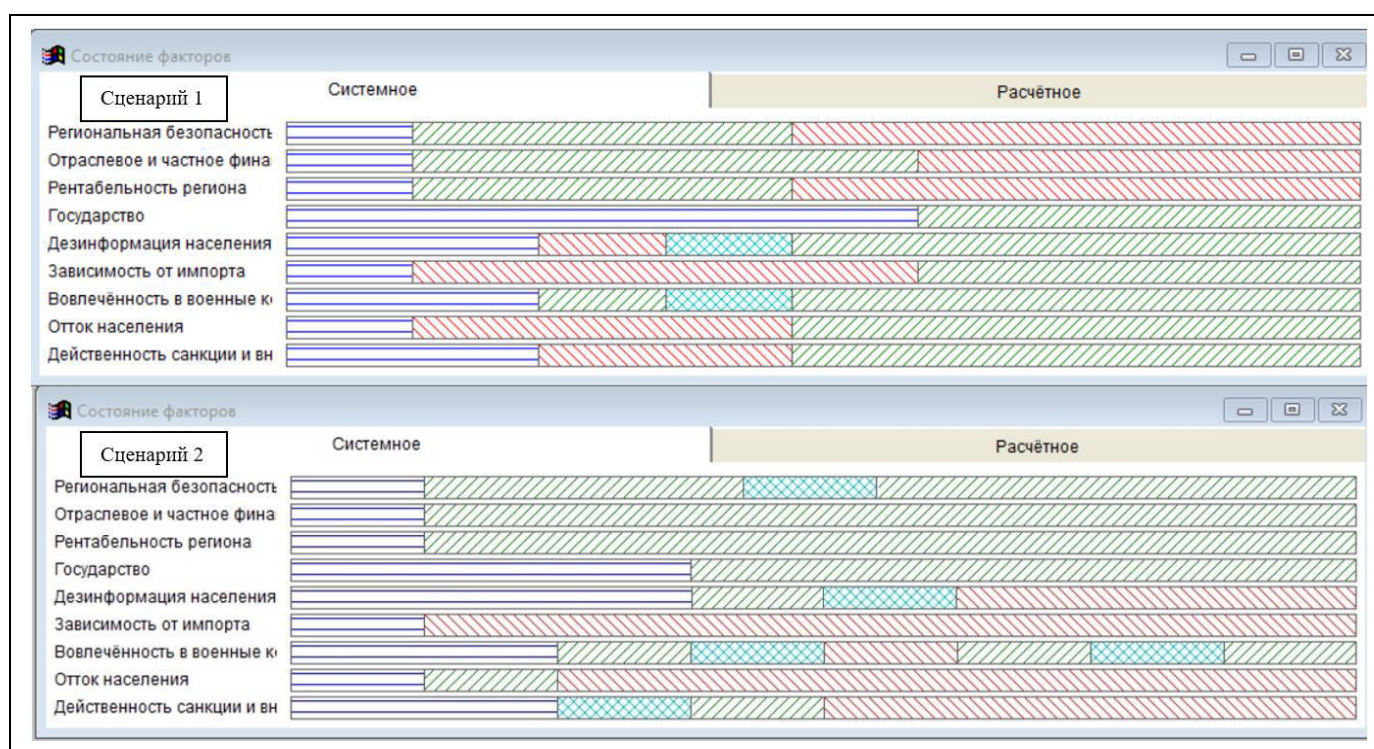


Рис. 7. Результаты моделирования полученных сценариев

Важно отметить: введенные обозначения не являются расчетными величинами – они служат исключительно для иллюстрации типа динамики фактора и вводятся на основании отслеживаемых количественных изменений значений ключевых факторов.

Результаты анализа показывают, что при наличии согласованности в многосубъектном управлении и близости к целевым параметрам (попадании в область целевых сценариев) наблюдается расхождение между полученным и безопасным сценарием. Это выявляется при пособытийном сравнении: несмотря на формальное соответствие це-

левым индикаторам, система отклоняется от безопасной траектории развития.

Причина такого расхождения кроется в специфике текущей ситуации. Скоординированные действия субъектов управления за короткий промежуток времени позволили:

- стабилизировать ключевые факторы регионального развития,
- удержать систему от критического падения значений целевых показателей (факторов).

Однако эти же действия не обеспечили выхода из состояния вовлеченности в военный конфликт – проблемы, определяющей долгосрочную динамику

системы. Это указывает на ограниченность текущих механизмов управления: они эффективны для краткосрочной стабилизации, но не способны разрешить стратегическое противоречие. В результате государство вынуждено наращивать ресурсную поддержку для компенсации негативных последствий.

Таким образом, текущая модель управления демонстрирует парадокс эффективности: она успешно решает оперативные задачи, но усугубляет стратегические риски. Для выхода из этой ситуации требуется:

- переосмысление целевых параметров безопасности с учетом долгосрочного контекста,
- внедрение адаптивных механизмов управления, способных работать в условиях перманентного конфликта,
- разработка ресурсосберегающих стратегий, снижающих нагрузку на бюджет.

3.2. Сценарное моделирование многосубъектного регионального управления с элементами государственной поддержки частного бизнеса

На основании анализа предыдущей модели, результатов сценарного исследования, а также оценки мер и возможностей государства по стимулированию частного бизнеса имитационная модель регионального управления в рамках данной работы была доработана и систематизирована.

Она включает следующие блоки: государственно-частное партнерство, социально-политические факторы; экономические факторы, угрозы региональному развитию.

В качестве субъектов управления сохранены «Государство»; «Региональные субъекты управления»; «Частный бизнес».

В качестве мер государственной поддержки и инструментов воздействия на интересы предпринимательского сектора рассматриваются «Государственные субсидии»; «Налоговые льготы»; «Инфраструктурная поддержка».

Для имитации угроз и внешних деструктивных воздействий выбраны следующие факторы: «Санкции»; «Военные конфликты»; «Пропаганда»; «Социальные беспорядки».

Структура сценарной имитационной модели регионального управления представлена на рис. 8.

В рамках настоящего исследования осуществлен комплекс сценарных имитационных экспериментов с применением ПАК «Полюс». Цель экспериментов — сравнительный анализ эффективности различных стратегий регионального управления в условиях внешних и внутренних угроз.

3.2.1. Методология моделирования

Для всесторонней оценки были смоделированы четыре альтернативные траектории развития ситуации, различающиеся:

- по характеру управленческого воздействия (оперативное реагирование либо превентивное прогнозирование);
- степени вовлеченности частного сектора (без стимулирования либо со стимулированием);
- механизму принятия решений (моносубъектное управление либо кооперативное взаимодействие).

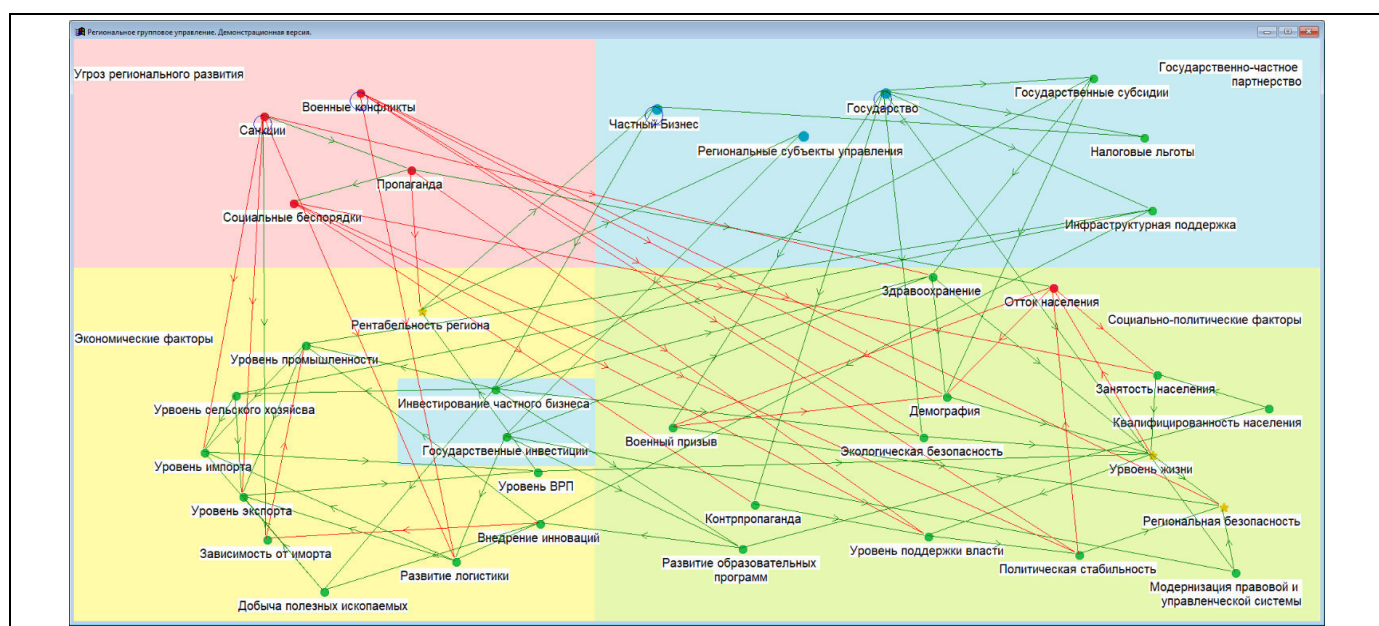


Рис. 8. Структура сценарной имитационной модели



Моделировались четыре возможные траектории развития ситуации.

Сценарий 1: оперативное реагирование субъекта управления «Государство» на негативные тенденции в регионе без стимулирования субъекта «Частный бизнес».

Описание сценария: реакция на негативные тенденции в регионе осуществляется постфактум; частный бизнес не получает стимулирующих мер, действует автономно; акцент делается на административные методы регулирования.

Сценарий 2: оперативное реагирование «Государства» со стимулированием «Частного бизнеса».

Описание сценария: вводится система стимулирования «Частного бизнеса»; предполагается синергия государственного контроля и рыночной активности.

Сценарий 3: прогнозирование потенциальных угроз и превентивная реакция «Государства» (базовая прогностическая стратегия).

Описание сценария: «Государство» использует инструменты прогнозирования угроз; реализуются упреждающие меры до наступления кризисных явлений; частный сектор не вовлечен в кооперативное управление.

Сценарий 4: прогнозирование угроз и превентивная реакция «Государства» с привлечением «Частного бизнеса» с использованием механизмов стимулирования.

Описание сценария: применяются механизмы мотивации и стимулирования «Частного бизнеса»; формируется система совместного противодействия угрозам. Результаты моделирования представлены на рис. 9. В качестве ключевых отслеживаемых факторов выбраны «Уровень жизни» (социальный индикатор), «Политическая стабильность» (институциональный индикатор), «Региональная безопасность» (комплексный индикатор).

3.2.2. Анализ полученных результатов

Сценарий 1 показал неэффективность усилий субъектов управления по противодействию угроз. Отсутствие координации с частным сектором ограничивало ресурсную базу. Система не выходила из кризисного цикла, сохраняя высокую уязвимость.

Сценарий 2 продемонстрировал, что стратегия совместного управления с государственным стимулированием частного бизнеса позволяет восстановить стабильность в регионе. Однако это:

- требует значительных временных и ресурсных затрат,
- требует выхода из зоны безопасного сценария,

– не обеспечивает снижения уровня деструктивных воздействий.

Сценарии 3 и 4 (прогностические) превосходят сценарий 2:

– по скорости возвращения системы к стабильному состоянию,

– минимизации необходимых ресурсов.

Сценарий 4 показал возможность нейтрализации угроз со стороны противников при совместной деятельности субъектов управления. Пособытийное сравнение с целевым сценарием выявило:

– отсутствие явных противоречий между управленческими действиями субъектов,

– значительное отклонение первых трех сценариев от целевых параметров по временным показателям стабилизации, уровню затрат ресурсов и степени достижения целевых параметров.

Данные оценки полученных сценариев представлены в табл. 6. В таблице зеленым отмечены результаты, достигшие целей управления, красным – не достигшие.

Желательным событием в целевом сценарии является ситуация, при которой давление санкций и вовлеченность в военные конфликты будет снижаться, а значения региональных показателей будут расти. Обозначим такое событие идентификатором «1». Также предположим, что в целевом сценарии до наступления желательного события в идеальном случае возникали только допустимые события, присвоим произвольному допустимому событию идентификатор «0». Тогда текстовая строка целевого сценария будет выглядеть так: $TSc^{(tar)} = "0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1"$, здесь после 170 шага моделирования наступает желательное событие.

Далее по результатам моделирования произведем идентификацию уникальных событий согласно выше описанному алгоритму без дублирования событий (см. рис. 9). Следовательно, формируются следующие текстовые строки полученных сценариев (идентификаторы событий в силу облегчения склеены через каждые десять шагов моделирования):

1. $TSc^{(1)} = "2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3"$,

2. $TSc^{(2)} = "2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6"$,

3. $TSc^{(3)} = "3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 8, 6, 5, 5"$,

4. $TSc^{(4)} = "3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 9, 10, 10, 10, 1, 1, 1, 1"$.

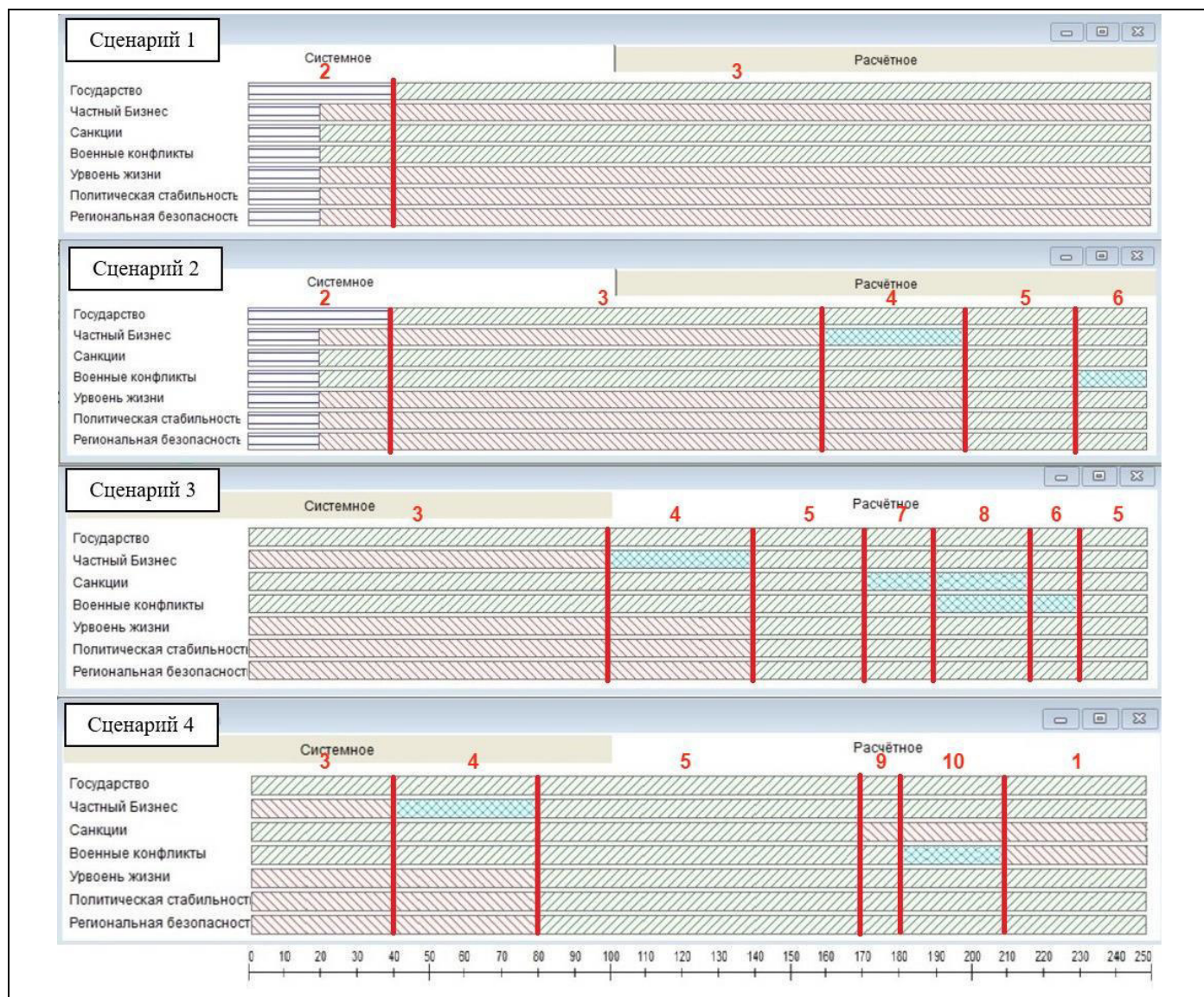


Рис. 9. Результаты моделирования полученных сценариев

Таблица 6

Анализ результатов моделирования

Фактор	Тип динамики				
	Цель	Сценарий 1	Сценарий 2	Сценарий 3	Сценарий 4
Государство	$FSc(v_1) = 1$	$FSc(v_1) = 1$	$FSc(v_1) = 1$	$FSc(v_1) = 1$	$FSc(v_1) = 1$
Частный бизнес	$FSc(v_2) = 1$	$FSc(v_2) = 2$	$FSc(v_2) = 1$	$FSc(v_2) = 1$	$FSc(v_2) = 1$
Санкции	$FSc(v_6) \neq 1$	$FSc(v_6) = 1$	$FSc(v_6) = 1$	$FSc(v_6) = 1$	$FSc(v_6) = 2$
Военные конфликты	$FSc(v_{19}) = 2$	$FSc(v_{19}) = 1$	$FSc(v_{19}) = 5$	$FSc(v_{19}) = 1$	$FSc(v_{19}) = 2$
Уровень жизни	$FSc(v_{27}) \neq 2$	$FSc(v_{27}) = 2$	$FSc(v_{27}) = 1$	$FSc(v_{27}) = 1$	$FSc(v_{27}) = 1$
Политическая стабильность	$FSc(v_{29}) \neq 2$	$FSc(v_{29}) = 2$	$FSc(v_{29}) = 1$	$FSc(v_{29}) = 1$	$FSc(v_{29}) = 1$
Региональная безопасность	$FSc(v_{31}) \neq 2$	$FSc(v_{31}) = 2$	$FSc(v_{31}) = 1$	$FSc(v_{31}) = 1$	$FSc(v_{31}) = 1$
Близость к безопасной траектории	Безопасный сценарий	–	–	–	+
Временная затратность	Целевое значение	–	–	+	+

