

ISSN 1819-3161

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

**2/2023**

CONTROL  SCIENCES

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,  
И. А. Каляев, академик РАН,  
В. А. Левин, академик РАН,  
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,  
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,  
Е. А. Федосов, академик РАН

## РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,  
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,  
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,  
В. Н. Бурков, д-р техн. наук,  
В. М. Вишнеvский, д-р техн. наук,  
А. О. Калашников, д-р техн. наук,  
В. В. Клочков, д-р экон. наук,  
С. А. Краснова, д-р техн. наук,  
Н. В. Кузнецов, д-р физ.-мат. наук,  
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,  
В. В. Кульба, д-р техн. наук,  
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,  
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,  
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,  
Н. Е. Максимова, канд. техн. наук  
(ответственный секретарь),  
А. С. Мандель, д-р техн. наук,  
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,  
А. И. Михальский, д-р биол. наук,  
Д. А. Новиков, академик РАН  
(гл. редактор),  
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,  
Ф. Ф. Пашченко, д-р техн. наук  
(зам. гл. редактора),  
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,  
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,  
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,  
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,  
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,  
П. Ю. Чеботарёв, д-р физ.-мат. наук,  
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

## РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,  
Волгоград – А. А. Воронин, д-р физ.-мат. наук,  
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,  
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,  
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,  
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,  
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольницкий,  
д-р техн. наук,  
Самара – М. И. Гераськин, д-р экон. наук,  
Саратов – В. А. Кушников, д-р техн. наук,  
Тамбов – М. Н. Краснянский, д-р техн. наук,  
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук,  
Челябинск – О. В. Логиновский, д-р техн. наук

## ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, Academician of RAS<sup>1</sup>,  
I. A. Kalyaev, Academician of RAS,  
V. A. Levin, Academician of RAS,  
N. A. Makhutov, Corr. Member of RAS,  
A. F. Rezchikov, Corr. Member of RAS,  
S. N. Vassilyev, Academician of RAS

## EDITORIAL BOARD

V. N. Afanas'ev, Dr. Sci. (Tech.),  
F. T. Aleskerov, Dr. Sci. (Tech.),  
N. N. Bakhtadze, Dr. Sci. (Tech.),  
V. N. Burkov, Dr. Sci. (Tech.),  
P. Yu. Chebotarev, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
A. O. Kalashnikov, Dr. Sci. (Tech.),  
V. V. Klochkov, Dr. Sci. (Econ.),  
M. V. Khlebnikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
S. A. Krasnova, Dr. Sci. (Tech.),  
V. V. Kulba, D. Sc. (Tech.),  
N. V. Kuznetsov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
O. P. Kuznetsov, Dr. Sci. (Tech.),  
A. A. Lazarev, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
V. G. Lebedev, Dr. Sci. (Tech.),  
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Phych.),  
A. S. Mandel, Dr. Sci. (Tech.),  
N. E. Maximova, Cand. Sci. (Tech),  
Executive Editor-in-Chief,  
R. V. Meshcheryakov, Dr. Sci. (Tech.),  
A. I. Michalski, Dr. Sci. (Biol.),  
D. A. Novikov, Academician of RAS,  
Editor-in-Chief,  
F. F. Pashchenko, Dr. Sci. (Tech.),  
Deputy Editor-in-Chief,  
B. V. Pavlov, Dr. Sci. (Tech.),  
L. B. Rapoport, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
S. V. Ratner, Dr. Sci. (Econ.),  
E. Ya. Rubinovich, Dr. Sci. (Tech.),  
A. D. Tsvirkun, Dr. Sci. (Tech.),  
V. M. Vishnevsky, Dr. Sci. (Tech.),  
I. B. Yadykin, Dr. Sci. (Tech)

## LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Chelyabinsk – O. V. Loginovskiy, Dr. Sci. (Tech.),  
Kursk – S. G. Emelyanov, Dr. Sci. (Tech.),  
Lipetsk – A. K. Pogodaev, Dr. Sci. (Tech.),  
Perm – V. Yu. Stolbov, Dr. Sci. (Tech.),  
Rostov-on-Don – G. A. Ougolnitsky,  
Dr. Sci. (Tech.),  
Samara – M. I. Geraskin, Dr. Sci. (Econ.),  
Saratov – V. A. Kushnikov, Dr. Sci. (Tech.),  
Tambov – M. N. Krasnyanskiy, Dr. Sci. (Tech.),  
Ufa – B. G. Ilyasov, Dr. Sci. (Tech.),  
Vladivostok – O. V. Abramov, Dr. Sci. (Tech.),  
Volgograd – A. A. Voronin, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
Voronezh – S. A. Barkalov, Dr. Sci. (Tech.)

<sup>1</sup>Russian Academy of Sciences.



**CONTROL SCIENCES**  
Научно-технический  
журнал

6 номеров в год  
ISSN 1819-3161 (Print)  
ISSN 2712-8687 (Online)  
Издается с 2003 года

**УЧРЕДИТЕЛЬ и ИЗДАТЕЛЬ**

Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор  
академик РАН  
Д.А. Новиков

Заместитель главного редактора  
Ф.Ф. Пащенко

Ответственный секретарь  
Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор  
Л.В. Петракова

Адрес редакции  
117997, ГСП-7, Москва,  
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410

Тел./факс (495) 198-17-20, доб. 1410

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: <http://pu.mtas.ru>  
<http://controlsciences.org>

Опубликовано: 28 апреля 2023 г.

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.  
выдано Министерством Российской  
Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых  
коммуникаций

Свидетельство о регистрации  
Эл № ФС 77-80482 от 17 февраля 2021 г.  
выдано Федеральной службой  
по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и  
массовых коммуникаций

Журнал входит в RSCI на платформе  
Web of Science и Перечень  
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс  
научного цитирования (РИНЦ).  
На сайте Научной электронной  
библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) доступны  
полные тексты статей.

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

## 2.2023

### СОДЕРЖАНИЕ

---

#### Обзоры

---

**Кулида Е.Л., Лебедев В.Г.** Методы решения задач планирования и регулирования потоков воздушного движения Ч. 2. Применение методов глубокого обучения с подкреплением . . . . . 3

---

#### Анализ и синтез систем управления

---

**Жиравок А.Н., Зуев А.В., Ким Ч.И.** Построение интервальных наблюдателей для дискретных линейных стационарных систем с неопределенностями . . . . . 19

**Завадский В.К., Иванов В.П., Каблова Е.Б. и др.** Терминальное управление подвижными объектами в классе кусочно-постоянных и кусочно-непрерывных функций . . . . . 28

---

#### Управление в социально-экономических системах

---

**Губанов Д.А., Новиков Д.А.** Модели совместной динамики мнений и действий в онлайн-социальных сетях. Ч. 1. Исходные данные и первичный анализ . . . . . 37

---

#### Управление техническими системами и технологическими процессами

---

**Владова А.Ю.** Формирование пространства признаков и авторегрессионных моделей для прогноза отступлений железнодорожного полотна . . . . . 54

---

#### Управление подвижными объектами и навигация

---

**Саввина Е.В.** Построение траектории перелета космического аппарата между околоземными эллиптическими орбитами методом перебора значений параметров внутри сетки данных . . . . . 65

---

#### Хроника

---

**К 110-летию со дня рождения академика Бориса Николаевича Петрова . . . . . 75**



**CONTROL SCIENCES**  
Scientific Technical  
Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161 (Print)

ISSN 2712-8687 (Online)

Published since 2003

**FOUNDER and PUBLISHER**

**V.A. Trapeznikov**

**Institute of Control Sciences  
of Russian Academy of Sciences**

**Editor-in-Chief**

**D.A. Novikov, RAS Academician**

**Deputy Editor-in-Chief**

**F.F. Pashchenko**

**Executive Editor-in-Chief**

**N.E. Maximova**

**Editor**

**L.V. Petrakova**

Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,  
Moscow 117997, Russia

☎ +7(495) 198-17-20, ext. 1410

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>

<http://controlsciences.org>

Published: April 28, 2023

Registration certificate of

ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

issued by the Ministry of Press,  
Broadcasting, and Mass Media  
of the Russian Federation

Registration certificate of

Эл № ФС 77-80482 of 17 February 2021

issued by the Federal Service  
for Supervision of Communications,  
Information Technology, and Mass Media

The Journal is indexed in RSCI (Russian  
Science Citation Index) on the platform  
Web of Science and in the list of peer-  
reviewed scientific publications of HAC

On the website of the Scientific electronic  
library ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) full texts of  
articles are available

© V.A. Trapeznikov

Institute of Control Sciences

of Russian Academy of Sciences

# CONTROL SCIENCES

## 2.2023

### CONTENTS

---

#### Surveys

---

**Kulida, E.L. and Lebedev, V.G.** Methods for Solving Some  
Problems of Air Traffic Planning and Regulation. Part II:  
Application of Deep Reinforcement Learning . . . . . 3

---

#### Analysis and Design of Control Systems

---

**Zhirabok, A.N., Zuev, A.V., and Kim, C.I.** Interval Observer  
Design for Discrete Linear Time-Invariant Systems  
with Uncertainties . . . . . 19

**Zavadsky, V.K., Ivanov, V.P., Kablova, E.B., et al.** Terminal  
Control of Moving Objects in the Class of Piecewise Constant  
and Piecewise Continuous Functions . . . . . 28

---

#### Control in Social and Economic Systems

---

**Gubanov, D.A. and Novikov, D.A.** Models of Joint Dynamics  
of Opinions and Actions in Online Social Networks. Part I:  
Primary Data Analysis . . . . . 37

---

#### Control of Technical Systems and Industrial Processes

---

**Vladova, A.Yu.** Creating Feature Spaces and Autoregressive  
Models to Forecast Railway Track Deviations . . . . . 54

---

#### Control of Moving Objects and Navigation

---

**Savvina, E.V.** Inter-orbital Spacecraft Transfer: Trajectory Design  
by Iterating Parameter Values within a Data Grid . . . . . 65

---

#### Chronicle

---

**On the 110th Anniversary** of Academician  
Boris N. Petrov's Birth . . . . . 75

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ ПОТОКОВ ВОЗДУШНОГО ДВИЖЕНИЯ

## Ч. 2. Применение методов глубокого обучения с подкреплением

Е.Л. Кулида, В.Г. Лебедев

**Аннотация.** Рассмотрены задачи повышения безопасности и эффективности организации воздушного движения. Главной проблемой при решении задач обнаружения и разрешения конфликтов традиционными методами оптимизации является время вычислений – требуются десятки и даже сотни секунд, но в реальных ситуациях времени на реакцию не так много. В последнее время широкое распространение получило применение глубокого обучения с подкреплением, поскольку с его помощью удается за приемлемое время решать задачи принятия решений с нелинейностью и большой размерности. В последние несколько лет появились исследовательские работы по использованию глубокого обучения с подкреплением для решения задач в области управления воздушным движением. В обзоре уделяется особое внимание применению этого перспективного подхода для решения следующих задач: обнаружения и разрешения конфликтов между воздушными судами, крупномасштабной задачи снижения сложности воздушного движения в воздушном пространстве страны или континента, повышения эффективности использования взлетно-посадочных полос аэропортов на основе улучшенного планирования посадок воздушных судов.

**Ключевые слова:** управление воздушным движением, стратегическое планирование четырехмерных траекторий, обнаружение и разрешение конфликтов воздушных судов, обучение с подкреплением.

### ВВЕДЕНИЕ

В связи с ростом интенсивности воздушного движения и перегруженностью крупнейших аэропортов растет запрос на автоматизацию работы авиадиспетчеров путем разработки систем поддержки принятия решений и автоматизированных систем управления воздушным движением. В первой части обзора [1] была рассмотрена задача минимизации числа потенциальных конфликтов между воздушными судами (ВС).

В работе [2] представлен обзор и современные тенденции применения искусственного интеллекта в управлении воздушным движением, составленный на основе материалов конференций и публикаций в журналах с высоким рейтингом, представляющих предметную область. Несмотря на значительный прогресс исследовательских работ в области искусственного интеллекта для управления воздушным движением, он пока не стал «полностью работоспособным» для конечных пользова-

телей. Медленный прогресс в применении искусственного интеллекта в области управления воздушным движением объясняется тем фактом, что рассматриваемая область является критической, здесь на карту поставлена жизнь, и безопасность является главным приоритетом. В настоящее время безопасность в управлении воздушным движением достигается при помощи участия человека в контуре управления и, скорее всего, как утверждают авторы, будет развиваться путем проектирования систем, ориентированных на человека, требующих, чтобы эти системы были понятны конечному пользователю и адаптировались к его психологическому состоянию. Для этого необходимо перейти к более ориентированному на пользователя объяснимому искусственному интеллекту, где система искусственного интеллекта и конечный пользователь смогут понимать друг друга и взаимодействовать друг с другом.

Подходы, основанные на оптимизации, часто являются дорогостоящими с точки зрения вычис-

лений, что ограничивает их применение. Впечатляющие результаты получены в нескольких исследовательских работах, связанных с управлением воздушным движением на основе глубокого обучения с подкреплением [3].

В докладе [4] была впервые сформулирована модель на основе обучения с подкреплением и представлен агент искусственного интеллекта для смягчения конфликтов и минимизации задержек ВС при достижении контрольных точек. В работах [5, 6] исследуется влияние различных уровней неопределенности окружающей среды и плотности трафика на производительность модели на основе обучения с подкреплением для разрешения конфликтов между ВС.

Если решения, предлагаемые при автоматическом разрешении конфликтов, не соответствуют мышлению или предпочтениям диспетчеров, они вряд ли будут приняты. В статье [7] разработан интерактивный агент искусственного интеллекта на основе обучения с подкреплением, которому предоставлялись маневры разрешения конфликтов, используемые диспетчером-человеком. Такой подход может, по мнению авторов, повысить уровень доверия диспетчера предлагаемым агентом решениям. В докладе [8] предложен гибридный алгоритм, который использует известные геометрические методы на этапе глубокого обучения с подкреплением для разрешения конфликтов в воздушном пространстве на малой высоте.

Эти подходы эффективны в условиях низкой плотности воздушного движения, но централизованные архитектуры не справляются с высокой плотностью воздушного движения при увеличении числа конфликтующих самолетов. В большинстве сложных систем считается, что распределенное принятие решений более эффективно, чем централизованное управление. Важнейшей задачей для обеспечения распределенного принятия решений при управлении воздушным движением является разработка системы, предоставляющей ВС рекомендации для обеспечения безопасного разделения и устранения неопределенности в режиме реального времени. Было предложено несколько многоагентных подходов для работы в условиях высокой плотности воздушного движения. В работах [9–11] показано, как децентрализованная система позволяет многим агентам иметь доступ ко всей информации о ВС в секторе с помощью масштабируемого и эффективного способа для достижения высокой пропускной способности в условиях неопределенности. Для обучения агентов используется одна нейронная сеть и централизованное обучение, а также децентрализованная схема принятия реше-

ний. Многие из предлагаемых агентов на основе обучения с подкреплением должны обучаться в среде с фиксированным количеством конфликтующих ВС. По мере увеличения числа конфликтующих ВС вычислительная сложность обучения быстро возрастает. В докладе [12] для разрешения конфликтов между ВС предлагается метод глубокого обучения с подкреплением на основе изображений. Глубокое обучение на основе изображений в значительной степени решает проблему масштабируемости. Алгоритм может обрабатывать произвольное количество ВС, поскольку используются изображения, а не состояния ВС. В работе [13] представлена модель автономного управления воздушным движением в свободном воздушном пространстве, предотвращающая столкновения между ВС. Предложен графический нейросетевой подход к разрешению конфликтов в свободном воздушном пространстве путем представления каждого ВС в виде узла на графе. Этот подход также позволяет справляться с произвольным количеством ВС.

Предполагается, что глубокое обучение с подкреплением будет играть существенную роль в построении будущих систем управления воздушным движением, однако необходимы дополнительные исследования. При использовании глубокого обучения с подкреплением в реальных приложениях наиболее существенны две проблемы.

Первая проблема – это безопасность систем управления воздушным движением. Современные модели используют глубокие нейронные сети в качестве аппроксиматоров функций. Было обнаружено, что глубокие нейронные сети уязвимы для состязательных примеров [14, 15] – тщательно продуманных квазинезаметных возмущений, которые вводят глубокую нейронную сеть в заблуждение при добавлении этих возмущений к ее входным данным. Более того, состязательные примеры также появляются в реальном мире без участия какого-либо злоумышленника или злонамеренно выбранного шума [16]. Следовательно, необходимо тщательно изучить механизмы состязательной атаки, способы обнаружения ошибок или нежелательного поведения алгоритмов искусственного интеллекта и методы их преодоления.

Вторая проблема – это объяснимость. Процесс принятия решений по технологии глубокого обучения с подкреплением непрозрачен, и отсутствие прозрачности делает невозможным для пилотов и диспетчеров понимание их внутреннего режима работы. Природа «черного ящика» модели может помешать пользователям поверить в прогнозируемые результаты, особенно когда модель используется для принятия ключевых решений.



В работе [17] представлена модель под названием safety-aware deep Q networks (учитывающая безопасность сеть глубокого обучения), в которой две отдельные нейронные сети совместно исследуют безопасность и затраты на оптимизацию. Авторы утверждают, что их работа является первой, в которой предусматривается уязвимость модели от состязательных атак, и что модель безопасна и хорошо объяснима.

Узким местом в системе управления воздушным движением является пропускная способность взлетно-посадочных полос крупных аэропортов. Операции управления маневрированием ВС в зоне аэропортов, такие как контроль прибытия, планирование последовательности и времени посадок, выполняются авиадиспетчерами. В работе [18] представлен системный обзор прошлых и самых современных теоретических исследований, связанных с проблемой посадки ВС в аэропортах, имеющих одну или несколько взлетно-посадочных полос, и их сравнительное исследование.

Далее в обзоре более детально рассматривается подход на основе глубокого обучения с подкреплением для решения следующих задач: обнаружения и разрешения конфликтов между ВС, крупномасштабной задачи снижения сложности воздушного движения в воздушном пространстве страны или континента, повышения эффективности использования взлетно-посадочных полос аэропортов на основе улучшенного планирования посадок ВС.

## 1. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗРЕШЕНИЕ КОНФЛИКТОВ НА ОСНОВЕ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

### 1.1. Подход к решению задач на основе глубокого обучения с подкреплением

Обучение с подкреплением [19] – это метод, при котором агент взаимодействует с окружающей средой с целью максимизации долгосрочного вознаграждения. Его можно рассматривать как марковский процесс принятия решений  $(S, A, T, R, \gamma)$ , где  $S$  – множество состояний среды;  $A$  – множество действий агента;  $T$  – функция, определяющая вероятность перехода из одного состояния в другое;  $R$  – функция вознаграждения;  $\gamma$  – коэффициент дисконтирования.

В момент обучения  $t$  агент находится в состоянии  $S_t \in S$  и генерирует действие  $A_t \in A$ , следуя политике  $\pi: S \times A \rightarrow R$ . Затем агент получает вознаграждение  $R_t$  и переходит в следующее состояние  $S_{t+1}$ . Цель агента заключается в том, чтобы

изучить политику  $\pi: S \rightarrow A$ , которая определяет, какое действие нужно использовать в каждом состоянии, чтобы максимизировать суммарное вознаграждение.

Состояния оцениваются на основе функции  $V(S)$ . Функция оценки состояния  $S_t$  обновляется по формуле

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(R_t + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t)),$$

где  $\alpha$  – скорость обучения.

Алгоритм строится на основе двух нейронных сетей: сети критика и сети исполнителя. Сеть критика используется для обновления параметров функции значений  $w$ , сеть исполнителя используется для обновления параметров политики  $\theta$  [20].

Поскольку пространство состояний бесконечно, используется аппроксимация функции оценки состояний. Для аппроксимации применяется глубокое обучение нейронной сети [21]:

$$\hat{V}(S, w) \approx V_n(S),$$

где  $w$  – веса нейронов. Формула обновления одношагового метода с временными различиями с использованием приближенной функции определяется так:

$$w \leftarrow w + \alpha(R_t + \gamma \hat{V}(S_{t+1}, w) - \hat{V}(S_t, w)) \nabla_w \hat{V}(S_t, w).$$

Для выбора действия используется политика  $\pi(a_s, \theta)$ . Для пространства непрерывных действий обычно применяется алгоритм градиента политики [22] на основе градиентного спуска. Дифференцируемая политика определяется как  $\pi(a_s, \theta)$ , и на каждом временном шаге параметры  $\theta$  обновляются следующим образом:

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_{\theta} \ln \pi(A_t | S_t, \theta) V(S_t).$$

### 1.2. Описание задачи обнаружения и разрешения конфликтов [23]

Рассматриваются  $N$  ВС в конкретном сценарии воздушного движения, показанном на рис. 1. Из них  $N-1$  находятся в секторе с радиусом  $L$ , дополнительный самолет влетает в сектор. Каждый самолет имеет начальную позицию и целевую позицию. Цель каждого ВС состоит в том, чтобы совершить перелет из начальной позиции в целевую позицию за минимальное время без конфликтов с другими ВС. Конфликт заключается в том, что расстояние между двумя ВС меньше минимального безопасного расстояния (обычно 5 морских миль (м. миль)). В момент времени  $t$  положение и курсовой угол ВС записываются как  $(x_n(t), y_n(t), \varphi_n(t))$ .

Действие для перехода в новое состояние – новое положение, в которое ВС летит из своего текущего положения.

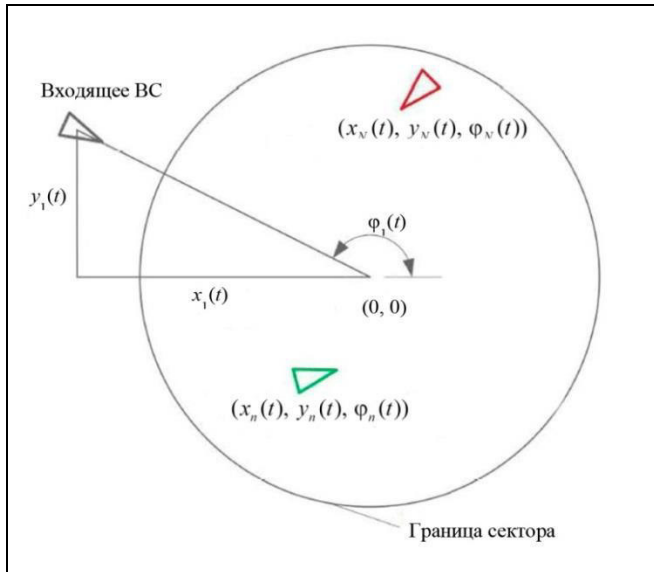


Рис. 1. Сценарий воздушного движения

Тренировочный процесс для одного эпизода показан на рис. 2.

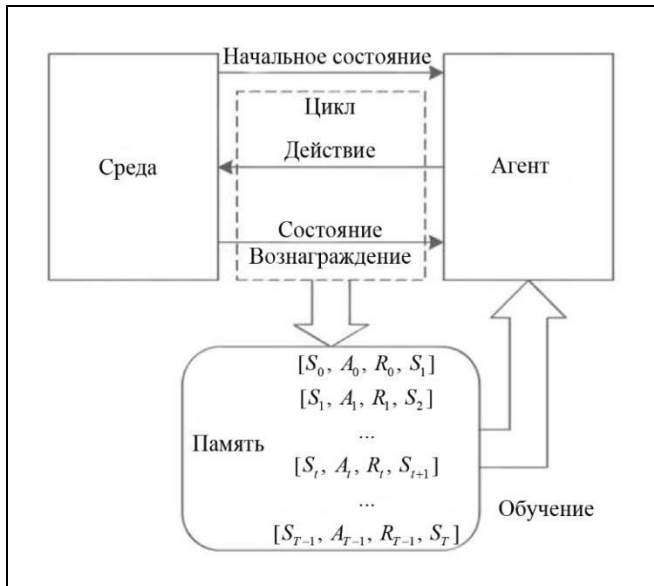


Рис. 2. Схема процесса обучения

В начале каждого эпизода обучения в среде инициализируется состояние  $S_0$ . На каждом временном шаге  $t$  агент получает состояние  $S_t$  и реализует действие  $A_t$ . После этого среда переходит в состояние  $S_{t+1}$  и возвращает вознаграждение  $R_t$ .

Этот процесс повторяется до тех пор, пока  $S_{t+1}$  не станет конечным состоянием. Наборы значений  $[S_t, A_t, R_t, S_{t+1}]$  сохраняются в памяти. Агент выбирает данные из памяти и обучается в соответствии с алгоритмом.

Возможные маневры включают повороты, вертикальную регулировку и изменение скорости. Выходное состояние среды включает в себя положение каждого ВС в секторе. Эксперимент по управлению одним ВС предназначен для проверки того, что окружающая среда может быть использована для обучения агентов. Высота и скорость в этом эксперименте фиксированы.

Набор состояний – это  $N$ -мерный вектор,  $N$  определяется как  $N = N_n \times N_p \times N_d$ , где  $N_n$  – количество ВС, включая входящий самолет и ВС, находящиеся в секторе;  $N_p$  – количество путевых точек ВС, включая все путевые точки от текущего положения до пункта назначения;  $N_d$  – размерность местоположения ВС, значение которой равно трем. Размерность высоты фиксирована, а две другие размерности изменяемы. На каждом временном шаге агент воспринимает вектор состояния и после нормализации принимает его за вход нейронных сетей.

Набор действий определяется как

$$A = \{\rho, \varphi | \rho \in [0, L], \varphi \in [-\pi, \pi]\},$$

где  $L$  – радиус сектора;  $\rho$  и  $\varphi$  – полярный радиус и угол соответственно. Действие – это позиция, которая описывается двумерной полярной координатой. На каждом временном шаге  $t$  агент выбирает действие  $A_t \in A$ . В зависимости от этого действия входящий самолет перелетает из своего текущего положения в положение  $A_t$ .

Целью агента является максимизация долгосрочного вознаграждения и обновление параметров нейронных сетей в соответствии с немедленным вознаграждением. Для создания функции вознаграждения используются четыре правила: отсутствие конфликта между ВС; минимальное время управления; минимальная величина изменения курсового угла; минимальное расстояние полета.

Функция вознаграждения определяется следующим образом:

$$R_t = \begin{cases} -1, & \text{если существует конфликт,} \\ |\Delta\varphi_t / \pi|, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$





где  $\Delta\varphi_t \in [-\pi, \pi]$  – изменение курсового угла на шаге  $t$ ;  $\Delta\varphi$  – изменение угла направления на каждом шаге в диапазоне от  $-\pi$  до  $\pi$ . Таким образом,  $\left| \frac{\Delta\varphi_t}{\pi} \right| \leq 1$ , что означает, что предотвращение конфликтов имеет наивысший приоритет. Поскольку изменение угла направления приведет к изменению расстояния, расстояние не учитывается в функции вознаграждения.

Действие – это определение полярной координаты, в которой центр сектора задается как полюс, а длина, меньшая радиуса сектора, задается как полярный радиус. Четыре выходных сигнала нейронной сети агента  $\mu_\rho, \sigma_\rho, \mu_\varphi, \sigma_\varphi$ , представляют среднее значение и стандартное отклонение полярного радиуса и полярного угла. В процессе обучения радиус и угол выбираются в соответствии с нормальным распределением:  $\rho \sim N(\mu_\rho, \sigma_\rho)$ ,  $\varphi \sim N(\mu_\varphi, \sigma_\varphi)$  и генерируется двумерное действие. После того, как нейронная сеть агента хорошо обучена,  $\mu_\rho$  и  $\mu_\varphi$  принимаются за  $\rho$  и  $\varphi$ .

Обучение нейронных сетей осуществляется следующим образом. Для сети критика определяется параметр  $\delta$  для оценки выбранного действия:

$$\delta_t = R_t + \gamma \hat{V}(S_{t+1}, w) - \hat{V}(S_t, w),$$

где  $R_t$  – немедленное вознаграждение;  $\hat{V}(S_t, w)$  – оценочное значение текущего состояния;  $\hat{V}(S_{t+1}, w)$  – оценочное значение следующего состояния.

Для обновления параметров  $w$  применяется метод наименьших квадратов:

$$w \leftarrow w + \alpha \nabla \delta^2.$$

Для сети исполнителя применяется метод градиента политики. Для политики используется уравнение

$$\ln \pi(\rho_t, \varphi_t | S_t, \theta) = \ln \pi(\rho_t | S_t, \theta) + \ln \pi(\varphi_t | S_t, \theta),$$

где  $\ln \pi(\rho_t, \varphi_t | S_t, \theta)$  – вероятность выбора  $\rho$  и  $\varphi$  в состоянии  $S_t$  с параметрами  $\theta$ ;  $\ln \pi(\rho_t | S_t, \theta)$  – вероятность выбора  $\rho$  в состоянии  $S_t$  с параметрами  $\theta$ ;  $\ln \pi(\varphi_t | S_t, \theta)$  – вероятность выбора  $\varphi$  в состоянии  $S_t$  с параметрами  $\theta$ . Параметры  $\theta$  обновляются следующим образом:

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha \delta_t \nabla \ln \pi(\rho_t, \varphi_t | S_t, \theta).$$

Эффективность предложенного подхода продемонстрирована с помощью численного моделирования. Утверждается, что хорошо обученный агент может генерировать решение за время  $< 200$  мс, в то время как предыдущие методы требуют десятков или даже сотен секунд для расчета. Кроме того, учитывается радиус поворота ВС, что соответствует реалистичным ситуациям.

## 2. ГИПЕРЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ДЛЯ СНИЖЕНИЯ СЛОЖНОСТИ ВОЗДУШНОГО ДВИЖЕНИЯ [24]

В работе [24] рассматривается задача улучшения структуры воздушного пространства путем минимизации сложности воздушного движения (см. раздел 2.6).

Гиперэвристический подход не просто следует определенной метаэвристике, но предполагает гибкую интеграцию и адаптивное управление низкоуровневыми эвристиками. Несколько исследований подтвердили эффективность применения  $Q$ -обучения в качестве алгоритма обучения для выбора подходящей низкоуровневой эвристики в точке принятия решения.  $Q$ -обучение происходит путем оценки наилучшей пары «состояние – действие» с использованием памяти на основе  $Q$ -таблицы. Каждое значение в такой таблице выражает долгосрочную ценность выбора конкретного действия в определенном состоянии.

Традиционная гиперэвристическая структура выбора состоит из двух уровней: первый, который содержит представление проблемы, функцию оценки и набор низкоуровневых эвристик; и второй, который выполняет две отдельные задачи. Первая задача – выбор низкоуровневой эвристики и применение ее к решению. Вторая задача – решение о принятии или отклонении нового решения. Выбор подходящей эвристики и метода принятия решений является нетривиальной задачей при разработке надежной гиперэвристической модели. Гиперэвристика работает без необходимости какой-либо информации о функциональности низкоуровневых эвристик, но обеспечивается полезная обратная связь, позволяющая получить коэффициент использования каждой эвристики и изменение целевой функции. Эта информация имеет решающее значение для процесса обучения.

Как показано на рис. 3, алгоритм использует агент  $Q$ -обучения для выбора эвристического оператора или низкоуровневой эвристики, которая затем будет применена для генерации решения-кандидата и пересчета его производительности в среде моделирования.

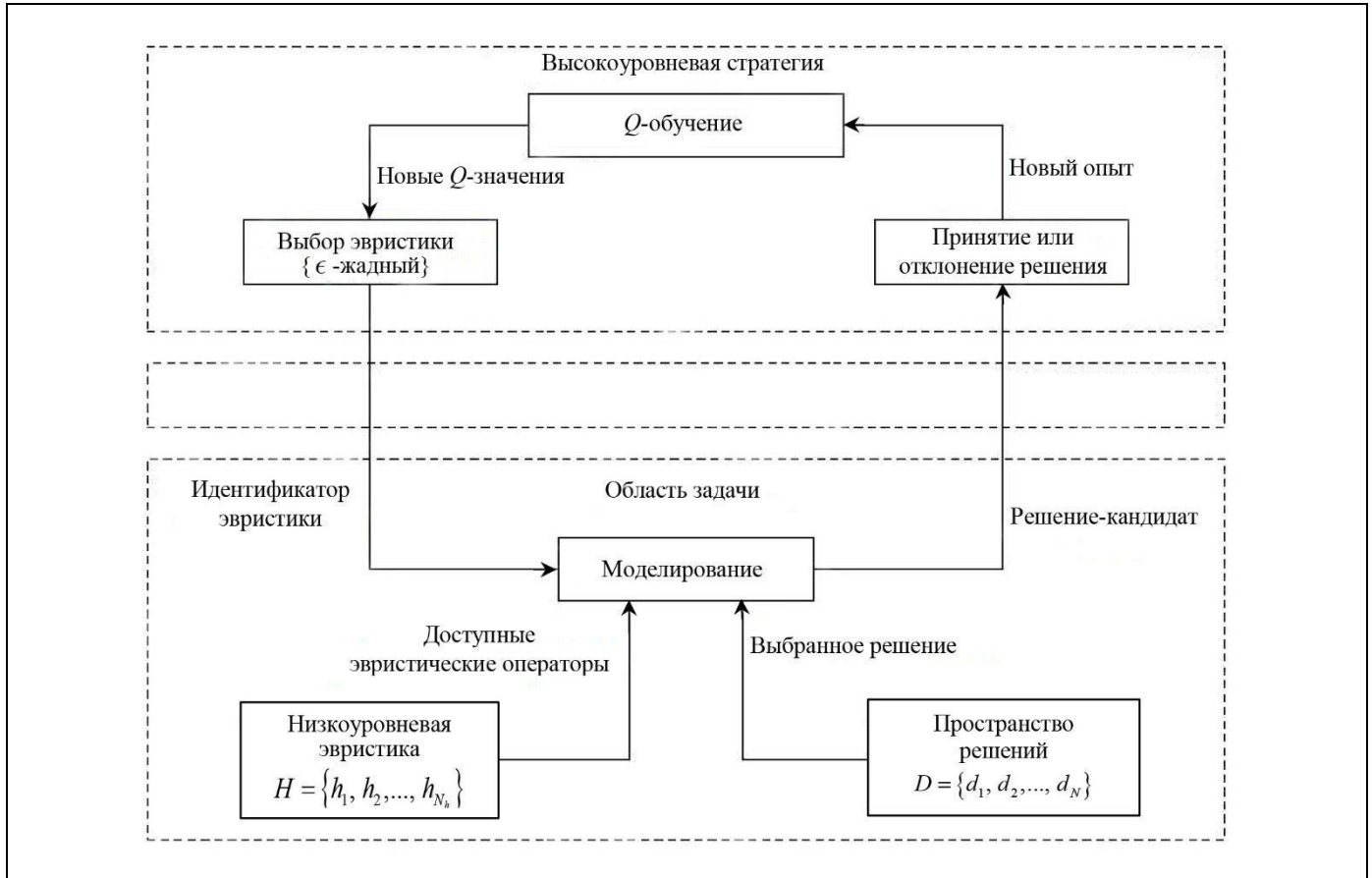


Рис. 3. Структура гиперэвристики, основанной на  $Q$ -обучении

После этого принимается решение относительно решения-кандидата. Если решение-кандидат может улучшить эффективность, текущее решение будет обновлено. В противном случае решение-кандидат также будет обновлено с некоторой вероятностью, которая по мере обучения будет уменьшаться. Если решение-кандидат принято не будет, то все изменения в пространстве решений, связанные с таким решением-кандидатом, будут отменены при помощи операции возврата. Агент  $Q$ -обучения определяет вознаграждение, проверяя текущее состояние, выбранный оператор, эволюцию решений и обновляет  $Q$ -значения в  $Q$ -таблице.

Предлагаются следующие эвристические операторы (рис. 4).

- $h_1$  – локальный поиск, который состоит из случайного изменения времени отправления не более чем на 5 мин (рис. 4, а);
- $h_2$  – локальный поиск, который переворачивает текущие путевые точки в горизонтальной плоскости  $XU$  вдоль траектории (рис. 4, б);
- $h_3$  – локальный поиск, который переворачивает текущие путевые точки в горизонтальной плос-

кости  $XU$  перпендикулярно к траектории (рис. 4, в);

- $h_4$  – локальный поиск, который случайным образом выполняет отклонение маршрута путем изменения положения каждой существующей путевой точки (рис. 4, г);

- $h_5$  – оператор, который стремится случайным образом выбрать соседний уровень высоты полета при ограничении максимально допустимых сдвигов уровня полета (рис. 4, д).

Для диверсификации во время оптимизации используются следующие три процедуры генерации.

- $h_6$  – оператор генерации, который случайным образом изменяет время отправления в пределах максимально допустимой смены времени отправления;

- $h_7$  – оператор генерации, который случайным образом добавляет/удаляет одну или несколько путевых точек в соответствии с ограничениями задачи;

- $h_8$  – оператор генерации, который стремится случайным образом изменить уровень высоты полета в пределах максимального сдвига уровня высоты полета.

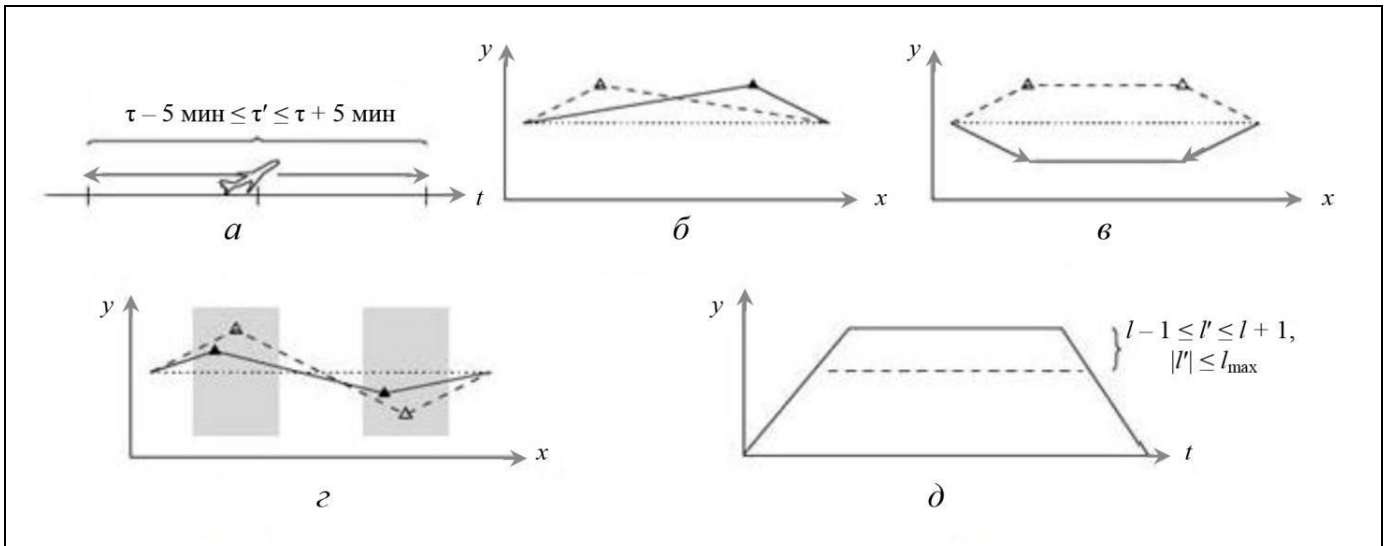


Рис. 4. Представление эвристических операторов: а –  $h_1$ , б –  $h_2$ , в –  $h_3$ , г –  $h_4$ , д –  $h_5$

$Q$ -обучающий агент выполняет  $\epsilon$ -жадный подход для выбора эвристического оператора на основе  $Q$ -таблицы. Случайное действие выбирается с вероятностью  $\epsilon$ , а действие на основе  $Q$ -таблицы выбирается с вероятностью  $1 - \epsilon$ . Сначала значение  $\epsilon$  устанавливается на максимальном уровне  $\epsilon_{\max}$  (определяется пользователем) и уменьшается в процессе обучения до тех пор, пока не достигает минимального значения  $\epsilon_{\min}$  (определяется пользователем).

Цикл обучения начинается с выбора одного из операторов диверсификации  $h_6$ ,  $h_7$  или  $h_8$ . Каждое состояние определяется на основе ранее примененного типа оператора.

Рассматривается семь состояний:

- $s_0$  – ранее был применен один из операторов диверсификации  $h_6$ ,  $h_7$  или  $h_8$ ;
- $s_1$  – ранее был применен оператор  $h_1$ ;
- $s_2$  – ранее был применен оператор  $h_2$ ;
- $s_3$  – ранее был применен оператор  $h_3$ ;
- $s_4$  – ранее был применен оператор  $h_4$ ;
- $s_5$  – ранее был применен оператор  $h_5$ ;
- $s_6$  – ранее были применены два последовательных оператора из множества  $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  без изменения текущего решения.

$Q$ -таблица инициализируется  $Q$ -значениями согласно табл. 1.

Некоторые  $Q$ -значения устанавливаются равными 1, чтобы гарантировать, что конкретный эвристический оператор может быть выбран, другие имеют значение 0, чтобы обеспечить переход из одного состояния в другое.

На каждой итерации система сохраняет опыт, содержащий текущие состояния с выбранным оператором  $h$  и выигрыш  $g$ , который представляет собой разницу в стоимости между новым решением и предыдущим. В конце цикла агент  $Q$ -обучения определяет вознаграждения для обновления  $Q$ -значений в  $Q$ -таблице.

$Q$ -значения на шаге  $t$  для найденной пары «состояние – действие» будут обновлены с помощью формулы

$$Q(s_t, h_t) = (1 - \alpha)Q(s_t, h_t) + \alpha \left( r_t + \gamma \max_{h \in H} Q(s_{t+1}, h) \right),$$

где  $\alpha \in [0, 1]$  обозначает скорость обучения;  $\gamma \in [0, 1]$  – коэффициент дисконтирования;  $r_t$  – немедленное вознаграждение;  $H = \{h_i, i = 1, \dots, 8\}$  – множество эвристических операторов.

Принятие перемещения определяет, следует ли принимать или отклонять новое решение на каждом этапе процесса поиска. Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнен критерий завершения.

В работе [24] представлена эмпирическая оценка предложенного подхода на основе эксперимента с данными за полный день маршрутного движения во французском воздушном пространстве из 8836 траекторий (рис. 5).

Результат сравнения начальной сложности для первоначального плана траекторий и конечной сложности для рассчитанного при помощи предлагаемого алгоритма окончательного плана траекторий движения в воздушном пространстве Франции для полного дня представлен на рис. 6.

Инициализация  $Q$ -таблицы

Состояние	Оператор							
	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
$s_0$	1	1	1	1	1	–	–	–
$s_1$	0	1	1	1	1	–	–	–
$s_2$	1	0	1	1	1	–	–	–
$s_3$	1	1	0	1	1	–	–	–
$s_4$	1	1	1	0	1	–	–	–
$s_5$	1	1	1	1	0	–	–	–
$s_6$	–	–	–	–	–	1	1	1

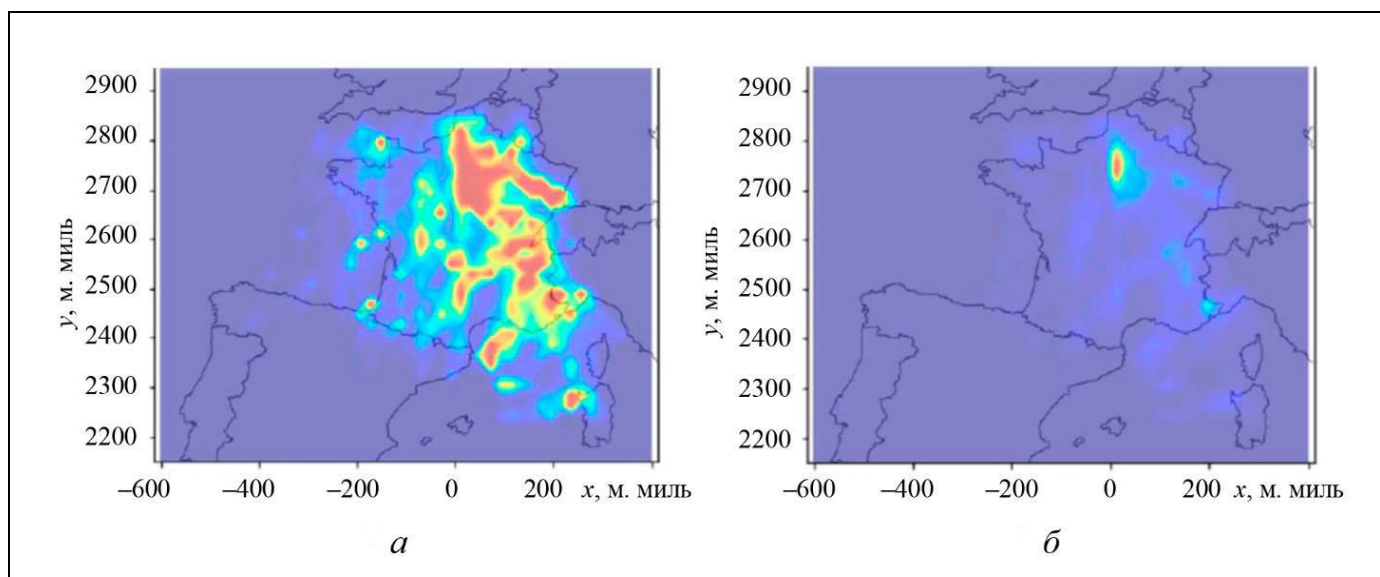
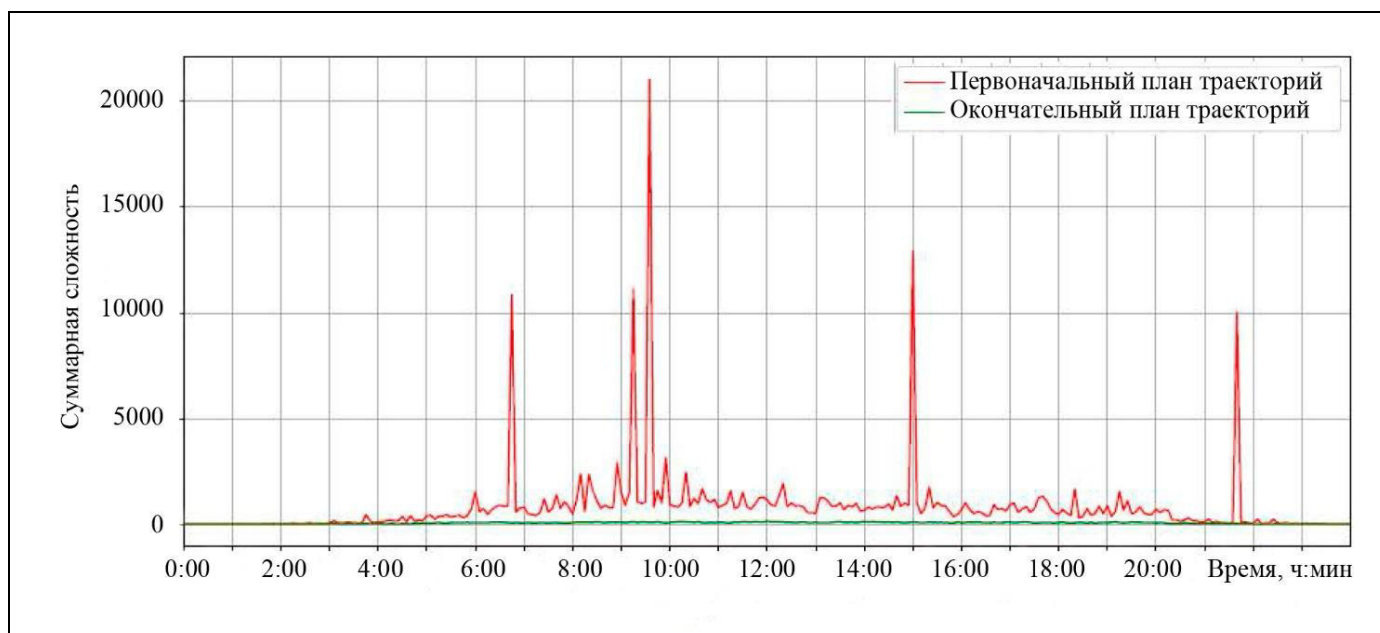

 Рис. 5. Карта сложности:  $a$  – для начальных траекторий и  $b$  – для конечных траекторий полного дня движения во французском воздушном пространстве


Рис. 6. Сравнение начальной сложности и конечной сложности для полного дня движения в воздушном пространстве Франции



### 3. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЗЛЕТНО-ПОСАДОЧНЫХ ПОЛОС С ПРИМЕНЕНИЕМ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

Взлетно-посадочные полосы аэропортов являются одним из основных узких мест в воздушном движении и одним из ключевых факторов, определяющих пропускную способность аэропорта. Строительство новой взлетно-посадочной полосы не всегда возможно. Одним из подходов к решению проблемы пропускной способности является модернизация структуры воздушного пространства и инфраструктуры аэродромов. В работе [25] рассматривается реализация такого подхода при помощи математического моделирования. В настоящем обзоре рассматривается другой подход, заключающийся в оптимизации использования инфраструктуры с помощью улучшенного планирования посадок ВС.

Решение задачи оптимизации посадок состоит из трех шагов: сначала создается первоначальное расписание в порядке живой очереди. Затем оно модифицируется во время так называемой фазы захода на посадку и, наконец, замораживается, когда самолет достигает конечной фазы захода на посадку. Первоначальное расписание включает ВС, находящиеся в зоне действия радаров посадочного устройства аэропорта, что соответствует временному горизонту примерно 40 мин до посадки. Процесс обновления выполняется каждый раз, когда новый самолет входит в зону действия радаров, чтобы улучшить расписание посадки [26].

Наиболее распространенные требования включают в себя безопасное разделение между последовательными ВС, разрешенные временные интервалы, определяемые самым ранним и самым поздним временем полета на основе расхода топлива, и ограничения приоритета. Различные целевые функции предназначены для увеличения пропускной способности взлетно-посадочной полосы, соблюдения расписания, минимизации расхода топлива и т. д.

Известно, что задача оптимизации очереди и времен посадок является *NP*-трудной [27]. Следовательно, время решения точными методами быстро увеличивается с ростом количества ВС. С момента публикации первого подхода к решению [28] в 1976 г. до настоящего времени в литературе появилось несколько моделей и подходов к решению, в том числе генетические и эвристические

алгоритмы решения задачи, которые позволяют за приемлемое время получить, возможно, не оптимальное, но достаточно эффективное решение [29, 30]. Обзор [31] посвящен некоторым точным подходам к решению задачи (в основном смешанному целочисленному программированию), а в обзоре [32] рассматриваются методы приближенного решения задачи, в основном генетические и меметические алгоритмы. В последнее время появился новый многообещающий подход к решению задачи, основанный на обучении с подкреплением.

В работе [33] рассматривается проблема планирования взлетов ВС на одной взлетно-посадочной полосе с целью соблюдения установленных временных интервалов взлета. Проблема моделируется как марковский процесс принятия решений и решается с применением алгоритма *Q*-обучения [34]. Агенты соответствуют ВС, состояния соответствуют положению ВС на земле в зависимости от его фазы (стоянка, руление, взлет). Действие заключается в задержке ВС, а вознаграждение определяется таким образом, чтобы свести к минимуму задержку во время руления и соблюдать установленные для ВС временные интервалы. Тестирование проводилось на реальных данных из международного аэропорта имени Джона Ф. Кеннеди, которые включали вылеты 698 рейсов, что соответствует двум дням работы в этом аэропорту. На основе этих данных сгенерированы 42 сценария обучения. Результаты показывают, что алгоритм имеет производительность, аналогичную производительности авиадиспетчеров или превышающую ее.

В работе [35] предлагается структура для моделирования проблемы упорядочивания и разделения ВС, чтобы модель соответствовала среде NASA sector-33 [36], которая представляет собой приложение для управления воздушным движением, содержащее 35 примеров задач с участием до пяти самолетов. Они включают в себя обеспечение контроля скорости и маршрута для ВС.

Предлагаемая модель состоит из агентов, состояний, действий и вознаграждений. Эта модель включает в себя два типа агентов: родительские агенты и дочерние агенты. Состояние родительского агента содержит снимок игрового экрана. Состояние дочернего агента содержит информацию о цели фиксации измерения, скорости и ускорении ВС, идентификаторе маршрута в дополнение к информации об *N* ближайших агентах, чтобы разрешить связь между агентами. Действия для

родительского/дочернего агента заключаются в изменении или поддержании маршрута/скорости ВС. Вознаграждение разработано таким образом, чтобы наказывать конфликтующих агентов (разделенных менее чем на 3 м. мили).

Затем для решения модели применяется иерархический алгоритм глубокого обучения с подкреплением. Этот алгоритм сочетает в себе алгоритм  $Q$ -обучения [18] и нейронные сети [5]. Он называется иерархическим, потому что действия выполняются на двух уровнях: на родительском уровне выбирается маршрут, затем на дочернем уровне выбирается скорость для ВС. Тесты, выполненные в вышеуказанной среде NASA (с участием от двух до пяти ВС) показывают жизнеспособность предлагаемого подхода.

### 3.1. Математическая модель

Более подробно остановимся на подходе, рассматриваемом в работе [37]. Предложен распределенный алгоритм, основанный на  $Q$ -обучении, параметры которого оптимально настроены при помощи генетического алгоритма. Алгоритм реализован с помощью механизма скользящего временного окна.

Рассматривается граф  $G(N, L)$ , где  $N$  – множество вершин, а  $L$  – множество ребер. Среди множества вершин можно выделить два подмножества:  $N_e \subset N$  – подмножество точек входа в ТМА (Terminal Maneuvering Areas);  $N_r \subset N$  – подмножество взлетно-посадочных полос. Конечные звенья, соединяющие взлетно-посадочные полосы, также сгруппированы в подмножество звеньев:  $L_r \subset L$ .

На рис. 7 рассматривается сеть в парижском аэропорту имени Шарля де Голля (CDG). Воздушное судно входит в точки LORNY или OKIPA, используются две взлетно-посадочные полосы 27R и 26L, точки слияния IF\_27R и IF\_26L. Используется двухточечная система слияния (IF\_27R – RWY\_27R и IF\_26L – RWY\_26L соответственно).

Для каждого ВС процедура выполняется с постоянной скоростью. Эта скорость является посадочной скоростью, зависящей от категории вихревого следа.

Структура PMS (Point Merge System) представлена на рис. 8. Для каждого ВС длина дуги PMS будет рассматриваться в качестве переменной решения для алгоритма.

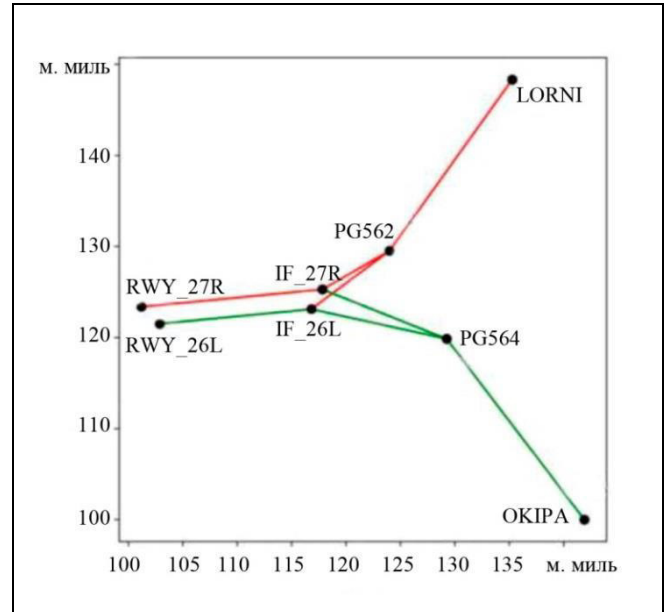


Рис. 7. Рассматриваемая сеть в аэропорту имени Шарля де Голля

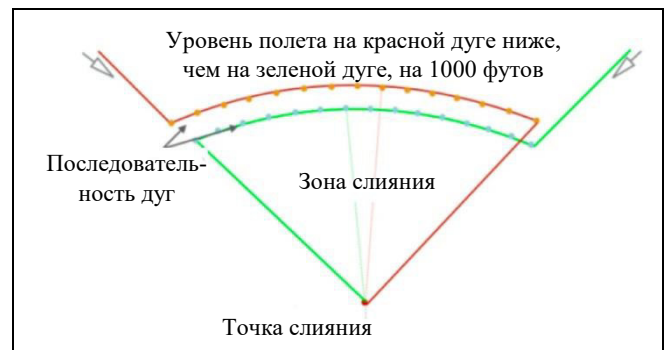


Рис. 8. Топология точек слияния: для каждого самолета длина дуги последовательности полетов является переменной решения

Рейс  $f$  имеет следующие характеристики:

- $V_{0,f}$  – начальная истинная скорость ВС;
- $t_{0,f}^{TMA}$  – начальное время входа в ТМА;
- $r_{0,f} \in N_r$  – взлетно-посадочная полоса, на которую планируется посадка ВС;
- $t_f^{RTA}$  – время, в которое ВС должно приземлиться (англ. *Required Time of Arrival*, RTA);
- $C_f$  – категория вихревого следа.

Для каждого рейса  $f$  рассматриваются следующие переменные решения:

- $V_f$  – скорость ВС;
- $t_f^{TMA}$  – время входа в ТМА;
- $r_f$  – взлетно-посадочная полоса, назначенная для посадки;
- $l_f^{MP}$  – длина дуги точки слияния.



Скорость ВС должна оставаться в заданном диапазоне начальной скорости:

$$V_f \in V_{0,f} + p\Delta V,$$

где  $p$  – количество приращений, а  $\Delta V$  – приращение скорости:

$$p \in Z, p\Delta V \in [\Delta V^{\min}, \Delta V^{\max}].$$

Здесь  $\Delta V^{\max}$  – максимальное увеличение скорости от  $V_{0,f}$  которое может быть присвоено ВС;

$\Delta V^{\min}$  – минимальное снижение скорости ВС от  $V_{0,f}$ , которое зависит от категории вихревого следа.

Решение о времени входа соответствует задержке, которая возможна в воздушном пространстве на маршруте до того, как ВС войдет в ТМА. В этом воздушном пространстве ВС может замедляться или ускоряться в заданном диапазоне. В результате, время входа ВС в ТМА также может изменяться в заданном диапазоне:

$$t_f^{\text{TMA}} \in t_{0,f}^{\text{TMA}} + p\Delta T,$$

где  $p$  – количество приращений, а  $\Delta T$  – приращение по времени:

$$p \in Z, p\Delta T \in [\Delta T^{\min}, \Delta T^{\max}].$$

Здесь  $\Delta T^{\max}$ ,  $\Delta T^{\min}$  – максимальное и минимальное приращения времени от  $t_{0,f}^{\text{TMA}}$ , которые могут быть заданы ВС.

Для поддержания сбалансированного потока между взлетно-посадочными полосами иногда может быть более целесообразным изменить посадочную полосу ВС  $r_f \in N_r$ .

Поскольку сеть содержит точки слияния, одна из переменных принятия решения,  $l_f^{\text{MP}}$ , является длиной дуги, по которой ВС будет лететь в одну из точек слияния.

$$l_f^{\text{MP}} \in p\Delta L,$$

где  $p$  – число приращений, а  $\Delta L$  – приращение длины:

$$p \in N, p\Delta L \leq L_{\text{MP}}^{\max},$$

и  $L_{\text{MP}}^{\max}$  – максимальная длина дуги до точки слияния.

### 3.2. Описание алгоритма глубокого обучения [37]

В настоящем разделе описывается алгоритм глубокого обучения на основе модели, представленной в разделе 3.1, предназначенный для разрешения потенциальных конфликтов между ВС при сильной загрузке в зоне аэропорта за приемлемое время.

Каждый полет представляет собой марковский процесс принятия решений  $MDP\{S, A, P_a, R_a\}$ . Все переменные решения представляют пространство состояний  $S$ . Это означает, что для каждого ВС состояние определяется {скоростью, временем входа в ТМА, длиной дуги PMS, назначением взлетно-посадочной полосы}. В каждом состоянии рассматриваются следующие действия:  $A = \{\text{увеличение/уменьшение скорости, увеличение/уменьшение времени входа в ТМА, увеличение/уменьшение длины дуги PMS, изменение посадочной полосы, никаких действий}\}$ . Для состояний, которые не являются прямыми соседями для текущего состояния, значение функции перехода равно нулю. Для соседних состояний функция перехода является равновсбалансированной:

$$P_a(s, s') = \begin{cases} 0, & \text{если } s \text{ и } s' \text{ – не соседние,} \\ \frac{1}{\text{Card}(A)}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $\text{Card}(A)$  – количество элементов в  $A$ , в данном случае восемь.

$Q$ -обучение – это алгоритм обучения с подкреплением без модели. Это означает, что алгоритму не нужна модель среды, он только взаимодействует со средой, не зная ее. Каждое ВС рассматривается как агент, что делает алгоритм мультиагентным.

$Q$ -обучение используется для изучения оптимальной политики марковского процесса принятия решений. Это делается путем вычисления  $Q$ -функции для каждого ВС, представляющей ожидаемое вознаграждение, которое может получить агент, если он предпримет данное действие в данном состоянии. Используемое  $Q$ -обучение является распределенным, что означает, что вознаграждение каждого агента обрабатывается индивидуально на каждой итерации.

Для каждого агента ожидаемое вознаграждение  $Q(s, a)$  в заданном состоянии  $s$  за заданное действие  $a$  обновляется следующим образом:

$$Q(s, a) = Q(s, a) + \alpha \left( R + \gamma \max_{a'} Q(s', a') - Q(s, a) \right),$$

где  $s'$  – новое состояние, когда действие  $a$  выполняется в состоянии  $s$ ;  $R$  – вознаграждение, которое агент получит, совершив действие  $a$  в состоянии  $s$ ;  $\alpha$  – скорость обучения;  $\gamma$  – коэффициент дисконтирования.

Ожидаемое вознаграждение  $Q(s, a)$  в данном состоянии  $s$  за данное действие  $a$  обновляется на каждой итерации с учетом оценки из оптимального будущего значения  $\max_a Q(s', a')$ . Это делается независимо от проводимой политики. Это одно-ступенчатый алгоритм, поскольку оценка выполняется только путем просмотра на одну итерацию вперед.

Для состояния  $s \in S$ , действия  $a \in A$  и параметра  $T$ , называемого температурой, вероятность  $\pi(s, a)$  выбрать действие  $a$  в состоянии  $s$  определяется как

$$\pi(s, a) = \frac{e^{Q(s,a)/T}}{\sum_{a' \in A} e^{Q(s,a')/T}}.$$

Температура при итерации  $k$  задается при помощи параметра  $\beta$  следующим образом:  $T_k = T_0 \beta^k$ , где  $T_0$  – начальная температура. Эта температура устанавливает компромисс между исследованием и использованием: относительно высокая температура будет способствовать формированию таблицы  $Q$ , низкая температура – использованию таблицы  $Q$ .

В этом распределенном  $Q$ -обучении каждый самолет рассматривается как обучающийся агент и, следовательно, имеет  $Q$ -таблицу. Все  $Q$ -таблицы инициализируются при значении  $Q_0$ , выбранном относительно низким для принудительного изучения состояния. Это делается специально, поскольку вознаграждение и  $Q$ -таблица самолета зависят от агентов, близких к нему, и они могут конфликтовать. Каждый агент рассматривается как независимый ученик и при выборе своего действия не учитывает выбранное другими агентами действие, а только их фактические состояния. Следовательно, в промежутке между двумя решениями агента его окружение может быть изменено. Агент может выбрать действие «ничего не делать» и тогда его состояние не изменится.

Для каждого ВС вычисляется функция вознаграждения, которая будет использоваться алгоритмом обучения с подкреплением. Вознаграждение, выдаваемое за каждое состояние и действие, зависит от состояния других ВС и рассчитывается

как взвешенная сумма вознаграждений, описанных далее.

Все вознаграждения являются отрицательными (штрафами):

$$R = \omega_{RTA} (R_{RTA} + 5R_{runway}) + \omega_{conflict} (\sum R_{link} + \sum R_{node}).$$

Если самолет  $f$  не приземляется на  $r_{0,f}$ , его предпочтительной взлетно-посадочной полосе, добавленная награда в пять раз превышает значение  $R_{runway}$ , взвешенное на  $\omega_{RTA}$ ;  $\omega_{RTA}$ ,  $\omega_{conflict}$  – параметры алгоритма.

Далее описываются различные части функции вознаграждения.

- Требуемое время прибытия. У всех авиакомпаний есть расписание для каждого ВС, и ВС, прилетевшее вовремя, должно получать более высокое вознаграждение. К вознаграждению каждого ВС добавляется значение в соответствии с реальным временем прибытия  $t_{arrival}$ :

$$R_{RTA} = -|t_f^{RTA} - t_{arrival}|.$$

- Номер взлетно-посадочной полосы

$$R_{runway} = \begin{cases} 0, & \text{приземлился на } r_{0,f}, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

- Конфликты. Модель рассматривает два вида конфликтов: конфликт на ребре, когда два ВС не соблюдают разделение категорий вихревого следа, и конфликт на вершине, когда ВС не соблюдают горизонтальное разделение в точках слияния [38]. Во избежание конфликта для каждого ребра на входе и выходе минимальное расстояние между двумя ВС  $f$  и  $g$  должно соответствовать табл. 2.

Предполагая, что  $s_{f,g}$  – минимальный интервал, а  $d_{f,g}$  – фактическое расстояние между ведущим самолетом  $f$  и замыкающим  $g$  (рис. 9), критичность потенциального конфликта,  $C_{link}$ , пропорциональна расстоянию между ВС. Также вычисляются обгоны; если это происходит, то  $d_{f,g} < 0$  и критичность конфликта устанавливается равной  $-1$ :

$$C_{link} = \begin{cases} -1, & \text{если } d_{f,g} < 0, \\ -\frac{|s_{f,g} - d_{f,g}|}{s_{f,g}}, & \text{если } d_{f,g} < s_{f,g}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$



Минимальное расстояние между ВС, м. миль

Категория ВС		Ведущее ВС $f$		
		Тяжелое	Среднее	Легкое
Ведомое ВС $g$	Тяжелое	4	3	3
	Среднее	5	3	3
	Легкое	6	5	3

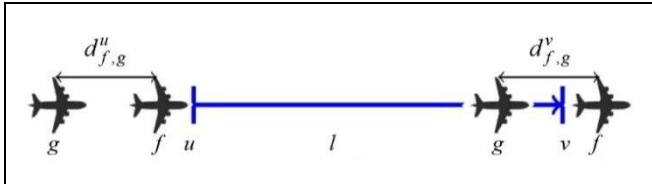


Рис. 9. Обнаружение конфликта между ВС

$C_{link}$  – это кусочно-линейная и непрерывная функция, которая необходима для алгоритма обучения, чтобы знать, усугубляется конфликт или нет. Поскольку  $C_{link}$  может быть близок к нулю, алгоритм обучения может улучшить  $R_{RTA}$  вместо разрешения конфликта. Чтобы расставить приоритеты в решении конфликта, значение функции вознаграждения искусственно устанавливается в диапазоне от  $-0,3$  до  $-1$  по формуле

$$R_{link} = -0,3 + (C_{link} \cdot (1 - 0,3)).$$

Если нет конфликта на ребрах между двумя ВС  $f$  и  $g$ , могут быть конфликты на вершинах. В ТМА каждое ВС должно быть отделено от других на 3 м. мили, чтобы соблюдать дистанцию разделения. Но, как показано в работе [38], во многих аэропортах, благодаря геометрии сети, зона обнаружения может быть уменьшена до круга радиусом 2,2 м. мили. Критичность конфликта на вершине определяется формулой

$$C_{node} = \begin{cases} \frac{2,2 - d_{f,g}}{2,2}, & \text{если } d_{f,g} < 2,2, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Значение функции вознаграждения, используемой для конфликта на вершине, искусственно устанавливается между  $-0,3$  до  $-1$  по формуле

$$R_{node} = -0,3 + (C_{node} \cdot (1 - 0,3)).$$

В этой задаче, если ВС входит в ТМА за несколько часов до другого, их решения можно рассматривать как независимые. Поэтому динамическая задача оптимизации посадок ВС решается на основе скользящего временного окна.

В процессе оптимизации ВС внутри скользящего временного окна подразделяются на четыре группы:

- ВС, которые уже приземлились;
- ВС, по которым решение о посадке уже принято;
- активные ВС, по которым принимается решение;
- ВС, по которым решение будет приниматься позднее.

На каждой итерации скользящего окна алгоритм оптимизации выполняется на активных рейсах.

Запуск алгоритма на каждом активном рейсе в скользящем окне недостаточно эффективен, некоторые из активных рейсов могут иметь хорошее вознаграждение, а другие ВС могут иметь конфликты. Чтобы ускорить процесс оптимизации, решения для ВС с худшим вознаграждением изменяются с более высоким приоритетом. Эти ВС называются как критически важные. Они определяются с использованием порогового значения, которое составляет более 70 % от наихудшего вознаграждения. Поскольку ВС обучаются и среднее вознаграждение снижается, то все больше ВС становятся критически важными.

Алгоритм был успешно опробован на данных парижского аэропорта имени Шарля де Голля с искусственно увеличенным до 687 общим количеством посадок ВС. Бесконфликтное решение для полного дня трафика было рассчитано менее чем за 30 с, что приемлемо для планирования в режиме реального времени.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В течение нескольких десятилетий проводились обширные исследования по проблеме автоматизации поддержки принятия решений в системах управления воздушным движением. Математические модели, разработанные в связи с этой проблемой, основаны либо на минимизации числа потенциальных конфликтов между четырехмерными траекториями ВС, либо на перераспределении потоков ВС с целью уменьшения перегрузки воз-

душного пространства. Для уменьшения числа потенциальных конфликтов между ВС в основном используется одно или несколько из следующих действий: задержки вылета рейсов, регулирование скорости в воздухе, изменение траекторий полета, изменение уровня высоты полета.