сти принятых стратегических решений регионального управления и будут использованы в дальнейших исследованиях автора, направленных на сценарный мониторинг развития ситуации, улучшение методологии раннего выявления нежелательных событий и изменений динамик значимых факторов, их формирующих, автоматизацию кодирования событий и формирования процедур реагирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дранко О.И., Новиков Д.А., Райков А.Н., Чернов И.В. Управление развитием региона. Моделирование возможностей. – М.: URSS, ООО «ЛЕНАНД», 2023. – 432 с. [Dranko, O.I., Novikov, D.A., Raikov, A.N., Chernov, I.V. Managing Regional Development. Modeling opportunities. – Moscow: LENAND, 2023. – 432 s. (In Russian)]
2. Malizia, E.E., Feser, E.J., Rensky, H., Drucker, J. Understanding Local Economic Development. – Oxford: Taylor & Francis, 2020. – 312 p.
3. Hoover, E.M., Giarratani, F. An Introduction to Regional Economics // Reprint. Ed. by S. Loveridge, R. Jackson. – WVU Research Repository, 2020. – 303 p.
4. Spangenberg, J. System Complexity and Scenario Analysis. Proceedings of the 9th Biennial Conference of the International Society for Ecological Economics “Ecological Sustainability and Human Well-Being”. – New Delhi, 2020.
5. Setiyowati, S., Sumiati, Sutarti, et al. Group Decision Support System to Determine Regional Development Priority Using the Item-Based Clustering Hybrid Method // Journal of Computer Science. – 2019. – Vol. 15, no. 4. – P. 511–518.
6. Стратегия пространственного развития Российской Федерации на период до 2025 года (утв. распоряжением Правительства РФ от 13.02.2019 № 207-р). [Strategiya prostranstvennogo razvitiya Rossiyskoy Federatsii na period do 2025 goda (utv. rasporyazheniem Pravitel'stva RF ot 13.02.2019 № 207-r. (In Russian)]
7. Указ Президента РФ от 07.05.2024 N 309 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года и на перспективу до 2036 года» от 07.05.2024 N 309. – [Ukaz Prezidenta RF ot 07.05.2024 N 309 «O natsional'nykh tselyakh razvitiya Rossiyskoy Federatsii na period do 2030 goda i na perspektivu do 2036 goda» ot 07.05.2024 N 309. (In Russian)]
8. Стратегия государственной национальной политики Российской Федерации на период до 2036 года (утв. Указом Президента РФ от 25.11.2025 N 858). [Strategiya gosudarstvennoy natsional'noy politiki Rossiyskoy Federatsii na period do 2036 goda (utv. Ukazom Prezidenta RF ot 25.11.2025 N 858). (In Russian)]
9. Федеральный закон «О государственно-частном партнерстве, муниципально-частном партнерстве в Российской Федерации и внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации» от 13.07.2015 N 224-ФЗ. [Federal'niy zakon «O gosudarstvenno-chastnom partnerstve, munitsipal'no-chastnom partnerstve v Rossiyskoy Federatsii i vnesenii izmeneniy v otdel'nye zakonodatel'nye akty Rossiyskoy Federatsii» ot 13.07.2015 N 224-FZ. (In Russian)]
10. Федеральный закон «Об инвестиционной деятельности в Российской Федерации, осуществляемой в форме капитальных вложений» от 25.02.1999 N 39-ФЗ (ред. от 25.12.2023). [Federal'niy zakon «Ob investitsionnoy deyatelnosti v Rossiyskoy Federatsii, osushchestvlyаемой v forme kapital'nykh vlozheniy» ot 25.02.1999 N 39-FZ (red. ot 25.12.2023). (In Russian)]
11. Федеральный закон «О концессионных соглашениях» от 21.07.2005 N 115-ФЗ (ред. от 28.11.2025). [Federal'niy zakon «O kontsessionnykh soglasheniyakh» ot 21.07.2005 N 115-FZ (red. ot 28.11.2025). (In Russian)]
12. Основы государственной политики регионального развития Российской Федерации на период до 2025 года (утв. Указом Президента РФ от 16 января 2017 г. N 13). [Osnovy gosudarstvennoy politiki regional'nogo razvitiya Rossiyskoy Federatsii na period do 2025 goda (utv. Ukazom Prezidenta RF ot 16 yanvarya 2017 g. N 13). (In Russian)]
13. Морозов А.А., Панова Т.В. Эволюция системы оценки ключевых индикаторов эффективности для губернаторов в России: от административного контроля к стратегическому управлению // Общество: политика, экономика, право. – 2025. – № 7. – С. 28–34. [Morozov, A.A., Panova, T.V. Evolution of the System of Assessing Key Performance Indicators for Governors in Russia: From Administrative Control to Strategic Management // Society: Politics, Economics, Law. – 2025. – No. 7. – P. 28–34. (In Russian)]
14. Русин И.Е., Трещевский Ю.И. Региональное управление и территориальное планирование – М.: Изд-во «КноРус», 2020. – 270 с. [Risin, I.E., Treshchevsky, Yu.I. Regional'noe upravlenie i territorial'noe planirovanie. – Moscow: KnoRus, 2020. – 270 p. (In Russian)]
15. Samara, E., Kilintzis, P., Katsoras, E., et al. A System Dynamics Approach for the Development of a Regional Innovation System // Journal of Innovation and Entrepreneurship. – 2024. – Vol. 13. – Art. no. 26.
16. Kulba, V.V., Kononov, D.A., Chernov, I.V., Ponomarev, P.O. Group Management in Social and Economic Systems: Research of Efficiency by Means of Cognitive Analysis // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, iss. 30. – P. 510–515.
17. Pankratova, N.D., Gorelova, G.V., Pankratov, V.A. Strategy for Simulation Complex Hierarchical Systems Based on the Methodologies of Foresight and Cognitive Modeling / In: Advanced Control Systems. – River Publishers, 2022. – P. 257–288.
18. Soltys, J. Scenarios in Regional Planning–Theory and Practice in Poland // European Spatial Research and Policy. – 2018. – Vol. 25, no. 2. – P. 41–60.
19. Chakraborty, A., Sherman, S.A. How Scenario Planning Affects Regional and Local Plans and Planning Practices: An Empirical Analysis. Working Paper WP20AC1. – Cambridge: Lincoln Institute of Land Policy, 2020.
20. Чернов И.В. Сценарно-когнитивное моделирование сложных систем на основе событийной идентификации динамики факторов // Проблемы управления. – 2023. – № 3. – С. 65–76. [Chernov, I.V. Scenario-Cognitive Modeling of Complex Systems Based on Event-Driven Identification of Factor Dynamics // Control Sciences. – 2023. – No. 3. – P. 55–64.]
21. Levy, A., Shalom, B. R., Chalamish, M. A Guide to Similarity Measures and Their Data Science Applications // Journal of Big Data. – 2025. – Vol. 12. – Art. no. 188.



22. Команич Н.В., Чернов И.В. Сценарные технологии в групповом региональном управлении // Управление большими системами. – 2025. – Вып. 114. – С. 186–228. [Komanich, N.V., Chernov, I.V. Scenario Technologies in Group Regional Management // Large-Scale Systems Control. – 2025. – No. 114. – P. 186–228. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии
О. И. Дранко.

Поступила в редакцию 29.10.2025,
после доработки 13.04.2026.
Принята к публикации 13.04.2026.

Команич Никита Владимирович – мл. науч. сотрудник,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва
✉ komanich.n@ipu.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4037-945X>

© 2026 г. Команич Н. В.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons
«Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

APPLICATION OF SCENARIO METHODS IN MULTI-ACTOR MANAGEMENT OF REGIONAL DEVELOPMENT

N. V. Komanich

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ komanich.n@ipu.ru

Abstract. This paper considers the application of scenario methods in multi-actor regional management to investigate and assess challenges in improving the efficiency of managerial decision-making for the sustainable and coordinated development under uncertainty and the impact of various destructive factors. The object of this study is an information and analytical support system for regional management. The aim of this study is to apply the scenario approach in order to form and justify a set of efficiency assessment criteria for multi-actor regional management scenarios. The criteria are formed by analyzing the results of simulation modeling, encompassing both the event-level scenario descriptions and their closeness to given parameters of a target scenario. Using the mathematical apparatus of signed directed graphs, a comprehensive scenario-event simulation model of multi-actor regional management is developed. This model is intended to analyze and assess various management strategies with multiple actors, as well as to forecast the consequences of implementing these strategies. Based on the conducted research using the scenario-event model, scenarios of regional dynamics and their individual components are obtained. These scenarios are employed to identify key trends and factors influencing the stability and efficiency of regional system management under growing external and internal threats. According to the scenario analysis results (the event-by-event encoding of event sequences and closeness to target parameters), the preferred management strategy based on the scenario analysis and situation forecasting in a rapidly changing environment is to shift the decision center to the state, possessing the greatest number of capabilities and influence mechanisms. This strategy shall be implemented on the principles of multi-actor management, relying on the coordination of management actors to reduce the impact of external destructive effects from potential and existing adversaries and maintain socio-economic processes and stability in the region. When selecting a management strategy, one should keep in mind that incentive mechanisms for economic management actors contribute to the prevention of conflicts and a uniform distribution of existing management capabilities and resources within the regional system.

Keywords: multi-actor management, simulation modeling, scenario analysis, regional security, efficiency assessment, event encoding.

АВТОМАТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МЕТОД ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА В СРЕДЕ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ[#]

В. Э. Карпов

НИЦ «Курчатовский институт», г. Москва

✉ karpov-ve@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается один из методов решения задачи локальной навигации мобильного робота, работающего в экстремальных условиях, связанных с отсутствием средств глобальной навигации и централизованного управления, а также с ограниченной сенсорикой. В основе локальной навигации лежит метод потенциальных полей, причем построенные на его базе двигательные программы перенесены на уровень элементарных действий. Формирование сложного поведения осуществляется метаавтоматами, реализующими иерархию управления. Основной задачей, решаемой роботом, является движение в заданный район или область пространства. В рамках этой задачи рассматривается базовая процедура – обход препятствий – которая также реализована на базе метода потенциальных полей. Приведены результаты экспериментов трех уровней: вычислительного, имитационного (физического) и на реальных роботах. Во всех них использовались одна и та же вычислительная модель и управляющие автоматы. Показано, что успешность выполнения задачи локальной навигации определяется размером области видимости робота, но при этом унифицированность механизмов управления позволяет расширять эту область естественным образом.

Ключевые слова: метод потенциалов, автоматное управление, метаавтоматы, модели движения, мобильный робот, локальная навигация, обход препятствий, иерархия управления.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из прикладных направлений развития систем групповой робототехники является концепция применения массовых группировок наземных мобильных робототехнических систем в экстремальных условиях с потерями. Эта концепция подразумевает использование множества сравнительно простых автономных мобильных платформ, способных функционировать в условиях жестких ограничений. Ограничения подразумевают:

– отсутствие связи с оператором,

– автономность и децентрализованный характер управления,

– отсутствие средств глобальной навигации,

– отсутствие карты местности,

– ограниченность сенсорики (отсутствие средств активной детекции, например мощных лидаров).

При этом определение целей функционирования носит групповой характер.

Среди задач, которые должны решаться группой таких роботов, выделяется базовая – задача доставки некоторой полезной нагрузки в заданный район или область пространства. Роботам задаются целевой пеленг и примерное удаление от точки старта. Сами роботы оснащены камерами, дальномерами или локаторами, способными определить

[#] Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».



препятствия или непроходимые участки, а также средствами локальной связи для определения состояния соседей – роботов своей группы. В отсутствие глобальной навигации и карты местности роботы могут опираться на анализ локального окружения. Предполагается, что роботы должны двигаться компактной группой, избегая столкновений и обходя препятствия, выдерживая при этом заданное направление. Групповой характер организации подобного рода систем обусловлен, во-первых, требуемой малой чувствительностью к потерям и, во-вторых, ожидаемыми синергетическими эффектами, возникающими при групповом движении (взаимодействии).

В настоящей работе будет рассмотрена основная процедура решения задачи доставки – движение робота по пеленгу с обходом препятствий.

1. ЗАДАЧА ДВИЖЕНИЯ ПО ПЕЛЕНГУ

Среди множества методов планирования пути в средах с препятствиями (см., например, обзор [1]) особое место занимают модели локальной навигации, основанные на использовании потенциальных полей (ПП). Важно, что эти методы позволяют решать не только задачу построения траектории индивидуального движения, но реализовывать также правила согласованного движения группы агентов. Общая идея метода ПП состоит в движении вдоль линий векторного поля, потенциальная функция которого отражает конфигурацию наблюдаемых объектов, препятствий и их форму, а также цель движения. Формально метод ПП относится к более общему семейству – методам так называемого потенциального наведения и, несмотря на более чем полувековую историю, по-прежнему активно исследуется (см., например, работы А. Б. и Н. Б. Филимоновых [2, 3] или обзор Х. Ксинга [4]). В первую очередь это связано с тем, что метод ПП имеет очевидные неустраняемые ограничения: тенденцию застревания в локальном минимуме, осцилляции, а также проблемы при решении траекторных задач при обходе препятствий сложной формы (см. работу [5]). К тому же, применение метода ПП становится затруднительным, когда робот отличен от удобной системы с дифференциальным приводом (см. работу [6]). В целом общая тенденция развития методов управления на основе ПП сводится к разработке гибридных систем управления, когда механизм ПП используется для построения траекторий движения на тактическом уровне.

Задача движения в среде с препятствиями обычно относится к категории комплексных, требующих предварительного анализа окружения. Для этого разрабатываются весьма специфические алгоритмы построения пути с огибанием препятствий, использующие как «традиционные» продукционные механизмы (см., например, статью [7]), так и достаточно тяжелые графовые методы поиска (см. публикацию [8] или классическую работу О'Рурка [9]). Нескольким особняком стоят так называемые Bug-методы обхода, в которых робот следует контуру препятствия, постоянно оценивая рассогласование между текущей ориентацией и требуемым пеленгом (см. статью [1]). Такой подход обладает существенным ограничением: фактически робот выходит к точке продолжения траектории, находящейся за препятствием, совершая избыточный обход. Но самая большая сложность состоит в том, что процедура следования контуру подразумевает наличие очень развитой сенсорики и способности реконструирования этого контура.

Тем не менее, в настоящей работе в качестве основы локального планирования траектории предлагается именно метод ПП, а вопросы обхода препятствий решаются путем введения дополнительного – автоматного – уровня управления. При этом основными причинами интереса к методу ПП являются его вычислительная простота и общность, что крайне важно для специфики решаемой задачи доставки.

В данной статье не затрагиваются вопросы применения метода ПП для решения групповых задач. Реализация разнообразных законов стайного движения описана в работе [10]. Здесь же сосредоточимся именно на решении частной задачи – обхода препятствий.

Начнем с описания реализации метода ПП для мобильного робота.

1.1. Метод потенциальных полей

Модель агента. Агент представляет собой объект, оснащенный сенсорами и способный к перемещению, для общности, в трехмерном пространстве. Агент A задается пятеркой

$$Agent = \langle name, C, R, S, F \rangle,$$

где $name$ – имя агента; C – множество характеристик агента; R – его пространственное положение; S – состояние сенсорной системы; F – функция управления.

Функция управления F определяет пространственное положение агента:

$$F(C, S, R) \rightarrow R.$$

Базовыми характеристиками агента для рассматриваемой задачи является тройка

$$C = \langle t, r, \omega \rangle.$$

где t – тип агента, $t \in \mathbb{N}$; r – размер агента (его геометрические характеристики, $r \in \mathbb{R}$); ω – вес агента ($\omega \in \mathbb{R}$). Введение типов агентов, весов и размеров необходимо для реализации функций группового управления, когда агенту необходимо ориентироваться на остальных членов группы, причем исходя из наблюдаемых характеристик своих соседей.