Было показано, что задача минимизации числа потенциальных конфликтов между ВС является *NP*-трудной. Это привело к появлению различных метаэвристических алгоритмов для ее решения. Для стратегического планирования потока ВС с учетом неопределенности положения ВС был разработан гибридный метаэвристический подход на основе алгоритма имитации отжига, улучшенный методами локального поиска.

Сложность и масштабность задачи минимизации числа потенциальных конфликтов в воздушном пространстве требует поиска новых подходов к ее решению. В последние годы появились работы, в которых применяются методы глубокого обучения с подкреплением для решения задач, связанных с повышением эффективности и безопасности воздушного движения. Эффективность предлагаемых подходов исследовалась при помощи вычислительных экспериментов, которые показали обнадеживающие результаты. Для оценки перспективности использования предлагаемых подходов в реальной обстановке требуются дальнейшие обширные исследования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кулида Е.Л., Лебедев В.Г. Методы решения задач планирования и регулирования потоков воздушного движения. Ч. 1. Стратегическое планирование четырехмерных траекторий // Проблемы управления. – 2023. – № 1. – С. 3–14. [Kulida, E.L. and Lebedev, V.G. Methods for Solving Some Problems of Air Traffic Planning and Regulation. Part I: Strategic Planning of 4D Trajectories // Control Sciences. – 2023. – No. 1. – P. 2–11.]
2. Degas, A., Islam, M.R., Hurter, C., et al. A Survey on Artificial Intelligence (AI) and eXplainable AI in Air Traffic Management: Current Trends and Development with Future Research Trajectory // Applied Sciences. – 2022. – Vol. 12, no. 3. – Art. no. 1295. – DOI: 10.3390/app12031295.
3. Wang, Z., Pan, W., Li, H., et al. Review of Deep Reinforcement Learning Approaches for Conflict Resolution in Air Traffic Control // Aerospace. – 2022. – Vol. 9, no. 6. – Art. no. 294. – DOI: 10.3390/aerospace9060294.
4. Brittain, M., Wei, P. Autonomous Aircraft Sequencing and Separation with Hierarchical Deep Reinforcement Learning // Proceedings of the 8th International Conference on Research in Air Transportation. – Barcelona, Spain, 2018. – URL: <https://www.researchgate.net/publication/327287314>.
5. Pham, D.T., Tran, N.P., Alam, S., et al. A Machine Learning Approach for Conflict Resolution in Dense Traffic Scenarios with Uncertainties // ATM 2019, 13th USA/Europe Air Traffic Management Research and Development Seminar. – Vienne, 2019.
6. Pham, D.T., Tran, N.P., Alam, S., et al. Deep Reinforcement Learning based Path Stretch Vector Resolution in Dense Trac with Uncertainties // Transportation Research. Part C. Emerging Technologies. – 2021. – Vol. 135. – Art. no. 103463. – DOI: 10.1016/j.trc.2021.103463.
7. Tran, P.N., Pham, D.T., Goh, S.K., et al. An Interactive Conflict Solver for Learning Air Traffic Conflict Resolutions // Journal of Aerospace Information Systems. – 2020. – Vol. 17, no. 6. – P. 271–277.
8. Ribeiro, M., Ellerbroek, J., Hoekstra J. Improvement of Conflict Detection and Resolution at High Densities through Reinforcement Learning // Proceedings of the International Conference on Research in Air Transportation. – Tampa, USA, 2020.
9. Brittain, M., Wei, P. Autonomous Separation Assurance in an High-Density en Route Sector: A Deep Multi-Agent Reinforcement Learning Approach // IEEE Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC). – Auckland, New Zealand, 2019. – P. 3256–3262.
10. Brittain, M., Yang, X., Wei, P. A Deep Multi-Agent Reinforcement Learning Approach to Autonomous Separation Assurance // Arxiv:2003.08353v2. – 2020. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.08353>.
11. Brittain, M., Wei, P. One to Any: Distributed Conflict Resolution with Deep Multi-Agent Reinforcement Learning and Long Short-Term Memory // AIAA Scitech 2021 Forum. – Nashville, 2021. – P. 1952.
12. Zhao, P., Liu, Y. Physics Informed Deep Reinforcement Learning for Aircraft Conflict Resolution // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2021. – Vol. 23, iss. 7. – P. 8288–8301. – DOI: 10.1109/TITS.2021.3077572.
13. Mollinga, J.; Hoof, H. An Autonomous Free Airspace Enroute Controller Using Deep Reinforcement Learning Techniques // Arxiv:2007.01599. – 2020. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.01599>.
14. Khan, N.A., Brohi, S.N., Jhanjhi, N. UAV's Applications, Architecture, Security Issues and Attack Scenarios: A Survey // Intelligent Computing and Innovation on Data Science. – 2020. – Vol. 183. – P. 753–760. – DOI: 10.1007/978-981-15-3284-9\_86.
15. Szegedy, C., Zaremba, W., Sutskever, I., et al. Intriguing Properties of Neural Networks // Arxiv:1312.6199v3. – 2013. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.6199>.
16. Athalye, A., Engstrom, L., Ilyas, A., Kwok, K. Synthesizing Robust Adversarial Examples // International Conference on Machine Learning. – Stockholm, 2018. – P. 284–293.
17. Wang, L., Yang, H., Lin, Y., et al. Explainable and Safe Reinforcement Learning for Autonomous Air Mobility // arXiv:2211.13474v1. – 2022. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.13474>.
18. Messaoud, M. A Thorough Review of Aircraft Landing Operation from Practical and Theoretical Standpoints at an Airport Which May Include a Single or Multiple Runways // Applied Soft Computing. – 2020. – Vol. 98, no. 12. – Art. no. 106853. – DOI: 10.1016/j.asoc.2020.106853.
19. Sutton, R.S., Barto, A.G. Reinforcement Learning: An Introduction. – London, UK: MIT Press, 2017.
20. Degris, T., Pilarski, P.M., Sutton, R.S. Model-Free Reinforcement Learning with Continuous Action in Practice // American Control Conf., Fairmont Queen. – Elizabeth, Montréal, Canada, 2012. – P. 2177–2182.



21. *LeCun, Y., Bengio, Y., Hinton, G.* Deep Learning // Nature. – 2015. – Vol. 521. – P. 436–444.
22. *Sutton, R.S., McAllester, D.A., Singh, S.P., et al.* Policy Gradient Methods for Reinforcement Learning with Function Approximation // Advances in Neural Information Processing Systems. – USA, Denver, MIT Press, 1999. – P. 1057–1063.
23. *Wang, Z., Li, H., Wang, J., Shen, F.* Deep Reinforcement Learning Based Conflict Detection and Resolution in Air Traffic Control // IET Intelligent Transport System. – 2019. – Vol. 13. – P. 1041–1047.
24. *Juntama, P., Delahaye, D., Chaimatanan, S., Alam, S.* Hyperheuristic Approach Based on Reinforcement Learning for Air Traffic Complexity Mitigation // Journal of Aerospace Information Systems. – 2022. – Vol. 19, no. 9. – DOI: 10.2514/1.i011048.
25. *Вишнякова Л.В., Попов А.С.* Выбор структуры воздушного пространства и инфраструктуры аэродромов при их модернизации методами математического моделирования // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2021. – № 6. – С. 66 – 105. [*Vishnyakova, L.V., Popov, A.S.* Vybor struktury vozdušnogo prostranstva i infrastruktury aerodromov pri ih moder-nizacii metodami matematicheskogo modelirovaniya // Izve-stiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. – 2021. – No. 6. – P. 66 – 105. (In Russian)]
26. *Bennell, J.A. Mesgarpour, M. Potts, C.N.* Airport Runway Scheduling // Semantic Scholar. – 2011. – Vol. 4OR. – P. 115–138. – DOI: 10.1007/s10288-011-0172-x .
27. *Prakash, R. Piplani, R. Desai, J.* An Optimal Data-Splitting Algorithm for Aircraft Scheduling on a Single Runway to Maximize Throughput // Transportation Research, Part C: Emerging Technologies. – 2018. – Vol. 95. – P. 570– 581.
28. *Dear, R.G.* The Dynamic Scheduling of Aircraft in the Near Terminal Area // Technical Report, R76-9, Flight Transportation Laboratory. – MIT, Cambridge, MA, USA, 1976.
29. *Кулида Е.Л.* Генетический алгоритм решения задачи оптимизации последовательности и времен посадок воздушных судов // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 3. – С. 156–168. [*Kulida, E.L.* Genetic Algorithm for Solving the Problem of Optimizing Aircraft Landing Sequence and Times // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, no. 3. – P. 426–436.]
30. *Кулида Е.Л., Лебедев В.Г., Егоров Н.А.* Сравнение двух алгоритмов решения задачи оптимизации последовательности и времен посадок воздушных судов // В сборнике: Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021). Труды Четырнадцатой международной конференции. – Москва. – 2021. – С. 1438–1444. [*Kulida E., Egorov N., Lebedev V.* Comparison of Two Algorithms for Solving the Problem Aircraft Arrival Sequencing and Scheduling / Proceedings of the 14th International Conference «Management of Large-Scale System Development» (MLSD). – IEEE, 2021. – URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9600243>.]
31. *Вересников Г.С., Кулида Е.Л., Егоров Н.А., Лебедев В.Г.* Методы построения оптимальных очередей воздушных судов на посадку. Ч. 1. Методы точного решения // Проблемы управления. – 2018. – № 4. – С. 2–14. [*Veresnikov, G.S., Egorov, N.A. Kulida, E.L., Lebedev, V.G.* Methods for Solving of the Aircraft Landing Problem. I. Exact Solution Methods. // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80. – P. 1317–1334.]
32. *Вересников Г.С., Егоров Н.А., Кулида Е.Л., Лебедев В.Г.* Методы построения оптимальных очередей воздушных судов на посадку [1]. Ч. 2. Методы приближенного решения // Проблемы управления. – 2018. – № 5. – С. 2–13. [*Veresnikov, G.S., Egorov, N.A. Kulida, E.L., Lebedev, V.G.* Methods for Solving of the Aircraft Landing Problem. II. Approximate Solution Methods // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80. – P. 1502–1518.]
33. *Soares, I. B., De Hauwere, Y.M., Januarius, K., et al.* Departure Management with a Reinforcement Learning Approach: Respecting CFMU Slots // IEEE 18th International Conference on Intelligent Transportation Systems. – Las Palmas de Gran Canaria, Spain. 2015.
34. *Watkins, C. J. Dayan, P.* Q-learning // Machine Learning. – 1992. – Vol. 8. – P. 279–292.
35. *Brittain, M. Wei, P.* Autonomous Aircraft Sequencing and Separation with Hierarchical Deep Reinforcement Learning // Proceedings of the International Conference for Research in Air Transportation. – Barcelona, Spain. 2018.
36. *Colen, J.* NASA sector 33 application. – 2013. – URL: [https://www.nasa.gov/ centers/ames/Sector33/iOS/index.html](https://www.nasa.gov/centers/ames/Sector33/iOS/index.html).
37. *Henry, A., Delahaye, D., Valenzuela, A.* Conflict Resolution with Time Constraints in the Terminal Maneuvering Area Using a Distributed Q-learning Algorithm // International Conference on Research in Air Transportation (ICRAT 2022). – 2022. – Tampa, USA. – Hal-03701660.
38. *Ma, J., Delahaye, D., Sbihi, M., Mongeau, M.* Integrated Optimization of Terminal Manoeuvring Area and Airport // 6th SESAR Innovation Days. – Delft, Netherlands, 2016.

Статья представлена к публикации членом редколлегии  
А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 10.11.2022,  
после доработки 19.12.2022.  
Принята к публикации 20.12.2022.

**Кулида Елена Львовна** – канд. техн. наук,  
✉ [elena-kulida@yandex.ru](mailto:elena-kulida@yandex.ru),

**Лебедев Валентин Григорьевич** – д-р техн. наук,  
✉ [lebedev-valentin@yandex.ru](mailto:lebedev-valentin@yandex.ru),

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

# METHODS FOR SOLVING SOME PROBLEMS OF AIR TRAFFIC PLANNING AND REGULATION.

## PART II: Application of Deep Reinforcement Learning

E.L. Kulida<sup>1</sup> and V.G. Lebedev<sup>2</sup>

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>1</sup>✉ elena-kulida@yandex.ru, <sup>2</sup>✉ lebedev-valentin@yandex.ru

**Abstract.** Following part I of the survey, this paper considers the problems of improving the safety and efficiency of air traffic flows. The main challenge in conflict detection and resolution by traditional optimization methods is computation time: tens and even hundreds of seconds are required. However, this is not so much for response in real situations. Deep reinforcement learning has recently become widespread due to solving high-dimensional decision problems with nonlinearity in an acceptable time. Research works on the use of deep reinforcement learning in air traffic management have appeared in the last few years. Part II focuses on the application of this promising approach to the following problems: detecting and resolving aircraft conflicts, reducing the complexity of air traffic at the national or continental level (a large-scale problem), and increasing the efficiency of airport runways through the improved planning of aircraft landings.

**Keywords:** air traffic management, strategic planning of 4D trajectories, aircraft conflict detection and resolution, reinforcement learning.

# ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ<sup>1</sup>

А.Н. Жирабок, А.В. Зуев, Ч.И. Ким

**Аннотация.** Рассматривается задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых дискретными линейными моделями, при наличии неопределенностей в виде внешних возмущений и шумов измерений, которые представляют собой неизвестные ограниченные функции. Для построения такого наблюдателя используется модель исходной системы минимальной размерности, нечувствительная к возмущениям, матрица динамики которой ищется в идентификационной канонической форме. Приводятся соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель минимальной сложности, который оценивает множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния системы. Для случая, когда невозможно построить наблюдатель, нечувствительный к возмущениям, на основе сингулярного разложения матриц, описывающих систему, предложен способ построения наблюдателя, минимально чувствительного к возмущениям. Теоретические результаты иллюстрируются примером построения интервального наблюдателя для электропривода.

**Ключевые слова:** линейные системы, неопределенности, модели, интервальные наблюдатели.

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья логически продолжает работу [1], в которой рассматривалась задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными моделями с непрерывным временем.

Задаче построения интервальных наблюдателей в последние годы посвящены многочисленные работы, обзор которых приводится в статьях [2, 3]; решение этой задачи для различных классов систем, а также практические приложения содержатся в публикациях [4–10]. В этих работах, как правило, определяется оценка множества допустимых значений полного вектора состояния, в то время как интерес может представлять определенная оценка только для заданной линейной функции этого вектора. Соответствующий интервальный наблюдатель может оказаться существенно проще наблюдателя полной размерности, а класс систем, для которых такой наблюдатель может быть построен, расширится. Кроме того, при оценке за-

данной линейной функции динамика наблюдателя может быть представлена в канонической форме, что упрощает процесс решения задачи и дополнительно расширяет класс систем с возможностью построения для них интервального наблюдателя.

В работе ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей для стационарных систем, описываемых дискретными линейными динамическими моделями, работающими в условиях действия внешних возмущений и шумов измерений и оценивающих множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния системы. Этим настоящая статья отличается от работ [2–10], где интервальные наблюдатели строятся для оценки полного вектора состояния.

## 1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, описанную дискретной линейной моделью

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + L\rho(t), \\y(t) &= Hx(t) + v(t),\end{aligned}\tag{1}$$

<sup>1</sup> Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-29-000191.

где  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  и  $y(t) \in R^l$  – векторы состояния, управления и выхода соответственно;  $F$ ,  $G$  и  $H$  – постоянные матрицы размеров  $n \times n$ ,  $n \times m$  и  $l \times n$  соответственно;  $L$  – известная матрица размера  $n \times q$ ;  $\rho(t) \in R^q$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения,  $\|\rho(t)\| \leq \rho_*$  для всех  $t \geq 0$ ;  $v(t) \in R^l$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая шумы измерений,  $\|v(t)\| \leq v_*$  для всех  $t \geq 0$ , где  $\|\cdot\|$  – евклидова норма.

Как следует из системы (1) и ее описания, неопределенности в задаче представлены в виде шума измерений  $v(t)$  и возмущающего входного сигнала  $\rho(t)$  с верхними границами амплитуд  $v_*$  и  $\rho_*$  соответственно для всех  $t \geq 0$ .

Требуется построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, формирующий нижнюю  $\underline{z}(t)$  и верхнюю  $\bar{z}(t)$  границы известной линейной функции вектора состояния, заданной матрицей  $M$  в виде  $z(t) = Mx(t) \in R^p$ , для которых при всех  $t \geq 0$  справедливо неравенство  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$ , понимаемое покомпонентно.

В статье [1] показано, что для непрерывных систем интервальный наблюдатель может быть построен на основе модели минимальной размерности двумя методами. В первом из них описывающие эту модель матрицы ищутся в идентификационной канонической форме (ИКФ), с помощью обратной связи обеспечивается устойчивость наблюдателя, который затем преобразуется к каноническому виду Жордана для обеспечения свойства метцлеровости матрицы, отражающей его динамику. Во втором методе эта матрица сразу ищется в жордановой форме, что существенно упрощает задачу, поскольку устойчивость и метцлеровость теперь прямо следуют из жордановой формы.

В дискретном случае свойство метцлеровости не требуется, необходимо, чтобы рассматриваемая матрица была устойчивой и неотрицательной, поэтому предпочтительной здесь является ИКФ, которая удовлетворяет этим двум требованиям. При этом для обеспечения устойчивости наблюдателя обратная связь может не использоваться, поскольку ИКФ имеет нулевые собственные числа, гарантирующие устойчивость в дискретном случае.

Решение задачи основывается на модели минимальной размерности, нечувствительной к возмущению и оценивающей переменную  $z(t)$ :

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= F_*x_*(t) + J_*Hx(t) + G_*u(t), \\ z(t) &= H_zx_*(t) + Qy_0(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_* \in R^k$  – вектор состояния наблюдателя,  $k$  – размерность модели,  $F_*$ ,  $J_*$ ,  $G_*$ ,  $H_z$  и  $Q$  – матрицы, подлежащие определению,  $y_0(t) = N_2y(t)$  для некоторой матрицы  $N_2$ , определяемой ниже. Предполагается, что вектор  $x(t)$  и неизвестный вектор  $x_*(t)$  связаны матрицей  $\Phi$ , подлежащей определению:

$$x_*(t) = \Phi x(t).$$

Вид слагаемого  $J_*Hx(t)$  в формуле (2) объясняется следующим. Модель (2) является редуцированной частью системы (1), поэтому в нее не входит вектор выхода  $y(t)$ , который появляется в виде слагаемого  $J_*y(t)$  в наблюдателе (12). Это позволяет учесть шумы измерений.

Наилучшим с точки зрения величины интервала  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  является решение уравнения (2), нечувствительное к возмущению  $\rho(t)$ , которое, как известно, удовлетворяет условию  $\Phi L = 0$  [11]. Кроме того, чтобы оцениваемая переменная  $z(t)$  в модели (2) была также нечувствительной к возмущению, переменная  $y_0(t)$ , входящая в это уравнение, должна формироваться следующим образом.

Введем матрицу  $L_0$  максимального ранга такую, что  $L_0L = 0$ , тогда  $\Phi = NL_0$  для некоторой матрицы  $N$ . Поскольку вектор  $x'(t) = L_0x(t)$  нечувствителен к возмущению, то  $y_0(t) = N_1x'(t)$  для некоторой матрицы  $N_1$ . С другой стороны,  $y_0(t)$  представляет собой часть вектора выхода  $y(t)$ , т. е.  $y_0(t) = N_2y(t)$  для некоторой матрицы  $N_2$ . Тогда для матриц  $N_1$  и  $N_2$  получаем уравнение  $N_1L_0 = N_2H$ , которое имеет ненулевое решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank}(L_0) + \text{rank}(H).$$

Если это условие выполняется, матрицы  $N_1$  и  $N_2$  определяются из уравнения

$$(N_1 \vdots -N_2) \begin{pmatrix} L_0 \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

где символ  $\vdots$  служит в качестве разделителя двух матриц. В противном случае вместо  $y_0(t)$  в модели (2) следует использовать  $y(t)$ , что приведет к расширению интервала  $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$ .



Известно [11, 12], что матрицы, описывающие модель, удовлетворяют уравнениям

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad G_* = \Phi G, \quad \Phi L = 0. \quad (4)$$

Дополнительное условие связано со вторым уравнением в модели (2), которое вместе с  $z(t) = Mx(t)$  представим в виде

$$Mx(t) = H_z \Phi x(t) + QN_2 Hx(t),$$

откуда следует уравнение

$$M = H_z \Phi + QN_2 H = (H_z \quad Q) \begin{pmatrix} \Phi \\ N_2 H \end{pmatrix}, \quad (5)$$

имеющее решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ N_2 H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ N_2 H \\ M \end{pmatrix}. \quad (6)$$

На основе уравнений (4) и (5) можно получить соотношения, которые в ряде случаев позволяют предварительно оценить возможность существования такого решения. Первое из таких условий имеет вид [11]

$$\text{rank} \begin{pmatrix} L_0 F \\ H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} + \text{rank}(L_0 F). \quad (7)$$

Для получения второго заменим в уравнении (5) матрицу  $\Phi$  на  $NL_0$  и преобразуем:

$$M = (H_z N \quad Q) \begin{pmatrix} L_0 \\ N_2 H \end{pmatrix}.$$

Условием разрешимости полученного уравнения является равенство

$$\text{rank} \begin{pmatrix} L_0 \\ N_2 H \\ M \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} L_0 \\ N_2 H \\ M \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Последовательность проверки приведенных условий изложим в виде алгоритма:

1. Определить матрицу  $L_0$  и из уравнения (3) найти матрицу  $N_2$ .
2. Проверить условия (7) и (8). При их выполнении из уравнения (5) найти матрицы  $H_z$  и  $Q$  и перейти к построению модели и наблюдателя, нечувствительных к возмущению.
3. При невыполнении одного условия (8) необходимо проанализировать каждую строку  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , матрицы  $M$  путем замены в условии (8)  $M$  на  $M_i$ . Из строк, удовлетворяющих этому

условию, сформировать матрицу  $M_0$  и для переменной  $z_0(t) = M_0 x(t)$  построить интервальный наблюдатель, оценивающий эту переменную, нечувствительный к возмущению. Для остальных строк матрицы  $M$ , объединенных в матрицу  $M_*$ , следует искать робастное решение, описанное в § 4, и построить второй наблюдатель, оценивающий переменную  $z_*(t) = M_* x(t)$ , который будет минимально чувствителен к возмущению.

4. При невыполнении одного условия (7) возможно только робастное решение, которое следует искать методами, описанными в § 4. Интервальный наблюдатель в этом случае будет минимально чувствителен к возмущению.

5. При невыполнении условий (7) и (8) также возможно только робастное решение, описанное в § 4. Если для найденной там матрицы  $\Phi$  выполняется условие (6), то переменную  $y_0(t)$ , т. е. невозмущенную шумами измерений часть вектора  $y(t)$ , можно найти. В противном случае это невозможно, и интервал  $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$  дополнительно расширяется за счет искажаемого возмущениями слагаемого  $Qy(t)$ .

## 2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Матрица  $F_*$  ищется в ИКФ:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что для обеспечения устойчивости модели собственные числа матрицы  $F_*$  по модулю не должны превосходить единицу; для используемой ИКФ они равны нулю.

Решение задачи осуществляется на основе уравнения [11]

$$(\Phi_1 \quad -J_* \quad \dots \quad -J_*^k)(V^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0, \quad (9)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} F^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix},$$

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} L & FL & \dots & F^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$\Phi_i$  и  $J_{*i}$  – строки матриц  $\Phi$  и  $J_*$  соответственно.

Отметим, что матрица  $V^{(k)}$  обеспечивает построение модели (2),  $L^{(k)}$  – нечувствительность ее к возмущениям. Уравнение (9) имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V^{(k)} : L^{(k)}) < lk + n. \quad (10)$$

Для построения модели из неравенства (10) определяется минимальное  $k$  и из уравнения (9) – строка  $(\Phi_1 : -J_{*1} : \dots : -J_{*k})$ , затем на основе соотношений

$$\Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad \Phi_k F = J_{*k} H, \quad (11)$$

полученных из уравнений (4) и ИКФ [11], строится матрица  $\Phi$ . Далее проверяется условие (6), выполнение которого означает, что матрица  $M$  может быть выражена через  $(\Phi^T H^T)^T$  и построенная линейная модель будет оценивать заданную переменную  $z(t) = Mx(t)$ ; матрицы  $H_z$  и  $Q$  определяются из алгебраического уравнения (5),  $G_*$  – из уравнений (4). Если условие (6) не выполняется, следует найти другое решение уравнения (9) при прежней или увеличенной размерности модели. Если оно не выполняется при всех  $k \leq n$ , необходимо использовать робастное решение, описанное в § 4.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ

Наблюдатель ищется в виде

$$\underline{x}_*(t+1) = F_* \underline{x}_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) - |J_*| E_k v_*,$$

$$\bar{x}_*(t+1) = F_* \bar{x}_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + |J_*| E_k v_*,$$

$$\underline{z}(t) = H_z \underline{x}_*(t) + Q y_0(t), \quad (12)$$

$$\bar{z}(t) = H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t),$$

$$\underline{x}_*(0) = \underline{x}_{*0}, \quad \bar{x}_*(0) = \bar{x}_{*0},$$

где  $E_k$  –  $k \times 1$ -матрица, составленная из единиц; матрица  $|J_*|$  составляется из абсолютных значений соответствующих элементов матрицы  $J_*$ ; по предположению  $x_*(0) \in [\underline{x}_{*0}, \bar{x}_{*0}]$  для некоторых известных векторов  $\underline{x}_{*0}, \bar{x}_{*0} \in R^k$ .

**Теорема.** Пусть  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , тогда для интервального наблюдателя (12) и всех  $t \geq 0$  выполняются соотношения

$$\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t), \quad \underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Q y_0(t), \\ \bar{z}(t) &= H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t) \end{aligned} \quad (13)$$

при  $H_z \geq 0$  и

$$\begin{aligned} \underline{z}(t) &= H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t), \\ \bar{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Q y_0(t) \end{aligned} \quad (14)$$

при  $H_z \leq 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** По аналогии с работой [2] введем ошибки оценивания

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t) &= x_*(t) - \underline{x}_*(t), \quad \bar{e}_*(t) = \bar{x}_*(t) - x_*(t), \\ \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t), \quad \bar{e}_z(t) = \bar{z}(t) - z(t). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом выражений (2) и (12) можно получить разностные уравнения

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= \\ &= F_* \underline{e}_*(t) + J_* (Hx(t) - y(t)) + |J_*| E_k v_* = \\ &= F_* \underline{e}_*(t) - J_* v(t) + |J_*| E_k v_*, \\ \bar{e}_*(t+1) &= \\ &= F_* \bar{e}_*(t) + J_* (y(t) - Hx(t)) + |J_*| E_k v_* = \\ &= F_* \bar{e}_*(t) + J_* v(t) + |J_*| E_k v_*. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как по условию  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , то из формулы (15) следует  $\underline{e}_*(0) \geq 0$ ,  $\bar{e}_*(0) \geq 0$ . Отметим, что в системе (16)  $|J_*| E_k v_* \pm J_* v(t) \geq 0$  при всех  $t \geq 0$  и  $F_* \geq 0$ . Ее решения при  $\underline{e}_*(0) \geq 0$ ,  $\bar{e}_*(0) \geq 0$  будут поэлементно неотрицательными, т. е.  $\underline{e}_*(t) \geq 0$ ,  $\bar{e}_*(t) \geq 0$  для всех  $t \geq 0$  [2]. Так как  $z(t) = H_z x_*(t) + Q y_0(t)$ , то при  $H_z \geq 0$  из выражений (13) и (15) имеем

$$\begin{aligned} \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t) = \\ &= H_z x_*(t) + Q y_0(t) - (H_z \underline{x}_*(t) + Q y_0(t)) = H_z \underline{e}_*(t), \\ \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t) = \\ &= H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t) - (H_z x_*(t) + Q y_0(t)) = H_z \bar{e}_*(t), \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенств  $\underline{e}_*(t) \geq 0$ ,  $\bar{e}_*(t) \geq 0$  и  $H_z \geq 0$  получаем  $\underline{e}_z(t) \geq 0$ ,  $\bar{e}_z(t) \geq 0$ , что эквивалентно  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$ . В случае  $H_z \leq 0$  из выражений (14) и (15) следует

$$\begin{aligned} \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t) = \\ &= H_z x_*(t) + Q y_0(t) - (H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t)) = -H_z \bar{e}_*(t), \\ \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t) = \\ &= H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t) - (H_z x_*(t) + Q y_0(t)) = -H_z \underline{e}_*(t), \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенств  $\underline{e}_*(t) \geq 0$ ,  $\bar{e}_*(t) \geq 0$  и





$H_z \leq 0$  также получаем  $\underline{e}_z(t) \geq 0, \bar{e}_z(t) \geq 0$ . Теорема доказана. ♦

**Замечание 1.** Если матрица  $H_z$  является знакопеременной, конечный результат остается прежним, но формулы для расчета верхних и нижних границ усложняются. Рассмотрим два случая.

• Пусть  $H_z$  – строка; без ограничения степени общности будем полагать, что ее первые  $p$  элементов положительны, а остальные отрицательны:  $H_z = (H_z^+; H_z^-)$ . Примем

$$\underline{z}(t) = H_z^+ \underline{x}_{*(p)}(t) + H_z^- \bar{x}_*^{(k-p)}(t) + Qy_0(t),$$

где  $\underline{x}_{*(p)}$  и  $\bar{x}_*^{(k-p)}$  – подвекторы векторов состояния  $\underline{x}_*$  и  $\bar{x}_*$ , содержащие первые  $p$  и последние  $k-p$  элементов соответственно. Тогда нетрудно получить следующее:

$$\begin{aligned} \underline{e}_z &= z - \underline{z} = \\ &= H_z^+ x_{*(p)} + H_z^- \bar{x}_*^{(k-p)} + Qy_0 - \\ &- (H_z^+ \underline{x}_{*(p)} + H_z^- \bar{x}_*^{(k-p)} + Qy_0) = \\ &= H_z^+ \underline{e}_{*(p)} - H_z^- \bar{e}_*^{(k-p)}, \end{aligned}$$

а поскольку  $H_z^+ \geq 0$  и  $H_z^- \leq 0$ , то  $\underline{e}_z(t) \geq 0$ . Аналогично показывается, что  $\bar{e}_z(t) \geq 0$ , если

$$\bar{z}(t) = H_z^+ \bar{x}_{*(p)}(t) + H_z^- \underline{x}_*^{(k-p)}(t) + Qy_0(t).$$

• Пусть матрица  $H_z$  содержит несколько строк:  $H_z = \begin{pmatrix} H_z^+ \\ H_z^- \end{pmatrix}$ , где  $H_z^+$  и  $H_z^-$  – такие подматрицы, что  $H_z^+ \geq 0$  и  $H_z^- \leq 0$ . Примем

$$\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} H_z^+ \underline{x}_*(t) \\ H_z^- \bar{x}_*(t) \end{pmatrix} + Qy_0(t),$$

тогда, как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} \underline{e}_z &= \begin{pmatrix} H_z^+ \\ H_z^- \end{pmatrix} x_* + Qy_0 - \left( \begin{pmatrix} H_z^+ \underline{x}_* \\ H_z^- \bar{x}_* \end{pmatrix} + Qy_0 \right) = \\ &= \begin{pmatrix} H_z^+ \underline{e}_* \\ -H_z^- \bar{e}_* \end{pmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Более сложный вариант, когда  $H_z$  содержит несколько строк, каждая из которых имеет структуру вида  $(H_z^+; H_z^-)$ , сводится к комбинации двух рассмотренных случаев.

**Замечание 2.** Одним из главных в теореме является условие  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , которое для положительной системы (14) дает  $\underline{e}_*(t) \geq 0, \bar{e}_*(t) \geq 0$  для всех  $t \geq 0$ . Отсутствие обратных связей в наблюдателе и устойчивость матрицы  $F_*$  позволяют утверждать, что указанные неравенства будут выполняться для некоторого  $t > 0$  и при невыполнении условия  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , поскольку начальные условия «забываются» при  $t \geq k$ .

Действительно, обозначим  $v_0(t) = |J_*| E_k v_* - J_* v(t) \geq 0$  и рассмотрим первое уравнение в системе (14); известно [12], что его решение может быть представлено в виде

$$\underline{e}_*(t) = F_*^t \underline{e}_*(0) + \sum_{i=0}^{t-1} F_*^{t-i-1} v_0(i). \quad (17)$$

Легко проверить, что  $F_*^k = 0$ , тогда при  $t \geq k$  значение  $\underline{e}_*(t)$  будет определяться вторым слагаемым в правой части равенства (17), которое по построению неотрицательно, поэтому  $\underline{e}_*(t) \geq 0$  для всех  $t \geq k$ . Аналогично можно показать, что и  $\bar{e}_*(t) \geq 0$  для всех  $t \geq k$ .

#### 4. РОБАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

Если условие (10) не выполняется при всех  $k < n$ , необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад возмущения в модель. Оно практически полностью совпадает с решением, предложенным в работе [1], за исключением того, что минимизируется норма  $\|(\Phi_1; -J_1; \dots; -J_k)L^{(k)}\|_F$  при выполнении условия

$$(\Phi_1; -J_1; -J_2; \dots; -J_k)V^{(k)} = 0, \quad (18)$$

т. е. матрица  $R_*$  из статьи [1] заменяется на  $\Phi_1$ . Можно сказать, что задача состоит в определении такого решения  $(\Phi_1; -J_1; \dots; -J_k)$ , которое «максимально ортогонально» столбцам матрицы  $L^{(k)}$ .

Как и в работе [1], на основе всех линейно независимых решений уравнения (18) для некоторой фиксированной размерности  $k$  строится матрица

$$W = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & -J_1^{(1)} & -J_2^{(1)} & \dots & -J_k^{(1)} \\ \Phi_1^{(N)} & -J_1^{(N)} & -J_2^{(N)} & \dots & -J_k^{(N)} \end{pmatrix},$$

находится сингулярное разложение  $WL^{(k)} = U_L \Sigma_L V_L$ , первый транспонированный столбец матрицы  $U_L$  выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов  $w = (w_1, \dots, w_N)$  и принимается  $(\Phi_1 \vdots -J_1 \vdots \dots \vdots -J_k) = wW$ . Определением строк матрицы  $\Phi$  из формулы (11) и матриц  $G_* = \Phi G$  и  $L_* = \Phi L$  завершается синтез модели (2), минимально чувствительной к возмущениям.

Из-за появления слагаемого  $L_* \rho(t)$  в модели (2) динамика интервального наблюдателя при  $v \neq 0$  корректируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{x}_*^+ &= F_* \underline{x}_* + J_* y + G_* u - |J_*| E_k v_* - |L_*| E_k \rho_*, \\ \bar{x}_*^+ &= F_* \bar{x}_* + J_* y + G_* u + |J_*| E_k v_* + |L_*| E_k \rho_*. \end{aligned}$$

Выражения (14) для ошибок оценивания также корректируются:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*^+ &= F_* \underline{e}_* - J_* v + |J_*| E_k v_* + L_* \rho + |L_*| E_k \rho_*, \\ \bar{e}_*^+ &= F_* \bar{e}_* + J_* v + |J_*| E_k v_* - L_* \rho + |L_*| E_k \rho_*. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что искомым результатом следует из доказательства теоремы и очевидного дополнительного неравенства  $|L_*| E_k \rho_* \pm L_* \rho(t) \geq 0$ .

## 5. ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПОЛНОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Предложенный подход к получению интервальной оценки заданной переменной  $z(t) = Mx(t)$  в ряде случаев может быть применен к аналогичной оценке полного вектора состояния  $x(t)$  следующим образом. Не уменьшая степени общности, примем, что матрица  $H$  имеет максимальный ранг и

$$\begin{aligned} H &= (H_0 \ 0), \quad y(t) = H_0 x^{(1)}(t) + v(t), \\ x(t) &= \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $H_0$  – невырожденная матрица. Определим

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= y(t) - E_l v_*, \quad \bar{y}(t) = y(t) + E_l v_*, \\ \underline{x}^{(1)}(t) &= H_0^{-1} \underline{y}(t), \quad \bar{x}^{(1)}(t) = H_0^{-1} \bar{y}(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{e}^{(1)}(t) &= x^{(1)}(t) - \underline{x}^{(1)}(t) = \\ &= H_0^{-1}(y(t) - v(t)) - H_0^{-1} \underline{y}(t) = H_0^{-1}(E_l v_* - v(t)), \\ \bar{e}^{(1)}(t) &= \bar{x}^{(1)}(t) - x^{(1)}(t) = \\ &= H_0^{-1} \bar{y}(t) - H_0^{-1}(y(t) - v(t)) = H_0^{-1}(E_l v_* + v(t)). \end{aligned}$$

Полагая, что  $H_0^{-1} \geq 0$ , из  $E_l v_* \pm v(t) \geq 0$  получаем  $\underline{e}^{(1)}(t) \geq 0$  и  $\bar{e}^{(1)}(t) \geq 0$ , откуда следует  $\underline{x}^{(1)}(t) \leq x^{(1)}(t) \leq \bar{x}^{(1)}(t)$ . Таким образом, переменная  $x^{(1)}(t)$  при условии  $H_0^{-1} \geq 0$  оценивается на основе выражения (19), при этом возмущение  $\rho(t)$  на эту оценку влияния не оказывает.

**Замечание 3.** Условие  $H_0^{-1} \geq 0$  с очевидностью выполняется в практически важных случаях, когда компоненты вектора  $x^{(1)}(t)$  измеряются отдельными датчиками и  $H_0 = H_0^{-1} = I_l$ .

Переменная  $x^{(2)}(t)$  может быть интервально оценена наблюдателем вида (12). Полагая  $z(t) = x^{(2)}(t) = M^{(2)}x(t)$  для некоторой матрицы  $M^{(2)}$ , с помощью критерия (7) с заменой в нем матрицы  $M$  на  $M^{(2)}$  можно оценить возможность построения наблюдателя, не чувствительного к возмущению. Далее в зависимости от результатов проверки строить наблюдатель вида (12) или робастный.

**Замечание 4.** Условие  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$  теоремы следует из  $\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$  только в том случае, когда  $\Phi \geq 0$ . Действительно, при  $\Phi \geq 0$  и  $x(0) - \underline{x}(0) \geq 0$  получаем  $\Phi(x(0) - \underline{x}(0)) \geq 0$ , откуда  $x_*(0) = \Phi x(0) \geq \Phi \underline{x}(0) = \underline{x}_*(0)$ ; аналогично доказывается, что  $x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ . Как показано в замечании 1, это, однако, не является критичным, так как соотношение  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  будет обязательно выполняться при  $t \geq k$ .

## 6. ПРИМЕР

Рассмотрим дискретизованную модель электропривода

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= k_1 x_2(t) + x_1(t), \\ x_2(t+1) &= k_2 x_3(t) + x_2(t) + \rho(t), \\ x_3(t+1) &= k_3 x_2(t) + k_4 x_3(t) + k_5 u(t), \\ y_1(t) &= x_1(t) + v_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) + v_2(t), \end{aligned} \quad (20)$$

где коэффициенты  $k_1 \div k_5$  представляют параметры электропривода и интервал дискретизации; возмущение  $\rho(t)$  обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента, приведенного к валу двигателя. Рассматриваемая модель описывается матрицами

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_5 \end{pmatrix},$$



$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Постоянный интервальный наблюдатель, оценивающий переменную  $x_2(t)$ , приняв  $M = (0 \ 1 \ 0)$ . Поскольку возмущение входит в уравнение для этой переменной, модель будет чувствительна к нему, поэтому ее можно строить, приняв  $L = 0$ . Рассмотрим уравнение (9) с  $L^{(k)} = 0$  при  $k = 1$ :

$$(\Phi - J_*) \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Его решение дает  $\Phi = (1/k_1 \ -1 \ 0)$  и  $J_* = (1/k_1 \ -k_2)$ , откуда  $G_* = 0$ ,  $L_* = -1$ . Нетрудно проверить, что условие (5) выполняется и  $H_z = -1$ ,  $Q = (1/k_1 \ 0)$ . Искомая модель имеет вид

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= (1/k_1)H_1x(t) - k_2H_2x(t) - \rho(t), \\ z(t) &= -x_*(t) + (1/k_1)y_1(t). \end{aligned}$$

На основе этой модели с учетом  $H_z = -1$  строится интервальный наблюдатель, оценивающий переменную  $z(t) = x_2(t)$ :

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= (1/k_1)y_1(t) - k_2y_2(t) - \\ &\quad -(1/k_1)v_{*1} - k_2v_{*2} - \rho_*, \\ \bar{x}_*(t+1) &= (1/k_1)y_1(t) - k_2y_2(t) + \\ &\quad + (1/k_1)v_{*1} + k_2v_{*2} + \rho_*, \\ \underline{z}(t) &= -\bar{x}_*(t) + (1/k_1)y_1(t), \\ \bar{z}(t) &= -\underline{x}_*(t) + (1/k_1)y_1(t). \end{aligned} \tag{21}$$

Переменные  $x_1(t)$  и  $x_3(t)$  могут быть оценены согласно выражению (19):

$$\begin{aligned} \underline{x}_1(t) &= y_1(t) - v_{*1}, \quad \underline{x}_3(t) = y_2(t) - v_{*2}, \\ \bar{x}_1(t) &= y_1(t) + v_{*1}, \quad \bar{x}_3(t) = y_2(t) + v_{*2}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные оценки с оценками, которые строятся на основе методов, рассмотренных в работе [2] и аналогичных работах, можно сделать вывод о том, что предложенный подход дает более простой наблюдатель и интервалы меньших размеров, поскольку, в частности, интервалы для переменных  $x_1(t)$  и  $x_3(t)$  не содержат возмущение  $\rho(t)$ .

Для моделирования рассмотрим систему (20) и наблюдатель (21) с  $u(t) = 0,2\sin(t/100)$ ; шумы  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  и  $\rho(t)$  представляют собой случайные процессы с дисперсией, равной 0,5. Для простоты примем  $k_1 = k_2 = k_5 = 1$ ,  $k_3 = k_4 = -1$ . Результаты моделирования приведены на рис. 1 и 2, где для  $v_{1*} = v_{2*} = \rho_* = 0,01$  показано поведение переменной

$x_2(t)$  и ее нижней и верхней оценок  $\underline{x}_*(t)$  и  $\bar{x}_*(t)$  для начальных условий  $x(0) = 0$ ,  $\underline{x}(0) = -0,05$ ,  $\bar{x}(0) = 0,05$  и  $x(0) = 0$ ,  $\underline{x}(0) = 0,05$ ,  $\bar{x}(0) = -0,05$  соответственно. Как и отмечено в замечании 1, начальные условия влияют только на оценки в начальных тактах.

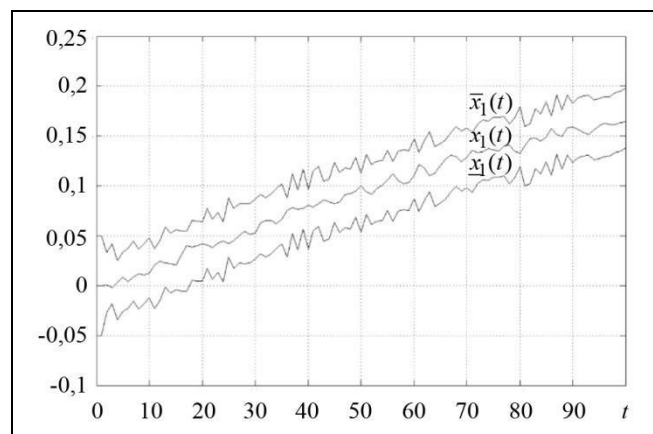


Рис. 1. Поведение переменной  $x_1(t)$  и ее оценок  $\underline{x}_1(t)$  и  $\bar{x}_1(t)$  для начальных условий  $x(0) = 0$ ,  $\underline{x}(0) = -0,05$ ,  $\bar{x}(0) = 0,05$

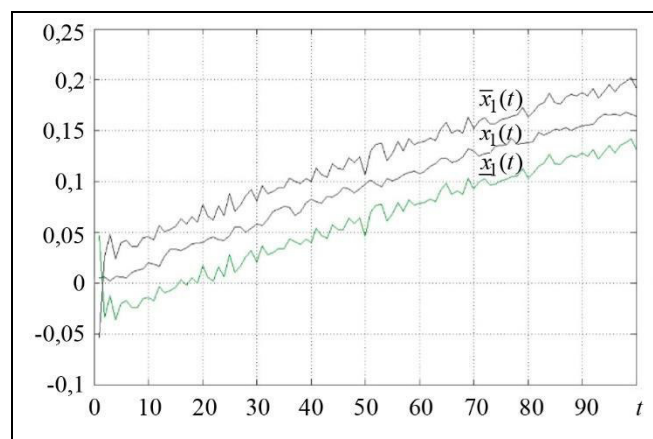


Рис. 2. Поведение переменной  $x_1(t)$  и ее оценок  $\underline{x}_1(t)$  и  $\bar{x}_1(t)$  для начальных условий  $x(0) = 0$ ,  $\underline{x}(0) = 0,05$ ,  $\bar{x}(0) = -0,05$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была поставлена и решена задача построения интервальных наблюдателей для линейных динамических систем, описываемых моделями с дискретным временем, при наличии внешних возмущений и шумов измерений. На основе идентификационной канонической формы получены соотношения, позволяющие строить интервальный наблюдатель минимальной размерности, оценивающий множество допустимых значений заданной

линейной функции вектора состояния системы. Рассмотрен робастный подход к решению задачи; показано, как на основе предложенного решения может быть произведена оценка полного вектора состояния. Изложенное иллюстрируется практическим примером.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир.* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // Изв. РАН. ТИСУ. – 2022. – № 5. – С. 3–13. [Zhirabok, A., Zuev, A., Kim Chung // Method to Design Interval Observers for Linear Time-Invariant Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2022. – Vol. 61, no. 5. – P. 485–495.]
2. *Ефимов Д.В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 2. – С. 5–49. [Efimov, D., Raissi, T. Interval Observer Design for Dynamic Systems with Uncertainties // Automation and Remote Control. – 2016. – Vol. 77, iss. 2. – P. 191–225.]
3. *Khan, A., Xie, W., Zhang, L., Liu, L.* Design and Applications of Interval Observers for Uncertain Dynamical Systems // IET Circuits Devices Syst. – 2020. – Vol. 14. – P. 721–740.
4. *Kolesov, N., Gruzlikov, A., Lukoyanov, E.* Using Fuzzy Interacting Observers for Fault Diagnosis in Systems with Parametric Uncertainty // Proc. XII-th Inter. Sympos. «Intelligent Systems», INTELS'16. – Moscow, Russia, 2016. – P. 499–504.
5. *Кремлев А.С., Чеботарев С.Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. – 2013. – Т. 56, № 4. – С. 42–46. [Kremlev, A., Chebotarev, S. Interval Observer Synthesis for Linear LPV System // Izv. Vuzov. Priboro-stroenie. – 2013. – Vol. 56, no. 4. – P. 42–46 (In Russian)]
6. *Chebotarev, S., Efimov, D., Raissi, T., Zolghadri, A.* Interval Observers for Continuous-Time LPV Systems with  $L_1/L_2$  Performance // Automatica. – 2015. – Vol. 51. – P. 82–89.
7. *Mazenc, F., Bernard, O.* Asymptotically Stable Interval Observers for Planar Systems with Complex Poles // IEEE Trans. Automatic Control. – 2010. – Vol. 55, no. 2. – P. 523–527.
8. *Blesa, J., Puig, V., Bolea, Y.* Fault Detection Using Interval LPV Models in an Open-Flow Canal // Control Engineering Practice. – 2010. – Vol. 18. – P. 460–470.
9. *Zheng, G., Efimov, D., Perruquetti, W.* Interval State Estimation for Uncertain Nonlinear Systems // Proc. IFAC Ncolcos. – Toulouse, France, 2013.
10. *Zhang, K., Jiang, B., Yan, X., Edwards, C.* Interval Sliding Mode Based Fault Accommodation for Non-minimal Phase LPV Systems with Online Control Application // Intern. J. Control. – 2020. – Vol. 93, no. 11 – P. 2675–2689. – DOI: 10.1080/00207179.2019.1687932.
11. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е.* Методы идентификации и локализации дефектов в линейных системах на основе скользящих наблюдателей // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2019. – № 6. – С. 73–89. [Zhirabok, A., Zuev, A., Shumsky, A.E. Methods of Diagnosis in Linear Systems Based on Sliding Mode Observers. Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2019. – Vol. 58, no. 6. – P. 898–914.]
12. *Квакернаак Х., Сиван П.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. [Kwarernaak, C., Sivan, R. Linear Optimal Control Systems. – N.-Y.: Wiley, 1972.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 22.01.2023,  
после доработки 14.03.2023.  
Принята к публикации 14.03.2023.

**Алексей Нилович Жиравок** – д-р техн. наук, Дальневосточный федеральный университет, Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток, ✉ zhirabok@mail.ru,

**Александр Валерьевич Зуев** – канд. техн. наук, Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, ✉ alvzuev@yandex.ru,

**Ким Чхун Ир** – аспирант, Дальневосточный федеральный университет, ✉ kim.ci@dvfu.ru.



# INTERVAL OBSERVER DESIGN FOR DISCRETE LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH UNCERTAINTIES

A.N. Zhirabok<sup>1</sup>, A.V. Zuev<sup>2</sup>, and C.I. Kim<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> Institute of Marine Technology Problems, Russian Academy of Sciences, Far Eastern Branch, Vladivostok, Russia  
<sup>1,3</sup> Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

<sup>1</sup>✉ zhirabok@mail.ru, <sup>2</sup>✉ alvzuev@yandex.ru, <sup>3</sup>✉ kim.ci@dvfu.ru

**Abstract.** This paper considers the problem of constructing an interval observer for systems described by discrete-time linear models under uncertainties in the form of exogenous disturbances and measurement noise (unknown bounded functions). Such an observer is designed using the minimal-dimension model of the original system invariant with respect to the disturbances. The dynamic matrix of this model is defined in the identification canonical form. We present relations to design an interval observer of minimal complexity for estimating the set of admissible values of a given linear function of the state vector. If the observer invariant with respect to the disturbances does not exist, we suggest a method to construct an observer with minimal sensitivity to them based on the singular value decomposition of system matrices. Theoretical results are illustrated by an example.

**Keywords:** linear systems, uncertainties, models, interval observers.

**Funding.** This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 23-29-000191, <https://rscf.ru/project/23-19-00191/>.

# ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ И КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В.К. Завадский, В.П. Иванов, Е.Б. Каблова, Л.Г. Кленовая, В.Ю. Рутковский

**Аннотация.** Сформулирована задача синтеза терминального управления с разделением координат состояния объекта на два типа: медленно меняющиеся координаты, участвующие в краевых условиях, и координаты контура стабилизации. Для построения управления введена прогнозирующая модель объекта. Получено дифференциальное уравнение для прогнозируемых невязок краевых условий. На его основе произведена дискретизация системы. Задача синтеза рассмотрена поэтапно для управления в классе кусочно-постоянных и кусочно-непрерывных функций. В качестве примера рассмотрена задача управления расходом топлива ступени жидкостной ракеты-носителя. Актуальность расширения класса функций связана с возможностью учета дополнительных требований к процессу управления. При этом для выбора непрерывных функций на интервалах между разрывами управления используются локальные краевые условия, полученные на этапе синтеза терминального управления в классе кусочно-постоянных функций.

**Ключевые слова:** терминальное управление, управление с прогнозирующими моделями, управление расходом топлива ракеты-носителя.

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи терминального управления возникают во многих областях техники. В ракетодинамике примерами таких задач являются выведение на околоземную орбиту, расходование топлива до его полной выработки из баков, сближение космических аппаратов и др. В указанных примерах задача управления заключается в приведении объекта в заданные конечные состояния при известных начальных условиях. Конечные условия могут определяться в виде значений координат состояния объекта, а также и более сложным образом, например, в виде функций от координат состояния.

Современная концепция терминального управления объектами ракетно-космической техники в наиболее полном объеме сформулирована в монографии [1]. Принципиальным элементом способа терминального управления является прогнозирование конечного состояния объекта в виде заданных краевых условий.

Методы прогнозирования в области ракетодинамики рассматривались уже в работах [2–4]. Применение современных методов управления с прогнозирующей моделью к нелинейным системам подробно рассматривается в монографии [5].

Общая идея метода состоит в том, что задается прогнозирующая модель объекта, для которой находится оптимальное управление в текущий и последующие моменты времени. При этом на реализацию идет только текущее управление, а в следующий момент времени процедура оптимизации повторяется. В публикации [6] для заданного управления в модели прогнозирования определяется производная прогнозируемых значений координат по времени. Методы синтеза алгоритмов управления с прогнозирующей моделью (англ. *Model Predictive Control*, MPC) развивались также в направлении применения оптимизации в реальном времени [7] и придания робастности и адаптивности замкнутой системе [8, 12]. Для снижения вычислительной нагрузки процедура прогнозирования производится для ограниченного числа моментов времени.

В приведенных выше задачах ракетодинамики терминальное управление формулируется как часть общей задачи управления объектом путем выделения в объекте сравнительно медленно протекающих физических процессов, определяющих движение к заданной цели. При этом общее управление декомпозируется на терминальное управление и задачу стабилизации объекта относительно



движения к заданной цели. В качестве примера можно привести стабилизацию углового положения ракеты-носителя относительно программы угла тангажа при управлении выведением. Отметим, что управление непосредственно воздействует на ту динамическую часть объекта, которая относится к контуру стабилизации. Синтез терминального управления, как правило, рассматривается независимо от контура стабилизации. При этом координаты объекта, формируемые на выходе контура стабилизации, принимаются в качестве терминального управления.

В статье [9] задача синтеза терминального управления рассматривается при условии декомпозиции общей задачи с учетом формального описания динамики объекта, включая контур стабилизации. Суть такого подхода состоит не в том, чтобы учитывать погрешности работы этого контура. Целью такого рассмотрения является учет динамики переходных процессов реакции контура стабилизации на управляющее воздействие. В этом случае идея прогнозирования конечного состояния объекта реализуется для всего динамического тракта системы: от места непосредственного воздействия управления до значений невязок краевых условий. Описанный подход рассматривался в работах [9–11] при управлении в классе кусочно-постоянных функций. В хронике семинара [11, с. 1138–1139] упоминается о докладе Д.Д. Табалина «О терминальной задаче с прогнозированием невязок краевых условий». В данной статье решается задача синтеза управления в классе кусочно-непрерывных функций. В силу значительной связанности этой задачи с подходом, рассмотренным в статье [9], в настоящей работе приводятся основные результаты решения задачи синтеза в классе кусочно-постоянных функций. Актуальность расширения класса функций связана с возможностью учета дополнительных требований к процессу управления. При этом для выбора непрерывных функций на интервалах между разрывами управления используются локальные краевые условия, полученные на этапе синтеза терминального управления в классе кусочно-постоянных функций.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для понимания содержания процессов управления в системе, решающей задачу приведения объекта в заданное конечное состояние, оказывается полезным выделение в описании объекта двух

взаимосвязанных систем уравнений, различающихся динамикой переходных процессов.

Рассматривается динамическая система

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_2(t), u(t), t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_1 \in R^{n_1}$ ;  $x_2 \in R^{n_2}$ ;  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x_0 \in X_0 \subset R^{n_1+n_2}$ ;  $u$  – управление,  $u \in U \subset R^m$ ;  $t \in [t_0, T]$ .

Здесь первая система уравнений для координат  $x_1(t)$  описывает движение объекта к заданной цели. Объекты управления терминальных систем в части переходных процессов в заданное конечное состояние весьма инерционны (как правило, представляют собой интегрирующие звенья).

Управление этими процессами производится путем воздействия на другие координаты объекта  $x_2(t)$  с быстро затухающей динамикой переходных процессов. Суть такого управления состоит в задании значений этих координат. Управление в традиционном понимании, а именно положение исполнительных органов (приводов, рулей и т. д.), заключается в стабилизации координат объекта относительно заданных значений. Работа контура стабилизации в замкнутом виде описывается системой уравнений для координат  $x_2(t)$ . Управление  $u(t)$  в правой части этих уравнений представляет собой заданные значения, уставки для координат  $x_2(t)$ .

В качестве примера можно привести стабилизацию углового положения ракеты-носителя относительно программы угла тангажа при управлении выведением. Таким образом, терминальное управление непосредственно воздействует на ту динамическую часть объекта, которая относится к контуру стабилизации. В математических постановках задач оптимального управления синтез терминального управления, как правило, рассматривается независимо от контура стабилизации.

Здесь предполагается, что решение системы (1) для любых начальных условий существует и единственно.

Ставится задача терминального управления – перевода системы в состояние  $x$ , удовлетворяющее краевым (граничным) условиям  $\psi$  в момент времени  $T$ :

$$\psi(x_1) : \psi_i(x_{1i}(T)) = 0, \quad i \in L \subset \overline{1, \ell},$$

где  $\ell$  – число краевых условий. Предполагается, что краевые условия накладываются только на координаты  $x_1$ , а граничные условия представляют собой вектор условий для отдельных  $x_{1i}$ . Функция  $\psi$  предполагается дифференцируемой. Отметим, что при формулировке некоторых задач терминального управления краевые условия могут накладываться на часть координат  $x_2$ .

Момент времени  $T > t_0$  либо является фиксированным, либо определяется первым моментом выполнения  $p$ -го краевого условия  $\psi_p(x_{1p}) = 0$ .

Координаты  $x_2$  объекта формируются на выходе стабилизирующего контура системы управления. В данном случае работа контура рассматривается только в части переходных процессов реакции на изменение управляющего воздействия. Предполагается, что переходный процесс завершается на интервале, существенно меньшем, чем интервал терминального управления. Ограничением общности является независимость динамики координат состояния  $x_2$  от координат объекта  $x_1$ .

Рассмотрим систему (1) с прогнозирующей моделью

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_1}{d\tau} &= f_1(\hat{x}_1(\tau), \hat{x}_2(\tau), \tau), \quad \tau \in [t, T], \\ \frac{d\hat{x}_2}{d\tau} &= 0, \\ \hat{x}(t) &= x(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Прогнозируемой невязкой краевых условий (в силу прогнозирующей модели (2)) будем называть

$$z(t) \equiv \psi(\hat{x}_1(T|t)),$$

где момент времени  $T$  вычисляется для системы (2) так же, как и для исходной системы (1), т. е. он либо фиксирован, либо определяется первым моментом выполнения краевого условия  $\psi_p$ .

Через  $\hat{x}_1(T|t)$  обозначено значение вектора координат  $\hat{x}_1(T)$  в силу системы уравнений (2), прогнозируемого в момент времени  $t$ .

В работе [9], с учетом того, что  $z(t)$  является функцией  $x(t)$ ,  $t$ , получено дифференциальное уравнение для невязки  $z(t)$  следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}_1(T|t)} \left[ \frac{\partial \hat{x}_1(T|t)}{\partial x_2(t)} f_2(x_2(t), u(t), t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{dT}{dt} f_1(\hat{x}_1(T|t), x_2(t), T) \right]. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем полагать, что  $T = \text{const}$ . В этом случае получим:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}_1(T|t)} \frac{\partial \hat{x}_1(T|t)}{\partial x_2(t)} f_2(x_2(t), u(t), t). \quad (3)$$

Введем обозначение  $dz/dx_2$ , под ним будем понимать матрицу, на которую в выражении для  $dz/dt$  домножается функция  $f_2$ . В данных обозначениях формула (3) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t), t) f_2(x_2(t), u(t), t). \quad (4)$$

Будем решать задачу синтеза терминального управления объектом (1) при условии формирования управления с обратной связью как функции прогнозируемых невязок краевых условий, определяемых дифференциальным уравнением (3). Управление будем выбирать в классе кусочно-непрерывных функций.

Задачу синтеза будем решать в два этапа. Первоначально будем полагать, что управление выбирается в классе кусочно-постоянных функций. Из решения этой задачи синтеза формируются локальные краевые условия. Выполнение локальных краевых условий в совокупности обеспечивает решение исходной терминальной задачи. На следующем этапе расширим класс функций для выбора управления. Будем полагать, что на интервалах между разрывами управление является непрерывно изменяющейся функцией. Будем выбирать такое управление, с учетом локальных краевых условий, полученных при кусочно-постоянном управлении.

---

## 2. ФОРМИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ РАЗРЫВА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ

---

Пусть  $u(t)$  – кусочно-постоянная функция времени;  $t_j, j = 1, 2, \dots, k-1$ , – моменты времени скачкообразного изменения функции  $u(t)$ ,  $t_k = T$ . В этом случае может быть получено разностное уравнение для невязок  $z(t_j)$  – аналог дифференциального уравнения (4). Воспользуемся результатами, полученными в работе [9].

Проинтегрируем уравнение (4) на малом интервале  $[t_j; t_j + \delta t]$ :





$$\begin{aligned}
 z(t_j + \delta t) &= \\
 &= z(t_j) + \int_{t_j}^{t_j + \delta t} \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(\tau), \tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau = \\
 &= z(t_j) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_j), t_j) \Delta x_2 + o(\delta t).
 \end{aligned}$$

Здесь  $\delta t$  – интервал времени переходного процесса в объекте (1) по координате  $x_2$  при скачкообразном изменении управляющего воздействия от величины  $u(t_j)$  до величины  $u(t_{j+1})$  в момент времени  $t_j$ . При  $\tau \in [t_j + \delta t, t_{j+1}]$   $f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) = 0$ .

При малых  $\delta t$  переходим к дискретной системе:

$$\begin{aligned}
 z(t_{j+1}) &= z(t_j) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_j), t_j) \Delta x_2(t_j), \\
 j &= 0, 1, 2, \dots, k-1, z(t_k) = z(T),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\Delta x_2(t_j) = \int_{t_j}^{t_j + \delta t} f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau.$$

Переформулируем исходную задачу терминального управления. Вместо нахождения управления  $u(t)$  в классе кусочно-постоянных функций будем искать дискретную последовательность изменения приращения координаты  $x_2(t)$  в моменты времени  $t_j, j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ , т. е.  $\Delta x_2(t_j)$ .

Рассмотрим случай, когда отсутствуют ограничения на возможные значения  $\Delta x_2$ . Будем искать решение терминальной задачи

$$\{\Delta x_2(t_j)\} : z(t_k) = 0. \tag{6}$$

Будем полагать, что в формуле (5)

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_j), t_j) = \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_j).$$

Задача (6) применительно к системе уравнений (5) решается путем обратного движения от момента  $t_{k-1}$ . Например, для момента  $t_{k-1}$  задается условие для однозначного выбора  $\Delta x_2(t_{k-1})$  и одновременно формулируется граничное условие для всех управлений в моменты времени, предшествующие  $t_{k-1}$ . Условия формируются путем задания линейных операторов относительно невязок  $z(t_k), z(t_{k-1})$ . Образующаяся в результате система уравнений относительно невязки  $z(t_k)$  имеет единственное нулевое решение. При переходе к моменту  $t_{k-2}$  учитывается решение, полученное для  $\Delta x_2(t_{k-1})$ .

В итоге исходная задача управления (6) с условиями на правом конце траектории преобразуется в эквивалентную совокупность локальных задач управления для конечного числа дискретных моментов времени:

$$\begin{aligned}
 &\{\Delta x_2(t_{j-1})\} : \\
 &\frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{j-1}) K(t_j) z(t_j) = 0 \quad \forall j \in \overline{p, k}, \\
 &\{\Delta x_2(t_1), \Delta x_2(t_2), \dots, \Delta x_2(t_{j-2}), K(t_{j-1})\} : \\
 &K(t_{j-1}) z(t_{j-1}) = 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что в выражении (7) первое уравнение предназначено для выбора текущего управления  $\Delta x_2(t_{j-1})$ . При умножении на  $\frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{j-1})$  формируются невязки, число которых равно размерности вектора управления.

Второе уравнение задает локальные краевые условия для выбора управляющих воздействий в моменты времени, предшествующие  $t_{j-1}$ .

Матрица  $K(t_{j-1})$  определяется рекуррентным выражением

$$\begin{cases}
 K(t_k) = E, \\
 K(t_{j-1}) = \left( E - K(t_j) \frac{\partial z}{\partial x_2} \left( \frac{\partial z^T}{\partial x_2} K(t_j) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^{-1} \right. \\
 \left. \times \frac{\partial z^T}{\partial x_2} K(t_j) \right) K(t_j) \quad \forall j \in \overline{p, k},
 \end{cases} \tag{8}$$

где  $E$  – единичная матрица,

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{j-1}).$$

Обозначим  $z_j(t_j) = K(t_j) z(t_j)$ . Вектор  $z_j(t_j)$  представляет собой вектор невязок  $z(t_k)$  при управлениях  $\Delta x_2(t_{j-1}), \Delta x_2(t_j), \dots, \Delta x_2(t_{k-1})$ , определяемых в соответствии с формулой (7).

Пусть из выражения (7) получены значения  $\Delta x_2(t_{j-1}) \forall j \in \overline{p, k}$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta x_2(t_{j-1}) &= - \left( \frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{j-1}) K(t_j) \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{j-1}) \right)^{-1} \times \\
 &\times \frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{j-1}) K(t_j) z(t_{j-1}) \quad \forall j \in \overline{p, k},
 \end{aligned} \tag{9}$$

и определены невязки  $z_j(t_j)$ . В этом случае  $z_j(t_j) = z(t_k)$  и первое уравнение в выражении (7) может быть представлено в виде системы линейных уравнений относительно  $z(t_k)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{j-1})K(t_j)z(t_j) = \\ & = \frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{j-1})z(t_k) = 0 \quad \forall j \in \overline{p, k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Как показано в работе [9], система уравнений (10) имеет единственное нулевое решение  $z(t_k) = 0$ , если ранг матрицы

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1}) & \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-2}) & \dots & \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{p-1}) \end{array} \right] \text{ равен раз-}$$

мерности вектора  $z(t_k)$ . В этом случае управление вида (9) является решением исходной терминальной задачи.

Стратегия управления, соответствующая выражению (7), накладывает ограничения на траекторию движения объекта для значений вектора  $z(t)$  в конечном числе моментов времени разрыва управления. При этом на интервалах между этими моментами возможны вариации управления по координатам  $x_2$ . Эти вариации можно выбирать с учетом целевых функционалов от координат состояния и управления. Таким образом, имеется возможность расширения класса функций для выбора управления с учетом критериев нетерминального типа.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В КЛАССЕ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Сформулируем задачу синтеза терминального управления в классе кусочно-непрерывных функций, дополнив постановку задачи из § 1.

Так же, как в предшествующем разделе, будем полагать, что объект управления описывается уравнением (1), а прогнозирующая модель – уравнением (2), управление  $u(t)$  скачкообразно изменяется в дискретные моменты времени  $t_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ . При этом на интервалах  $[t_j, t_{j+1}]$   $u(t)$  – непрерывная функция времени. Известно дифференциальное уравнение (4) для вектора прогнозируемых невязок  $z(t)$ . В уравнении (4) будем полагать, что  $\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t), t) = \frac{\partial z}{\partial x_2}(t)$ . Известно решение

локальных задач синтеза управления (7) в классе кусочно-постоянных функций:  $\Delta x_2(t_{j-1}) \quad \forall j \in \overline{p, k}$  для разностного уравнения (5). Будем выбирать управление  $u(t)$  в классе кусочно-непрерывных функций, для которого на интервалах между моментами времени  $t_{j-1}, t_j \quad \forall j \in \overline{p, k}$  выполняются условия

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{j-1})K(t_j)z(t_j) = 0 \quad \forall j \in \overline{p, k}, \\ & K(t_{j-1})z(t_{j-1}) = 0, \end{aligned}$$

где матрица  $K(t_{j-1})$  определяется выражением (8). В этом случае для невязки  $z(t_k)$  и кусочно-непрерывной функции  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$ , можно записать

$$z(t_k) = z(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau. \quad (11)$$

Будем полагать, что выполняется условие

$$\frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{k-1})z(t_k) = 0. \quad (12)$$

Это условие сужает рассматриваемый класс кусочно-непрерывного управления. Новый, ограниченный условием (12), класс кусочно-непрерывных функций определяется ниже.

Пусть  $u(\tau) = \text{const}$ ,  $\tau \in (t_{k-1}, t_k)$ . С учетом скачкообразного изменения функции  $u(\tau)$  в момент  $t_{k-1}$  в этом случае можно записать:

$$z(t_k) = z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1})\Delta x_2(t_{k-1}). \quad (13)$$

Из формулы (12) определяется величина  $\Delta x_2(t_{k-1})$  выражением вида (9).

Будем полагать, что для кусочно-непрерывной функции времени  $u(\tau)$  на интервале  $[t_{k-1}, t_k]$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau = \\ & = \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1})\Delta x_2(t_{k-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

В этом случае выражение (11) преобразуется к виду (13), и выполняется условие (12).

Пусть управление в моменты времени, предшествующие  $t_{j-1}$ , выбрано таким образом, что вы-



полнены краевые условия, заданные вторым уравнением в выражении (7), т. е.  $K(t_{j-1})z(t_{j-1}) = 0$ .

Вычтем  $K(t_{j-1})z(t_{j-1})$  из правой части формулы (11). После преобразования получим:

$$z(t_k) = \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1}) \left( \frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{k-1}) \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1}) \right)^{-1} \frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{k-1}) z(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau = 0.$$

В правой части полученного выражения первое слагаемое, как следует из формулы (9) при  $j = k$ , равно  $-\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1})\Delta x_2(t_{k-1})$ . В итоге, с учетом соотношения (14), получим  $z(t_k) = 0$ .