Пространственное положение R задается тройкой $R = \langle X, v, A \rangle$. Здесь X – координаты агента, $X \in \mathbb{R}^3$; v – скорость движения ($v \in \mathbb{R}$); $A = \langle \alpha_{yaw}, \alpha_{pitch}, \alpha_{roll} \rangle$ – тройка углов Эйлера, где α_{yaw} , α_{pitch} , α_{roll} – углы рыскания, тангажа и крена соответственно.

Сенсорная система агента позволяет получить информацию о состоянии, координатах, скоростях и углах ориентации некоторого множества объектов Ω_s , попавших в его зону видимости – некоторую область пространства $\mathbb{R}^3$ вблизи агента, например, его переднюю полусферу. Робот может быть оснащен различными датчиками, показания которых дополняют множество Ω_s , см. рис.1.

Множество определяется как $\Omega_s = \{o_i^k\}$. Здесь o_i^k – распознаваемые сенсорикой робота объекты – соседи, препятствия, целевые ориентиры и т. п. При этом

$$o_i^k = \langle (x_1, x_2, x_3), k \rangle,$$

где (x_1, x_2, x_3) – координаты; k – класс, к которому принадлежит объект (соседи, препятствия, целевые объекты и т. п.). Каждый элемент o_i^k определяет свой вклад (знак и величину) в итоговый вектор движения. Важнейшей характеристикой области Ω_s является ее радиус r_Ω – расстояние, на котором агент может увидеть объект. Радиус r_Ω может определяться как возможностями сенсорики агента, так и полученной извне информацией

(априорными знаниями агента об окружающем пространстве). Если радиус r_Ω соизмерим с размерами области, в которой функционирует агент, то получим ситуацию знания полной информации о среде и локальное планирование движения превратится в глобальную навигацию.

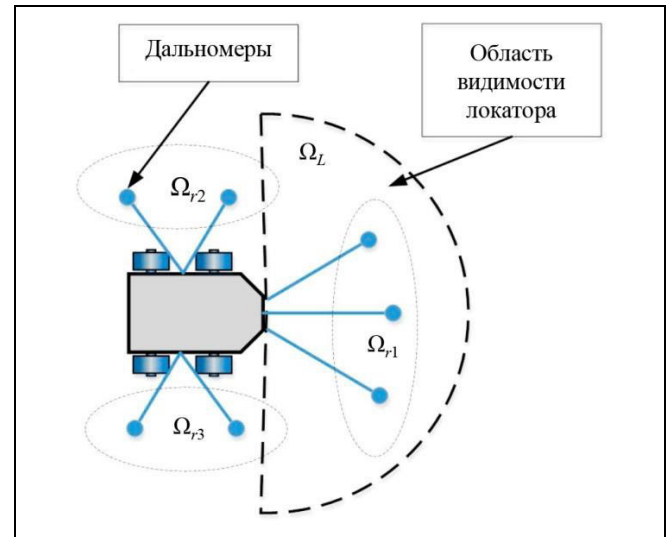


Рис. 1. Область видимости агента Ω_s , формируемая множествами объектов, зарегистрированных локатором Ω_L и дальномерами Ω_{ri}

Движение агента. Направление и скорость движения агента определяются суммой потенциалов полей в его позиции. Это значит, что каждый объект из области видимости Ω_s рассматривается как источник потенциала (положительного или отрицательного), и сумма этих потенциалов определяет значение функции управления как пары

$$F_{ctl} = \langle v_{ctl}, A_{ctl} \rangle, \quad A_{ctl} = \langle \alpha_{yaw}, \alpha_{pitch}, \alpha_{roll} \rangle,$$

где v_{ctl} – скорость движения (модуль); A_{ctl} – направление движения.

Обозначим через $\langle X_s, v_s, A_s \rangle$ средние значения координат, скорости и ориентации наблюдаемых в области Ω_s объектов. Компоненты координат центра масс наблюдаемых объектов вычисляются как

$$X_s^k = \frac{\sum_{o_i \in \Omega_s} x_k^i}{\sum_{o_i \in \Omega_s} \omega_i}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где x_k^i – компоненты вектора координат наблюдаемого объекта; ω_i – его вес. Аналогично определяются средние скорости v_s и вектор ориентации A_s .



Эти характеристики области Ω_s позволяют задавать гибкие законы движения: не только двигаться по направлению, определяемому центром масс X_s , но и согласовывать направление движения и скорость с другими агентами, решать задачу преследования, избегания препятствий и т. п.

Итак, на входе имеются состояние агента $\langle X, v, A \rangle$ и наблюдаемые величины $\langle X_s, v_s, A_s \rangle$, задан закон взаимодействия в виде функции $F_A(X, X_s, A_s)$, а искомым выходом является управление $\langle v_{ctl}, A_{ctl} \rangle$. Функция F_A определяет компоненты вектора управления $\langle v_{ctl}, A_{ctl} \rangle$, причем

$$v_{ctl} = |F_A(X, X_s, A_s)|, A_{ctl} = \arg(F_A(X, X_s, A_s)).$$

Например, для закона когезии (стремления держаться поближе к «своим») F_{coh} итоговая скорость в общем случае может определяться собственной скоростью агента и расстоянием до центра масс группы r_s , определяемым по координатам X и X_s :

$$v_{ctl} = |F_{coh}| = \min\left(v_{\max}, \frac{k_v}{r_s}\right),$$

где $v_{\max}$ – предельная скорость движения; k_v – некоторый коэффициент. А направление движения может быть определено из положения центра масс наблюдаемых «своих».

Далее, чтобы не загромождать изложение дополнительными операторами и преобразованиями, будем полагать, что вектор F естественно представим в виде явной пары <длина, ориентация>, т. е. $F = \langle |F|, \arg(F) \rangle = \langle v, a \rangle$.

Если рассматривается простое движение агента по пеленгу, заданному парой углов α_{yaw} и α_{pitch} , то

$$F_{bear} = \langle v_{ctl}, A_{ctl} \rangle = \langle v_{ctl} = \text{const}, \langle \alpha_{yaw}, \alpha_{pitch}, 0 \rangle \rangle. (2)$$

Общий закон управления движением. Пусть область Ω_s позволяет выделять классы объектов Ω_s^i , по отношению к которым реализуются разные законы движения F_i , как зависящие от области видимости (приближение, отталкивание), так и не связанные с ней (свободное блуждание, движение по пеленгу и т. д.). Управление F_{ctl} в общем случае будет определяться суммарным воздействием всех действующих на агента сил, представленным в виде компонент $\langle v_{ctl}, A_{ctl} \rangle$:

$$F_{ctl} = \langle v_{ctl}, A_{ctl} \rangle = \sum_{i=1}^n k_i F_i(\Omega_s^i), (3)$$

где $F_i(\Omega_s^i)$ – сумма векторов сил, определяемых положением объектов из области Ω_s^i по отношению к агенту; k_i – коэффициенты, значения которых определяют характер поведения агента (как он реагирует на объекты класса i). Обозначим множество этих коэффициентов через K . Подбор коэффициентов позволяет, например, реализовать классическую модель движения группы агентов К. Рейнольдса [11]. Правила движения агентов заключаются в том, что агент не должен приближаться близко к другим агентам, должен двигаться туда же, куда и все, и не отдаляться от других. Кроме того, к ним добавляется стремление придерживаться заданного направления движения (целевой пеленг), а также не приближаться к препятствиям и (или) опасным областям. Формально это означает, что итоговое направление движения агента определяется суммой сил отталкивания-притяжения F_{res} вида

$$F_{res} = k_{goal} F_{goal} + k_{sep} F_{sep} + k_{align} F_{align} + k_{coh} F_{coh} + k_{obst} F_{obst}, (4)$$

где F_{goal} – вектор, определяющий движение по целевому пеленгу; F_{sep} – сила отталкивания от соседей (избегание столкновений); F_{align} – сила выравнивания курса (придерживаться среднего курса соседей); F_{coh} – сила притяжения к «своим» (ориентация на среднее положение соседей); F_{obst} – сила отталкивания от препятствий. Величины k – это коэффициенты, определяющие значимость вклада сил с соответствующими индексами.

Закон (4) можно естественным образом расширять путем добавления новых факторов, определяющих тенденцию движения агента, получая в итоге общую схему управления (3).

1.2. Управление движением

1.2.1. Метаавтоматы

Процедуру движения агента в потенциальном поле можно рассматривать как некоторое действие. Реализация более сложного поведения, состоящего из последовательности действий, требует

иных механизмов. Одним из таких механизмов является конечно-автоматное управление, например использование автоматов Мили. Сам по себе автомат Мили является весьма ограниченным по своим возможностям, а описание развитого поведения требует построения сложных автоматов, что нивелирует такие важные свойства автоматного управления, как простота и наглядность. Вместе с тем, существует методология метаавтоматного управления, при которой элементарные действия, их последовательности и комплексы последовательностей представлены в виде иерархий соответствующих автоматов.

Метаавтомат – это автомат Мили, у которого пометки дуг определяют выполняемые агентом процедуры. Если действиями автомата являются активизации низкоуровневых двигательных функций, то такой автомат имеет ранг 0 – M^0 . Метаавтомат ранга 1 M^1 – это автомат, действия которого заключаются в управлении автоматами M^0 . Метаавтомат M^n ранга n управляет автоматами M^{n-1} . Таким образом происходит структуризация иерархии управления в автоматном представлении. Более подробно это изложено в работе [10]. Здесь важно отметить, что, во-первых, класс реализуемых метаавтоматами алгоритмов по-прежнему ограничен конечно-автоматными представлениями, а во-вторых, иерархия метаавтоматов – это лишь способ декомпозиции управления, в отличие, допустим, от парадигмы вложенных автоматов (см., например, автоматную школу программирования А. Шалыто [12]).

Итак, имеем двухуровневую систему управления:

1. Базовый уровень. Используются реактивные модели прямого управления, определяющие вектор движения на основе анализа области Ω_s . На этом уровне отрабатываются двигательные программы типа сближения, избегания препятствий, преследования и т. д. Эти действия-программы реализуются методом потенциальных полей. С позиции обобщенной модели управления (3) речь идет о задании коэффициентов из множества K .

2. Уровень поведения. Реализуется на основе дискретно-событийных (автоматных) моделей. На этом уровне метаавтоматы формируют последовательности двигательных программ, реализуя сложные поведенческие процедуры типа движения по пеленгу с обходом препятствий, движение по заданному маршруту (патрулирование) и т. п.

Для решения задачи движения в область пространства по пеленгу требуются две двигательные процедуры: программа свободного движения, реализующая обобщенное управление (3), а также программа движения вдоль препятствия.

1.2.2. Программа свободного движения

Эта программа выполняется тогда, когда робот не видит препятствий на своем пути. Движение робота определяется множеством коэффициентов K , например

$$K = \{k_{\text{bear}}, k_{\text{obj}}, k_{\text{coh}}\},$$

где k_{bear} , k_{obj} , k_{coh} – это величины, определяющие значимость сил движения по заданному пеленгу, движения к объекту интереса и когезии соответственно.

Здесь предполагается, что в отсутствие препятствий робот движется по некоторому пеленгу, в случае обнаружения объекта интереса (точки финиша) робот идет к нему и при этом стремится двигаться в направлении движения группы (правило когезии, «куда все, туда и я»).

Движение осуществляется следующим образом:

• **Движение по пеленгу.** Определяется заданными углами α_{yaw} , α_{pitch} согласно формуле (2)

$$F_{\text{bear}} = \langle v_{\text{ctl}}, A_{\text{ctl}} \rangle = \langle v_{\text{ctl}} = \text{const}, \langle \alpha_{\text{yaw}}, \alpha_{\text{pitch}}, 0 \rangle \rangle.$$

• **Движение к объекту интереса.** Пусть робот регистрирует множество целевых объектов Ω_s^{obj} . Исходя из их координат, направление агента будет определяться как движение к их центру масс, см. формулу (1):

$$F_{\text{obj}} = \langle v_{\text{ctl}}, A_{\text{ctl}} \rangle = \langle v_{\text{ctl}} = \text{const}, A_{\text{obj}} \rangle,$$

где A_{obj} – суммарный вектор направления к центру масс наблюдаемых объектов.

• **Когезия (составление, притяжение).** Пусть робот регистрирует множество своих соседей Ω_s^{coh} . Если известны координаты членов группы – элементы множества Ω_s^{coh} , то скорость и направление агента будет определяться как движение к их центру масс.

Итоговое направление движения определится как

$$F_{\text{ctl}} = \langle v_{\text{ctl}}, A_{\text{ctl}} \rangle = k_{\text{bear}} F_{\text{bear}} + k_{\text{obj}} F_{\text{obj}} + k_{\text{coh}} F_{\text{coh}}.$$



При этом специфика решаемой задачи определяется заданием значимости соответствующих факторов движения. Например, при $k_{coh} \ll k_{bear} \ll k_{obj}$ основным приоритетом будет поиск цели, а при $k_{coh} \ll k_{obj} \ll k_{bear}$ – движение по пеленгу.

1.2.3. Движение вдоль препятствий

Двигательная программа, позволяющая роботу перемещаться вдоль препятствия, выглядит сложнее. Фактически речь идет о процедуре движения вдоль наблюдаемых объектов-ориентиров, в качестве которых могут рассматриваться препятствия или фрагменты таковых. Рассмотрим далее базовую процедуру движения агента вдоль ориентиров с использованием метода потенциальных полей. Данная процедура имеет множество параметров, определяющих характер этого движения, и возвращает закон управления в виде пары $\langle v_{res}, A_{res} \rangle$ – скорости движения и его направления. Процедура реентерабельна и вызывается на каждом шаге моделирования.

Входные параметры:

- координаты агента $c_a = (x_a, y_a, z_a)$ и углы его ориентации $\alpha_a = \alpha_{yaw}^a, \alpha_{pitch}^a, \alpha_{roll}^a$;
- множество наблюдаемых объектов $\Omega = \{s_i\}$, для каждого элемента которого известны его координаты (x_s^i, y_s^i, z_s^i) (все объекты точечные);
- v_0 – линейная крейсерская скорость движения агента;
- α_{add} – угол добавки к рассчитанному курсу, который определяет, под каким углом по отношению к ориентирам движется агент;
- $\dim_{attr}$ – степень расстояния между объектами для притяжения;
- $\dim_{sep}$ – степень расстояния между объектами для закона отталкивания (чем она больше, тем «точнее» агент идет вдоль пятен (препятствий));
- d_f – коэффициент, определяющий границу сил отталкивания (притяжения) (чем он меньше, тем ближе к препятствиям идет агент).

В итоге параметры $\dim_{attr}$ и $\dim_{sep}$ определяют точность траектории, а d_f – характер переходного процесса.

Суть процедуры заключается в том, что каж-

дый объект из области видимости Ω обладает как притягивающим, так и отталкивающим потенциалом. При этом отталкивающее поле вблизи объекта должно быть значительно сильнее притягивающего. Это достигается введением некоторого порогового расстояния до препятствия, а также характером отталкивающего поля. Значение потенциала отталкивания, естественно, должно неограниченно возрастать в непосредственной близости от объекта.

Кроме того, важен учет влияния объектов, находящихся по курсу движения робота.

Сила притяжения. Обозначим через d_i^a расхождение направлений векторов ориентации агента и вектора направления на объект: $d_i^a = A - A_i$. Тогда кортеж $\langle v_s, A_s \rangle$ определяется как сумма векторов $\langle v_{res}, A_{res} \rangle = \sum_{o_i \in \Omega_B} (F_i^{attr}, A_i)$. Здесь F_i – значение «силы притяжения» объекта o_i из области Ω :

$$F_i^{attr} = \begin{cases} 0, & \text{если } r_i < r_{min}, \\ \frac{k_{cos}}{r_i^{\dim_{attr}}}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$k_{cos} = \cos \max_j (d_i^a)_j,$$

где r_i – расстояние до объекта. Смысл введения коэффициента k_{cos} заключается в том, чтобы для агента были более предпочтительны те ориентиры, которые расположены по ходу его движения. Чтобы не увеличивать влияние более близких ориентиров, целесообразно в знаменателе иметь расстояние r_i в степени $\dim_{attr} \geq 1$. Кроме того, совсем близкие ориентиры не должны участвовать в определении направления движения. Для этого вводится некоторое минимальное расстояние r_{min} , кратное, например, размеру агента.

Сила отталкивания F_i^{sep} определяется аналогично, при этом степень расстояния $\dim_{sep}$ должна быть больше $\dim_{attr}$.

После определения направления результирующего поля $F_i = F_i^{attr} + F_i^{sep}$ к его значению добавляется дополнительный угол ориентации α_{add} . Этот угол определяет, каким бортом будет происходить обход.

Исходя из этого, ниже представлен алгоритм движения агента вдоль цепочки объектов.

```

1. function SpotMv( $c_a, \alpha_a, \Omega, v_0, \alpha_{add}, dim_{attr}, dim_{sep}, d_f$ )
2.   %-- Этап 1. Если ориентиры не видны, то агент вращается на месте (ищет ори-
   ентеры) .
3.   if  $\Omega = \emptyset$  then
4.      $v_{res} := v_0/2, A_{res} := \langle \alpha_{yaw}^a + d_{yaw}, 0, 0 \rangle$ 
5.     return  $\langle v_{res}, A_{res} \rangle$ 
6.   endif
7.   %-- Этап 2. Инициализация значения результирующего управления,
8.   %-- а также сил притяжения и отталкивания.
9.    $\langle v_{res}, A_{res} \rangle := \langle 0, \langle 0, 0, 0 \rangle \rangle$ 
10.   $\langle v_{attr}, A_{attr} \rangle := \langle 0, \langle 0, 0, 0 \rangle \rangle$ 
11.   $\langle v_{sep}, A_{sep} \rangle := \langle 0, \langle 0, 0, 0 \rangle \rangle$ 
12.  %-- Этап 3. Цикл по всем объектам s из зоны видимости  $\Omega$ 
13.  for s in  $\Omega$  do
14.    %-- 3.1. Определение нормированного расстояния d до объекта и угла  $\alpha_s$ 
15.     $A := (x_s - x_a, y_s - y_a, z_s - z_a)$ 
16.     $d := |A|/d_f$ 
17.    if ( $d_{min} > d$ ) then  $d_{min} := d$ 
18.     $\alpha_s = \langle \alpha_{yaw}^s, \alpha_{pitch}^s, \alpha_{roll}^s \rangle := \text{УглыЭйлера}(A)$ 
19.    %-- 3.2. Учет направления. Косинусный закон: значение имеют те
20.    %-- ориентиры, которые впереди
21.     $k_{cos} := \cos(\alpha_{yaw}^a - \alpha_{yaw}^s)$ 
22.    %-- 3.3. Учет фактора близости (видимость)
23.     $k_{near} := \begin{cases} 1, \text{если } d > 0.5 \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$ 
24.    %-- 3.4. Расчет сил притяжения/отталкивания
25.    if ( $d > 1$ ) then -- Притяжение
26.       $force := k_{cos} k_{near} d^{dim_{attr}}$ 
27.       $\langle v_{attr}, A_{attr} \rangle := \langle v_{attr}, A_{attr} \rangle + \langle force, \alpha_s \rangle$ 
28.    else -- Отталкивание
29.       $\alpha_{sep} := \langle \alpha_{yaw}^s + \frac{\pi}{2}, \alpha_{pitch}^s + \frac{\pi}{2}, \alpha_{roll}^s \rangle$ 
30.       $force := k_{cos} k_{near} d^{dim_{sep}}$ 
31.       $\langle v_{sep}, A_{sep} \rangle := \langle v_{sep}, A_{sep} \rangle + \langle force, \alpha_{sep} \rangle$ 
32.    endif
33.  endfor
34.  %-- Этап 4. Расчет итоговой силы
35.   $\langle v_{res}, A_{res} \rangle := \langle v_{attr}, A_{attr} \rangle + \langle v_{sep}, A_{sep} \rangle$ 
36.  %-- Добавление к углу рыскания дополнительного значения  $\alpha_{rot}$ , чтобы иди
   %-- боком. Значение этой добавки зависит от близости к препятствию r.
37.   $r := \max(d_{force}(d_{min} - 1), 0)$ 
38.   $\alpha_{rot} := \alpha_{add} e^{-r}$ 
39.   $A_{res} := \langle \alpha_{res}^{yaw} + \alpha_{rot}, \alpha_{res}^{pitch}, \alpha_{res}^{roll} \rangle$ 
40.  %-- Скорость постоянная
41.   $v_{res} := v_0$ 
42.  return  $\langle v_{res}, A_{res} \rangle$ 

```

Итак, процедура движения в заданную область пространства требует реализации двух двигательных программ – программы свободного движения и движения вдоль ориентиров. Рассмотрим далее автоматный уровень управления, отвечающий за переключение между этими программами.

1.3. Управляющие автоматы

Для унификации управления будем полагать, что двигательные процедуры запускаются автоматом $dctl$ с одним состоянием. При запуске автомата указывается аргумент arg – имя двигательной программы. Выходом автомата является управление $F_{ctl} = \langle v_{res}, A_{res} \rangle$. Для рассматриваемой задачи аргументами будут имена процедур свободного движения $FreeMv$ и движения вдоль препятствий $SpotMv$.

Метаавтомат движения по пеленгу с обходом препятствия реализует следующий алгоритм поведения: если путь свободен, то робот движется по программе свободного движения (активен автомат $dctl$ с аргументом $FreeMv$). В противном случае управление передается автомату, активизирующему процедуру движения вдоль цепочки объектов ($dctl$ с аргументом $FObstAlong$). Программа $FObstAlong$ – это реализация функции $SpotMv$ с параметрами, определяющими требуемую специфику движения робота (движение поближе (подальше) от препятствий, точность и т. п.).

На Рис. 1 изображены автомат $dctl$ и метаавтомат движения по пеленгу. Пометки ребер содержат условие перехода (в числителе) и выполняемую процедуру. Для метаавтомата это запуск автомата $dctl$ с соответствующим аргументом.

Более сложное поведение может потребовать создания соответствующих метаавтоматов того же ранга M^1 и автомата второго ранга для активизации автоматов ранга M^1 . Автомат M^2 может, например, отвечать за определение условий завершения движения, за запуск программы (метаавтомата) преследования и т. п.

2. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Эксперименты проводились на моделях трех видов: в дискретно-событийной системе много-агентного моделирования Kvoqum, в среде физического моделирования Gazebo, а также на реальных роботах – как в лабораторных условиях, так и работающих на открытом пространстве.

Во всех экспериментах робот представлял собой колесную платформу с дифференциальным приводом, оснащенную локатором-дальномером, работающим в передней полуплоскости, а также семью дальномерами, расположенными так, как показано условно на рис. 3.

Кроме того, роботы были оснащены компасом на основе гироскопа. С частотой 10 Гц показания дальномеров формируют сферические координаты регистрируемых препятствий, которые переводятся в координаты объектов-препятствий множества Ω . Локатор, как модельный, так и реальный, тоже обладает дискретностью шага (длина вектора показаний локатора равна 180 из-за минимального шага в 1° , хотя реально шаг составляет 10° в силу того, что используются дальномеры с рабочим углом порядка 15°), поэтому результирующие потенциалы формируются сравнительно небольшим множеством объектов.

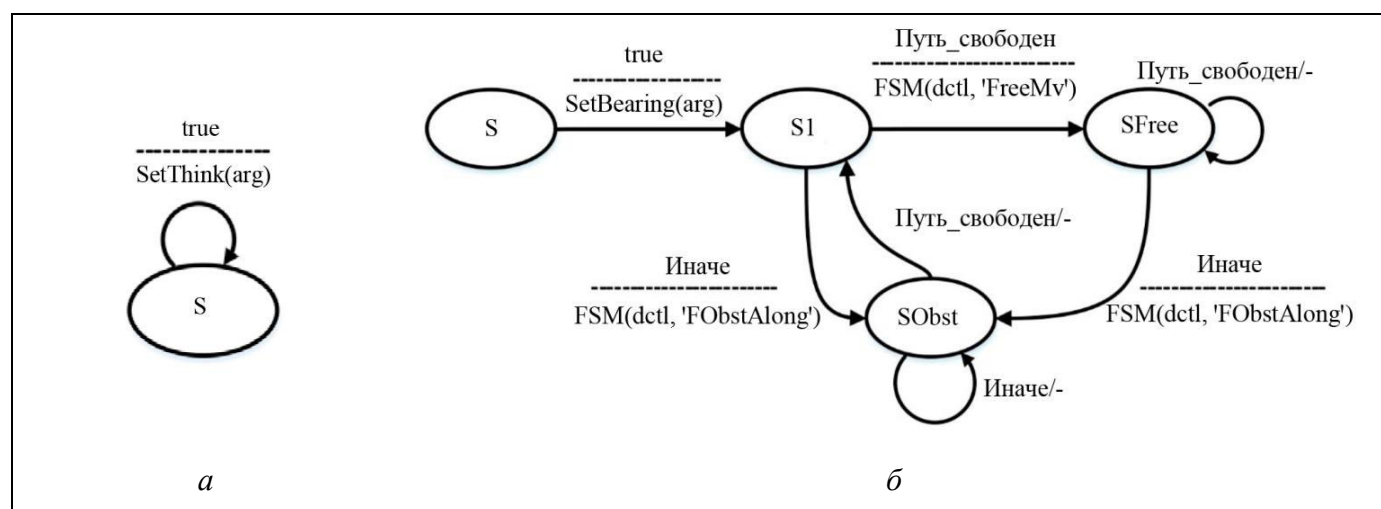


Рис. 1. Автоматы: а – автомат уровня 0 ($dctl$, запуск двигательных программ); б – мета-автомат движения по пеленгу с обходом препятствий

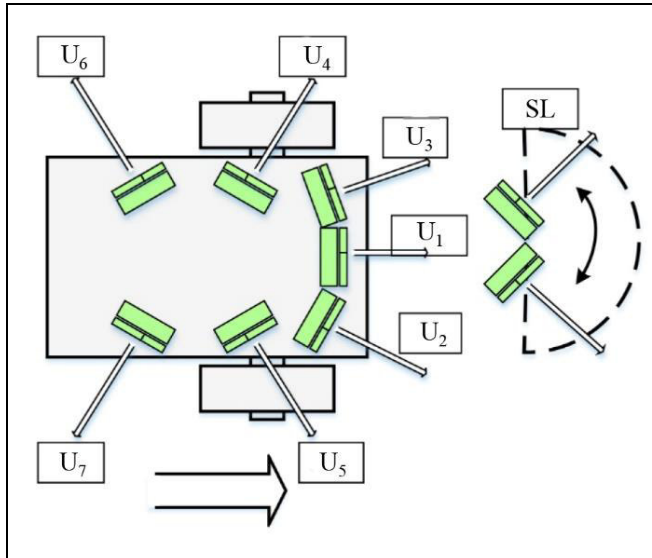


Рис. 2. Расположение датчиков: U_1 – U_7 – дальнометры, SL – локатор с обзором 180°

Важно, что во всех экспериментах – вычислительных, имитационных и реальных – использовались единое вычислительное ядро, рассчитывающее потенциалы полей, а также одни и те же управляющие автоматы.

2.1. Вычислительные эксперименты

Основная серия экспериментов проводилась в среде имитационного моделирования Kvorum. Kvorum – это система дискретно-событийного моделирования, в которой среда агентов представле-

на дискретным (клеточным) полем [13]. Поскольку двигательные процедуры на основе ПП имеют принципиально непрерывный характер, то полученное управление вида $F_{ctl} = \langle v_{res}, A_{res} \rangle$ транслировалось в дискретные команды для модельного объекта: шаг движения с заданной постоянной скоростью и дискретный поворот. Тем не менее, такое закругление управления не повлияло на итоговый результат. На рис. 4, а приведены пример поля с препятствиями и траектория движения агента. Физическая модель этого поля изображена на рис. 4, б.

Эксперименты заключались в определении зависимости доли успешных миссий (движение в заданную полуплоскость) $E(\rho)$ от степени насыщенности поля препятствиями ρ . Здесь $\rho = N_{obst}/N$, где N_{obst} – количество клеток-препятствий; N – общее количество клеток на модельном поле. Значение ρ выбиралось из диапазона $0,005 \dots 0,06$ с шагом $0,005$. Для каждого значения ρ проводилось десять экспериментов: генерировались поля со случайно расположенными препятствиями (равномерное распределение) и осуществлялся запуск агента, стартующего из одной и той же точки. Миссия считалась успешной, если агент достигал целевой области не более чем за некоторое число тактов $T_{max} = N$ (грубая пессимистическая оценка). Для каждой серии определялось значение $E(\rho)$. На рис. 5 представлены результаты этих экспериментов.

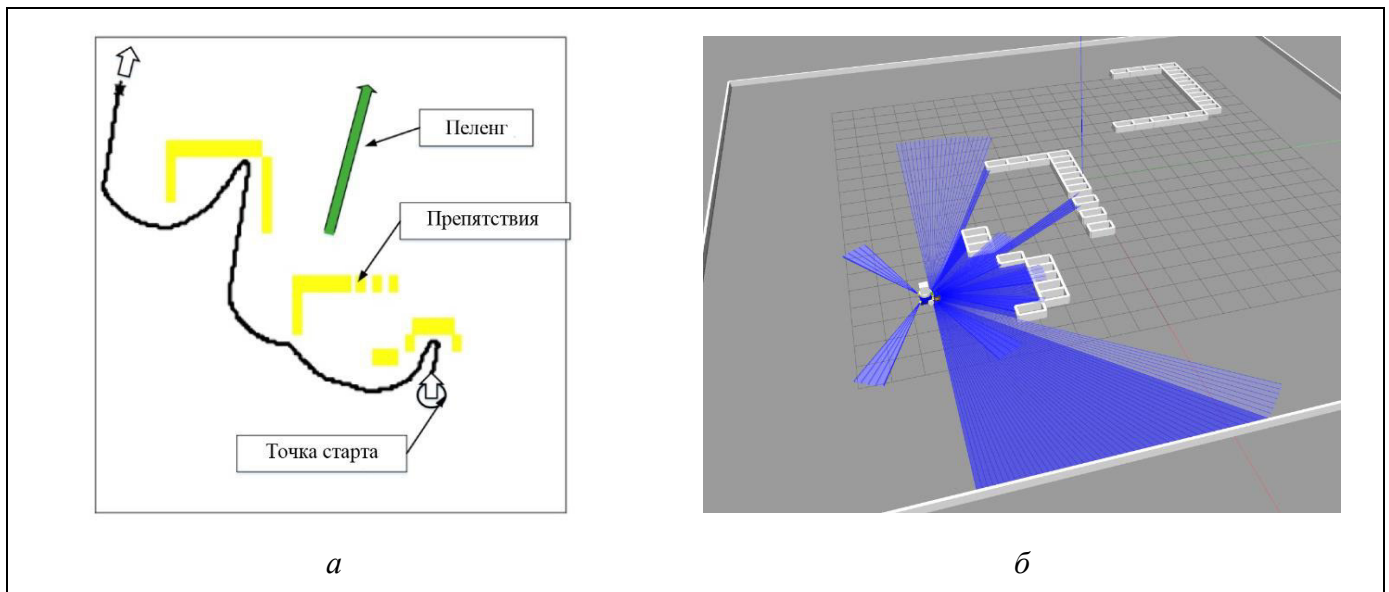


Рис. 3. Примеры: а – иллюстративного эксперимента в системе имитационного моделирования Kvorum; б – модели робота в среде Gazebo. Топология препятствий одна и та же

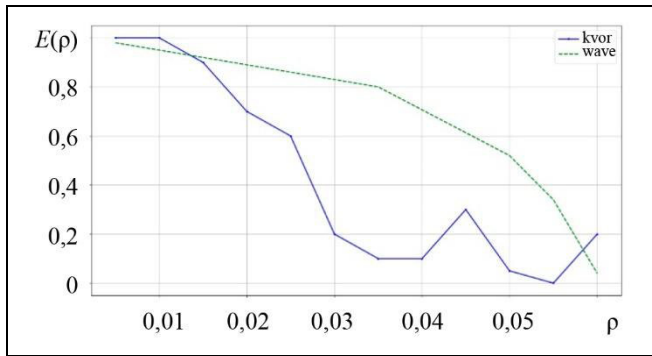


Рис. 4. Результаты вычислительных экспериментов

На рис. 5 изображены зависимости $E(\rho)$, полученные в ходе имитационного моделирования в системе Kvorum (график kvor), а также результаты работы волнового алгоритма (график wave) в тех же условиях. Волновой алгоритм здесь выбран как эталонный. Для обоих алгоритмов стартовая точка (начальное положение робота) находилась на нижней грани прямоугольного поля, а целевая – на верхней. Кроме того, волновой алгоритм работал с полем, на котором препятствия масштабировались. Это связано с тем, что должна существовать зона безопасности при движении в среде с препятствиями: робот должен находиться на некотором расстоянии от них.

Разумеется, волновой алгоритм имеет лучшие показатели в силу гарантированного нахождения решения для сред, в которых путь существует. Тем не менее видно, что как для разреженных сред, так и для сред с большой плотностью препятствий ρ показатели эффективности близки. Для метода потенциальных полей более раннее ухудшение показателей с ростом значения ρ связано с тем, что агент может попасть в локальный экстремум. Для волнового алгоритма уменьшение значения $E(\rho)$ означает появление теоретически непроходимых зон.

Очевидно, что введение дополнительных уровней управления все равно не может гарантировать успешного решения задачи локальной навигации методом ПП. Гарантировать корректное движение с обходом препятствий можно лишь в области, размер которой определяется величиной радиуса области видимости r_Ω .

Фактически это означает, что данные эксперименты можно интерпретировать как определение зависимости эффективности навигации от радиуса r_Ω и среднего расстояния между препятствиями (показателя насыщенности).

Действительно, пусть S – это общая площадь поля. Тогда каждое препятствие будет центром области с площадью $S_0 = S / N_{\text{obst}}$ и радиусом

$$r_0 = \sqrt{S_0}. \text{ Поскольку } S = N, \text{ то } S_0 = \frac{N}{N_{\text{obst}}} = \frac{N}{\rho N} = \frac{1}{\rho}, \text{ откуда можно оценить среднее расстояние}$$

между препятствиями r_0 :

$$r_0 = \sqrt{S_0} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}.$$

В экспериментах значение r_Ω было постоянным и равным 10 % от линейного размера всей области, т. е. $r_\Omega = 0,1\sqrt{N}$.