Перейдем к выбору управления на интервале  $[t_{k-2}, t_{k-1}]$ . Определим новый вектор невязок  $z_{k-1}(t_{k-1}) = K(t_{k-1})z(t_{k-1})$ . Для вектора  $z_{k-1}(t_{k-1})$  и для кусочно-непрерывной функции  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [t_{k-2}, t_{k-1}]$ , запишем:

$$z_{k-1}(t_{k-1}) = K(t_{k-1})z(t_{k-1}) = K(t_{k-1}) \times \left( z(t_{k-2}) + \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right). \quad (15)$$

Пусть для  $u(\tau)$  выполняется условие

$$\frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{k-1}) z_{k-1}(t_{k-1}) = 0. \quad (16)$$

При выборе управления на интервале  $[t_{k-2}, t_{k-1}]$  воспользуемся теми же соображениями, что и на интервале  $[t_{k-1}, t_k]$ . Для постоянного управления  $u(\tau)$ ,  $\tau \in (t_{k-2}, t_{k-1})$ , можно записать:

$$z_{k-1}(t_{k-1}) = z_{k-1}(t_{k-2}) + \frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_2}(t_{k-2})\Delta x_2(t_{k-2}), \quad (17)$$

где

$$\frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_2}(t_{k-2}) = K(t_{k-1}) \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-2}),$$

$$z_{k-1}(t_{k-2}) = K(t_{k-1})z(t_{k-2}).$$

Из условия (16) определим управления  $\Delta x_2(t_{k-2})$  выражением вида (9).

Будем полагать, что кусочно-непрерывная функция времени  $u(\tau)$  на интервале  $[t_{k-2}, t_{k-1}]$  удовлетворяет условию

$$K(t_{k-1}) \left( \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau - \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-2})\Delta x_2(t_{k-2}) \right) = 0.$$

В этом случае выражение (15) преобразуется к виду (17) и, следовательно, выполняется условие (16).

Определим новый вектор невязок  $z_{k-2}(t_{k-2}) = K(t_{k-2})z(t_{k-2})$ . При условии  $K(t_{k-2})z(t_{k-2}) = 0$ , преобразуя выражение (15) аналогично преобразованию на интервале  $[t_{k-1}, t_k]$  выражения (11).

Процедура может быть продолжена для моментов времени, предшествующих  $t_{k-1}$ .

В итоге для момента времени  $t_j$  можно записать:

$$z_j(t_j) = K(t_j)z(t_j) = K(t_j) \times \left( z(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right), \quad (18)$$

$$K(t_j) \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau - \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{j-1})\Delta x_2(t_{j-1}) \right) = 0. \quad (19)$$

Здесь  $K(t_{j-1})$  определяется выражением (8), а  $\Delta x_2(t_{j-1})$  – выражением вида (9). С учетом формул (19) и (9) выполняется условие

$$\frac{\partial z^T}{\partial x_2}(t_{j-1}) K(t_j) z(t_j) = 0 \quad \forall j \in \overline{p, k}. \quad (20)$$

Таким образом, уравнение (19) и выражение (9) для  $\Delta x_2(t_{j-1})$  определяют условия, равносильные исходному условию (20).

Полагая  $K(t_j)z(t_j) = 0$ , путем преобразования формулы (18) можно показать, что  $z_j(t_j) = K(t_j)z(t_j) = 0$ .

В итоге можно сделать вывод, что управление в классе кусочно-непрерывных функций, выбираемое в соответствии с выражениями (19), (9), решает поставленную терминальную задачу  $z(t_k) = 0$ , допуская при этом возможность выбора непрерывного управления на интервалах между разрывами в достаточно широком классе функций.

#### 4. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим задачу управления расходом топлива жидкостной ракеты. Ограничимся задачей синхронизации выработки окислителя и горючего к моменту выключения двигателя ступени ракеты. Рассмотрим ее в линейном приближении. Из-за несинхронности выработки в баках остаются неиспользуемые остатки топлива, вследствие чего снижаются энергетические возможности ракеты. Управление процессом синхронизации производится путем изменения коэффициента соотношения расходов компонентов топлива через двигатель. В свою очередь, отклонение этого параметра от номинального оптимального значения приводит к потерям удельной тяги. Эти потери становятся наиболее ощутимыми по мере приближения к концу полета. Отмеченные соображения позволяют качественно сформулировать требования к процессу управления и определяют вид краевых условий.

Объект управления описывается уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{T} x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -k(x_2(t) - u(t)),$$

$$t \in [t_0, t_k], \quad T = t_k - t_0, \quad x_2(t_0) = 0.$$

Здесь  $x_1(t)$  – рассогласование относительных масс компонентов топлива;  $x_2(t)$  – относительное отклонение коэффициента соотношения расходов компонентов от номинального значения.

Краевые условия заданы в виде

$$x_1(t_k) = 0, \quad x_2(t_k) = 0.$$

Определим вектор прогнозируемых невязок  $z(t)$  и  $\dot{z}(t)$ :

$$z(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) + x_2(t) \frac{t_k - t}{T} \\ x_2(t) \end{vmatrix},$$

$$\dot{z}(t) = \begin{vmatrix} x_2(t) \frac{t_k - t}{T} \\ 1 \end{vmatrix} \dot{x}_2(t).$$

Сначала рассмотрим решение задачи в классе кусочно-постоянного управления. В этом случае достаточно иметь моменты времени  $t_0, t_0 < t_1 < T$  разрыва управления  $u(t)$ . Определим вектор прогнозируемых невязок краевых условий в момент времени  $t_1$ :

$$z(t_1) = \begin{vmatrix} x_1(t_1) + t_1' x_2(t_1) \\ x_2(t_1) \end{vmatrix},$$

$$t' = \frac{1}{T}(t_k - t), \quad t_1' = \frac{1}{T}(t_k - t_1).$$

Отметим, что при скачкообразном изменении функции  $u(t)$  переходный процесс по координате  $x_2(t)$  заканчивается за время, существенно меньшее, чем  $T$

(время переходного процесса  $\partial t < 0,01 T$ ). Для уменьшения ошибки системы, связанной с конечным временем переходного процесса  $\partial t$ , частная производная  $\frac{\partial z}{\partial x_2}(t)$  в примере берется в промежуточный момент времени на интервале  $\partial t$ .

Запишем

$$z(t_k) = z(t_1) + \begin{vmatrix} t_1^* \\ 1 \end{vmatrix} \Delta x_2(t_1),$$

$$t_1^* \in (t_1', t_1' - \frac{\partial t}{T}),$$

где  $\Delta x_2(t_1) = x_2(t_k) - x_2(t_1)$ .

Для приращения координаты  $x_2(t)$  при скачкообразном изменении функции  $u(t)$  в момент времени  $t_1$  из

условия  $\begin{vmatrix} t_1^* \\ 1 \end{vmatrix} z(t_k) = 0$  получим:

$$\Delta x_2(t_1) = - \frac{(x_1(t_1) + t_1' x_2(t_1)) t_1^* + x_2(t_1)}{1 + t_1^{*2}}.$$

Матрица  $K(t_1)$  имеет вид

$$K(t_1) = \begin{vmatrix} 1 & -t_1^* \\ -t_1^* & t_1^{*2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 + t_1^{*2} \end{vmatrix}.$$

Новый вектор невязок для выбора управлений  $\Delta x_2(t_0) = x_2(t_1) - x_2(t_0)$  записывается в виде  $z_1(t_1) = K(t_1) z(t_1)$ ,

где  $z(t_1) = z(t_0) + \begin{vmatrix} t_0^* \\ 1 \end{vmatrix} \Delta x_2(t_0)$ ,  $t_0^* \in (t_0', t_0' - \frac{\partial t}{T})$ .

После преобразования получим условие для определения управления  $\Delta x_2(t_0)$ :

$$z_1(t_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ -t_1^* \end{vmatrix} (x_1(t_0) + (t_0^* - t_1^*) \Delta x_2(t_0)) \frac{1}{1 + t_1^{*2}} = 0,$$

откуда  $\Delta x_2(t_0) = - \frac{x_1(t_0)}{t_0^* - t_1^*}$ .

Отметим, что допускается  $z(t_1) \neq 0, x_1(t_1) \neq 0$ .

Перейдем к решению терминальной задачи в классе кусочно-непрерывного управления. На интервале  $[t_1, t_k]$  управление  $u(\tau)$  должно удовлетворять условию

$$\int_{t_1}^{t_k} \begin{vmatrix} t_k - \tau \\ T \\ 1 \end{vmatrix} \dot{x}_2(\tau) d\tau = \begin{vmatrix} t_1^* \\ 1 \end{vmatrix} \Delta x_2(t_1).$$

Здесь необходимо иметь в виду, что функция  $u(\tau)$  может скачкообразно изменяться в момент времени  $t_1$ .

При выборе непрерывной функции управления  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [t_0, t_1]$ , должно выполняться условие



$$K(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{t_k - \tau}{T} \right) \dot{x}_2(\tau) d\tau = K(t_1) \Big|_1^{t_0^*} \Delta x_2(t_0).$$

После преобразования получим условие вида

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{t_k - \tau}{T} - t_1^* \right) \dot{x}_2(\tau) d\tau = (t_0^* - t_1^*) \Delta x_2(t_0).$$

Воспользовавшись правилом интегрирования по частям для левой части, получим:

$$x_1(t_0) + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_1} x_2(\tau) d\tau = -x_2(t_1)(t_1' - t_1^*).$$

Найденное выражение может быть записано в виде граничного условия  $x_1(t_1) = -x_2(t_1)(t_1' - t_1^*)$ .

Это условие позволяет выбирать непрерывное управление в достаточно широком классе функций. С учетом требования, предъявляемого к отклонению коэффициента соотношения расходов компонентов, т. е. к  $x_2(t)$ , на интервале  $\tau \in [t_0, t_1]$   $x_2(\tau)$  и управление  $u(\tau)$  могут выбираться в виде убывающих экспоненциальных функций.

Пусть  $t_0 = 0$ . Зададим  $u(\tau) = Be^{-r\tau}$ ,  $\tau \in [t_0, t_1]$ . В этом случае  $x_2(\tau) = \frac{kB}{k-r} (-e^{-k\tau} + e^{-r\tau})$ ,  $k \gg r$ . Параметры  $B$  и  $r$  определяются, исходя из начальных и конечных условий  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$ ,  $x_1(t_1) = -x_2(t_1)(t_1' - t_1^*)$ . На интервале  $\tau \in [t_1, t_k]$  можно принять  $u(\tau) = 0$ . В этом случае на интервале  $\tau \in [t_1 + \delta t, t_k]$   $x_2(\tau) = 0$ . Проинтегрируем уравнение для  $\dot{x}_1(t)$  на интервале  $[t_1, t_1 + \delta t]$ . Найдем  $x_1(t_k)$ :  $x_1(t_k) = x_1(t_1) + \frac{1}{kT} x_2(t_1)$ , с учетом выражения для  $x_1(t_1)$  получим  $x_1(t_k) = -x_2(t_1)(t_1' - t_1^* - \frac{1}{kT})$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача синтеза терминального управления в классе кусочно-постоянных и кусочно-непрерывных функций. Показана взаимосвязанность этих задач и целесообразность их поэтапного, последовательного рассмотрения.

На этапе синтеза кусочно-постоянного управления получены локальные условия для выбора управления на каждом интервале между моментами разрыва управления. При этом выполнение локальных условий обеспечивает решение исходной терминальной задачи.

При синтезе управления в классе кусочно-непрерывных функций используются результаты

синтеза кусочно-постоянного управления. Полученные на первом этапе локальные условия используются в качестве краевых условий для выбора управления в классе кусочно-непрерывных функций на интервалах между разрывами управления. При этом при выполнении локальных условий непрерывное управление может выбираться в достаточно широком классе функций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сухарулдзэ Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. – М.: Бинум. Лаборатория знаний, 2011. [Siharulidze, Yu.G. Ballistika i navedenie letatelnykh apparatov. – М.: Binom. Laboratoriya znaniy, 2011. (In Russian)]
2. Haussermann, W. Description and Performance of the Saturn Launch Vehicle's Navigation, Guidance, and Control System // 3rd Int. IFAC Conf. on Automatic Control in Space. – Toulouse, France, 1970. – Vol. 3. – P. 275–312.
3. Петров Б.Н., Портнов-Соколов Ю.П., Андриенко А.Я., Иванов В.П. Бортовые терминальные системы управления. – М.: Машиностроение, 1983. – 200 с. [Petrov, B.N., Portnov-Sokolov, Yu.P., Andrienko, A.Ya., Ivanov, V.P. Onboard Terminal Control Systems (Principles of Construction and Elements of the Theory). – М.: Mechanical Engineering, 1983. – 200 s. (In Russian)]
4. Веремей Е.И., Еремеев В.В. Введение в задачи управления на основе предсказаний // Всероссийская науч. конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». – Москва, 2004. – С. 98–115. [Veremey, E.I., Ereemeev, V.V. Vvedenie v zadachi upravleniya na osnove predskazaniy // Vserossiyskaya nauch. konf. «Proektirovanie nauchnyh i inzhenernyh prilozhenij v srede MATLAB». – Moscow, 2004. – С. 98–115. (In Russian)]
5. Grüne, L., Pannek, J. Nonlinear Model Predictive Control. Theory and Algorithms. – Springer, 2011.
6. Гулько Ф.Б., Новосельцева Ж.А. Применение методов прогнозирования в задачах синтеза систем автоматического управления // VIII Всесоюзное совещание по проблемам управления. – Москва, 1980. – Т. 1. – С. 32–34. [Gul'ko, F.B., Novosel'ceva, Zh.A. Primenenie metodov prognozirovaniya v zadachah sinteza sistem av-tomaticeskogo upravleniya // VIII Vsesoyuznoe soveshchanie po problemam upravleniya. – Moscow, 1980. – Т. 1. – С. 32–34. (In Russian)]
7. Klaučo, M., Kalúz, M., Kvasnica, M. Real-time Implementation of an Explicit MPC based Reference Governor for Control of a Magnetic Levitation System // Control Engineering Practice. – 2017. – Vol. 60, no. 3. – P. 99–105.
8. Langson, W., Chrysochoos, I., Rakovic, S.V., Mayne, D.Q. Robust Model Predictive Control Using Tubes // Automatica. – 2004. – Vol. 40, no. 1. – P. 125–133.
9. Иванов В.П., Табалин Д.Д. Об одном методе детерминированного терминального управления с предиктивным прогнозированием невязок краевых условий // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 1. – С. 77–94. [Ivanov, V.P., Tabalin, D.D. On a deterministic terminal control method with predictive forecasting of mismatches in the boundary conditions // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, no 1. – P. 62–77.]

10. Табалин Д.Д. Детерминированный синтез алгоритмов терминального управления с прогнозированием невязок краевых условий // Тезисы международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». – Москва, 2020. [Tabalin, D.D. Determinirovannyj sintez algoritmov terminal'nogo upravleniya s prognozirovaniem nevyazok kraevykh uslovij // Tezisy mezhdunarodnogo molodezhnogo nauchnogo foruma «LOMONOSOV-2020». Sektsiya «Vychislitel'naya matematika i kibernetika». – Moscow, 2020. (In Russian)]
11. О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56. – № 8. – С. 1135–1144. [O seminare po problemam nelineinoi dinamiki i upravleniya pri moskovskom gosudarstvennom universitete im. M.V. Lomonosova. Seminar osnovan akademikami RAN S.V. Emel'yanovym i S.K. Korovinym // Differentsial'nye uravneniya. – 2020. – T. 56. – № 8. – S. 1135–1144. (In Russian)]
12. Chai, J., Medagoda, E., Kayacan, E. Adaptive and Efficient Model Predictive Control for Booster Reentry // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2020. – Vol. 43(12). – P. 2372–2382. – DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G004925>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии  
Б.В. Павловым.

Поступила в редакцию 11.10.2022,  
после доработки 16.01.2023.  
Принята к публикации 14.02.2023.

Завадский Владимир Константинович – канд. техн. наук,  
✉ vladguc@ipu.ru,

Иванов Владимир Петрович – д-р техн. наук,  
✉ vladguc@ipu.ru,

Каблова Елена Борисовна – науч. сотрудник  
✉ vladguc@ipu.ru,

Кленовая Людмила Григорьевна – науч. сотрудник  
✉ vladguc@ipu.ru,

Рутковский Владислав Юльевич – д-р техн. наук,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

## TERMINAL CONTROL OF MOVING OBJECTS IN THE CLASSES OF PIECEWISE CONSTANT AND PIECEWISE CONTINUOUS FUNCTIONS

V.K. Zavadsky<sup>1</sup>, V.P. Ivanov<sup>2</sup>, E.B. Kablova<sup>3</sup>, L.G. Klenovaya<sup>4</sup>, and V.Yu. Rutkovskii

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>1-4</sup>✉ vladguc@ipu.ru

**Abstract.** This paper presents a terminal control problem with the separation of object's state coordinates into two types: the slowly changing coordinates figuring in boundary conditions and the coordinates of the stabilization loop. A predictive model of the object is introduced to design the control action. A differential equation is derived for predicted mismatches in the boundary conditions. The original system is discretized in time based on this equation. This problem is solved step-by-step in the classes of piecewise constant and piecewise continuous control actions. As an illustrative example, the problem of controlling the fuel consumption of a stage of a liquid-propellant launch vehicle is considered. The class of control actions is extended from piecewise constant to piecewise continuous functions in order to cover additional requirements for the control process. The continuous functions on intervals between control jumps are chosen using the local boundary conditions obtained during the terminal control design in the class of piecewise constant functions.

**Keywords:** terminal control, model predictive control (MPC), fuel consumption control for launch vehicles.

# МОДЕЛИ СОВМЕСТНОЙ ДИНАМИКИ МНЕНИЙ И ДЕЙСТВИЙ В ОНЛАЙНОВЫХ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ.

## Ч. 1. Исходные данные и первичный анализ

Д.А. Губанов, Д.А. Новиков

**Аннотация.** На примере онлайн-социальной сети ВКонтакте исследуется влияние различных факторов на динамику мнений и действий как на макроуровне («общественное мнение»), так и на микроуровне (мнения и действия отдельных агентов). Описаны исходные данные и ключевые факторы для анализа сетевых взаимодействий. Предложен способ идентификации мнений агентов в сети на основе методов глубокого обучения. Представлены результаты первичного анализа динамики мнений и действий агентов в онлайн-социальной сети, в том числе: выявлен рост поляризации мнений на макроуровне; установлено изменение мнений агентов со временем; определены социально-демографические характеристики агентов, изменивших мнения; определена согласованность мнений и действий агентов между собой; проведена оценка взаимосвязи мнений и действий агентов в социальной сети.

**Ключевые слова:** социальная сеть, агент, мнение, действие, социальное влияние, когнитивный диссонанс, доверие к информации.

### ВВЕДЕНИЕ

Со второй половины XX в. исследователями разрабатываются математические модели динамики мнений, которые объясняют изменение представлений индивидов (*агентов*) под воздействием социально-психологических факторов (см. работы отечественных ([1–5] и др.) и зарубежных ([6–12] и др.) исследователей). Параллельно эти же эффекты являются предметом изучения в социальной психологии (см. работы [13–15] и др.).

Эти исследования являются актуальными и сегодня, в том числе из-за бурного развития онлайн-социальных медиа, информационные процессы в которых существенно влияют на политическую, экономическую и социальную жизнь общества. В частности, недостоверная информация о мерах противодействия пандемии COVID-19, распространявшаяся в свое время авторитетными, но

зачастую некомпетентными участниками социальных сетей, в условиях неопределенности и отсутствия знаний приводила к формированию деструктивной информационной повестки и таких представлений пользователей сети, которые снижают эффективность предпринимаемых мер по борьбе с пандемией [16]. В то же время, при помощи математических моделей динамики мнений и действий можно предсказать изменение представлений общества и выработать необходимые стратегии защиты общественного здоровья. Однако идентификация таких моделей является сложной междисциплинарной задачей.

В качестве базовой в настоящей работе была выбрана математическая модель совместной динамики мнений и действий агентов, предложенная в статье [17]. В качестве «эмпирической базы» использовались посты, комментарии и лайки в онлайн-социальной сети «ВКонтакте», посвященные ношению медицинских масок, за период с марта 2020 г. по февраль 2021 г. года включительно. *Мнением* условно считалась оцениваемая автоматическим классификатором «тональность» комментария, написанного агентом; *действием* условно

<sup>1</sup> Данная часть исследования выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 23-21-00408 (Д.А. Губанов).

но<sup>2</sup> считалась тональность комментария, которому агент поставил лайк.

В своем исследовании мы пытаемся ответить на следующие вопросы:

1) Насколько согласованы между собой мнения агентов и их действия?

2) Изменяют ли со временем агенты свои мнения и действия?

3) Кто эти (изменившие свои мнения и действия) агенты, отличаются ли они от других по своим социально-демографическим характеристикам?

4) Какие модели лучше описывают динамику мнений и действий агентов – линейные, пороговые и т. п.?

5) Существенно ли влияние действий на мнения (эффект *когнитивного диссонанса*) и наоборот?

6) Под влиянием каких факторов происходит изменение мнений и действий агентов:

- его собственные предыдущие мнения или/и действия;

- социальное влияние:

- «*общественное мнение*» (усредненные доли тех или иных мнений и действий социальной сети в целом – так называемая «*макромодель*», в которой сеть условно рассматривается как один агент);

- мнения или/и действия окружения агента (агенты, связанные с ним отношением «*дружбы*») – усредненные и/или индивидуальные (так называемая «*микромодель*»);

- те или иные ненаблюдаемые (*латентные*) характеристики агента?

7) Зависит ли изменение мнения/действий агента от его доверия к источнику получаемой информации? А от содержания этой информации?

Шестой вопрос наиболее трудоемок для исследования, ведь для ответа на него необходимо проанализировать все комбинации объясняющих переменных и упорядочить модели по максимальному (среди всех моделей с заданным числом пере-

менных) уменьшению ошибки значения прогноза объясняемой переменной.

В настоящей работе (первой ее части) исследуется динамика реальных мнений и действий агентов на примере отношения к ношению медицинских масок в онлайн-социальной сети ВКонтакте. Структура изложения следующая. Сначала описываются исходные данные (§ 1); затем предлагается способ идентификации мнений агентов в сети на основе методов глубокого обучения (§ 2); далее характеризуется динамика мнений и действий на макроуровне (насколько поддерживают ношение масок отдельные пользователи и в целом онлайн-сообщество, насколько меняется «общественное мнение» со временем и т. д.), а также особенности информационного взаимодействия агентов (§ 3); наконец, приводятся результаты анализа взаимосвязи мнений и действий агентов социальной сети (§ 4). Таким образом, статья содержит ответы на первые три из сформулированных выше вопросов. Во второй и третьей частях исследования будут рассмотрены результаты идентификации макро- и микромоделей совместной динамики мнений и действий (т. е. будут приведены ответы на вопросы 4–7).

## 1. ОПИСАНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И КЛЮЧЕВЫХ ФАКТОРОВ ДЛЯ АНАЛИЗА СЕТЕВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Объектами исследуемого медиаландшафта являются источники информации и пользователи сети ВКонтакте. Источники информации публикуют новости, освещающие различные аспекты пандемии COVID-19, и тем самым воздействуют на пользователей социальной сети. Пользователи сети (далее – агенты) реагируют на сообщения источников информации, совершают в сети действия в соответствии со своими интересами и мнениями (пишут комментарии и ставят лайки), взаимодействуя друг с другом.

Данные были собраны для выбранных экспертами (на основе рейтинга компании «Медиалогия», см. <https://www.mlg.ru/>) источников информации, имеющих страницы в сети ВКонтакте и публикующих новости по общественно значимым темам, в частности: «РИА Новости» (2,9 млн подписчиков), «Новости RT» (1,3 млн подписчиков), «Комсомольская правда» (1,1 млн подписчиков), «РБК» (0,9 млн подписчиков), «Телеканал ЦАРЬГРАД» (0,7 млн подписчиков), «Москва 24» (0,5 млн подписчиков), «Новости Екатеринбурга E1RU» (0,3 млн подписчиков), «Сноб» (0,3 млн подписчиков), «Фонтанка.ру» (0,3 млн подписчиков), «Газета.ру»

<sup>2</sup> Конечно, и написание комментария, и постановка лайка, являются по своей сути действиями (в частности, в акциональном подходе [1,3] различные виды действий и взаимосвязи между ними являются основой для моделирования и анализа информационных процессов в сети). Поэтому альтернативой использованному разделению мнений (комментарии) и действий (лайки) является введение скрытых переменных (мнений) и их идентификация по наблюдаемым «действиям» – комментариям и лайкам – в рамках тех или иных скрытых марковских моделей, байесовских сетей и т. п. Подобные подходы представляются перспективными, соответствующие модели будут рассмотрены в третьей части исследования.





(0,2 млн подписчиков) и «Интерфакс» (0,1 млн подписчиков).

Рассматривались и анализировались посты этих источников по тематике COVID-19 (более 60 тыс. постов) и реакция сети на эти действия за период с 1 марта 2020 г. по 1 марта 2021 г. (более 2 млн комментариев к постам и более 7 млн лайков к постам и комментариям). Подробное описание подхода к сбору данных изложено в работах [18, 19]<sup>3</sup>, там же приведены некоторые результаты исследования активности пользователей сети. Затем были определены комментарии и лайки к ним, непосредственно имеющие отношение к ношению масок.

С учетом исходных данных формализуем факторы описания онлайн-социальной сети (согласно изложенному в работах [1, 3]), которые в дальнейшем будут необходимы для анализа и идентификации моделей совместной динамики мнений и действий. Пусть участниками сети являются агенты из множества  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , которые совершают акты<sup>4</sup> того или иного вида из фиксированного множества  $K = \{1, 2, \dots, k\}$  в те или иные моменты времени  $t$  из интервала  $T$ . Ограничимся рассмотрением следующих видов актов ( $K = \{1, 2\}$ ):

- публикация комментария к посту или комментарий,
- постановка лайка комментарий.

Обозначим множество актов через  $\Delta$ <sup>5</sup>. Каждый акт  $a \in \Delta$  характеризуется тремя параметрами – совершившим его агентом, видом акта и моментом времени, в который акт был совершен. Введем характеризующие акт функции:

- $f_a: \Delta \rightarrow N$ , которая каждому акту  $a \in \Delta$  ставит в соответствие совершившего его агента  $i \in N$ ;
- $f_t: \Delta \rightarrow T$ , которая каждому акту  $a \in \Delta$  ставит в соответствие время его совершения  $t \in T$ ;
- $f_k: \Delta \rightarrow K$ , которая каждому акту  $a \in \Delta$  ставит в соответствие его вид  $j \in K$ .

На множестве актов зададим бинарное отношение частичного порядка « $a$  является причиной  $b$ »:  $a \rightarrow b$ . Если  $a \rightarrow b$  и  $a \neq b$ , но при этом не существует такого  $c \in \Delta$ , что  $a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow b$ , то  $a$  является непосредственной причиной  $b$ :  $a \downarrow b$ . Считаем,

что бинарное отношение  $a \rightarrow b$  выполнено в следующих случаях:

- $a$  – комментарий,  $b$  – поставленный ему лайк,
- $a$  – комментарий,  $b$  – комментарий к нему,
- $a$  и  $b$  совпадают.

Для каждого агента  $i \in N$  определим множество всех совершенных им актов  $\delta_i = \{a \in \Delta \mid f_a(a) = i\}$ , а также множество его друзей  $N_i \subseteq N$  (формальное отношение «дружбы» в онлайн-социальной сети предполагает, что агент может получать информацию о публикуемых друзьями комментариях, поставленных ими лайках и т. д.).

**Мнения и действия.** При рассмотрении модели совместной динамики мнений и действий мнением агента будем условно считать отношение к ношению медицинских масок, выраженное в комментарии.

Формально определим мнение агента, выраженное в комментарии  $b \in \Delta$  ( $f_k(b) = 1$ ), в трех вариантах:

- $r' \in \{0, 1, 2\}$ , где 0 – результат классификации «против масок» (или «←»), 1 – «за маски» (или «+»), 2 – «непонятно/нейтрально» (или «=»). Результат определяется на основании рассчитанного классификатором стохастического вектора  $(p_-, p_+, p_-)$ . Компоненты такого вектора трактуются в машинном обучении как вероятности того, что объект принадлежит к тому или иному классу.

- $r'' = \frac{p_+}{p_+ + p_-} \in [0; 1]$  – уверенность в том, что

комментарий отражает мнение «за ношение масок» (при этом для данного комментария  $r' = 0$  или  $r' = 1$ ).

- $r = \frac{p_+ - p_-}{p_+ + p_-} \in [-1; 1]$  (при этом либо  $r' = 0$ , ли-

бо  $r' = 1$ ), где  $r = 1$  означает сильную уверенность в том, что выражено мнение «за ношение масок», а  $r = -1$  означает сильную уверенность в том, что выражено мнение «против».

Будем считать действием лайк к некоторому комментарий; оценка лайка совпадает с оценкой комментария, к которому поставлен лайк:  $y' \in \{0, 1, 2\}$ ,  $y'' \in [0; 1]$  и  $y \in [-1; 1]$ . Например, для лайка  $a \in \Delta$   $y'(a) = r'(b)$ , где  $b$  – комментарий, к которому поставлен лайк (т. е.  $b \downarrow a$ ). Для упрощения записи примем соглашение:  $r'(a) = y'(a)$ ,  $r''(a) = y''(a)$ ,  $r(a) = y(a)$ . Считаем, что момент постановки лайка совпадает с моментом публикации комментария, которому поставлен лайк.

<sup>3</sup> Эти данные были собраны в рамках проекта РФФИ 20-04-60296, авторы признательны Е.В. Белявскому и И.В. Козицину за их усилия по сбору данных.

<sup>4</sup> Термин «действие», используемый в работе [3], здесь заменен на «акт» во избежание путаницы с действием в моделях совместной динамики мнений и действий.

<sup>5</sup> Множество релевантных ношению масок комментариев (см. § 2) и лайков к ним.

Позиция агента – агрегированная характеристика агента, отражающая в целом его отношение к ношению медицинских масок. Будем говорить о позиции  $s_i$  только такого агента  $i$ , для которого  $\exists a \in \delta_i: r'(a) \in \{0, 1\}$ :

$$s_i = \begin{cases} 0, & \bar{r}_i \leq 0,5 - \epsilon, \\ 1, & \bar{r}_i \geq 0,5 + \epsilon, \\ 2, & |\bar{r}_i - 0,5| < \epsilon, \end{cases}$$

где  $\bar{r}_i = \frac{\sum_{a \in \delta_i | r'(a) \in \{0, 1\}} r'(a)}{|\{a \in \delta_i | r'(a) \in \{0, 1\}\}|} \in [0; 1]$  – среднее его мнений и действий «за» и «против», ниже принимается  $\epsilon = 0,05$ .

## 2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МНЕНИЙ АГЕНТОВ

Мнения агентов определялись исходя из опубликованных ими комментариев к постам на тему COVID-19, содержащих ключевые слова «маска», «намордник» и их производные (около 60 тыс. комментариев).

Такие комментарии подверглись предварительной автоматической обработке текстов, в ходе которой, в частности, из текстов были удалены обращения к собеседнику и интернет-адреса. Часть собранной выборки (около 10 тыс. комментариев) была размечена экспертами: каждому комментарию была назначена метка подходящего класса, отражающего отношение к маскам: «0» («против»), «1» («за») или «2» («нейтрально»). Примеры разметки (орфография и пунктуация сохранены): «Ну мы видим статистику, так что продолжаем масочки носить и все такое» (за маски), «Я хожу без маски. Я кови-диссидент» (против масок), «Прикольно рассуждает о масках в России» (нейтрально/непонятно).

Для решения задачи классификации был разработан нейросетевой классификатор на основе предобученной языковой модели BERT (Conversational RuBERT) [20], в архитектуру которого помимо слоя BERT включены дополнительные полносвязные слои, dropout-слои и слой softmax. Отметим близкие к данной задаче исследования социально-психологического состояния пользователей социальных сетей во время пандемии COVID-19 [21–24]. Однако в настоящей работе, во-первых, идентифицируются мнения пользователей сети (а не, например, эмоции или язык ненависти), а, во-вторых, задача решается для довольно обширной целевой выборки данных.

Размеченная выборка подверглась преобразованиям. Сначала она была случайным образом пе-

ретасована, затем были сформированы обучающая (90 %), валидационная (5 %) и тестовая (5 %) выборки. Для балансировки классов использовались веса, компенсирующие объем того или иного класса мнений: чем больше примеров содержится в классе, тем меньше вес примеров класса в минимизируемой при обучении функции потерь. Далее были найдены гиперпараметры классификатора, дающие максимальное значение качества на валидационной выборке при имеющихся ресурсных ограничениях: максимальная длина входной последовательности – 192 токена, размер пакета для обучения – 16 примеров, эпох обучения – 7. В итоге значение показателя качества обученного классификатора (верность/accuracy) на тестовой выборке составило 0,82 (для каждого класса значение меры  $F_1$  составило не меньше 0,7). Для сравнения базовый классификатор (логистическая регрессия) после нахождения оптимальных значений гиперпараметров на валидационной выборке показал на тестовой выборке верность 0,6.

Обученный классификатор был применен для классификации всего массива релевантных маскам комментариев.

## 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МНЕНИЙ И ДЕЙСТВИЙ АГЕНТОВ

Структура раздела следующая. В п. 3.1 приводятся характеристики агентов социальной сети, имеющих позицию по маскам (социодемографические характеристики агентов, а также характеристики мнений и действий агентов). В п. 3.2 анализируется динамика мнений и действий на макроуровне (рассматриваются доли агентов, имеющих то или иное мнение, но не рассматриваются мнения отдельных агентов), а также связь с внешними факторами и тенденции. В п. 3.3 рассматривается структура информационного взаимодействия агентов в сети: характеристики структуры, предпочтения агентов по информационному взаимодействию и существование изолированных информационных сообществ.

### 3.1. Характеристики агентов

В данном подразделе рассматриваются агенты с позицией (т. е. для  $i$ -го агента  $s_i \in \{0, 1, 2\}$ ), высказавшие хотя бы одно мнение. Всего при помощи классификатора определено 16 тыс. таких агентов, высказавших в 50 тыс. комментариях свои мнения (в том числе 38 тыс. мнений «за» или «против»).

За весь рассматриваемый период доля агентов с позицией «за» составила 56 %, «против» – 37 %, «нейтрально» – 7 %. Однако только для половины

агентов (8 тыс.) доступна информация из профилей социальной сети (т. е. профили не являются закрытыми или удаленными), и для них соотношение немного меняется в пользу ношения масок: «за» – 58 %, «против» – 35 %, «нейтрально» – 7 %. Анализ *социально-демографических показателей* (пол, возраст, страна и город) проводился для агентов с доступными профилями.