В итоге получен следующий результат: если размер радиуса области видимости агента r_Ω был больше, чем минимальное расстояние между препятствиями r_0 , то агент успешно проходил маршрут.

О сравнении с другими алгоритмами и методами планирования. Формально речь шла об экспериментах на картах класса $\text{random}(m \times n, R)$, что означает прямоугольное поле из m строк и n столбцов, при этом R процентов случайно выбранных клеток из них являются заблокированными (обозначают препятствия). Среди множества метрик, описывающих как свойства среды, так и эффективность решения задачи, были выбраны две – ρ (плотность препятствий, англ. *Obstacle Density*) и E (доля успешно завершенных миссий, англ. *Success Rate*). Чаще всего в исследованиях оценка свойств рассматриваемых алгоритмов и методов проводится на примерах фиксированных карт препятствий. При этом номенклатура метрик может быть весьма разнообразной (см. работу [14]). Так, для оценки сложности статических сред широко используется метрика Tr (проходимость, англ. *Traversability*). Она определяется как среднее проходимое расстояние для всех равномерно выбранных положений и направлений:

$$Tr = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} d_i,$$

где d_i – проходимое расстояние в i -й выбранной позиции и направлении; N_s – общее количество выбранных позиций и направлений. Однако очевидно, что в силу вычислительных затрат использование данной метрики затруднительно для экспериментов с генерацией множества карт класса random .

Пожалуй, наиболее близка к $E(\rho)$ оценка, данная в работе [15], где приводится зависимость отношения E от параметра, характеризующего плотность препятствий, однако приведенное там срав-

нение алгоритмов имеет лишь качественный характер, показывающий монотонное убывание значения $E(p)$. Именно поэтому в настоящей работе использовалось сравнение результатов метода потенциальных полей с эталонным – волновым алгоритмом.

2.2. Эксперименты в Gazebo и на реальных роботах

Эти эксперименты носили прежде всего иллюстративный характер, демонстрируя работоспособность предложенных моделей в реальных условиях. Кроме того, в этих экспериментах управление $F_{ctl} = \langle v_{res}, A_{res} \rangle$ более естественным образом переводилось в команды движения, задаваемые парой $\langle v_{lin}, v_{ang} \rangle$, где v_{lin}, v_{ang} – линейная и угловая скорости движения робота.

Поскольку в управлении A_{res} определяет итоговое направление движения, то значение v_{ang} определялось как поворот, устраняющий рассогласование между требуемой и текущей компасной ориентацией робота.

2.2.1. Физическое моделирование в Gazebo

Одним из распространенных средств для реализации физического моделирования в робототехнике является система Gazebo [16]. Симулятор Gazebo позволяет добавлять реалистичные датчики и использовать объемные модели агентов, облегчая переход от моделей управления к реальным робототехническим устройствам.

На рис. 6 представлены изображения модели робота и одного из тестовых полей.

2.2.2. Эксперименты с реальными роботами

Эксперименты проводились как в лабораторных условиях, так и на открытом пространстве на соответствующих роботах. Имея единую архитектуру, роботы отличались габаритами и типами используемых дальномеров на локаторах: на лабораторном роботе использовались лазерные дальномеры VL53L0X (угол 15° , диапазон – до 2 м с точностью 3 %), а на «уличном» – дальномеры на основе УЗД HC-SR04 (угол 15° , диапазон – до 4 м).

Локаторы роботов представляют собой спаренные дальномеры, расположенные на сервоприводе. Это обеспечивает угол обзора в 180° при повороте сервопривода на 90° (шесть шагов при эффективном угле 15°). Компас построен на основе IMU-сенсора MPU6050 (акселерометр и гироскоп со стандартным отклонением $0,3^\circ$). Дрейф показаний компаса игнорировался.

На рис. 7 изображены «уличный» (предназначенный для работы на открытых пространствах) и лабораторный роботы.

Для удобства отладки и управления вычисления осуществлялись на удаленном компьютере, а задача бортового вычислителя на основе Raspberry Pi 4 сводилась к передаче сенсорных данных и отработке команд управления скоростью. Задача роботов заключалась в движении в направлении, определенном их начальной ориентацией. Аппаратные рефлексy – реакция на препятствия в непосредственной близости – были отключены. В целом результаты огибания препятствий, размеры которых соизмеримы с габаритами робота, были удовлетворительными в смысле отсутствия столкновений. Это связано с широким углом охвата дальномеров робота.

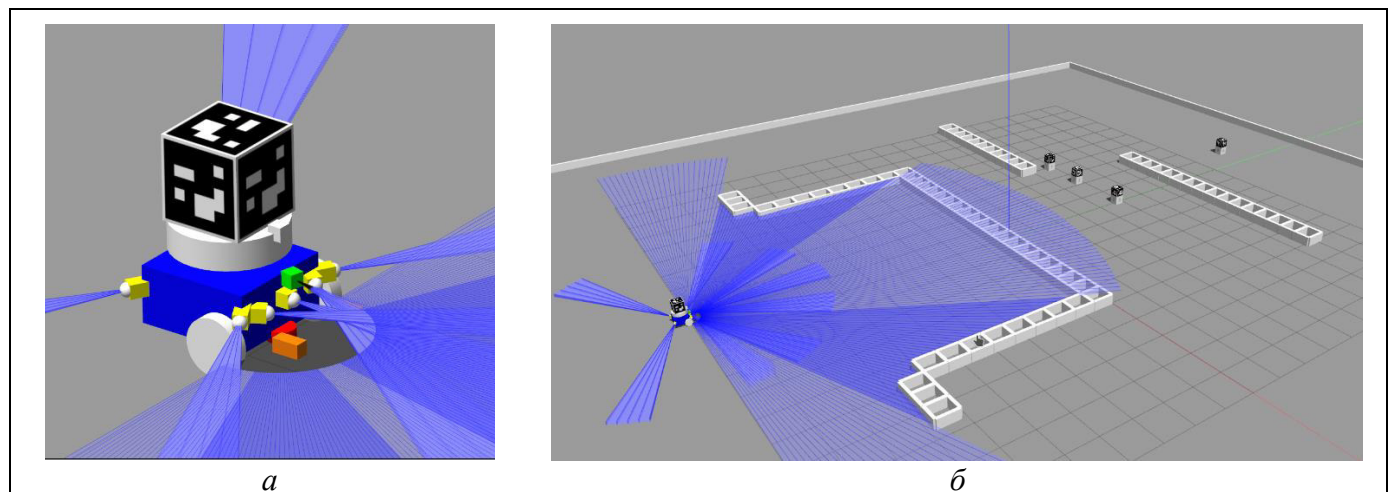


Рис. 5. Имитационное моделирование в среде Gazebo: а – модель робота; б – робот на полигоне

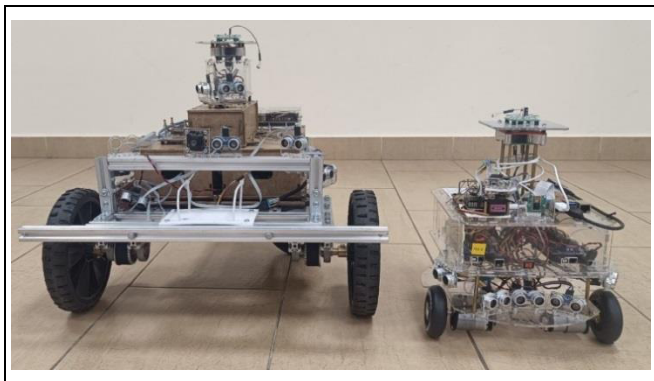


Рис. 6. Робот для работы на открытых пространствах (слева) и лабораторный робот (справа)

О погрешностях сенсорной системы. Как в вычислительных экспериментах, так и при работе с реальными роботами возникает вопрос влияния погрешностей измерений на работоспособность системы. Погрешности относятся к трем категориям: пропуск препятствий, точность и инерционность. Несмотря на дискретность работы описанного выше локатора, использование дальномеров с широким углом в 15° позволяет нивелировать пропуск – локатор работает с заведомым перекрытием. Точности измерения в 3 % более чем достаточно для безопасного функционирования системы: если минимально безопасное расстояние до препятствий составляет один линейный размер робота (0,5 м), то при скорости 1 м/с и времени обновления всех показаний датчиков даже в 0,5 с допустимая погрешность может составлять до 20 %. То же самое касается и инерционности сенсорной системы (поскольку робот движется, локатор выдает искаженную картину препятствий). Вопрос в том, сколько робот успеет пройти за время обновления показателей дальномеров, разрешается так же, как и вопрос точности. Таким образом, при указанных параметрах инерционность тоже несущественна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Навигация в экстремальных условиях, когда робот может ориентироваться исключительно на показания достаточно простых датчиков и у него нет средств глобальной навигации и априорных сведений об окружении, требует специфических методов управления. Специфика определяется, во-первых, ограниченностью вычислительных ресурсов, во-вторых, гибкостью и универсальностью моделей управления и, в-третьих, нетребовательностью к качеству (точности) решений. В этом плане метод потенциальных полей выгодно выделяется в широком ряду механизмов навигации.

В силу принципиальных ограничений метода ПП продолжающийся интерес к нему определяется разработкой различного рода модификаций, построением новых гибридных архитектур, применением методов машинного обучения и т. п. В настоящей работе был предложен именно архитектурный подход к локальной навигации, когда управление на основе метода ПП переносится на уровень элементарного движения, а анализ ситуации и переключение между двигательными программами переносится на уровень метаавтоматного управления.

Разумеется, успешность выполнения задачи локальной навигации определяется размером области видимости робота, однако отметим еще раз, что унифицированность механизмов управления позволяет расширять эту область совершенно естественным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Katona, K., Neamah, H.A., Korondi, P. Obstacle Avoidance and Path Planning Methods for Autonomous Navigation of Mobile Robot // *Sensors*. – 2024. – Vol. 24, no. 11. – Art. no. 3573.
2. Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б. Вопросы управления движением мобильных роботов методом потенциального наведения // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2019. – Т. 20, № 11. – С. 677–685. [Filimonov, A.B., Filimonov, N.B. Issues of Motion Control of Mobile Robots Based on the Potential Guidance Method // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. – 2019. – Vol. 20, no. 11. – P. 677–685. (In Russian)]
3. Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б. Новый подход к использованию метода потенциальных полей в мобильной робототехнике // IV Международная научная конференция по проблемам управления в технических системах. – Санкт-Петербург, 2021. – С. 314–317. [Filimonov, A.B., Filimonov, N.B. Novyi podkhod k ispol'zovaniyu metoda potentsial'nykh polei v mobil'noi robototekhnike // *Proceedings of the 4th International Conference on Control in Technical Systems (CTS'2021)*. – Saint-Petersburg, 2021. – P. 314–317. (In Russian)]
4. Xing, H. Review of unmanned aerial vehicle obstacle avoidance planning based on artificial potential field // *Appl. Comput. Eng.* – 2023. – Vol. 10, no. 1. – P. 55–63.
5. Koren, Y., Borenstein, J. Potential field methods and their inherent limitations for mobile robot navigation // *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. – Sacramento, CA, USA, 1991. – Vol. 2. – P. 1398–1404.
6. Xu, Z., Hess, R., Schilling, K. Constraints of potential field for obstacle avoidance on car-like mobile robots // *IFAC Proceedings Volumes*. – 2012. – Vol. 45, no. 4. – P. 169–175.
7. Сидоренко А.В., Солодухо Н.А. Алгоритм обигания препятствий при перемещении мобильного робота // *Системный анализ и прикладная информатика*. – 2024. – Т. 4. – С. 29–33. [Sidorenko, A.V., Saladukha, N.A. Obstacle avoidance algorithm in mobile robot motion // *System analysis and applied information science*. – 2024. – Vol. 4. – P. 29–33. (In Russian)]

8. *Алдошкин Д.Н., Царев Р.Ю.* Поиск пути мобильного робота в условиях наличия препятствий и неполноты информации о среде // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – Т. 17, № 7. – С. 465–470. [*Aldoshkin, D.N., Tsarev, R.Yu.* Mobile Robot Path Planning in the Presence of Obstacles and Lack of Information about the Environment // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. – 2016. – Vol., 17, no. 7. – P. 465–470. (In Russian)]
 9. *O'Rourke, J.* Computational Geometry in C. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
 10. *Карпов В.Э., Ровбо М.А., Воробьев В.В.* О некоторых аспектах применения автоматных моделей в групповом управлении // Мехатроника. Автоматизация. Управление. – 2023. – Т. 24, № 4. – С. 171–180. [*Karpov, V.E., Vorobiev, V.V., Rovbo, M.A.* About Some Aspects of Finite State Machine Models Application to Group Control // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. – 2023. – Vol. 24, no. 4. – P. 171–180. (In Russian)]
 11. *Reynolds, C.W.* Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model // *Proc. 14th Annu. Conf. Comput. Graph. Interact. Tech. (SIGGRAPH'1987)*. – Anaheim, 1987. – Vol. 21, no. 4. – P. 25–34.
 12. *Поликарпова Н.И., Шалыто А.А.* Автоматное программирование. – СПб, 2008. – 167 с. [*Polikarpova, N.I., Shalyto, A.A.* *Avtomatnoe programmirovaniye*. – SPb, 2008. – 167 s (In Russian)]
 13. *Карпов В.Э., Ровбо М.А., Овсянникова Е.Е.* Система моделирования поведения групп робототехнических агентов с элементами социальной организации Кворум // Программные продукты и системы. – 2018. – Т. 31, № 3. – С. 581–590. [*Karpov, V.E., Rovbo, M.A., and Ovsyannikova, E.E.* Kvorum – the system for modeling the behavior of robotic agent groups with elements of social organization // *Software & Systems*. – 2018. – Vol. 31, no. 3. – P. 581–590. (In Russian)]
 14. *Shi, M., Chen, G., Serra Gómez, A., et al.* Evaluating Dynamic Environment Difficulty for Obstacle Avoidance Benchmarking // *arXiv:2404.14848*. – 2024. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.14848>
 15. *Diab, M., Mohammadkarimi, M., Rajan, R.T.* Artificial Potential Field-Based Path Planning for Cluttered Environments // *Proceedings of 2023 IEEE Aerospace Conference*. – Big Sky, MT, USA, 2023. – P. 1–8. – DOI: 10.1109/AERO55745.2023.10115857
 16. *Gazebo*. – URL: <https://gazebo.org/> (дата обращения: 03.09.2025). [Accessed September 3, 2025].
- Статья представлена к публикации членом редколлегии Е. Я. Рубиновичем.*
- Поступила в редакцию 04.09.2025,
после доработки 27.01.2026.
Принята к публикации 16.03.2026.*
- Карпов Валерий Эдуардович** – д-р техн. наук, НИЦ «Курчатовский институт», г. Москва
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9364-1223>
- © 2026 г. Карпов В. Э.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



FINITE-STATE MACHINE CONTROL AND POTENTIAL FIELD METHOD FOR MOBILE ROBOT NAVIGATION IN AN ENVIRONMENT WITH OBSTACLES

V. E. Karpov

National Research Center Kurchatov Institute, Moscow, Russia

✉ karpov-ve@yandex.ru

Abstract. This paper considers a local navigation method for a mobile robot operating in extreme conditions, i.e., the absence of global navigation and centralized control means, as well as limited-capability sensors. Local navigation is based on the potential field method, and the motion programs developed with this method are transferred to the level of elementary actions. Complex behavior is formed by meta finite-state machines (FSMs) implementing a control hierarchy. The robot's basic task is to move to a given area or region of space. Within this task, an elementary procedure—obstacle avoidance—is considered and implemented based on the potential field method as well. The results of experiments are provided for three different levels, namely, computations, simulations (the physical level), and real robots, with the same computational model and FSMs used in all experiments. As shown, the successful solution of the local navigation task is determined by the size of the robot's field of view, but the latter can be naturally expanded due to the universality of control mechanisms.

Keywords: potential field method, finite-state machine control, meta finite-state machine, movement models, mobile robot, local navigation, obstacle avoidance, control system hierarchy.

Acknowledgments. This work was carried out within the state assignment of NRC Kurchatov Institute.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕДУР ПЕРЕВЫБОРКИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ФИЛЬТРОВ ЧАСТИЦ

А. М. Исаев

АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», г. Санкт-Петербург

✉ itmo_student@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются алгоритмы решения нелинейных задач фильтрации, основанные на последовательных методах Монте-Карло. Приведена схема построения простейшего фильтра частиц и пояснена основная проблема, возникающая при его реализации, – вырождение алгоритма. Описана суть процедур существенной перевыборки, предназначенных для преодоления этого недостатка. Проведен обзор получивших наибольшее распространение при решении задач обработки навигационной и траекторной информации процедур перевыборки. Приведен критерий, используемый для определения момента времени проведения перевыборки. Выполнено аналитическое сопоставление процедур перевыборки путем анализа соответствующих им псевдокодов. На примерах решения задачи оценивания процесса, представляющего собой сумму полинома и второго интеграла от белого шума, по нелинейным измерениям и решения задачи траекторного слежения проведено численное сопоставление схем перевыборки путем проведения моделирования с применением метода статистических испытаний.