**Пол и возраст агентов.** Распределение агентов по полу приведено на рис. 1. Среди агентов с позицией «против» высока доля лиц мужского пола (61 %) по сравнению с долей лиц мужского пола среди агентов с позицией «за» (51 %).

Информацию о своем дне и месяце рождения предоставляет 73 % агентов, а год рождения – только 46 % агентов. Распределение агентов по возрасту приведено на рис. 2 (возраст определяет-

ся на 1 марта 2020 г., категория возраста определяется исходя из теории поколений [25], согласно которой средняя продолжительность жизни – 80 лет, и она состоит из четырех периодов длительностью ~ 20 лет: детство → молодость → средний возраст → старость).

Для агентов с позицией «против» доля старших возрастных групп выше (категория от 41 до 60 лет – 19,2 %, категория старше 60 лет – 7,2 %), чем для агентов с позицией «за» (категория от 41 до 60 лет – 15,2 %, категория старше 60 лет – 6,9 %).

**Географическое местоположение агентов.** Большая часть агентов из России – 79 %, далее в первой тройке стран находятся Украина и Беларусь (не указывают страну 15 % агентов). Примерно такое же распределение сохраняется и для агентов с фиксированной позицией.

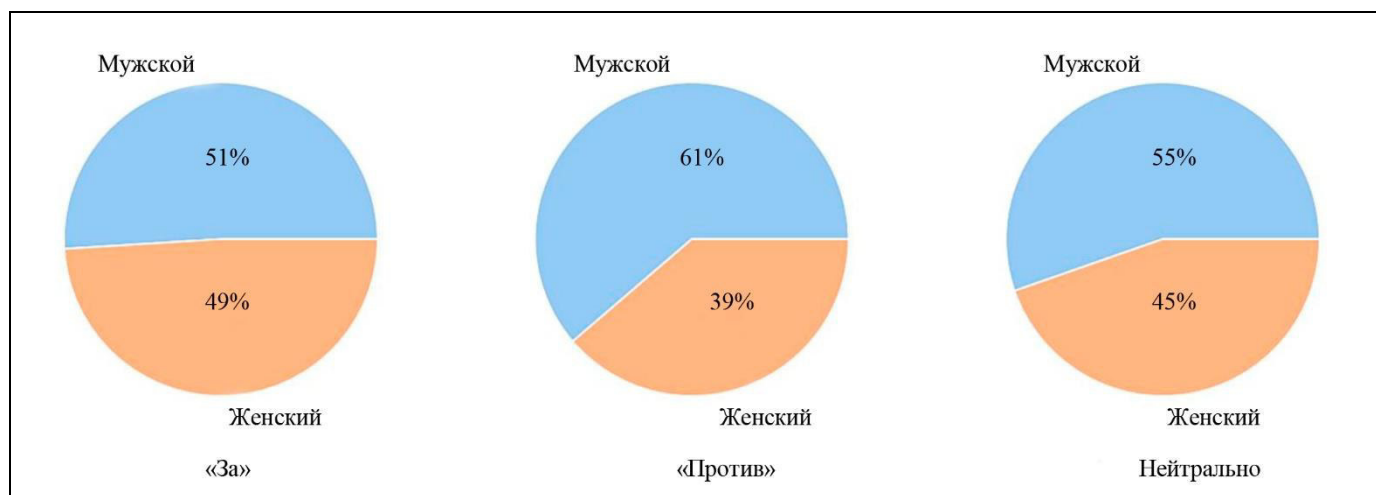


Рис. 1. Распределение агентов с заданной позицией по полу

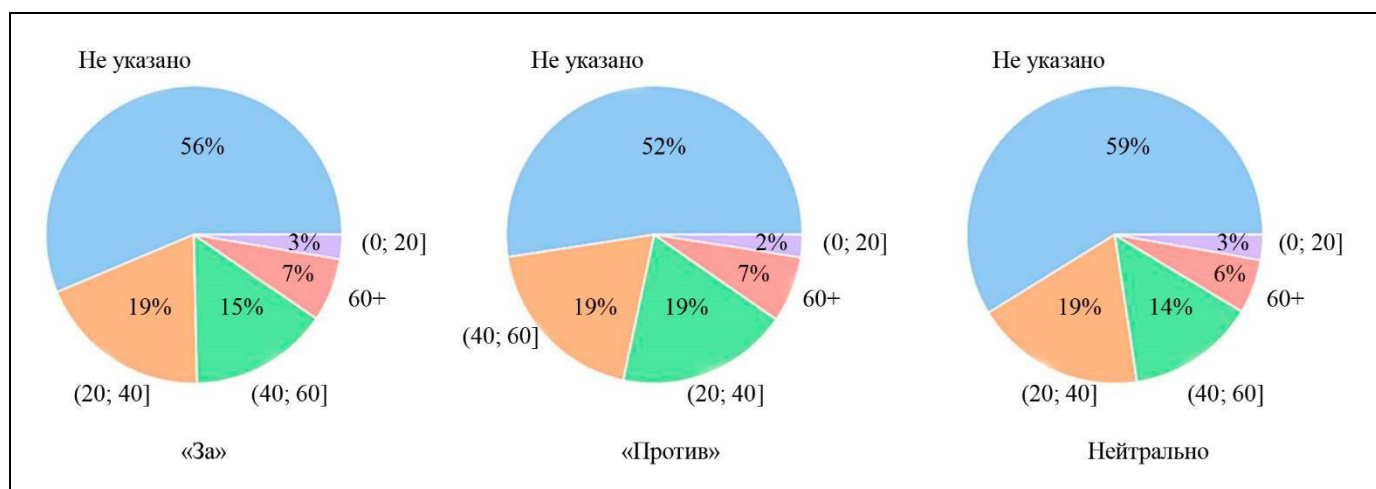


Рис. 2. Распределение агентов с заданной позицией по категориям возраста

Город проживания указан для 75 % агентов, распределение по городам приведено на рис. 3.

Как видно из рис. 3, в первой тройке городов находятся Москва, Санкт-Петербург и Екатеринбург. Причем среди агентов с позицией «за» больше жителей Санкт-Петербурга, а среди агентов с позицией «против» – жителей Москвы.

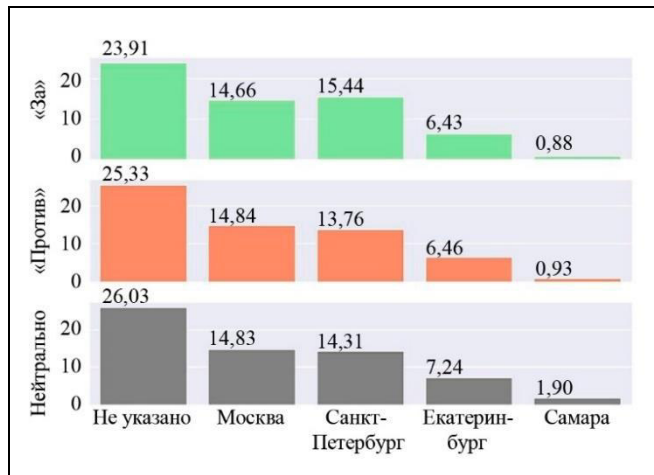


Рис. 3. Распределение агентов с заданной позицией по городам

**Мнения и действия агентов.** От исследования социально-демографических характеристик перейдем к непосредственному анализу мнений и действий агентов с позицией.

Распределение агентов по числу мнений «за» и «против» приведено на рис. 4. В среднем агент, имеющий мнение «за» или «против», (таковых в выборке было 14,4 тыс.) за исследуемый период высказывает 1,1 комментария за ношение масок и 1,5 комментария против, т. е. активность по выражению мнений является низкой: 79 % агентов высказались в комментариях «за» или «против» не более двух раз.

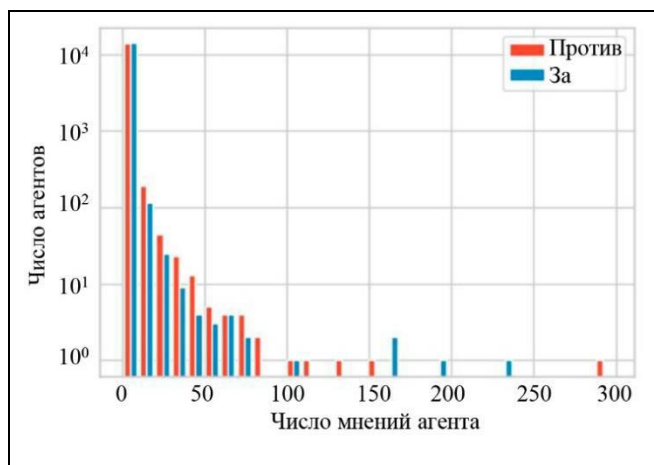


Рис. 4. Распределение агентов по числу высказанных мнений

К комментариям с мнением «за» или «против» поставлено около 125 тыс. лайков (84,5 тыс. «против» и 40,8 тыс. «за») 44 тыс. агентов (примерно треть лайков поставлена 6 тыс. агентов, высказавшихся в комментариях «за» или «против»). В среднем такой агент оставляет 1,9 лайка «против» и 0,9 лайка «за». Таким образом, «лайкеры» тоже являются малоактивными (рис. 5): 79 % агентов выполнили не более двух действий «за» или «против».

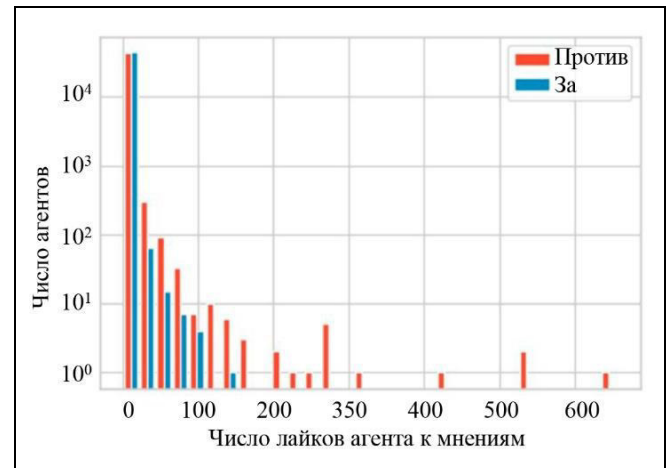


Рис. 5. Распределение агентов по числу действий

Вызывает интерес продолжительность промежутка времени между последовательными высказываниями мнений агентов в комментариях или «вероятность»<sup>6</sup> повторно высказать мнение в течение определенного периода времени (рис. 6). Оказывается, если агент в очередной раз выскажет свое мнение, то он это сделает с вероятностью 0,5 в течение суток, с вероятностью 0,7 в пределах недели и 0,8 в течение трех недель.

Содержательно такой результат можно объяснить тем, что агент участвует в обсуждении все новых информационных поводов: один повод обсуждается, как правило, в течение суток и вовлеченные в это обсуждение агенты могут высказаться неоднократно.

### 3.2. Динамика «общественного» мнения в сети

Рассмотрим динамику обсуждений на макроуровне. На рис. 7 представлена динамика числа мнений агентов о ношении масок (оценок комментариев). Применяется сглаживание данных – скользящее среднее за три дня.

<sup>6</sup> Здесь «вероятность» – это доля случаев, происходящих на выбранный интервал времени (т. е. оценка вероятности).

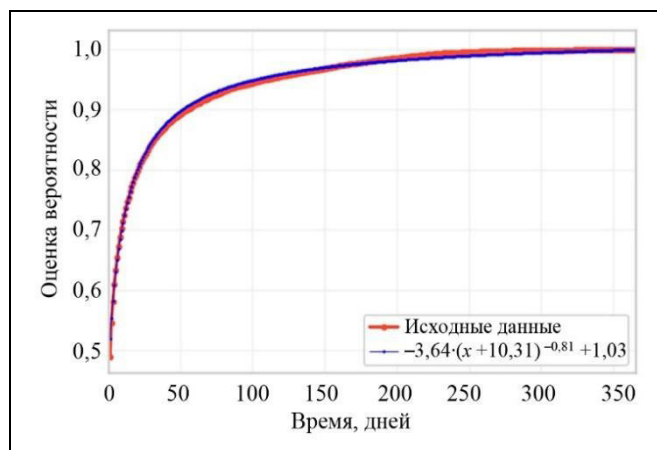


Рис. 6. Оценка вероятности повторного высказывания мнения в зависимости от интервала времени. Дополнительно синим цветом приведена аппроксимация зависимости «степенной» функцией

Агенты в среднем публикуют за день 42 комментария «за» (медиана 30, максимум 272), 59

комментариев «против» (медиана 41, максимум 419) и 46 нейтральных/непонятных комментариев (медиана 26, максимум 409). Пики активности приходятся на моменты введения ограничений, в частности, 25 марта 2020 года Президент РФ Владимир Владимирович Путин обратился к россиянам и объявил введение первого нерабочего периода, обусловленного COVID-19; а в октябре 2020 года были введены повторные ограничения в ответ на рост заболеваемости (например, 19 октября был ограничен доступ в развлекательные заведения). Возможно, конечно, и иное объяснение: активность агентов связана с объективной картиной заболеваемости COVID-19 в РФ. Для проверки такой гипотезы была проанализирована динамика заболеваемости в РФ на основе данных университета Джонса Хопкинса (*Johns Hopkins University* [26]), график которой приведен на рис. 8.

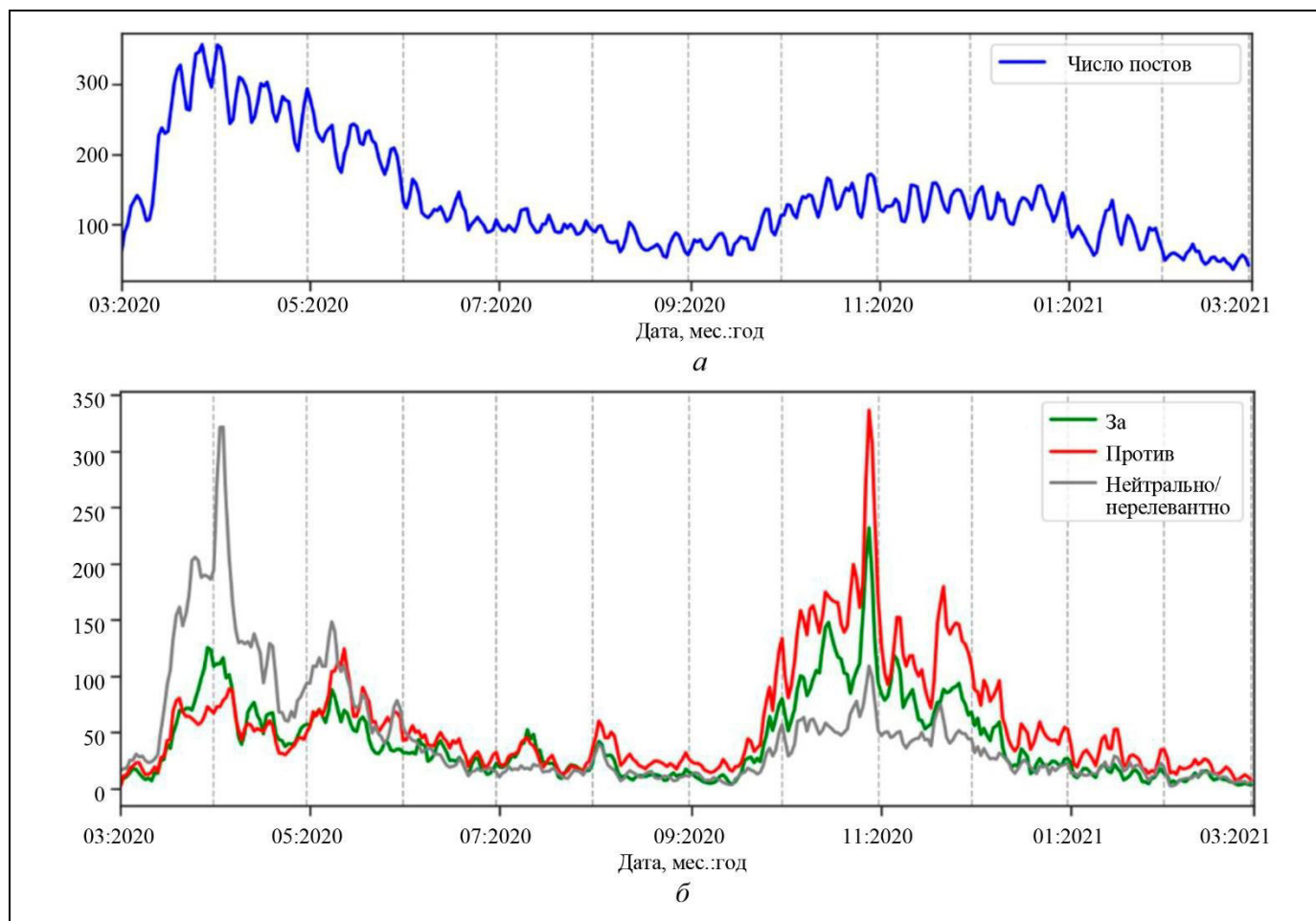


Рис. 7. Динамика активности по тематике ношения масок в сети ВКонтакте (*a* – число постов<sup>7</sup>, *b* – число комментариев)

<sup>7</sup> Отметим, что выборочная проверка постов источников информации показала их нейтральность по отношению к ношению масок.

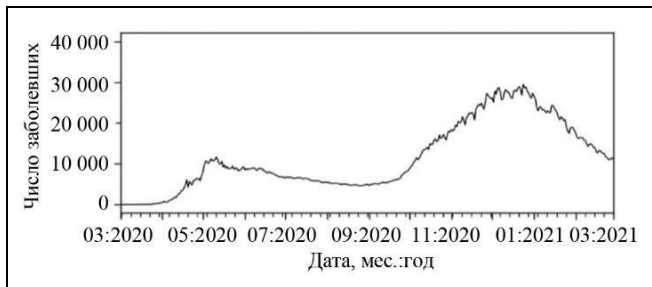


Рис. 8. Динамика заболеваемости COVID-19 в РФ

В среднем за рассматриваемый период в РФ наблюдается 11,5 тыс. случаев заболеваний в день (медиана 8,8 тыс., максимум 29,0 тыс.). Корреляция Пирсона для заболеваемости и объема мнений «за» равна 0,1 (максимального значения 0,5 достигает при лаге в 45 дней, который представляется слишком большим для попыток содержательного объяснения), для заболеваемости и объема мнений «против» равна 0,3 (максимальное значение

0,7 достигается при лаге в 45 дней), а для заболеваемости и объема «нейтральных/нерелевантных» мнений равна  $-0,3$  ( $-0,2$  при лаге в 38 дней). Отметим корреляцию объема положительных с отрицательными (0,9), положительных с нейтральными (0,6), отрицательных с нейтральными (0,4) сообщениями. Следовательно, *активность социальной сети по «масочной тематике» связана с заболеваемостью COVID-19 скорее всего опосредованно, в большей степени она определяется информационными событиями, в том числе повесткой, задаваемой органами государственной власти: например, мерами, направленными на борьбу с пандемией.*

Как меняется со временем отношение к ношению масок в сети? Оказывается, *доля мнений «против» увеличивается со временем* (см. рис. 9, а): за год на 21 %. Еще значительно меняется доля действий «против» (см. рис. 9, б): за год она возрастает на 23 %.

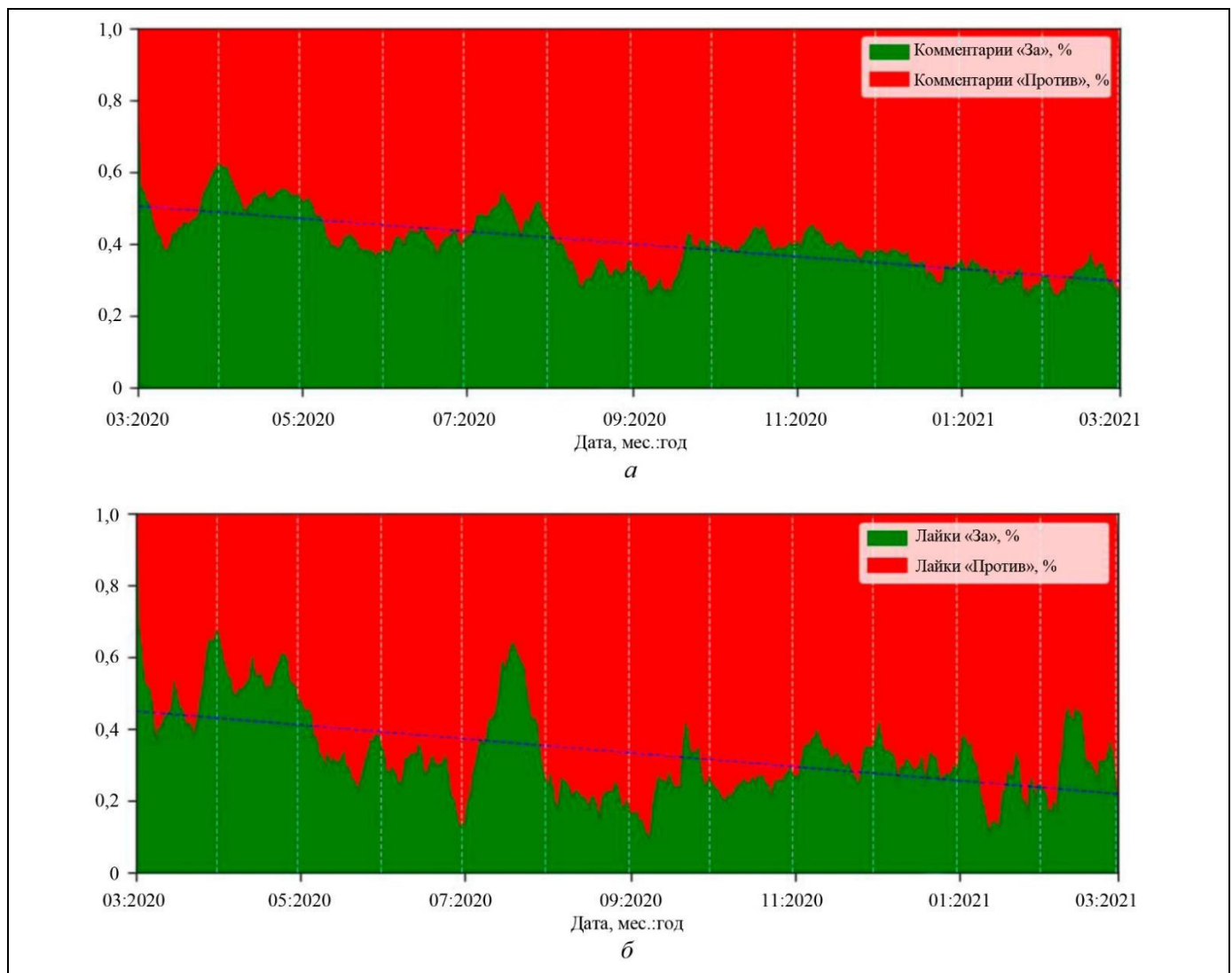


Рис. 9. Динамика доли: а – мнений и б – действий «за» (зеленая область) и «против» (красная область) ношения масок

В то же время растет доля мнений «за» и «против» по отношению к общему объему релевантных сообщений масок мнений – за год она увеличилась на 30 %, а также растет доля действий «за» и «против» – на 36 %, т. е. *в сети со временем происходит рост поляризации.*

### 3.3. Информационное взаимодействие агентов

Для агентов, отреагировавших на посты источников информации, построим сети информационных взаимодействий:

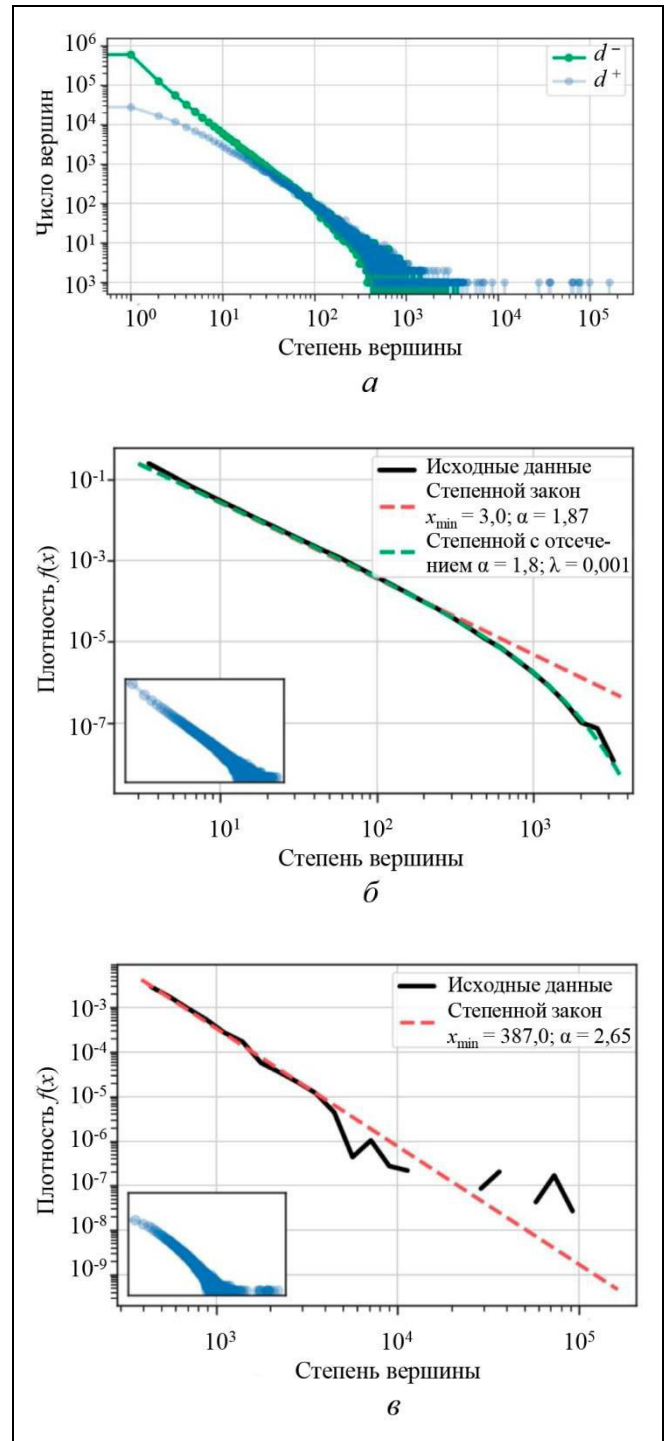
- $G$  – сеть комментирования и постановки лайков,
- $G_C$  – сеть комментирования,
- $G_L$  – сеть постановки лайков.

Сеть  $G$  является связной, она состоит из 955 тыс. узлов и 5 216 тыс. связей взаимодействия. В сети  $G_C$  всего 878 тыс. связей комментирования, а в сети постановки лайков  $G_L$  – 4 522 тыс. связей.

Распределение агентов сети  $G$  по степени показано на рис. 10. Отметим степенной характер зависимости (*power-law*), наклон «прямой» различается для степеней полузахода ( $d^-$ ) и полусхода ( $d^+$ ): *немалое число агентов обладает большой «популярностью» (распределение  $d^+$ ), в то же время существенно меньше агентов с большой «активностью» (распределение  $d^-$ ).* Графики плотности степеней вершин приведены на рис. 10, б и в, а также аппроксимации эмпирической плотности известными законами распределений с тяжелыми хвостами (рассматриваются наиболее подходящие степенной закон  $f(x) \propto x^{-\alpha}$  и степенной закон с экспоненциальным отсечением  $f(x) \propto x^{-\alpha} e^{-\lambda x}$ ). Степенной закон – особенно с отсечением – хорошо описывает популярность агентов, но плохо – активность агентов.

*Каковы особенности взаимодействия агентов с различными позициями относительно ношения медицинских масок? Позицию агента определим как среднее мнений, выраженных в его действиях (см. введенные в п. 3.1 обозначения).* Из рис. 11 видно, что *по большей части агенты занимают полярные позиции, даже если исключить агентов, совершивших один акт с мнением «за» или «против».*

Возникает вопрос: *предпочитают ли агенты взаимодействовать с себе подобными?* Ответ на него важен для возможности оценки информационного влияния окружения на мнения в сети.



**Рис. 10.** Распределение агентов в сети: а – распределение по степени полузахода  $d^-$  и по степени полусхода  $d^+$ , б – по степени полузахода  $d^-$ , в – по степени полусхода  $d^+$

В табл. 1 приведены значения *коэффициента ассортативности* [27] (его диапазон  $[-1,0; 1,0]$ ) для агентов, совершивших хотя бы один акт «за» или «против» (таковых 52,8 тыс.), а также для агентов, совершивших не менее четырех актов «за» или «против» (8,5 тыс.).

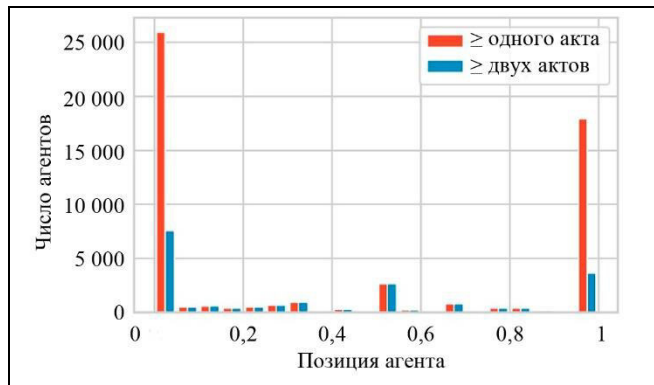


Рис. 11. Распределение агентов по их позиции

Таблица 1

### Значение коэффициента ассортативности для сетей

Число актов	$G$	$G_C$	$G_L$
Не менее 1 раза	0,21	-0,01	0,25
Не менее 4 раз	0,24	-0,05	0,31

Можно сделать вывод о том, что агенты (особенно активные) предпочитают ставить лайки агентам со сходной позицией относительно ношения медицинских масок, впрочем, такие предпочтения не являются ярко выраженными. Однако в сети не отмечается особых предпочтений по комментированию агентов с той или иной позицией.

Рассмотрим теперь сеть постановки лайков таких агентов, которые совершили не менее четырех актов «за» или «против». В этой сети позицию «за» занимает 30 % агентов (обозначим как  $p = 0,30$ ), а «против» – 64 % агентов ( $q = 0,64$ ). Для случайно выбранного ребра оценка вероятности того, что оно связывает агентов с разной позицией, равна  $2pq = 0,38$ . В то же время доля таких ребер в сети составляет 0,24. Для сети выполняется соотношение  $0,24 < 0,38$ , что подтверждает ее слабую ассортативность.

Рассчитаем следующие вероятности для связей «причина – следствие» в указанной сети постановки лайков (табл. 2). Введем обозначения для событий:  $A_+$  ( $A_-$ ) означает, что для случайно выбранной связи вызывающий лайки агент имеет позицию «за» («против»),  $B_+$  ( $B_-$ ) означает, что для случайно выбранной связи ставящий лайки агент имеет позицию «за» («против»).

Из табл. 2 можно заключить, что агенты с позицией «против» предпочитают взаимодействовать с агентами с аналогичной позицией (они как влияют на единомышленников, так и подвергаются их влиянию). В то же время, для агентов с позицией «за» не так уж важно, какой позиции придерживается его «собеседник».

Таблица 2

### Оценки условных вероятностей для связей постановки лайков

$P(B A)$	$B_-$	$B_+$	$P(A B)$	$A_-$	$A_+$
$A_-$	0,78	0,17	$B_-$	0,76	0,19
$A_+$	0,47	0,46	$B_+$	0,44	0,49

Однако сделать вывод о том, что агенты в сети постановки лайков разбиваются на слабо взаимодействующие между собой сообщества по занимаемым позициям, нельзя – рассчитанное значение модулярности [28] для такого разбиения равно 0,12 (вывод подтверждается визуализацией наибольшей компоненты связности этого графа на рис. 12). Для сравнения – разбиение сети на сообщества при помощи метода жадной максимизации модулярности [29] дает значение 0,52 (при максимально возможном значении 1,0).

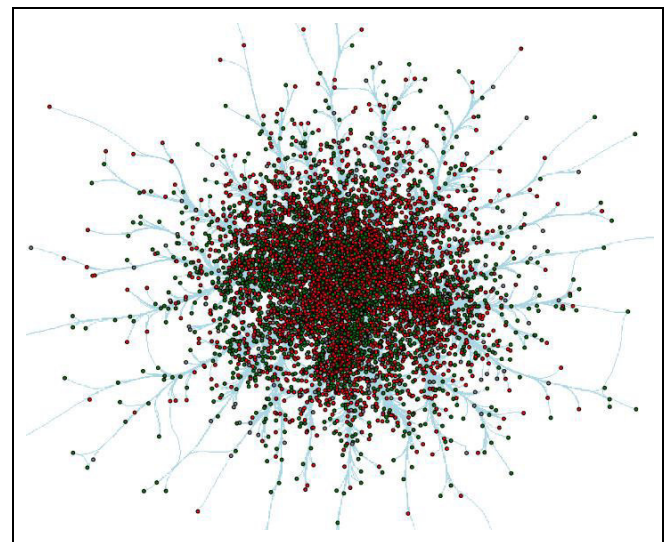


Рис. 12. Граф постановки лайков между агентами, совершившими не менее четырех актов «за» или «против» (зеленым обозначены агенты с позицией «за», красным – агенты с позицией «против»)

Следовательно, агенты не образуют «эхо-камеры» (сообщества единомышленников), даже если учитывать только связи постановки лайков, для которых коэффициент ассортативности наиболее высок. Агенты подвергаются воздействию окружения с разными позициями, под влиянием которого могут изменить свою позицию.

## 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ МНЕНИЙ И ДЕЙСТВИЙ АГЕНТОВ

Поставим существенные для идентификации моделей динамики мнений/действий вопросы, на



которые в следующих подразделах попробуем получить ответ (см. введение):

- Существуют ли в сети агенты, которые изменили свое мнение?
- Влияет ли мнение агента на предпринимаемые им действия?
- Влияют ли действия агента на его мнение?

#### 4.1. Изменившие свое мнение агенты

Для идентификации и последующего моделирования изменивших свое мнение агентов (см. второй вопрос во введении) необходимо выполнить отбор агентов с подходящей активностью. Будем рассматривать только таких агентов, каждый из которых:

– высказал по вопросу ношения медицинских масок как минимум одно мнение «за» и одно мнение «против»;

– высказал свое мнение от 10 до 100 раз (в п. 3.1 отмечена слабая активность агентов сети: большая часть агентов выражает свои мнения и совершает действия не более двух раз за весь исследуемый период);

– имеет открытый профиль в социальной сети и не менее пяти друзей (требуется для оценки социально-демографических характеристик агентов, а также для оценки влияния со стороны друзей).

Условиям соответствуют 162 агента (*примерно 1 % от числа агентов, имеющих мнение «за» или «против»*), которых будем в дальнейшем называть *значимыми*. Отметим, что ослабление второго условия не приводит к существенному увеличению числа значимых агентов (рис. 13), но данных по каждому агенту в таком случае становится недостаточно для целей анализа и моделирования.