Ключевые слова: байесовский стохастический подход, нелинейная фильтрация, методы Монте-Карло, последовательная существенная перевыборка, фильтры частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Специфика задач, связанных с обработкой навигационной информации, наведения и траекторного слежения, заключается в необходимости получения при их решении не только оценок вектора неизвестных параметров, но и количественных характеристик, определяющих точность, с которой они получены. В связи с этим алгоритмы, синтезируемые для их решения, в большинстве случаев строятся в рамках так называемого байесовского стохастического подхода [1–7], обеспечивающего возможность вычисления оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки и соответствующей ей расчетной матрицы ковариаций погрешностей оценивания. В случае, когда расчетные матрицы ковариаций согласованы с их действительными значениями, алгоритм принято называть состоятельным [5].

Многие задачи обработки навигационной и траекторной информации являются нелинейными,

и для их решения в общем случае не удастся построить алгоритм, вырабатывающий оптимальную оценку в режиме реального времени по причине его высокой вычислительной сложности. В связи с этим разработчики синтезируют различные субоптимальные алгоритмы, основанные на тех или иных упрощениях. При построении субоптимальных алгоритмов стараются, чтобы они были простыми в вычислительном отношении, состоятельными, а их точность была бы близка к потенциальной точности, т.е. к точности, соответствующей оптимальному алгоритму.

Наиболее сложными для решения практическими задачами традиционно считаются те, в которых апостериорная функция плотности распределения вероятности (ФПРВ) в процессе своей эволюции принимает сложный многоэкстремальный вид [8]. Алгоритмы калмановского типа (АКТ) [4, 9], получившие наибольшее распространение в задачах обработки навигационной и траекторной информации, при их решении зачастую



оказываются неработоспособными. Для решения таких задач широкое применение получили так называемые последовательные методы Монте-Карло (ММК), называемые также фильтрами частиц (ФЧ), и их различные модификации [10–16]. Отличительная особенность ФЧ заключается в возможности анализировать методическую ошибку, порожденную используемой аппроксимацией, в ходе нахождения оценки, и добиваться нужной точности за счет изменения соответствующих настроек фильтра [17]. При достижении ФЧ точности, близкой к потенциальной, алгоритм также является состоятельным.

При всех своих достоинствах ФЧ обладают рядом недостатков. Основной из них, называемый проблемой вырождения [18], заключается в том, что по мере обработки измерений значение одного из весов неизбежно станет близким к единице, а значения остальных – близкими к нулю; ФЧ в таком случае оказывается неработоспособным. Преодолеть проблему вырождения можно увеличением количества используемых в алгоритме частиц, однако вычислительная сложность ММК в таком случае становится значительной [19]. Это не только затрудняет реализацию ФЧ в режиме реального времени, но в ряде случаев делает невозможным применение алгоритма даже в режиме камеральной обработки.

Преодолеть упомянутый недостаток ФЧ в большинстве случаев удается благодаря применению так называемых процедур существенной переверборки [20], основная суть которой заключается в перераспределении частиц из областей близких к нулю значений ФПРВ в области, где эти значения отличны от нуля. Анализ современных публикаций показал, что наиболее широкое применение при построении ФЧ получили мультиномиальная [21], стратифицированная [22], систематическая [23], остаточная [24] и остаточная систематическая [19] переверборки. При этом следует отметить, что вопросу отличия этих процедур друг от друга, а также их преимуществ и недостатков должного внимания в литературе не уделяется. Заметим, что в отечественных изданиях не было выявлено ни одной работы по обсуждаемой тематике, что в том числе послужило мотивацией для написания настоящей статьи.

Работа посвящена описанию перечисленных выше процедур существенной переверборки, изложению общих принципов их реализации при построении ФЧ, а также проведению их сравнительного анализа. Результаты исследования могут быть полезны разработчикам, имеющим дело с обработ-

кой измерительной информации, как для анализа точности субоптимальных алгоритмов фильтрации, так и при построении алгоритмов решения сложных нелинейных задач, в которых традиционные АКТ оказываются неработоспособны.

Структура работы следующая. В § 1 в общем виде формулируется постановка рассматриваемой задачи нелинейной фильтрации, а также оптимальный алгоритм ее решения. Построению простейшего ФЧ, основанного на последовательных методах Монте-Карло, посвящен § 2 настоящей работы. В § 3 описываются различные процедуры существенной переверборки, традиционно применяемые при построении ФЧ, а § 4 посвящен их сопоставлению. Основные выводы приведены в заключении.

1. ПОСТАНОВКА ИССЛЕДУЕМОЙ ЗАДАЧИ И ЕЕ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

1.1. Постановка задачи

В работе рассматривается следующая задача нелинейной фильтрации n -мерной марковской случайной последовательности

$$x_k = f_k(x_{k-1}) + \Gamma_k w_k, \quad (1)$$

где k – индекс дискретного времени; x_0 – n_x -мерный случайный гауссовский вектор с ФПРВ $p(x_0) = N(x_0; \bar{x}_0, P_0)$, здесь и далее обозначение $N(a; \bar{a}, A)$ используется для ФПРВ гауссовского случайного вектора a с математическим ожиданием $\bar{a}$ и матрицей ковариаций A ; w_k – n_w -мерный центрированный дискретный гауссовский белый шум с известной матрицей ковариаций Q_k размерности $n_w \times n_w$, не зависящий от x_0 ; $f_k(\cdot)$ – известная нелинейная n_x -мерная вектор-функция, описывающая динамику вектора состояний; Γ_k – известная матрица размерности $n_x \times n_w$.

Ставится задача оценивания последовательности (1) по m_y -мерным дискретным измерениям вида

$$y_k = h_k(x_k) + v_k, \quad (2)$$

где $h_k(\cdot)$ – известная нелинейная m_y -мерная вектор-функция, описывающая модель измерений; v_k – m_y -мерный центрированный дискретный гауссовский белый шум, не зависящий от x_0 и w_k , с известной матрицей ковариации R_k .

1.2. Оптимальное решение

Известно, что при решении задачи фильтрации в рамках байесовского подхода оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка и соответствующая ей условная матрица ковариаций $P_k^{\text{opt}}(Y_k)$ определяются в виде [2, 4]:

$$\hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k) = \int x_k p(x_k / Y_k) dx_k, \quad (3)$$

$$P_k^{\text{opt}}(Y_k) = E_{p(x_k/Y_k)} \left\{ (x_k - \hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k))(x_k - \hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k))^T \right\}, \quad (4)$$

где $p(x_k / Y_k)$ – апостериорная (условная) к набору измерений $Y_k = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_k^T]^T$ ФПРВ для вектора x_k , а E – знак математического ожидания с нижним индексом, поясняющим, по какой ФПРВ оно вычисляется. Подчеркнем, что такая оптимальная оценка минимизирует условную (4) и безусловную матрицу ковариаций погрешностей оценивания, определяемую как [4]

$$\bar{P}_k^{\text{opt}} = E_{p(x_k, Y_k)} \left\{ (x_k - \hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k))(x_k - \hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k))^T \right\}. \quad (5)$$

В приведенных выше соотношениях условная матрица ковариаций (4) характеризует текущую погрешность оценивания, соответствующую конкретной реализации измерений Y_k , а безусловная матрица ковариаций (5) – погрешность, рассчитанную путем вероятностного осреднения по всему возможному набору измерений.

Ясно, что для нахождения оценки вида (3) необходимо располагать апостериорной ФПРВ $p(x_k / Y_k)$, для которой справедливо выражение

$$p(x_k / Y_k) = \frac{p(y_k / x_k) p(x_k / Y_{k-1})}{\int p(y_k / x_k) p(x_k / Y_{k-1}) dx_k}, \quad (6)$$

где $p(y_k / x_k)$ – функция правдоподобия; $p(x_k / Y_{k-1})$ – плотность прогноза.

2. ФИЛЬТРЫ ЧАСТИЦ

2.1. Простейший последовательный метод Монте-Карло при решении задач оценивания

При решении задач оценивания ММК трактуется как метод аппроксимации самой апостериорной ФПРВ, которую на каждом шаге k можно представить в виде [10]

$$p(x_k / Y_k) \approx \sum_{n=1}^N \tilde{\omega}_k^{(n)} \delta(x_k - x_k^{(n)}), \quad \sum_{n=1}^N \tilde{\omega}_k^{(n)} = 1, \quad (7)$$

где $\delta(\cdot)$ – многомерная дельта-функция; $x_k^{(n)}$ – набор из $n = \overline{1, N}$ независимых реализаций случайного вектора, в простейшем случае $x_k^{(n)} \sim p(x_k / x_{k-1}^{(n)}, Y_{k-1})$; $\tilde{\omega}_k^{(n)}$ – нормированные веса, определяемые как

$$\tilde{\omega}_k^{(n)} = \omega_k^{(n)} / \sum_{n=1}^N \omega_k^{(n)},$$

а $\omega_k^{(n)}$ – ненормированные веса, для которых, используя рекуррентное соотношение для апостериорной ФПРВ (6) и учитывая марковский характер оцениваемой последовательности (1), можно получить рекуррентное выражение

$$\omega_k^{(n)} = p(y_k / x_k^{(n)}) \omega_{k-1}^{(n)},$$

где $p(y_k / x_k^{(n)})$ вычисляется с точностью до нормирующей константы c согласно выражению

$$p(y_k / x_k^{(n)}) = c \exp \left\{ -0.5 \left((y_k - h_k(x_k^{(n)}))^T R^{-1} (y_k - h_k(x_k^{(n)})) \right) \right\}.$$

Подставляя аппроксимацию (7) в выражения (3) и (4) и используя свойства дельта-функции, не сложно показать, что для нахождения оптимальной оценки и соответствующей ей матрицы ковариаций могут быть применены приближенные равенства

$$\hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k) \approx \hat{x}_k(Y_k) = \sum_{n=1}^N \tilde{\omega}_k^{(n)} x_k^{(n)}, \quad (8)$$

$$P_k^{\text{opt}}(Y_k) \approx P_k(Y_k) = \sum_{n=1}^N \tilde{\omega}_k^{(n)} x_k^{(n)} (x_k^{(n)})^T - \hat{x}_k(Y_k) (\hat{x}_k(Y_k))^T.$$

Алгоритм, основанный на приведенных выше выражениях, в котором реализации $x_k^{(n)}$ имеют вид $x_k^{(n)} \sim p(x_k / x_{k-1}^{(n)}, Y_{k-1})$, является по своей сути простейшим фильтром частиц. Псевдокод для такого алгоритма можно найти, например, в работе [25].

При этом следует отметить, что при формировании реализаций $x_k^{(n)}$ в формуле (7) можно использовать другую, отличную от $p(x_k / Y_{k-1})$, функцию $\pi(x_k / Y_k)$, которая получила название существенной функции. Как отмечается в работе [26], выбор вида существенной функции весьма важен при построении ФЧ, однако этот вопрос выходит за рамки настоящей работы. Особенности применения различных существенных функций обсуждаются в ряде работ (см., например, [27]).



2.2. Проблема вырождения

Основное достоинство ФЧ, основанных на ММК, заключается в том, что при $N \rightarrow \infty$ погрешность вычисления оценки (3) и матрицы ковариаций (4) стремится к нулю, что создает предпосылки для достижения ФЧ любой точности, вплоть до потенциальной, соответствующей оптимальному в среднеквадратическом смысле алгоритму. Однако при всех своих преимуществах ФЧ обладают также и рядом недостатков. Основной из них – так называемая проблема вырождения алгоритма. Поясним далее ее основную суть.

Ясно, что при формировании на каждом k -м шаге алгоритма выборки $x_k^{(n)}$ часть ее реализаций неизбежно будет попадать в области с близкими к нулю значениями апостериорной ФПРВ. Веса $\omega_k^{(n)}$, соответствующие таким реализациям, также будут близки к нулю. Как показано в работе [18], при увеличении числа измерений число реализаций $x_k^{(n)}$, веса которых существенно отличны от нуля, неизбежно будет сокращаться, пока не останется лишь одна, нормированный вес которой будет близок к единице. Понятно, что вычисленная таким образом оценка (8) ничего общего с оптимальной оценкой иметь не будет.

Проблема вырождения алгоритма может быть преодолена путем увеличения числа моделируемых в ФЧ реализаций. Однако в таком случае существенно возрастает вычислительная сложность алгоритма, что затрудняет его реализацию не только в режиме реального времени, но зачастую и в режиме камеральной обработки, не накладывающем жестких ограничений на объем вычислений.

Другой путь преодоления проблемы вырождения – использование при построении ФЧ процедур существенной перевыборки, о которых далее и пойдет речь.

3. ПРОЦЕДУРЫ СУЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕВЫБОРКИ

3.1. Основная суть процедур существенной перевыборки

Основная суть существенной перевыборки заключается в перераспределении частиц $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, т. е. в «размещении» их в области, где апостериорная ФПРВ существенно отлична от нуля, что определяется соответствующими значениями весов $\tilde{\omega}_k^{(n)}$. Это достигается путем моделирования новой выборки (путем перевыборки) ча-

стиц $\tilde{x}_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, в соответствии с дискретным законом распределения, заданным в виде набора из N частиц $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, и соответствующих им вероятностей (весов) $\Pr(\tilde{x}_k^{(m)} = x_k^{(n)}) = \tilde{\omega}_k^{(n)}$. Важно подчеркнуть, что перевыборка $\tilde{x}_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, формируется из исходного набора $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, что позволяет сохранить рекуррентный характер алгоритма.

Отметим, что в общем случае объем исходной выборки N и объем получаемой выборки M могут быть разными, однако на практике в большинстве случаев принимают $M = N$. Поскольку вид новой выборки $\tilde{x}_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, соответствует виду аппроксимации (7), то в результате для нее можем записать новую аппроксимацию с равными весами в виде

$$p(x_k / Y_k) \approx \sum_{m=1}^M \tilde{q}_k^{(m)} \delta(x_k - \tilde{x}_k^{(m)}), \quad \tilde{q}_k^{(m)} = 1/M. \quad (9)$$

Отметим, что в начальный момент времени ($k = 0$), веса, соответствующие реализациям $x_0^{(n)}$, также будут одинаковы, т. е. по сути ФПРВ $p(x_0)$ представляется в виде аппроксимации (9). Таким образом, процедуру существенной перевыборки можно трактовать как своего рода перезапуск ФЧ.

К настоящему времени предложено множество разнообразных способов организации процедур повторной перевыборки [20]. Наиболее широкое применение при построении ФЧ получили мультиномиальная [21], стратифицированная [22], остаточная [24], систематическая [23] и остаточная систематическая [19] перевыборки. Как показал детальный анализ ключевых работ, в которых эти схемы были предложены, отличаются они между собой лишь способом формирования реализаций $\tilde{x}_k^{(m)}$. Далее приведем описание перечисленных выше процедур перевыборки, получивших наибольшее распространение при решении задач обработки навигационной и траекторной информации.

3.2. Мультиномиальная, стратифицированная и систематическая процедуры перевыборки

Мультиномиальная повторная перевыборка (*multinomial resampling*) – один из первых предложенных способов проведения повторной перевыборки. Иногда такую процедуру также называют

простой случайной перевыборкой (*simple random resampling*). Основная ее идея заключается в моделировании набора из M реализаций $u_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, случайной величины u_k , равномерно распределенной на интервале $U = (0, 1]$. Далее для каждой реализации $u_k^{(m)}$ перебираются реализации $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, до тех пор, пока не находится такая, для которой соответствующий ей нормализованный вес $\tilde{\omega}_k^{(n)}$ удовлетворял бы выражению

$$S_k^{(n-1)} < u_k^{(m)} \leq S_k^{(n)}, \text{ где } S_k^{(n)} = \sum_{n=1}^n \tilde{\omega}_k^{(n)}. \quad (10)$$

Стратифицированная перевыборка (*stratified resampling*) и систематическая перевыборка (*systematic resampling*) – еще два распространенных варианта организации процедуры повторной существенной перевыборки. Для моделирования реализаций $\tilde{x}_k^{(m)}$ в них, как и в описанной ранее мультиномиальной перевыборке, используется выражение (10). Основное же их отличие друг от друга заключается в способе формирования реализаций $u_k^{(m)}$.

В стратифицированной перевыборке интервал $U = (0, 1]$ делится на M равных полуинтервалов $U^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, называемых стратами:

$$U = U^{(1)} \cup U^{(2)} \cup \dots \cup U^{(M)} = \\ = (0, 1/M] \cup (1/M, 2/M] \cup \dots \cup (1 - 1/M, 1].$$

Каждая реализация $u_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, формируется независимо как равномерно распределенная на соответствующей страте величина.

В систематической перевыборке $u_k^{(1)}$ вычисляется аналогичным стратифицированной перевыборке образом, т. е. как равномерно распределенная на интервале $(0, 1/M]$ случайная величина, а все остальные реализации $u_k^{(m)}$, $m = \overline{2, M}$, рассчитываются детерминированным образом как

$$u_k^{(m)} = u_k^{(1)} + \frac{m-1}{M}, \quad m = \overline{2, M}.$$

Заметим, что в систематической перевыборке количество обращений к датчику случайных чисел существенно меньше, чем в стратифицированной и мультиномиальной, следовательно, можно сделать предположение, что она экономичнее с точки зрения объема вычислений.

3.3. Остаточная и остаточная систематическая процедуры перевыборки

Остаточная перевыборка (*residual resampling*) [24] – еще один вариант перевыборки, который принято относить к традиционным. Она состоит из двух этапов.