Таким образом, хотя в сети и существуют агенты, которые изменили свое мнение за исследуемый период (есть и такие, кто сделал это неоднократно), однако их доля мала. Примеры динамики мнений значимых агентов приведены на рис. 14 (по горизонтальной оси указано время, по вертикальной указано мнение в диапазоне от  $-1$  до  $1$ : зеленым цветом обозначены мнения «за», а красным – «против»).

Охарактеризуем значимых агентов: определим их социо-демографические характеристики и построим сети связей между ними (сеть дружбы, сеть комментирования и сеть постановки лайков).

**Анализ социо-демографических характеристик значимых агентов.** Для большей части значимых агентов (99 агентов или 61 %) возраст не указан, что соответствует ситуации для исходной

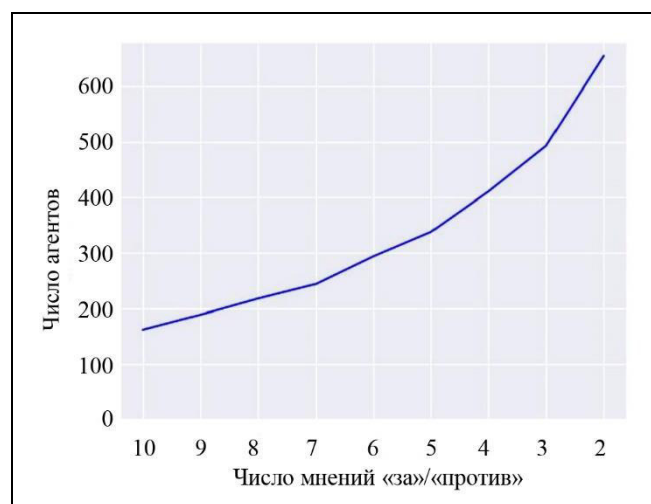


Рис. 13. Распределение агентов по числу мнений «за» или «против» (по горизонтали указано минимальное число мнений для агента)

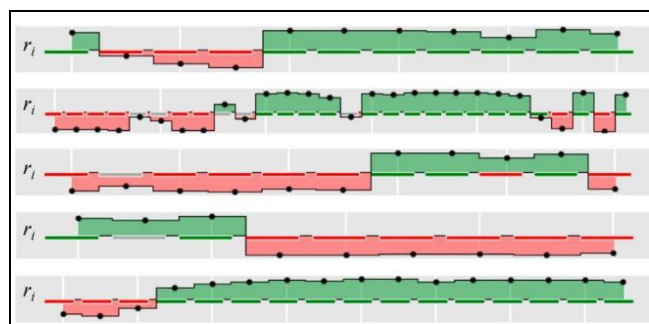


Рис. 14. Примеры динамики мнений значимых агентов

выборки агентов с мнениями (не указан возраст для 62 % агентов). Распределение остальных агентов по возрасту приведено на рис. 15. Возраст половины значимых агентов не превышает 47 лет (соответственно, 38 лет для агентов с мнениями), в среднем возраст равен 48 годам (42 года для агентов с мнениями). Следовательно, *значимые агенты являются более возрастными по сравнению с агентами с мнениями*.

Как видно из рис. 16, город не указан для 25 % значимых агентов (соответственно, для 34 % агентов с мнениями), для 23 % значимых агентов указан город Санкт-Петербург (для 12 % агентов с мнениями), для 17 % значимых агентов указана Москва (для 13 % агентов с мнениями), а для 10 % агентов – Екатеринбург (для 6 % агентов с мнениями). Таким образом, *значимые агенты в большей степени предпочитают указывать город, кроме того, для значимых агентов выше доля их представителей из Санкт-Петербурга и Екатеринбурга*.

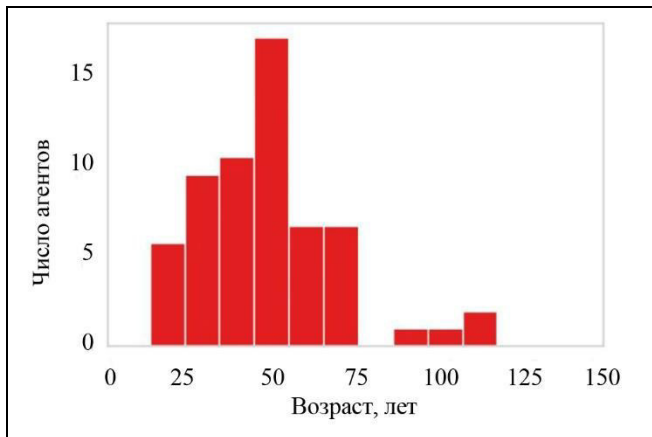


Рис. 15. Распределение значимых агентов по возрасту

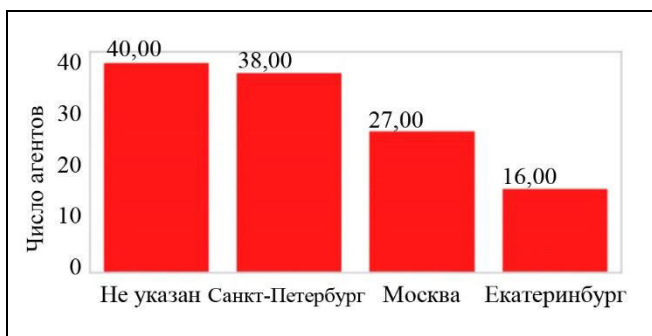


Рис. 16. Распределение значимых агентов по городу проживания

Среди значимых агентов больше всего мужчин – 93 или 57,4 %. В то же время, мужчин среди агентов с мнениями 59,6 %. Результаты биномиального теста не позволяют отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве распределений.

**Анализ сетей значимых агентов.** В сети дружбы значимых агентов имеется всего лишь 17 связей, большая часть вершин (138) изолирована (рис. 17). Узлам сети зеленого цвета соответствуют агенты, которые в целом придерживаются мнения «за», узлам красного цвета – агенты с преобладающим мнением «против».

Значение коэффициента ассортативности для сети дружбы составляет 0,32, т. е. с осторожностью (с учетом небольшого числа связей) можно предположить, что дружба может служить индикатором сходства позиций агентов. В среднем у значимого агента 432 друга, а у половины значимых агентов не более 113 друзей (что довольно близко к числу Данбара).

В сети комментирования между значимыми пользователями 157 связей дружбы, изолировано 45 вершин (рис. 18).

Значение коэффициента ассортативности для сети составляет  $-0,46$ , т. е. друг друга предпочитают комментировать значимые агенты с про-

тивоположными позициями. В среднем значимого агента комментирует 10 значимых агентов (значимый же агент в среднем комментирует 13 значимых), каждого второго из значимых агентов комментирует не более семи значимых агентов (с другой стороны, каждый второй значимый комментирует не больше 10 значимых агентов).

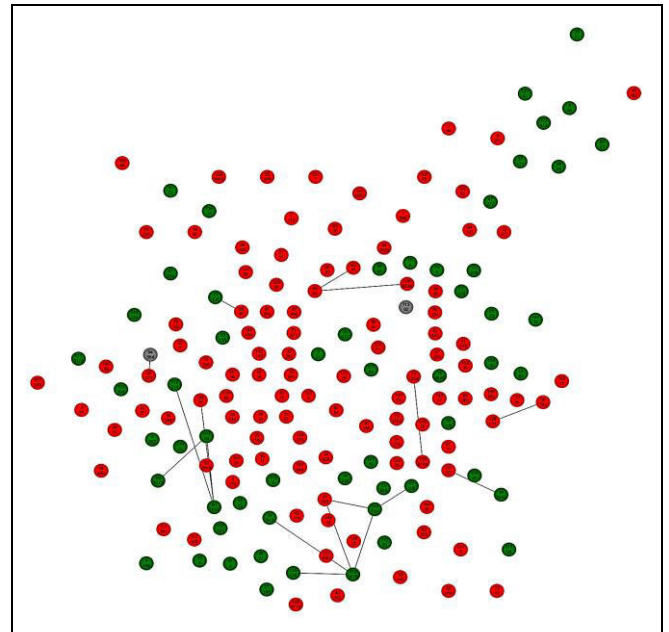
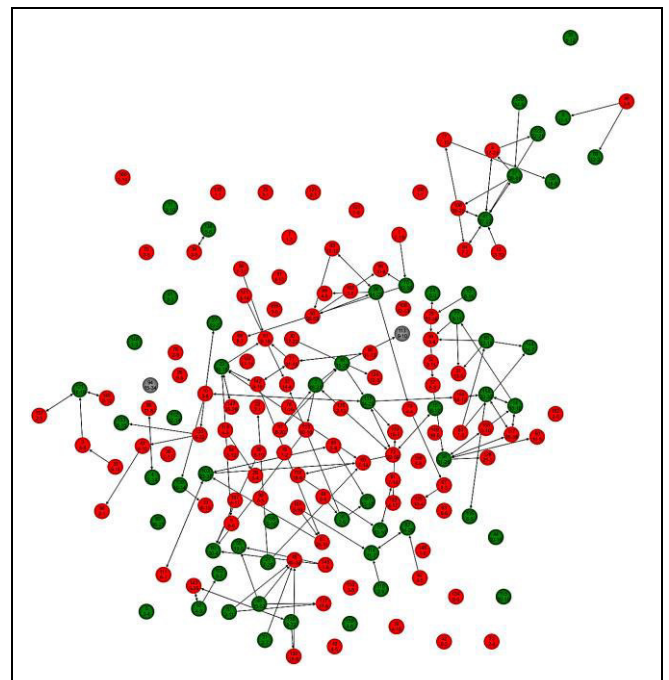


Рис. 17. Сеть дружбы значимых агентов

Рис. 18. Сеть комментирования для значимых агентов<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Позиции узлов одинаковы для всех сетей значимых агентов: сети дружбы, комментирования и лайков.



В сети постановки лайков между значимыми пользователями 248 связей дружбы, изолировано 37 вершин (рис. 19).

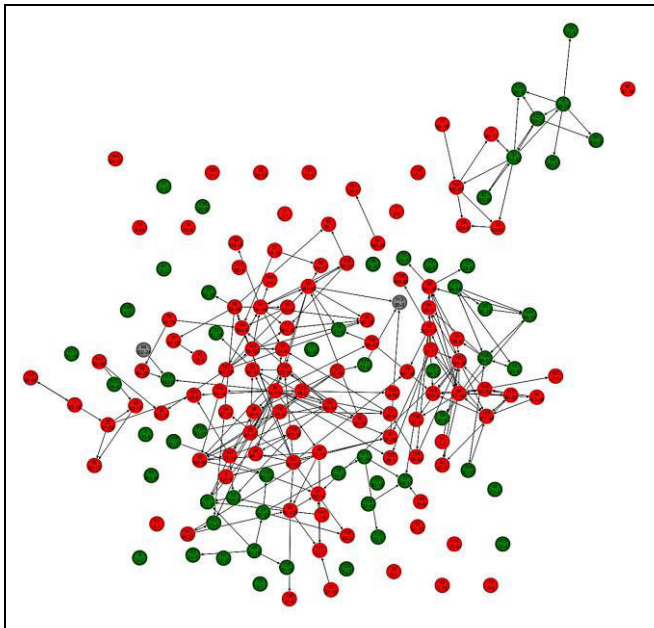


Рис. 19. Сеть постановки лайков для значимых агентов

Коэффициент ассортативности для сети составляет 0,58, т. е. лайки друг к другу ставят значимые агенты со сходной позицией. В среднем значимый агент получает лайки от 69 значимых агентов (сам значимый агент в среднем ставит лайки 28 значимым агентам), каждый второй получает лайки от не более чем 39 значимых (каждый второй ставит лайки не более чем 13 значимым агентам).

#### 4.2. Влияние мнений на действия

Рассмотрим динамику мнений агента  $i \in N$  с позицией, для которого определены последовательные моменты высказывания мнений  $t_m \in T$ ,  $m = \overline{1, M_i}$  (для каждого  $m$  существует такое  $a \in \delta_i$ , что  $r'(a) \in \{0, 1\}$ ,  $f_k(a) = 1$ ,  $f_i(a) = t_m$ ).

Определим множество действий «за» или «против», совершенных  $i$ -м агентом в период  $\tau$  между высказываниями с индексами  $m$  и  $m + 1$  (т. е.  $\tau = (t_m; t_{m+1}]$ ):

$$A_i^m = A_i(\tau) = \{a \in \delta_i \mid f_i(a) \in \tau, f_k(a) = 2, r'(a) \in \{0, 1\}\}.$$

Для оценки влияния мнения агента на его действия введем показатель согласованности действий:

$$1 - \frac{1}{M_i} \sum_{m \in \overline{1, M_i}} \left| r_i^{(i)m} - \frac{\sum_{a \in A_i^m} r''(a)}{|A_i^m|} \right| \in [0; 1],$$

где  $r_i^{(i)m}$  – мнение, выраженное в таком комментарии  $a$ , что

$$r''(a) \in \{0, 1\}, f_i(a) = t_m, f_a(a) = i.$$

Содержательно согласованность (см. первый вопрос во введении) отражает, насколько совпадают (коррелируют) действия агента с его мнением.

На рис. 20 приведена гистограмма распределения агентов по степени согласованности (для агентов, высказавших не менее пяти мнений).



Рис. 20. Распределение агентов по степени согласованности

Усредненная по всей сети согласованность агентов равна 0,76 (если ограничивать число высказываний, то 0,73). В целом действия агента «согласуются» с его мнением, т. е. мнение агента может «влиять» на его действия.

#### 4.3. Влияние действий на мнения

Для оценки влияния действий (частичный ответ на пятый вопрос) на мнение введем следующие обозначения. Определим множество действий, совершенных  $i$ -м агентом в рамках заданного интервала времени  $\tau$  (т. е.  $\tau = [t_m; t_{m+1})$ ):

$$B_i(\tau) = \{a \in \delta_i \mid r'(a) \in \{0, 1\}, f_i(a) \in \tau, f_k(a) = 2\},$$

а также влияние собственных действий на мнение:

$$r_{D_i}(\tau) = \frac{\sum_{b \in B_i(\tau)} r(b)}{|B_i(\tau)|} \in [-1; 1].$$

Не все изменения мнений будем считать значимыми: изменение является *значимым*, если оно превышает порог  $\epsilon = 0,1$ . Рассмотрим «вероятность»<sup>9</sup> значимого изменения мнения под влиянием собственных действий (по аналогии с работой [30]). Возможные ситуации последовательного выражения мнений агентом  $t_m \rightarrow t_{m+1}$  разобьем на пять классов исходя из его «начального» мнения:

- «сильно против»,  $r \in [-1; -0,6]$ ;
- «умеренно против»,  $r \in (-0,6; -0,2]$ ;
- «слабо выраженная позиция»,  $r \in (-0,2; 0,2]$ ;
- «умеренно за»,  $r \in (0,2; 0,6]$ ;
- «сильно за»,  $r \in (0,6; 1]$ .

Для каждого класса оценим: (а) вероятность того, что мнение агента значимо изменится в «сторону» его действий, и (б) вероятность значимого изменения мнения в сторону, обратную его действиям. Приведем результаты анализа для классов ситуаций «сильно против» и «сильно за», поскольку мощность остальных классов оказалась слишком мала. На рис. 21 показаны оценки вероятностей значимого изменения мнения под влиянием действий в ту или иную сторону (синим – в сторону действий, красным – в обратную сторону).

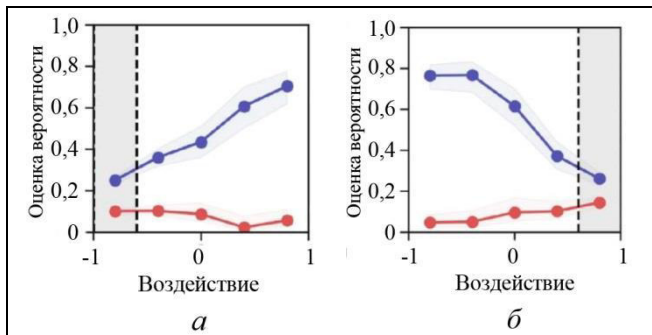


Рис. 21. Оценки вероятностей изменения мнений для классов: а – «сильно против» и б – «сильно за»

**Примечание.** Если агент не совершал действий в промежутке между высказываниями мнений, то воздействие считается равным нулю.

На рис. 22 приведена средняя величина и доверительные интервалы (на уровне значимости 0,05) значимого изменения мнения в результате влияния собственных действий.

Следовательно, мнения агентов, если и меняются, то чаще всего в сторону совершенных ими действий. Чем больше различие между «начальным» мнением и действиями агента, тем больше вероятность изменения мнения (рис. 21) и тем больше величина изменения мнения в сторону действий (рис. 22).

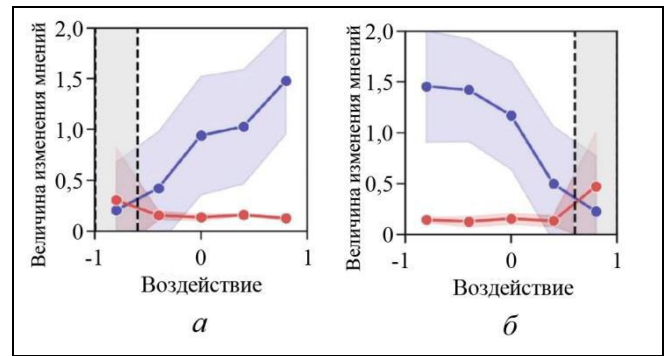


Рис. 22. Величина значимого изменения мнений для классов: а – «сильно против» и б – «сильно за»

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше выполнен первичный анализ совместной динамики мнений и действий агентов в онлайн-социальной сети ВКонтакте (на примере отношения к ношению медицинских масок в период первого года пандемии COVID-19).

Решена задача идентификации мнений пользователей (агентов) онлайн-социальной сети ВКонтакте. При помощи методов глубокого обучения удалось достичь удовлетворительного качества автоматической классификации – значения 0,82 показателя верности (*accuracy*).

Проведена характеристика агентов сети с выраженной позицией относительно ношения масок. Для социальной сети ВКонтакте выявлена поляризация агентов, при этом, с одной стороны, доля агентов с позицией «за» существенно больше доли с позицией «против», а с другой – активность агентов с позицией «против» выше. В целом для активности агентов характерен дисбаланс: агенты малоактивны, но в то же время существует небольшое число агентов с очень большой активностью. Но если уж агент высказывается в очередной раз, то с вероятностью 0,5 он это сделает в течение суток. Объяснить это можно тем, что агент участвует в обсуждении все новых информационных поводов, старые при этом забываются.

Проанализирована динамика активности (релевантная ношению масок) агентов сети. Для динамики активности сети характерны всплески, как правило, связанные с информационными событиями (например, с введением мер, направленных на борьбу с пандемией). Прямая связь с заболеваемостью COVID-19 не найдена, скорее всего такая связь является опосредованной. Выявлен рост поляризации сети со временем (30 % рост объема полярных мнений за год), при этом соотношение высказываний «за» – «против» меняется в пользу негативных мнений (20 % рост за год).

<sup>9</sup> Интерпретация доли случаев значимого изменения мнений.



Проведен анализ сетей информационного взаимодействия агентов. В этих сетях не отмечается особых предпочтений по комментированию агентов с той или иной позицией. Агенты (особенно активные) предпочитают ставить лайки агентам со сходной позицией относительно ношения масок, но такие предпочтения не являются ярко выраженными. Впрочем, для сети лайков агенты с позицией «против» предпочитают взаимодействовать (ставить лайки) с агентами с аналогичной позицией (они как влияют на единомышленников, так и сами подвергаются их влиянию). В то же время для агентов с позицией «за» не так уж и важно, какой позиции придерживается его собеседник. Однако говорить о том, что агенты в сети постановки лайков находятся в эхо-камерах единомышленников, не приходится: слишком мал коэффициент модулярности, что дополнительно подтверждается визуализацией сети информационных взаимодействий. Следовательно, агенты подвергаются перекрестному воздействию социального окружения, под влиянием которого могут изменить свое мнение. Это, в свою очередь, дает основание для дальнейшего исследования моделей информационного влияния в социальных сетях.

Решены важные для идентификации моделей динамики мнений/действий вопросы. Во-первых, подтверждено существование небольшого числа агентов (названных *значимыми*), изменивших свое мнение за исследуемый период (см. вопрос 2 во введении), – около 1% от числа агентов с мнениями «за» или «против». Анализ характеристик показал, что: среди значимых агентов больше всего мужчин (57 %); значимые агенты являются более возрастными; доля значимых агентов из Санкт-Петербурга и Екатеринбурга выше по сравнению с агентами с мнениями. Значимые агенты слабо связаны связями дружбы; они предпочитают комментировать значимых агентов с противоположными позициями, а ставить лайки значимым агентам со сходной позицией (см. вопрос 3). Во-вторых, показано, что мнение агента (его внутреннее состояние) влияет на предпринимаемые им действия, которые «согласуются» с мнением (см. вопрос 1). В-третьих, оказывается, что мнения агентов меняются в сторону совершенных ими действий: чем больше различие между «начальным» мнением и действиями агента, тем вероятнее и больше величина изменения мнения агента в сторону действий (см. вопрос 5).

Во второй части исследования на основе полученных результатов будет проведена идентификация формальных линейных моделей динамики мнений и действий (см. вопросы 5–7). Проблеме идентификации бинарных микромоделей, а также

сравнению линейных и пороговых моделей (см. вопросы 4–7) посвящена третья, заключительная часть исследования.

*Авторы признательны И.В. Козищину, В.В. Латынову, А.В. Макаренко, И.В. Петрову, Д.В. Ушакову, А.Г. Чхартишвили и А.А. Широкому за обсуждение и конструктивные замечания.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Губанов Д.А. Влияние в социальных сетях: варианты формализации // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 85. – С. 51–71. [Gubanov, D.A. Influence in Social Networks: Formalization Variants // Large-Scale Systems Control. – 2020. – Iss. 85. – P. 51–71. (In Russian)]
2. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. 3-е изд., перераб. и дополн. – М.: МЦНМО, 2018. – 224 с. [Gubanov, D.A., Novikov, D.A., Chkhartishvili, A.G. Social'nye seti: modeli informacionnogo vliyaniya, upravleniya i protivoborstva. 3-e izd., pererab. i dopoln. – M.: MCNMO, 2018. – 224 s. (In Russian)]
3. Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г. Влиятельность пользователей и метапользователей социальной сети // Проблемы управления. – 2016. – № 6. – С. 12–17. [Gubanov, D.A., Chkhartishvili, A.G. Meta-Agent and User Influence Levels in a Social Network // Control Sciences. – 2016. – No. 6. – P. 12–17. (In Russian)]
4. Новиков Д.А., Бреер В.В., Рогаткин А.Д. Управление толпой: математические модели порогового коллективного поведения. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 168 с. [Novikov, D.A., Breer, V.V., Rogatkin, A.D. Upravlenie tolpoj: matematicheskie modeli porogovogo kolektivnogo povedeniya. – M.: LENAND, 2016. – 168 s. (In Russian)]
5. Gubanov, D. A Study of a Complex Model of Opinion Dynamics in Social Networks / Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1740. – P. 1–6.
6. Allbaracin, D., Shavitt, S. Attitudes and Attitude Change // Annu. Rev. Psychol. – 2018. – Vol. 69, no. 4. – P. 1–29.
7. Banisch, S., Olbrich, E. Opinion Polarization by Learning from Social Feedback // The Journal of Mathematical Sociology. – 2019. – Vol. 43. – P. 76–103.
8. DeGroot, M. Reaching a Consensus // Journal of American Statistical Association. – 1974. – No. 69. – P. 118–121.
9. Granovetter, M. Threshold Models of Collective Behavior // The American Journal of Sociology. – 1978. – Vol. 83, no. 6. – P. 1420–1443.
10. Hunter, J., Danes, J., Cohen, S. Mathematical Models of Attitude Change. – Orlando: Academic Press, 1984. – 339 p.
11. Schelling, T. Micromotives and Macrobehaviour. – New York, London: Norton & Co Ltd, 1978. – 256 p.
12. Xia, H., Wang, H., Xuan, Z. Opinion Dynamics: A Multidisciplinary Review and Perspective on Future Research // Int. Journal of Knowledge and Systems Science. – 2011. – Vol. 2, no. 4. – P. 72–91.
13. Зимбардо Ф., Ляйне М. Социальное влияние. – СПб.: Питер, 2000. – 448 с. [Zimbardo, F., Lyajppe, M. Social'noe vliyanie. – SPb.: Piter, 2000. – 448 s. (In Russian)]
14. Майерс Д. Социальная психология. – СПб.: Питер, 1998. – 688 с. [Majers, D. Social'naya psihologiya. – SPb.: Piter, 1998. – 688 s. (In Russian)]

15. *Чалдини Р.* Психология влияния. – СПб.: Питер, 2003. – 258 с. [Chalдини, R. Psihologiya vliyaniya. – SPb.: Piter, 2003. – 258 s. (In Russian)]
16. *Pandemic Profiteers: the Business of Anti-vaxx* // Center for Countering Digital Hate (CCDH). – 2021. – URL: [https://www.counterhate.com/\\_files/ugd/f4d9b9\\_13cbbbef105e459285ff21e94ec34157.pdf](https://www.counterhate.com/_files/ugd/f4d9b9_13cbbbef105e459285ff21e94ec34157.pdf).
17. *Новиков Д.А.* Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 85. – С. 206–237. [Novikov, D.A. Dynamics Models of Mental and Behavioral Components of Activity in Collective Decision-Making // Large-Scale Systems Control. – 2020. – Iss. 85. – P. 206–237. (In Russian)]
18. *Gubanov, D., Kozitsin, I., Chkhartishvili, A.* COVID-19 Information Consumption and Dissemination: A Study of Online Social Network VKontakte / Proceedings of the 14th International Conference «Management of Large-Scale System Development». – Moscow, 2021. – P. 1–5. – URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9600199>.
19. *Gubanov, D., Kozitsin, I., Chkhartishvili, A.* Face Mask Perception during the COVID-19 Pandemic: An Observational Study of Russian Online Social Network VKontakte // Advances in Systems Science and Applications. – 2021. – Vol. 21. – No. 3. – P. 91–100.
20. *Kuratov, Y., Arkhipov, M.* Adaptation of Deep Bidirectional Multilingual Transformers for Russian Language // arXiv preprint arXiv:1905.07213. 2019.
21. *Babakov, N., Logacheva, V., Panchenko, A.* Beyond Plain Toxic: Detection of Inappropriate Statements on Flammable Topics for the Russian Language // arXiv:2203.02392. – 2022. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.02392>.
22. *Grigoriev, O., Kuznetsova, Y., Nikitina, E., et al.* Causative-Emotive Analysis. Part I. Emotional Reactions of Social Networks Users Research // Psikhologicheskii Zhurnal. – 2022. – № 3 (43). – P. 114–121.
23. *Nugamanov, E., Loukachevitch, N., Dobrov, B.* Extracting Sentiments towards COVID-19 Aspects / CEUR Workshop Proceedings. – Moscow, 2021. – P. 299–312.
24. *Pronoza E., Panicheva P., Koltsova O., Rosso P.* Detecting Ethnicity-targeted Hate Speech in Russian Social Media Texts // Information Processing and Management. – 2021. – Vol. 58, no. 6. – Art. no. 102674.
25. *Howe, N., Strauss, W.* Generations: The History of America's Future, 1584 to 2069. – New York: William Morrow & Company, 1991.
26. *Dong, E., Du, H., Gardner, L.* An Interactive Web-based Dashboard to Track COVID-19 in Real Time // Lancet Inf Dis. – 2020. – Vol. 20(5). – P. 533–534.
27. *Newman, M.* Mixing Patterns in Networks // Physical Review E. – 2003. – No. 2 (67). – P. 026126.
28. *Newman, M.* Modularity and Community Structure in Networks // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 2006. – Vol. 103, no. 23. – P. 8577–8696. – URL: <https://arxiv.org/abs/physics/0602124v1>.
29. *Clauset, A., Newman, M., Moore, C.* Finding Community Structure in Very Large Networks // Physical Review E. – 2004. – Vol. 70, no. 6. – 2004. – DOI: 10.1103/PhysRevE.70.066111.
30. *Kozitsin, I.* Opinion Dynamics of Online Social Network Users: a Micro-level Analysis // Journal of Mathematical Sociology. – 2021. – P. 1–41. – DOI: <https://doi.org/10.1080/0022250X.2021.1956917>.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии  
Ф.Т. Алескеровым.*

*Поступила в редакцию 28.12.2022,  
после доработки 27.03.2023.  
Принята к публикации 05.04.2023.*

**Губанов Дмитрий Алексеевич** – д-р техн. наук,  
✉ [dmitry.a.g@gmail.com](mailto:dmitry.a.g@gmail.com),  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0099-3386>

**Новиков Дмитрий Александрович** – академик РАН,  
✉ [novikov@ipu.ru](mailto:novikov@ipu.ru),  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9314-3304>

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.



# MODELS OF JOINT DYNAMICS OF OPINIONS AND ACTIONS IN ONLINE SOCIAL NETWORKS. PART I: Primary Data Analysis

D.A. Gubanov and D.A. Novikov

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ dmitry.a.g@gmail.com, ✉ novikov@ipu.ru

**Abstract.** Based on *Vkontakte* data, we study the influence of various factors on the dynamics of opinions and actions both at the macro level (“public opinion”) and at the micro level (the opinions and actions of individual agents). Primary analysis results are presented for the dynamics of opinions and actions of agents in this social network. In particular, the growing polarization of opinions at the macro level is detected; changes in the opinions of agents over time are observed; socio-demographic characteristics of agents who changed their opinions are determined; a good consistency between the opinions and actions of agents is revealed; finally, an explicit relationship between the opinions and actions of agents is established.

**Keywords:** social network, agent, opinion, action, social influence, cognitive dissonance, trust in information.

**Funding.** This research was partially supported by the Russian Science Foundation, project no. 23-21-00408 (D.A. Gubanov).

**Acknowledgments.** The authors are grateful to I.V. Kozitsin, V.V. Latynov, A.V. Makarenko, I.V. Petrov, D.V. Ushakov, A.G. Chkhartishvili, and A.A. Shiroky for discussion and constructive remarks.

# ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПРИЗНАКОВ И АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗА ОТСТУПЛЕНИЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПОЛОТНА

А.Ю. Владова

**Аннотация.** Диагностика железнодорожного полотна выявляет отступления параметров рельс в плане и профиле от нормативных значений. Приближение размеров отступлений к предельным значениям требует ограничения скоростей движения поездов. Поэтому прогноз изменений размеров отступлений является актуальной проблемой. Несмотря на значительный объем собираемых данных, эксплуатирующие организации недостаточно применяют методы машинного обучения для повышения качества прогноза параметров отступлений. Предлагаемый метод отличается от известных тем, что позволяет: увеличить размерность пространства признаков путем вычисления отклонений амплитуд отступлений от нормативных значений, площадей отступлений по длинам и амплитудам или отклонениям амплитуд с последующим представлением пространства признаков в виде 3D-матрицы; сформировать множество управляющих параметров (шаг дискретизации по времени, вид сезонных колебаний, количество точек изменения тренда и др.); прогнозировать размеры отступлений в группах, отличающихся видом и положением вдоль железнодорожного полотна. Прогноз ведут в рамках оптимизационной задачи по критерию минимума эмпирического риска и в результате получают семейство авторегрессионных моделей для каждого интервала дискретизации по длине полотна.

**Ключевые слова:** временные ряды, диагностика, программный модуль, дискретный технологический процесс.

## ВВЕДЕНИЕ

Железные дороги работают в сложных условиях: свое влияние оказывают природно-климатические факторы и нагрузки от проезжающих составов. Во время диагностики железнодорожного полотна измеряют геометрию пути и выявляют отступления параметров рельс в плане и профиле от нормативных значений. Выявленные отступления разделяют следующим образом:

- ширина колеи (сужения, уширения),
- положение рельс по уровню (перекосы, плавные отклонения уровня),
- просадки по правому и левому рельсу в вертикальной плоскости (просадки правая и левая),
- положение рельс в плане (рихтовка).

Выявленные отступления привязаны к дискретным моментам времени и дистанции пути и распределены неравномерно. Приближение размеров отступлений к предельным значениям требует ограничения скоростей движения поездов. Поэтому

прогноз изменений размеров отступлений является актуальной проблемой.

Таким образом, сформулирована цель работы – повышение точности прогнозирования размеров отступлений железнодорожного полотна. Для достижения цели поставлены следующие задачи исследования: провести обзор современных методов прогнозирования размеров дефектов протяженных объектов, выполнить статистический анализ параметров отступлений как многомерных данных; сформировать множества входных и выходных параметров и комбинаций их значений; спрогнозировать размеры отступлений железнодорожного полотна.

## 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

### 1.1. Общая аналитика

Анализ литературы выполнен с помощью реферативно-аналитической базы данных Dimen-





sions, объединяющей свыше 100 млн публикаций журналов, патентов и грантов. Соотношение печатных работ (в тыс. шт.) по научным категориям по запросу «*railway degradation*» (деградация железнодорожного полотна) представлено на мозаичной диаграмме рис. 1.

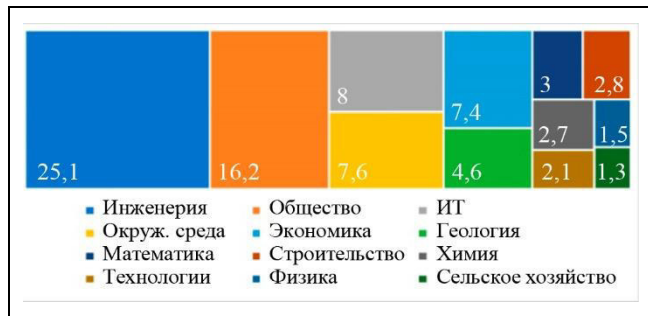


Рис. 1. Распределение работ (в тыс. шт.) по научным категориям за 2012–2022 гг.

С ростом протяженности и длительности эксплуатации железных дорог остро встают вопросы идентификации и прогнозирования их технического состояния. Этот процесс отражен в увеличении числа публикаций и их цитирований (рис. 2) за последние 11 лет. Характерный рост публикаций и цитирований наблюдается в отраслях «Инженерия» и «ИТ» и, по-видимому, связан с появлением новых сенсоров и методов обработки больших данных, ими генерируемых.