На первом этапе такой процедуры каждая реализация $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, воспроизводится (выбирается в качестве реализации $\tilde{x}_k^{(m)}$) $M_{1,k}^{(n)}$ раз, где

$$M_{1,k}^{(n)} = \left\lfloor M \tilde{\omega}_k^{(n)} \right\rfloor, \quad (11)$$

а символ $\left\lfloor \cdot \right\rfloor$ означает округление до ближайшего целого числа в меньшую сторону.

Из анализа выражения (11) можно заметить, что частицы, веса которых $\tilde{\omega}_k^{(n)} < 1/M$, воспроизводиться не будут, так как величина $M_{1,k}^{(n)}$, соответствующая им, будет равна нулю. Общее количество частиц, полученное на первом этапе, будет

$$M_{1,k} = \sum_{n=1}^N M_{1,k}^{(n)}.$$

Второй этап процедуры остаточной перевыборки основан на использовании так называемых остаточных весов $\{\tilde{\omega}_k^{(n)}\}$, для которых справедливо выражение

$$\{M \tilde{\omega}_k^{(n)}\} = M \tilde{\omega}_k^{(n)} - \left\lfloor M \tilde{\omega}_k^{(n)} \right\rfloor. \quad (12)$$

Заменив в формуле (12) $\left\lfloor M \tilde{\omega}_k^{(n)} \right\rfloor$ на $M_{1,k}^{(n)}$ и разделив левую и правую часть на M , получим:

$$\{\tilde{\omega}_k^{(n)}\} = \tilde{\omega}_k^{(n)} - \frac{M_{1,k}^{(n)}}{M}. \quad (13)$$

На втором этапе процедуры остаточной перевыборки для получения оставшихся $M_{2,k} = M - M_{1,k}$ реализаций $\tilde{x}_k^{(m)}$ используется любая из описанных ранее случайных повторных перевыборок (мультиномиальная или стратифицированная), для чего остаточные веса (13) предварительно нормируются с использованием выражения

$$\{\tilde{\omega}_k^{(n)}\}^* = \{\tilde{\omega}_k^{(n)}\} \frac{M}{M - M_{1,k}}.$$

Интуитивно понятно, что двухэтапный характер остаточной перевыборки влечет за собой дополнительные вычислительные затраты. Для пре-



одоления такого недостатка была предложена остаточная систематическая перевыборка.

Остаточная систематическая перевыборка (*residual systematic resampling*) – модификация остаточной перевыборки, на втором этапе которой используется не случайная, а систематическая перевыборка. В таком случае можно объединить два этапа перевыборки в один, в котором каждая реализация $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, воспроизводится $M_k^{(n)} = M_{1,k}^{(n)}$ раз в соответствии с выражением

$$M_k^{(n)} = \left\lfloor M \left(\tilde{\omega}_k^{(n)} - \Delta u^{(n)} \right) \right\rfloor + 1,$$

$$\Delta u^{(n)} = \Delta u^{(n-1)} + \frac{M_{1,k}^{(n-1)}}{M} - \tilde{\omega}_k^{(n-1)},$$

где $\Delta u_k^{(1)}$ вычисляется аналогичным для $u_k^{(1)}$ в систематической перевыборке образом, т. е. как равномерно распределенная на полуинтервале $(0, 1/M]$ случайная величина.

Как отмечено в работе [19], результаты формирования реализаций $\tilde{x}_k^{(m)}$ в систематической и остаточной систематической перевыборках будут полностью совпадать, а отличия этих процедур могут проявиться лишь в уровне их вычислительной загрузки: так как в остаточной систематической перевыборке не требуется проверять выполнение неравенства (10), а количество рассчитываемых значений $\Delta u^{(n)}$ существенно меньше, чем $u^{(n)}$, ожидается, что и уровень вычислительной сложности такой процедуры будет ниже.

3.4. Критерий проведения перевыборки

Отметим, что проведение перевыборки на каждом k -м шаге, во-первых, увеличивает и без того значительную вычислительную сложность ФЧ, а во-вторых, может привести к ситуации, когда выборка будет состоять из одного единственного элемента с весом $1/N$, который в выборке повторяется N раз. Эта проблема известна как «обеднение» выборки (*sample impoverishment*) [20], на практике для определения моментов времени проведения перевыборки рассчитывают специальные критерии. Наибольшее распространение получил так называемый критерий эффективного размера выборки (*effective sample size*)

$$N_k^E \approx \left(\sum_{n=1}^N (\tilde{\omega}_k^{(n)})^2 \right)^{-1}.$$

Процедуру перевыборки запускают, когда критерий N_k^E принимает значение ниже заданного порога N_k^{Th} . Как отмечается в работе [20], критерий может принимать значения $1 \leq N_k^E \leq N$. При выборе $N_k^{Th} = N$ перевыборка будет выполняться на каждом шаге. С другой стороны, в случае выбора $N_k^{Th} < 1$ процедура перевыборки не запустится никогда. Величина N_k^E характеризует количество элементов выборки, веса для которых существенны (весами которых нельзя пренебречь при построении оценок).

4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕДУР ПЕРЕВЫБОРКИ

4.1. Аналитическое сопоставление

Далее проведем сравнение описанных выше процедур существенной перевыборки. Сделаем это сначала аналитически, анализируя соответствующие им псевдокоды, которые можно найти, например, в работе [20]. Основные выявленные отличия сопоставляемых процедур приведены в таблице.

Сопоставляя отличия приведенных в таблице схем перевыборки, можно заметить, что в систематической и остаточной систематической процедурах количество обращений к датчику случайных чисел наименьшее. Помимо этого, такие схемы наиболее простые с точки зрения количества вычислений.

4.2. Методический пример

Далее проведем сопоставление ФЧ, построенных с использованием различных процедур перевыборки, на примере решения задачи оценивания процесса, представляющего собой сумму полинома первой степени и второго интеграла от централизованного белого шума, по нелинейным измерениям.

Конкретизируем оцениваемую последовательность (1) в виде

$$x_k = \Phi x_{k-1} + \Gamma w_k, \quad (14)$$

где для матриц Φ , Γ и матрицы ковариаций Q централизованного гауссовского порождающего белого шума w_k можем записать:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = q\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Q = q^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отличия процедур существенной перевыборки

Критерии сопоставления	Процедура существенной перевыборки				
	Мультиноми- альная	Стратифициро- ванная	Систематическая	Остаточная	Остаточная систематическая
Количество этапов процедуры перевыборки	1	1	1	2	1
Количество обращений к датчику случайных чисел	M	M	1	$M_{2,k}$	1
Асимптотическая вычислительная сложность	$O(MN)$	$O(M)$	$O(M)$	$O(N) + O(M_{2,k})$	$O(N)$
Минимальное количество воспроизведений любой из частиц	0	если $\tilde{\omega}_k^{(n)} > 1/M$, то $\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor - 1$, иначе 0	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + 1$
Максимальное количество воспроизведений любой из частиц	N	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + 2$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + 1$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + M_{2,k}$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + 1$

Здесь q^2 – интенсивность исходного белого шума; Δt – интервал дискретизации. Такая модель, в частности, нередко используется для описания ошибок измерителей, например погрешностей навигационной системы счисления пути по каждой координате [28], а также для приближенного описания аномалий уклонений силы тяжести (УСТ) в задаче определения УСТ [29].

Предположим, что нелинейные дискретные измерения имеют вид

$$y_k = h(x_k) + v_k = a_1 + a_2 x_{1,k} + a_3 x_{1,k}^2 + a_4 x_{1,k}^3 + v_k,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – известные величины.

Моделирование проведем, используя параметры $\bar{x}_0 = [-5 \ 0.5]^T$, $P_0 = \text{diag}[\sigma_{0,1}^2 \ \sigma_{0,2}^2]$, $\sigma_{0,1} = 2,5$, $\sigma_{0,2} = 0,05$, $q = 0,05$, $\Delta t = 1$, $k = \overline{1, 30}$, $r = 0,1$, $a_1 = 0,0875$, $a_2 = -0,1825$, $a_3 = 0,01$, $a_4 = 0,01$.

Реализуем следующие алгоритмы:

- ФЧ без процедур перевыборки при $N = 10000$ ($\mu = 1$, далее – алгоритм 1);
- ФЧ с различными процедурами перевыборки при $N = 1000$, $N_k^{Th} = N^{Th} = 0,2 \cdot N$;
 - ФЧ ($\mu = 2$, далее – алгоритм 2) с процедурой мультиномиальной перевыборки;
 - ФЧ ($\mu = 3$, далее – алгоритм 3) с процедурой стратифицированной перевыборки;
 - ФЧ ($\mu = 4$, далее – алгоритм 4) с процедурой систематической перевыборки;
 - ФЧ ($\mu = 5$, далее – алгоритм 5) с процедурой остаточной перевыборки;

– ФЧ ($\mu = 6$, далее – алгоритм 6) с процедурой остаточной систематической перевыборки.

Сопоставление алгоритмов будем проводить с применением метода статистических испытаний по методике, описанной в работе [30]. Для каждого реализованного μ -го алгоритма будем вычислять действительные G_k^μ и расчетные $\tilde{G}_k^\mu$ матрицы ковариаций

$$G_k^\mu \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (x_k^{(j)} - \hat{x}_k^{(\mu(j))} (Y_k^{(j)})) (x_k^{(j)} - \hat{x}_k^{(\mu(j))} (Y_k^{(j)}))^T, \quad (15)$$

$$\tilde{G}_k^\mu \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L P_k^\mu (Y_k^{(j)}), \quad (16)$$

где $x_k^{(j)}$, $Y_k^{(j)}$, $j = \overline{1, L}$ – реализации случайных последовательностей, полученные путем моделирования согласно выражениям (1) и (2); L – общее число реализаций, $\hat{x}_k^\mu (Y_k^{(j)})$, $P_k^\mu (Y_k^{(j)})$ – оценки и соответствующие им расчетные матрицы ковариаций для алгоритма с индексом μ .

Для оценки вычислительных затрат сопоставляемых алгоритмов будем рассчитывать коэффициент

$$\Delta T^\mu = \frac{\tau^\mu - \tau^*}{\tau^*}, \quad \tau^\mu = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L t_j^\mu, \quad \tau^* = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L t_j^*,$$

где t_j^μ – время, затраченное вычислителем на решение задачи оценивания с использованием анализируемого алгоритма, а t_j^* – время, соответствующее алгоритму, относительно которого проводится сопоставление вычислительной сложности.

На рис. 1 приведены результаты вычисления на основе выражений (15), (16) действительных ($\sqrt{[G_k^\mu]_{1,1}}$, сплошные линии) и расчетных ($\sqrt{[\tilde{G}_k^\mu]_{1,1}}$, пунктирные линии) среднеквадратических погрешностей (СКП) оценивания первой компоненты вектора x_k для каждого из реализованных алгоритмов при $L=1\,000$. Обозначение $[A]_{i,i}$ здесь и далее используется для i -го диагонального элемента матрицы A . Красный цвет соответствует алгоритму 1, черный – алгоритму 2, синий – алгоритму 3, пурпурный – алгоритму 4, зеленый – алгоритму 5, оранжевый – алгоритму 6.

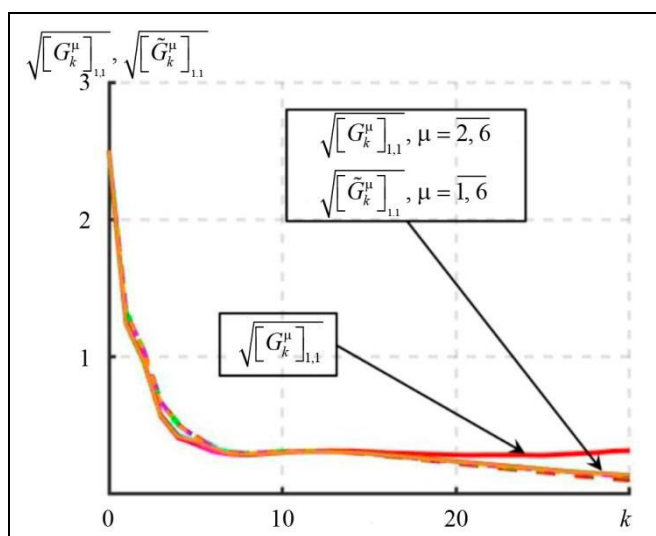


Рис. 1. Результаты вычисления действительных и расчетных СКП

Результаты моделирования показывают, что все ФЧ, построенные с использованием различных процедур перевыборки при $N^*=1\,000$, обеспечивают необходимую точность и являются состоятельными. При уменьшении количества частиц все алгоритмы перестают удовлетворять свойству состоятельности, а их точность снижается. Увеличение же количества частиц по сравнению с N^* в ФЧ, построенных с использованием процедур перевыборки, не оказывает влияния на результаты моделирования, что подтверждает факт достижения ими потенциальной точности.

Построенный без процедур перевыборки даже при $N=10\,000$ ФЧ уступает в точности ФЧ с перевыборкой и не обеспечивает выполнение свойств состоятельности.

Анализ вычислительных затрат показал, что среди ФЧ, построенных с использованием процедур существенной перевыборки, наиболее простыми являются Алг. 4 и Алг. 6, вычислительная нагрузка которых сопоставима. Вычислительные нагрузки Алг. 2, Алг. 3 и Алг. 5 также близки между собой и на $\approx 5\%$ выше, чем вычислительная нагрузка ФЧ, построенных на основе систематических перевыборок.

Отметим, что при увеличении размерности решаемой задачи и времени моделирования разница в вычислительной нагрузке также может измениться. В связи с этим далее проведем сопоставление, аналогичное описанному выше, на примере решения задачи траекторного слежения в ее простейшей постановке, описанной, например, в работах [5,31].

4.3. Применение ФЧ при решении задачи слежения за подвижным объектом

Рассмотрим правостороннюю трехмерную локальную декартову систему координат (рис. 2) с началом в точке O , оси OX и OY которой перпендикулярны и лежат в горизонтальной плоскости, а ось OZ ортогональна им и направлена вверх. Считается, что в начале системы координат расположен некий радар, способный в дискретные моменты времени k измерять дальность d_k до подвижных объектов, их угол места ψ_k и азимут θ_k .

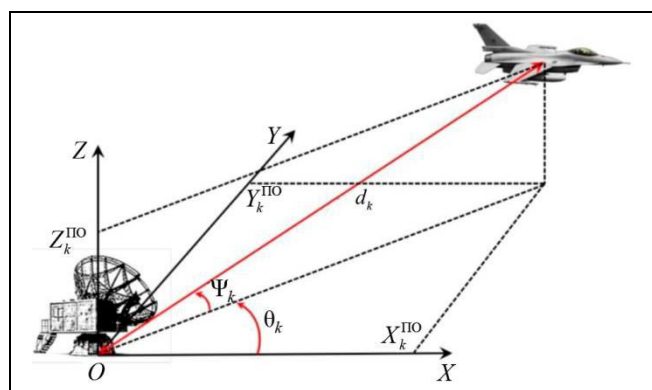


Рис. 2. Расположение радара и подвижного объекта в системе координат $OXYZ$

В начальный момент времени ($k=0$) радар обнаруживает некоторый объект с неизвестными координатами $X_0^{PO}, Y_0^{PO}, Z_0^{PO}$, динамика которого может быть описана с использованием уравнения (14) [31], где

$$x_k = \begin{bmatrix} X_k^{PO} & Y_k^{PO} & Z_k^{PO} & V_k^X & V_k^Y & V_k^Z \end{bmatrix}^T, \\ \Phi = \begin{bmatrix} I_3 & \Delta t I_3 \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} I_3 \\ \Delta t I_3 \end{bmatrix}, \quad (17) \\ Q = I_3 (\sigma^a)^2,$$

V_k^X, V_k^Y, V_k^Z – проекции неизвестного вектора скорости объекта на оси OX, OY и OZ соответственно, I_3 и 0_3 – единичная и состоящая из нулей матрицы размерности три, а σ^a – известная величина.

Учитывая расположение радара в начале системы координат, для измерений y_k запишем:

$$y_k = \begin{bmatrix} d_k \\ \theta_k \\ \psi_k \end{bmatrix} = h_k(x_k) + v_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(X_k^{\text{ПО}})^2 + (Y_k^{\text{ПО}})^2 + (Z_k^{\text{ПО}})^2} \\ \arctan(Y_k^{\text{ПО}} / X_k^{\text{ПО}}) \\ \arctan\left(\frac{Z_k^{\text{ПО}}}{\sqrt{(X_k^{\text{ПО}})^2 + (Y_k^{\text{ПО}})^2}}\right) \end{bmatrix} + v_k. \quad (18)$$

Требуется по измерениям (18) оценить координаты $X_0^{\text{ПО}}$, $Y_0^{\text{ПО}}$, $Z_0^{\text{ПО}}$ объекта, являющиеся компонентами вектора x_k , описываемого выражениями (14), (17).

Моделирование проведем, используя следующие параметры: истинные начальные координаты объекта: $X_k^{\text{И}} = Y_k^{\text{И}} = 50$ км, $Z_k^{\text{И}} = 5$ км; проекции истинной скорости на оси OX , OY и OZ в начальный момент времени: $V_0^{X,\text{И}} = V_0^{Y,\text{И}} = 250$ м/с, $V_0^{Z,\text{И}} = 0$ м/с; считается, что проекции вектора скорости объекта V_0^X , V_0^Y , V_0^Z являются независимыми равномерно распределенными случайными величинами $p(V_0^{XO}) \sim U[150; 350]$ м/с, $p(V_0^{YO}) \sim U[150; 350]$ м/с, $p(V_0^{ZO}) \sim U[0; 40]$ м/с, где $p(V) \sim U[a; b]$ означает равномерное распределение на интервале $[a; b]$; $\sigma^a = 15$ м/с²; $\Delta t = 0,1$ с; время моделирования $T = 30$ с, т. е. $k = \overline{1, 300}$; $R = \text{diag}[(\sigma^d)^2 (\sigma^\theta)^2 (\sigma^\psi)^2]$, $\sigma^d = 25$ м, $\sigma^\theta = \sigma^\psi = 0,3^\circ$.

При построении ФЧ для формирования реализаций $X_0^{\text{ПО},(n)}$, $Y_0^{\text{ПО},(n)}$, $Z_0^{\text{ПО},(n)}$ привлечем измерения y_0 дальности, угла места и азимута, снятые в начальный момент времени (при обнаружении объекта). Для этого сначала сформируем набор реализаций $\chi^{(n)} = [d_0^{(n)} \theta_0^{(n)} \psi_0^{(n)}]^T$

$$\chi^{(n)} \sim y_0 + v^{\chi,(n)},$$

где $v^{\chi,(n)} \sim N(v^\chi; 0, 2R)$ – погрешности измерений (18), полученные путем моделирования с увеличенными в два раза среднеквадратическими отклонениями (СКО) для учета того факта, что y_0 содержит в своем составе погрешность $v \sim N(v; 0, R)$.

Далее сформируем набор реализаций, соответствующих местоположению объекта в рассматриваемой декартовой системе координат

$$X_0^{\text{ПО},(n)} = d_0^{(n)} \cos(\psi_0^{(n)}) \cos(\theta_0^{(n)}),$$

$$Y_0^{\text{ПО},(n)} = d_0^{(n)} \cos(\psi_0^{(n)}) \sin(\theta_0^{(n)}),$$

$$Z_0^{\text{ПО},(n)} = d_0^{(n)} \sin(\psi_0^{(n)}).$$

Понятно, что полученные реализации $X_0^{\text{ПО},(n)}$, $Y_0^{\text{ПО},(n)}$, $Z_0^{\text{ПО},(n)}$ в полной мере соответствовать реальной ФПРВ для координат не будут, однако в совокупности они покрывают зону их неопределенности.

Моделирование проведем в соответствии с методикой, изложенной в работе [30], с осреднением по $L = 1\,000$ реализациям. При этом, используя полученные в соответствии с формулами (15), (16) матрицы ковариаций, рассчитаем действительные $\sqrt{G_k^{P,\mu}}$ и расчетные $\sqrt{\tilde{G}_k^{P,\mu}}$ радиальные СКП оценивания координат

$$\sqrt{G_k^{P,\mu}} = \sqrt{[G_k^\mu]_{1,1} + [G_k^\mu]_{2,2} + [G_k^\mu]_{3,3}}, \quad (19)$$

$$\sqrt{\tilde{G}_k^{P,\mu}} = \sqrt{[\tilde{G}_k^\mu]_{1,1} + [\tilde{G}_k^\mu]_{2,2} + [\tilde{G}_k^\mu]_{3,3}}. \quad (20)$$

Реализуем те же алгоритмы, которые были построены при решении методического примера ранее, с одинаковым количеством частиц $N = 10\,000$ и $N_k^{\text{Th}} = N^{\text{Th}} = 0,6N$. На рис. 3 приведены результаты вычисления согласно (19), (20) радиальных действительных (сплошные линии) и расчетных (пунктирные линии) СКП для каждого из реализованных алгоритмов. Соответствие цветов и алгоритмов на рисунке то же, что было принято в п. 4.2.

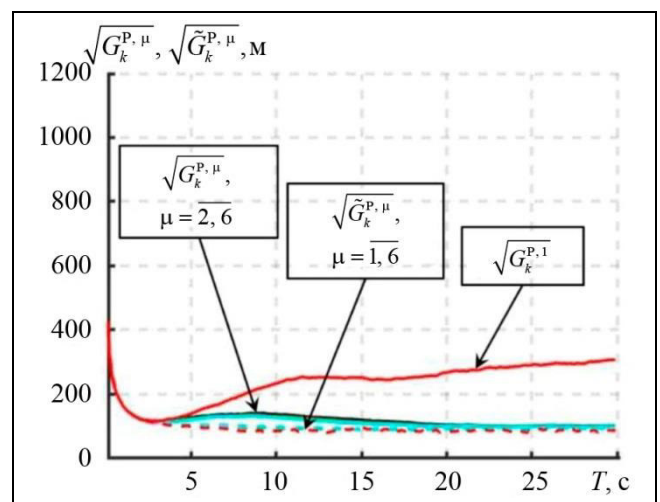


Рис. 3. Результаты вычисления действительных и расчетных радиальных СКП



Результаты моделирования аналогичны полученным для методического примера: ФЧ, построенные с использованием различных процедур переывборки, при одинаковых настройках (числе частиц и величине N^{th}) обеспечивают близкие между собой уровни точности и состоятельности. При этом для достижения потенциальной точности и выполнения свойства состоятельности ФЧ, построенному без процедур переывборки, требуется значительно больше частиц, чем ФЧ, их использующим.

Анализ вычислительных затрат подтвердил результаты, полученные в п. 4.2. Наиболее простыми среди ФЧ, построенных с использованием процедур переывборки, оказались Алг. 4 и Алг. 6, вычислительная загрузка которых сопоставима. Однако, в отличие от результата, полученного ранее, при решении задачи траекторного слежения их выигрыш в смысле вычислительной загрузки по отношению к Алг. 2, Алг. 3 и Алг. 5 оказался незначительным и составил $\approx 0,5\%$. Это объясняется тем фактом, что при увеличении размерности оцениваемого вектора вычислительная загрузка ФЧ (без переывборки) существенно возрастает. Затраты же на процедуры переывборки, хотя тоже увеличиваются, на этом фоне становятся незначительными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено сопоставление различных схем существенной переывборки, используемых при построении фильтров частиц. Полученные результаты показали, что все рассмотренные процедуры, реализующие процесс переывборки, приводят к заметному сокращению числа частиц по сравнению с обычным ММК. Каких-либо существенных преимуществ с точки зрения достигаемой ФЧ точности или выполнения ими свойств состоятельности из-за выбора при их построении той или иной схемы переывборки, описанной в настоящей работе, получить не удастся. С точки зрения объема вычислений систематическая и остаточная систематическая переывборки оказываются несколько проще, чем остальные рассмотренные схемы, однако в большей степени эти преимущества проявляются при решении задач с небольшой размерностью вектора состояния.

Результаты проведенного исследования могут быть полезны разработчикам при построении алгоритмов фильтрации для решения сложных нелинейных задач обработки измерительной информации, возникающих в современных системах управления, навигации и траекторного слежения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р.Л. Условные процессы Маркова // Теория вероятности и ее применение. – 1960. – Т. 5, № 2. – С. 172–195. [Stratonovich, R.L. Conditional Markov Processes // Theory of Probability and Its Applications. – 1960. – Vol. 5, no 2. – P. 156–178.]
2. Jazwinski, A. H. Stochastic Process and Filtering Theory. – New York: Academic Press, 1970. – 376 p.
3. Applied Optimal Estimation / Ed. by A. Gelb. – Cambridge: MIT. Press, 1974. – 374 p.
4. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. – СПб.: ГИЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2003. – 369 с. [Stepanov, O.A. Primenenie teorii nelineinoy fil'tratsii v zadachakh obrabotki navigatsionnoy informatsii. – Saint-Petersburg: GNTS RF TSNII «Ehlektrypribor», 2003. – 369 p. (In Russian)]
5. Bar-Shalom, Y., Li, X., Kirubarajan, T. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. – New York: Wiley-Interscience, 2001. – 584 p.
6. Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman H_∞ and Nonlinear Approaches. – NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2006. – 526 p.
7. Särkkä, S. Bayesian Filtering and Smoothing. – Cambridge: Cambridge University Press, 2013. – 232 p.
8. Isaev, A., Stepanov, O., Litvinenko, Y. Comparative Analysis of Recursive and Nonrecursive Linearization-Based Estimation Algorithms // Int. J. Dynam. Control. – 2025. – Vol. 13. – Art. no. 95.
9. Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Исаев А.М. Сравнительный анализ квазилинейных алгоритмов калмановского типа в задаче оценивания марковской последовательности при нелинейностях в формирующем фильтре и уравнениях измерений // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2024. – Т. 25, № 11. – С. 585–595. [Stepanov, O.A., Litvinenko, Yu.A., Isaev, A.M. Comparative analysis of quasi-linear Kalman-type algorithms in estimating a Markov sequence with nonlinearities in the system and measurement equations // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. – 2024. – Vol. 25, no. 11. – P. 585–595. (In Russian)]
10. Doucet, A., de Freitas, N., Gordon, N. Sequential Monte Carlo Methods in Practice. – New-York: Springer-Verlag, 2001. – 582 p.
11. Коновалов А.А. Основы траекторной обработки радиолокационной информации. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. – Ч. 2. – 180 с. [Konovalov, A.A. Osnovy traektornoj obrabotki radiolokatsionnoi informatsii. – SPb.: Izd-vo SPBGENTU «LEHTI», 2014. – Ch. 2. – P. 180. (In Russian)]
12. Matousek, J., Dunik, J., Straka, O. Density Difference Grid Design in a Point-Mass Filter // Energies. – 2020. – Vol. 13, no. 16. – Art. no. 4080.
13. Хмарский П.А. Обработка результатов измерений координат и параметров движения в системах мониторинга воздушной и наземной обстановки. – Минск: Беларуская навука, 2025. – 261 с. [Khmarskii, P.A. Obrabotka rezul'tatov izmerenii koordinat i parametrov dvizheniya v sistemakh monitoringa vozduшной i nazemnoi obstanovki. – Minsk: Belaruskaya navuka, 2025. – P. 261. (In Russian)]
14. Chopin, N., Papaspiliopoulos, O. An Introduction to Sequential Monte Carlo. – Cham: Springer, 2020. – 378 p.
15. Wills, A.G., Schön, T.B. Sequential Monte Carlo: A Unified Review // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. – 2023. – Vol. 6, no. 1. – P. 159–182.

16. Cheng Y., Ren W., Xiu C., Li Y. Improved Particle Filter Algorithm for Multi-Target Detection and Tracking // *Sensors*. – 2024. – Vol. 24, no. 14. – Art. no. 4708.
17. Берковский Н.А., Степанов О.А. Исследование погрешности вычисления оптимальной байесовской оценки методом Монте-Карло в нелинейных задачах // *Изв. РАН. ТИСУ*. – 2013. – № 3. – С. 16–27. [Berkovskii, N.A., Stepanov, O.A. Error of Calculating the Optimal Bayesian Estimate Using the Monte Carlo Method in Nonlinear Problems // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* – 2013. – Vol. 52. – P. 342–353.]
18. Kong, A., Liu, J.S., Wong, W.H. Sequential Imputations and Bayesian Missing Data Problems // *J. American Statistical Association*. – 1994. – Vol. 89, no. 425. – P. 278–288.
19. Bolić, M., Djurić, S., Hong, P.M. Resampling Algorithms for Particle Filters: A Computational Complexity Perspective // *EURASIP J. on Applied Signal Processing*. – 2004. – no. 15. – P. 2267–2277.
20. Li, T., Bolic, M., Djuric, P.M. Resampling Methods for Particle Filtering: Classification, Implementation, and Strategies // *IEEE Signal Processing Magazine*. – 2015. – Vol. 32, no. 3. – P. 70–86.
21. Gordon, N., Salmond, D., Smith, A. Novel Approach to Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian State Estimation // *IEE Proc., F Radar Signal Process.* – 1993. – Vol. 140, no. 2. – P. 107–113.
22. Kitagawa, G. Monte Carlo Filter and Smoother and Non-Gaussian Nonlinear State Space Models // *J. Comput. Graph. Stat.* – 1996. – Vol. 5, no. 1. – P. 1–25.
23. Carpenter, J., Clifford, P., Fearnhead, P. An Improved Particle Filter for Nonlinear Problems // *IEE Proc., Radar Sonar Navigat.* – 1999. – Vol. 146, no. 1. – P. 2–7.
24. Liu, J.S., Chen, R. Sequential Monte-Carlo Methods for Dynamic Systems // *J. Amer. Statist. Assoc.* – 1998. – Vol. 93, no. 443. – P. 1032–1044.
25. Васильев В.А., Исаев А.М., Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы Монте-Карло в задачах обработки измерительной информации с использованием процедур перевыборки // *Изв. РАН. ТИСУ*. – 2026. – № 1 – С. 47–72. [Vasiliev, V.A., Isaev, A.M., Stepanov, O.A., Toropov, A.B. Monte Carlo Methods in Measurement Data Processing Using Resampling Procedures // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2025. – Vol. 64, no. 6. – P. 900–926]
26. Степанов О.А., Торопов А.Б. Применение последовательных методов Монте-Карло с использованием процедур аналитического интегрирования при обработке навигационной информации // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – Москва, 2014. – С. 3324–3337. [Stepanov, O.A., Toropov, A.B. Primenenie posledovatel'nykh metodov Monte-Karlo s ispol'zovaniem protsedur analiticheskogo integrirovaniya pri obrabotke navigatsionnoi informatsii // XII Vserossiiskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014. – Moscow, 2014. – P. 3324–3337. (In Russian)]
27. Doucet, A. On Sequential Simulation-Based Methods for Bayesian Filtering: Technical Report. – Cambridge: Cambridge University, 1998. – 26 p.
28. Степанов О.А., Васильев В.А., Исаев А.М. Субоптимальный алгоритм решения задачи коррекции навигационной системы при изменчивом характере ее погрешностей по данным о геофизических полях // *Международный семинар «Навигация и управление движением» (NMC 2023)*. – Санкт-Петербург, 2023. – С. 90–95. [Stepanov, O.A., Vasil'ev, V.A., Isaev, A.M. Suboptimal'nyi algoritm resheniya zadachi korrektsii navigatsionnoi sistemy pri izmenchivom kharaktere ee pogreshnostei po dannym o geofizicheskikh polyakh // *Mezhdunarodnyi seminar «Navigatsiya i upravlenie dvizheniem» (NMC 2023)*. – Saint-Petersburg, 2023. – P. 90–95. (In Russian)]
29. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 2 Введение в теорию фильтрации. – СПб.: ГИЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2025. – 417 с. [Stepanov, O.A. Osnovy teorii otsenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigatsionnoi informatsii. Chast' 2 Vvedenie v teoriyu fil'tratsii. – Saint-Petersburg, GNTS RF ОАО «Kontsern «TSNII «EhlektropriboR», 2025. – P. 417. (In Russian)]
30. Степанов О.А., Исаев А.М. Методика сравнительного анализа рекуррентных алгоритмов нелинейных фильтрации в задачах обработки навигационной информации на основе предсказательного моделирования // *Гироскопия и навигация*. – 2023. – Т. 31. – № 3 (122). – С. 48–65. [Stepanov, O.A., Isaev, A.M. A Procedure of Comparative Analysis of Recursive Nonlinear Filtering Algorithms in Navigation Data Processing Based on Predictive Simulation // *Gyroscopy Navig.* – 2023. – Vol. 14. – P. 213–224]
31. Gustafsson, F., Gunnarsson, F., Bergman, N., et al. Particle Filters for Positioning, Navigation and Tracking // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 2002. – Vol. 50, no. 2. – P. 425–437.

Статья представлена к публикации членом редколлегии
Б. В. Павловым.

Поступила в редакцию 13.10.2025,
после доработки 02.02.2026.
Принята к публикации 08.04.2026.

Исаев Алексей Михайлович – мл. науч. сотрудник,
АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», г. Санкт-Петербург,
✉ itmo_student@mail.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2111-0308>

© 2026 г. Исаев А. М.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



COMPARATIVE ANALYSIS OF RESAMPLING PROCEDURES IN PARTICLE FILTER DESIGN

A. M. Isaev

Concern CSRI Elektropribor, St. Petersburg, Russia

✉ itmo_student@mail.ru

Abstract. Nonlinear filtering algorithms based on sequential Monte Carlo methods are considered. The scheme of an elementary particle filter is presented, and the main challenge of its implementation—the degeneracy of the algorithm—is explained. The essence of importance resampling procedures, intended to settle this challenge, is described. The resampling procedures widely used in navigation data processing and target tracking are reviewed. A criterion for determining the time point of resampling is given. The above resampling procedures are compared by analyzing the corresponding pseudocodes. As illustrative examples, two problems are considered: the estimation of a process representing the sum of a polynomial and the second integral of white noise, based on nonlinear measurements, and target tracking. For these problems, the resampling procedures are compared numerically by simulation using the method of statistical trials.

Keywords: Bayesian stochastic approach, nonlinear filtering, Monte Carlo methods, sequential importance resampling procedures, particle filter.