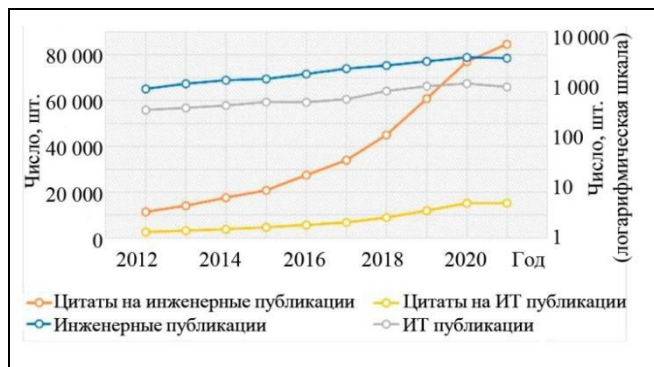


Рис. 2. Рост числа публикаций и их цитирования по запросу «*railway degradation*» в отраслях «Инженерия» и «ИТ»

## 1.2. Прогноз размеров дефектов железнодорожного полотна

Эволюция подходов, применяемых при прогнозировании технического состояния железнодорожных систем, связана с применением различных типов датчиков, а также методов, ориентированных на автоматизацию обработки собираемых ими данных. Обзорная статья [1], посвященная мони-

торингу состояния железнодорожных систем, приводит список основных направлений развития, среди которых создание бортовых систем, основанных на различных типах датчиков и методов обработки собираемых данных. В публикации [2] разработан метод классификации признаков вибрации подвижного состава для автоматического обнаружения неисправностей пути. В статье [3] представлено исследование причин быстрой деградации железнодорожного переезда. Динамические характеристики переезда оценивались с использованием сенсорной аппаратуры и было выявлено, что быстрое ухудшение характеристик переезда вызвано значительными силами удара колеса о рельс, связанными с рывком проезжающих поездов. В статье [4] выполнен статистический анализ данных диагностических вагонов, построены плотности распределений рельс по типу, новизне, назначению, классу и на этой основе созданы кластеры с рекомендациями по объемам транзитного тоннажа. В докладе [5] представлена модель оценки интенсивности износа железнодорожных путей, основанная на углах наклонов переходных кривых. Анализ литературы показал, что прогноз по многомерным временным рядам, характеризующим состояние железнодорожного полотна, преимущественно основан на двух видах моделей [6]:

- авторегрессионные, предсказывающие значения временного ряда  $\tilde{z}$  с учетом прошлых значений  $z(t), \dots, z(t-p)$ , например, по аддитивной модели  $\tilde{z}(t) = a + \varphi_1 z(t-1) + \dots + \varphi_p z(t-p) + \epsilon(t)$ , где  $\varphi_p$  – веса,  $\epsilon(t)$  – ошибка;

- регрессионные  $\tilde{z}(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)) + \epsilon(t)$ , предсказывающие значения временного ряда по набору признаков  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ .

Основным недостатком рассмотренных подходов является ограниченное использование больших данных и современных методов их обработки для повышения качества прогноза технического состояния железнодорожного полотна. В то же время в литературе, посвященной анализу климатических, геотехнических [7, 8], сейсмических данных [9], а также астрономических наблюдений широко применяются как классические многомерные параметрические модели и преобразование Фурье, так и сравнительно недавно созданные вейвлет-преобразования, канонические корреляции, траекторные матрицы. Кроме того, перечисленные модели можно положить в основу оптимизационных задач и выполнить дополнительные исследования по поиску оптимального набора параметров [10].

### 1.3. Модели прогноза временных рядов, реализованные в библиотеках машинного обучения

При анализе методов машинного обучения для прогноза временных рядов рассмотрены свободно распространяемые библиотеки Darts и GreyKite. Библиотека Darts содержит реализации регрессионных моделей ARIMA, Exponential Smoothing, Prophet, прогноз на основе быстрого преобразования Фурье и др. [11]. Библиотека GreyKite обеспечивает прогнозирование временных рядов на моделях Silverkite, Prophet и ARIMA и особенно подходит для рядов, у которых есть точки изменения тренда или сезонности [12]. В табл. 1 проведен качественный анализ трех временных моделей Silverkite, Prophet и ARIMA.

Таблица 1

#### Качественный анализ моделей

Критерий	Silverkite	Prophet	ARIMA
Скорость вычисления	Высокая	Низкая	Средняя
Точность прогноза	Очень хорошая	Хорошая	Удовлетворительная
Интерпретируемость	Хорошая	Очень хорошая	Хорошая
Простота использования	Удовлетворительная	Хорошая	Очень хорошая
Наглядность	Хорошая	Очень хорошая	Приличная

В результате анализа выбрана модель аддитивной регрессии с настраиваемыми компонентами Prophet [13]

$$\hat{z}(t) = g(t) + s(t) + h(t) + \epsilon(t), \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $z(t)$  – фактическое значение временного ряда;  $\hat{z}(t)$  – прогнозное значение временного ряда;  $g(t)$  – компонент тренда, смоделированный с помощью кусочно-линейной, кусочно-логистической или гладкой функции;  $s(t)$  – сезонная составляющая, отвечающая за моделирование периодических изменений (сезонность оценивается с использованием частичной суммы Фурье);  $h(t)$  – компонент, отвечающий за специфические моменты перелома тренда, например график ремонтов;  $\epsilon(t)$  – ошибка, содержащая сведения, не учитываемые моделью.

Модель позволяет управлять параметрами, характеризующими сезонность временного ряда, количество точек изменения тренда, шаг по времени, а также устойчива к отсутствующим данным и

сдвигам в тренде и, как правило, хорошо справляется с выбросами.

Тонкая настройка компонентов, входящих в уравнение (1) позволит получить приемлемое качество прогноза на выходе модели, оцененное через среднюю абсолютную ошибку в процентах [14]

$$\text{MAE \%} = \frac{\sum_{t=1}^N |z(t) - \hat{z}(t)|}{\hat{z}(t)}, \quad (2)$$

где  $N$  – количество точек временного ряда.

Кроме того, для установления области, значений выходного признака модель Prophet визуализирует доверительный интервал [8].

Таким образом, ставится задача на обучающей выборке  $\{x_i : t = 1, \dots, h\}$  найти вектор управляющих параметров  $U$  модели  $A(X, U)$  по критерию минимума эмпирического риска (2). Векторы  $X$  и  $U$  могут принимать значения из заданных подмножеств евклидового пространства  $E^n$  и  $E^r$ :  $X \subset E^n, U \subset E^r$ . На векторы  $X$  и  $U$  могут быть наложены ограничения:  $g_i(X, U) \geq 0, i = 1, \dots, m$ .

## 2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОТСТУПЛЕНИЙ

### 2.1. Статистический анализ исходных данных

Исходные данные занимают 8,9 Мб, распределены по десяти столбцам-признакам и содержат 101 тысячу строк, из которых 91 строка имеет пропуски в данных (табл. 2).

Таблица 2

#### Формат исходных данных

Присвоенный индекс	Признак	Интервал значений	Число уникальных значений
1D	Километр	[1; 650]	645
	Пикет, м	[1; 1105]	1076
2D	Год	[2018; 2021]	4
	Месяц	[1; 12]	12
	День	[1; 31]	29
3D	Код отступления	[2065; 2161]	17
	Отступление	[Отв.у; Уш]	18
Признаки	Амплитуда, мм	[6; 1543]	144
	Нормативная амплитуда, мм	[10; 1535]	156
	Длина, мм	[1; 308]	151
	Степень опасности	[1; 4]	4



Дальнейший анализ показал, что данные несбалансированы:

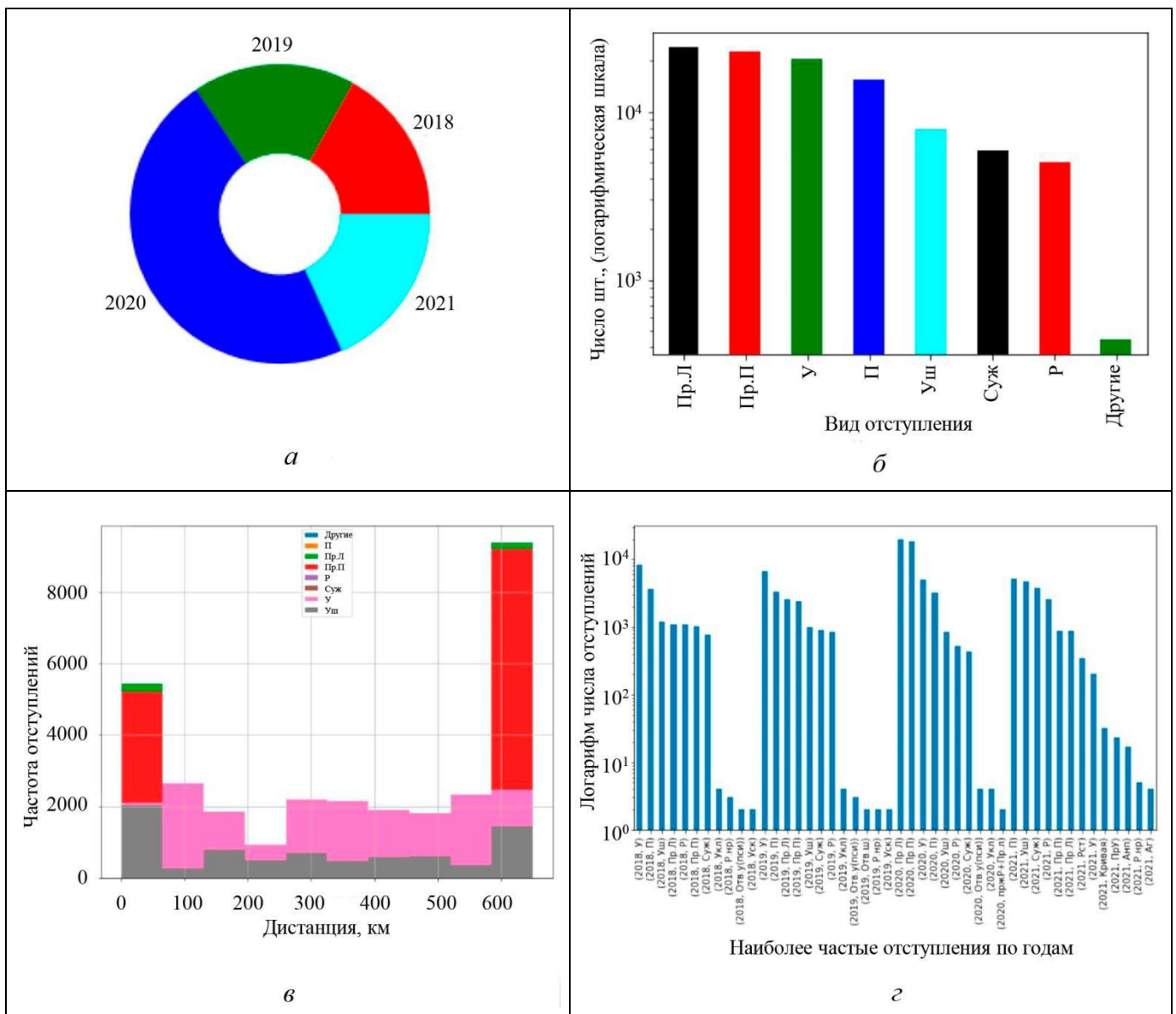
- По годам (рис. 3, *а*). В 2020 г. отступлений зарегистрировано столько же сколько в 2018-м, 2019-м и первых двух месяцах 2021 г. вместе взятых.

- По видам отступлений (рис. 3, *б*). Разбивка по годам и видам дана на рис. 3, *г*. В 2020 г. значительно возросло число диагностируемых отступлений, а в 2021 г. увеличилось число видов отступлений: с 11 в 2018 г. до 18 в 2021 г. Причем от года к году происходила смена лидеров среди

наиболее часто встречающихся отступлений: просадки (Пр.Л, Пр.П), перекосы (П), сужения (С), уширения (Уш) и плавные отклонения по уровню (У).

- По длине железнодорожного полотна – на железнодорожных узлах зарегистрировано значительно больше отступлений, чем в среднем по дистанции пути (рис. 3, *в*).

Вследствие малочисленности отступлений некоторых видов возможно либо их объединение в группу, либо использование bootstrap-методов для синтеза дополнительных данных.



### 2.1.1. Тренд и сезонность

Проверка наличия тренда и сезонности проведена с помощью операций повышения и понижения дискретизации данных при изменении шага временной сетки:

- В то время как тренд на уменьшение амплитуд отклонений прослеживается при вычислении их медианных значений за каждый год, сначала уменьшаются, а затем резко растут длины отступлений (рис. 4, а). Причем точка изменения тренда соответствует 2020 г. Отметим, что агрегированный параметр «Степень опасности» индифферентен к изменениям медианной амплитуды и длины отступлений.

- Понижение дискретизации по времени (двухмесячная шкала) и логарифмирование показало (рис. 4, б), что наиболее сильно амплитуды отступлений отклоняются в июле. Эти изменения говорят о наличии сезонности в данных. Локальные экстремумы длин отступлений в какой-то мере следуют за экстремумами амплитуд с временным лагом, но не имеют выраженной сезонности. У признака «Степень опасности» также не удалось графически выделить сезонные изменения.

### 2.1.2. Увеличение размерности пространства признаков

Поскольку время представлено тремя целочисленными признаками: «Год», «Месяц», «День», на их основе сформирован вычисляемый признак «Время». Совокупность двух признаков «Километр» и «Пикет» характеризует местонахождение отступления и формирует новый признак «Дистанция». Для повышения стационарности временного ряда вычислены разницы между признаками «Амплитуда» и «Нормативная амплитуда» и создан признак «Отклонение». Для более полного

описания признака «Отклонение» с использованием плоскостного, а не точечного значения, введены два агрегированных признака «Площадь\_А» и «Площадь\_О», вычисленные как произведения длин отступлений на амплитуды и отклонения соответственно. Кроме того, для увеличения количества значений временного ряда 11 редко встречающихся отступлений агрегированы в признак «Другие». На рис. 5 продемонстрированы особенности новых признаков:

- отличия в разбросе отклонений: только положительные значения у «Уширений», «Перекосов» и «Просадок»; только отрицательные у «Сужений» со значимой степенью опасности, большая дисперсия у «Плавных отклонений по уровню» (рис. 5, а);

- разделение значений признака «Площадь\_А» на кластеры по видам отступлений при переходе на логарифмическую шкалу (рис. 5, б).

Эти отличия говорят о необходимости использования различных моделей прогнозирования [15, 16] для каждого вида отступлений либо о нормировке их значений.

### 2.1.3. Преобразование данных в 3D-матрицу

Поскольку изменение размеров каждого вида отступлений может подчиняться своему закону, а каждый километр железнодорожного полотна имеет свои геотехнические особенности, в прогнозных моделях длины и амплитуды отступлений, их нормативные значения, а также агрегированные признаки представлены в виде 3D-матрицы с осями:

- местонахождение вдоль железнодорожного полотна,
- время, как момент фиксации отступления,
- код отступления.

Фрагмент преобразованных данных представлен на рис. 6.

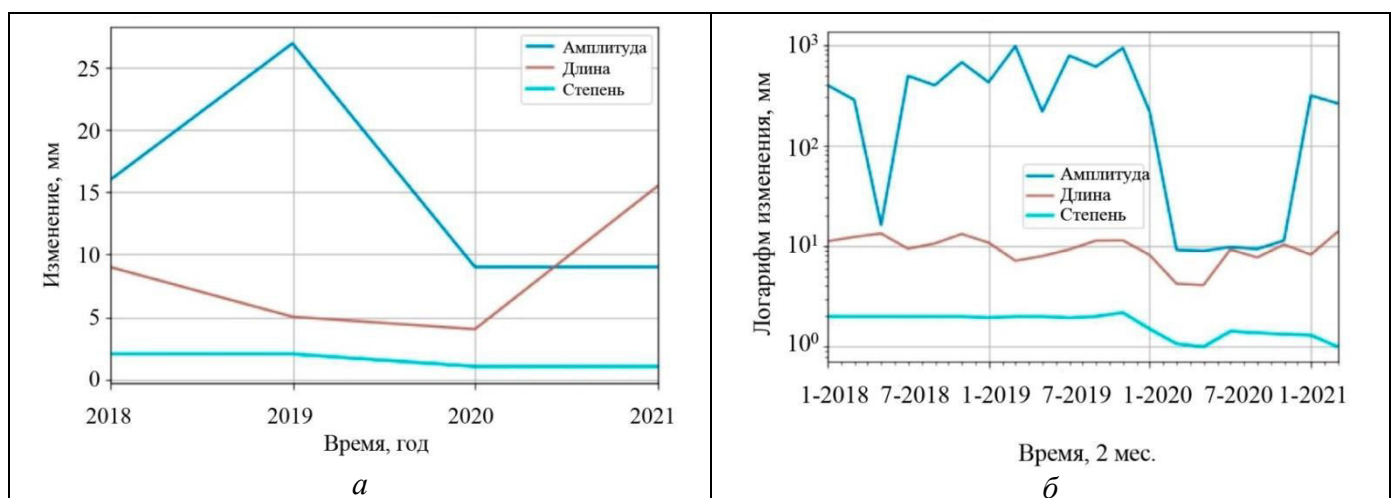


Рис. 4. Выявление: а – тренда, б – сезонности у признаков «Амплитуда», «Длина отступления», «Степень опасности»

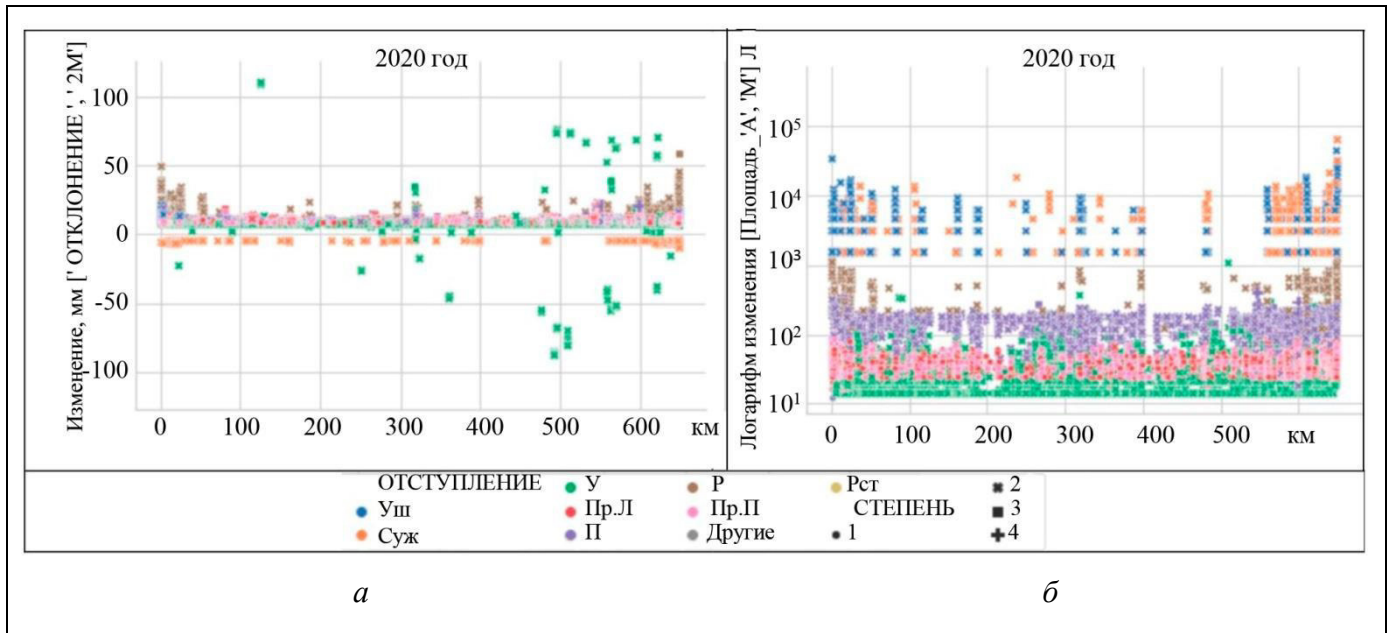


Рис. 5. Анализ дисперсии значений по видам отступлений: *a* – отличия в разбросе, *б* – кластеризация значений

КОДОТСТУП	ДИСТАНЦИЯ	ВРЕМЯ	КМ	АМПЛИТУДА	НОРМА	ДЛИНА	ОТСТУПЛЕНИЕ	ГОД	СТЕПЕНЬ	ОТКЛОНЕНИЕ	ПЛОЩАДЬ_А	ПЛОЩАДЬ_О
2081	1469	2018-01-29	1	1529.0	1520	4	Уш	2018	2	9.0	6116.0	36.0
	1614	2018-01-29	1	1530.0	1520	2	Уш	2018	2	10.0	3060.0	20.0

Рис. 6. Фрагмент преобразованных данных

#### 2.1.4. Плотности распределения вероятностей

Плотности распределения вероятностей построены на разных временных сетках (с усреднением от нескольких недель до квартала) для исходных значений длин, амплитуд, отклонений амплитуд и площадей каждого вида отступлений, а также степени отступлений. Наиболее близко к нормальному закону распределения оказались значения признаков «Отклонение» и «Площадь\_О» (рис. 7).

Поскольку плотности распределений значений оставшихся признаков имеют двухвершинное распределение, нормирование их значений проведено в интервал  $[0; 1]$  по формуле

$$x_{i, \text{norm}} = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \quad (3)$$

где  $x_{i, \text{norm}}$  – нормализованное значение признака;

$x_{\min}$ ,  $x_{\max}$  – наименьшее и наибольшее значение признака;  $x_i$  –  $i$ -е исходное значение признака.

Таким образом, проведен статистический анализ параметров отступлений как многомерных данных, который выявил несбалансированность данных по годам и типам отступлений, наличие тенденций и локальных минимумов при передискретизации данных по годам, месяцам и кварталам, позволил сгруппировать наименее часто встречающиеся виды отступлений и увеличить размерность пространства признаков путем добавления положения отступлений и времени их диагностирования, вычисления отклонений амплитуд от нормативных значений, площадей отступлений по длине, амплитуде и отклонению амплитуды с последующим представлением пространства признаков в виде трехмерной матрицы.

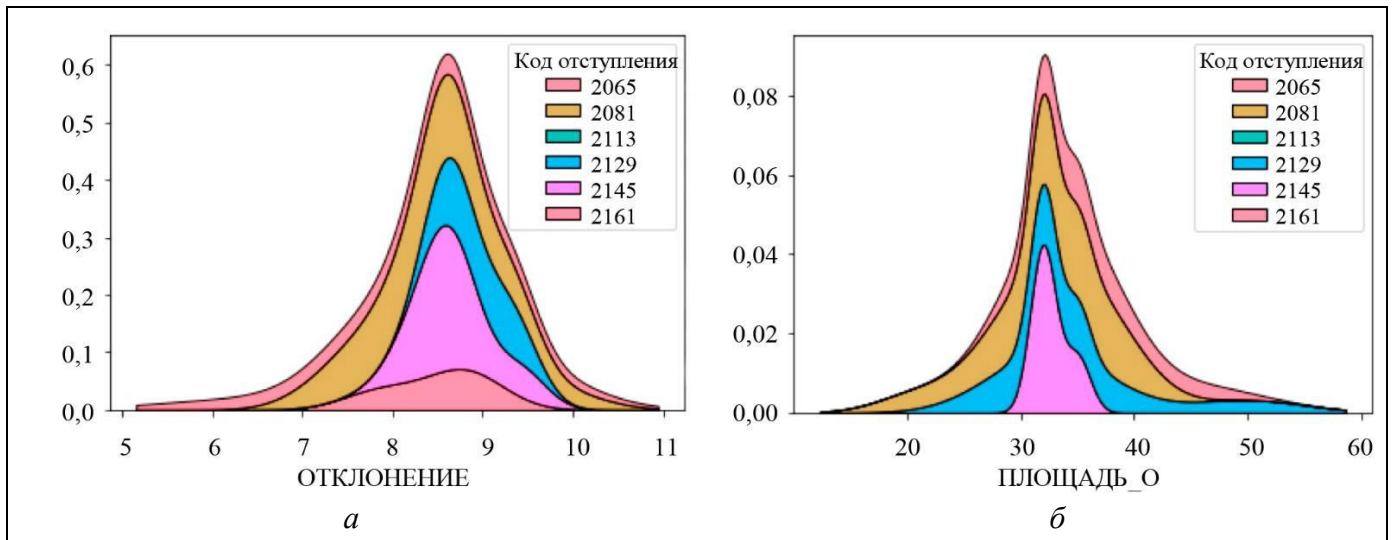


Рис. 7. Плотность распределения значений признаков: а – «Отклонение», усредненного на шестинедельной шкале; б – «Площадь\_О», усредненного на семинедельной шкале

## 2.2. Метод прогнозирования параметров отступлений железнодорожного полотна

Предлагаемый метод прогнозирования параметров отступлений железнодорожного полотна включает три этапа. На первом этапе проводят статистический анализ, во время которого объединяют редко встречающиеся виды отступлений в группу, синтезируют вектор  $X$  параметров модели: дистанцию и время, отклонение амплитуд от нормативных значений, площади отступлений. Затем индексируют значения признаков по трем осям – дистанция, код отступления и время – и тем самым формируют временные ряды для каждого километра и вида отступления.

На втором этапе увеличивают пространство признаков путем добавления нормированных и логарифмированных длин, амплитуд, отклонений амплитуд, площадей, степеней опасности. Затем задают вектор управляющих параметров  $U$ , включающий шаг дискретизации по времени, учет сезонности, а также количество точек изменения тренда. После формируют ограничения  $g_i(U)$ , учитывающие:

- глубину данных и шаг прогноза: один год; три, два и один квартал; два и один месяц; пять, три и две недели;
- тип сезонности: годовая, квартальная, месячная, недельная;
- количество точек изменения тренда, соответственно числу ремонтов;
- тип учета сезонности в модели (аддитивный,

мультипликативный);

- скорость изменения сезонности (количество слагаемых в частичной сумме Фурье).

На третьем этапе, в случае наличия достаточного числа отступлений в группе, охарактеризованной видом отступления и километром полотна, обучают модель  $A$  (1) в каждой группе с оценкой эмпирического риска MAE% (2). В результате определяют оптимальные значения вектора параметров  $U$  каждой группы по критерию минимума эмпирического риска.

Практической значимостью предлагаемого метода прогнозирования отступлений железнодорожного полотна является возможность его применения для получения новых знаний, способствующих оптимизации транспортного процесса.

## 2.3. Реализация

В табл. 3 приведены наборы параметров модели, позволившие получить наилучшее качество прогноза.

Средняя абсолютная ошибка MAE% лежит в диапазоне от 2,6 до 8,4 % для рекомендуемых параметров модели. По результатам расчетов установлено, что:

- квартальная и годовая сетки значительно ухудшают качество прогноза;
- лучшие прогнозы выполнены для отступлений «Перекас», «Рихтовка», «Просадка левая», «Уширение» и «Другие» (агрегированный показатель из 11 редко встречающихся отступлений);

## Результаты прогнозирования

MAE%	Шаг по времени	Отступление	Отклонение	Число точек изменения
2,68	1 месяц	Перекоc	ПЛОЩАДЬ_А	0
3,03	3 недели	Рихтовка	ДЛИНА	0
3,27	3 недели	Уширение	ДЛИНА	2
3,89	3 недели	Просадка левая	ОТКЛОНЕНИЕ	0
4,36	1 месяц	Перекоc	АМПЛИТУДА	1
4,45	3 недели	Другие	ДЛИНА	2
4,60	5 недель	Перекоc	ОТКЛОНЕНИЕ	2
5,34	1 месяц	Перекоc	АМПЛИТУДА	1
5,34	1 месяц	Просадка правая	АМПЛИТУДА	2
5,74	3 недели	Другие	ПЛОЩАДЬ_О	0
5,74	3 недели	Уширение	ПЛОЩАДЬ_О	0
6,59	1 месяц	Перекоc	СТЕПЕНЬ	2
7,90	5 недель	Рихтовка	ДЛИНА	2
8,39	3 недели	Другие	ПЛОЩАДЬ_А	0
8.39	3 недели	Уширение	ПЛОЩАДЬ_А	0

– следует выбирать не более двух точек изменения тренда;

– для пятидневной сетки лучшие значения показателя MAE% достигаются при количестве точек изменения тренда, равном двум;

– наименьшие значения MAE% достигаются при учете недельных, месячных и квартальных сезонностей;

– логарифмирование значений признаков ухудшает качество прогноза;

– нормирование значений признаков в интервал  $[0; 1]$  улучшает качество прогноза;

– центрирование значений путем вычитания математического ожидания и их нормирование путем деления на стандартное отклонение, а также использование мультипликативных регрессоров, отвечающих за сезонность, ухудшает качество прогнозирования.

Рис. 8, а отражает прогноз на месяц вперед, выполненный для признака «Перекоc». Рис. 8, б демонстрирует прогноз на три недели вперед для признака «Уширение». Черные точки являются фактическими значениями, синяя линия представляет модельные значения, а голубая область является коридором неопределенности. Рис. 8, в, г отображают выделенные тренды, а рис. 8, д – з из-

менение сезонной составляющей: месячной и квартальной (рис. 8, д, ж), недельной и месячной (рис. 8, е, з). Для обеих моделей добавлен расчет коридора неопределенности для сезонной и трендовой составляющей.

Выполненный прогноз на один шаг временной сетки показал, что длина и амплитуда отступлений на этих участках растут. Последняя точка обучающей выборки у приведенных результатов является точкой локального экстремума. Рост амплитуд для признака «Перекоc» приходится на последний месяц в квартале. Возможно, это связано с характером ремонтных работ.

Практическая значимость реализации метода заключается в том, что разработана программа на языке Python, формирующая семейство прогнозных моделей для групп по видам отступлений и километру полотна по сформированным признакам и позволяющая оптимизировать транспортный процесс.

Для манипулирования, визуализации и изучения данных использован язык программирования Python и платформа Google Colaboratory. Визуализация результатов статистического анализа выполнена с помощью функций библиотек Matplotlib, Pandas и Seaborn. Для обучения моделей использованы библиотеки SciPy, Sklearn и Prophet.

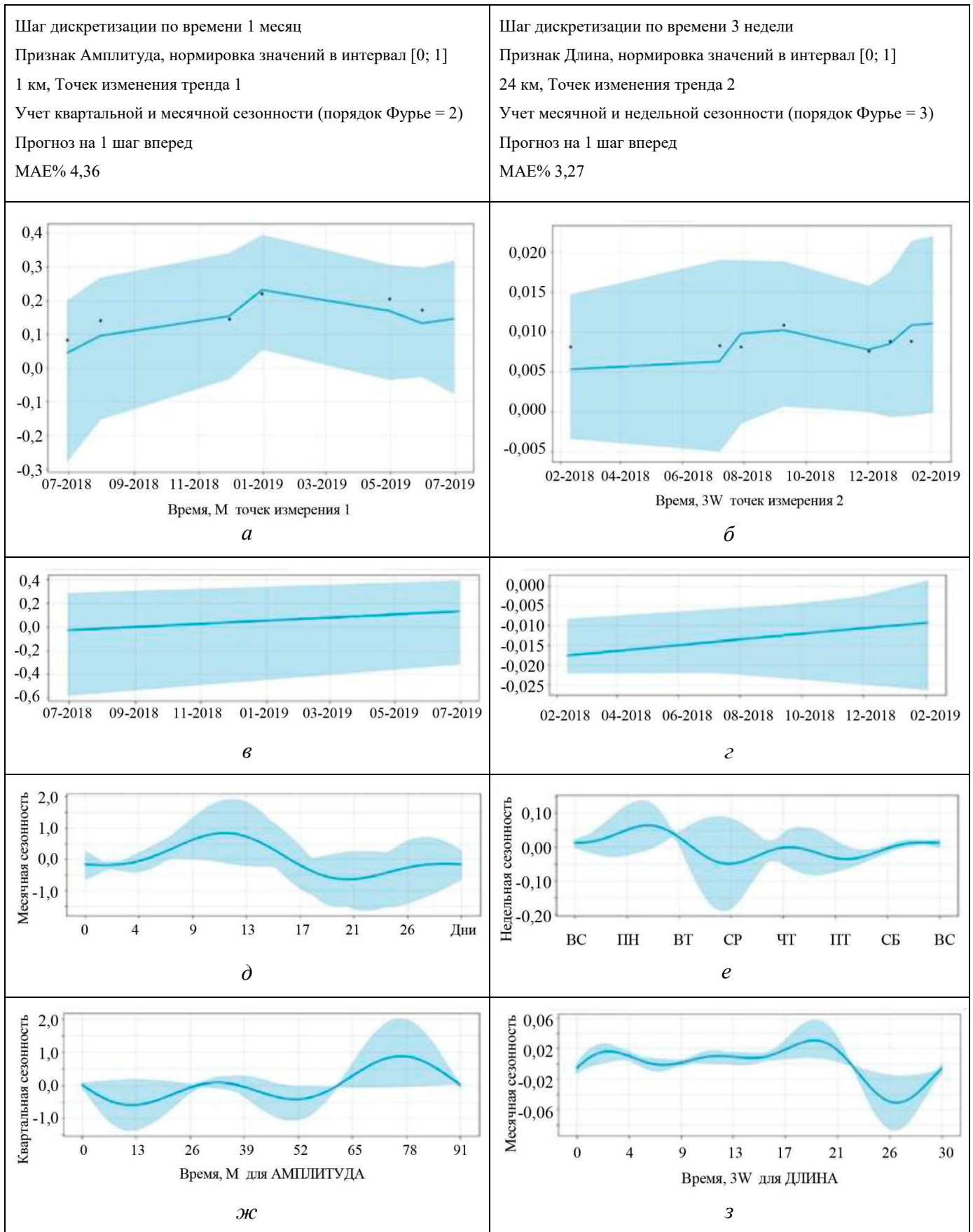


Рис. 8. Результаты прогнозирования: *а, б* – по модели, *в, г* – тренд, *д–з* – сезонность





## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ литературы показал, что методы машинного обучения хорошо себя зарекомендовали в задачах идентификации и прогноза технического состояния объектов при наличии довольно длительной истории наблюдений.

Проведенный статистический анализ позволяет:

- выявлять количество отступлений в любой заданный промежуток времени для любого участка полотна;

- сравнивать суммы отклонений отступлений от нормированных значений для любого участка полотна в различные периоды времени;

- нормировать значения признаков в определенный диапазон;

- установить несбалансированность данных по разным периодам времени и типам отступлений;

- синтезировать управляющие параметры и признаки (время и дистанция, нормированные и логарифмированные длины, амплитуды, отклонения амплитуд, площадей, степени опасности).

В результате статистического анализа параметров отступлений железнодорожного полотна пространство признаков дополнено за счет отклонения амплитуд отступлений от нормативных значений, площадей отступлений и отклонений.

Метод прогнозирования параметров отступлений железнодорожного полотна позволяет:

- задать вектор управляющих параметров  $U$ ,

- сформировать ограничения  $g_i(U)$ ,

- получить семейство прогнозных моделей по видам отступлений и интервалам железнодорожного полотна по минимальной ошибке.

Вектор управляющих параметров прогнозной модели учитывает вид сезонных колебаний (от недельных до годовых), тип их учета в модели (аддитивный, мультипликативный), скорость изменения сезонности (количество слагаемых в частичной сумме Фурье), количество точек изменения тренда (в общем случае определено как количество точек временного ряда минус одна).

Для повышения точности прогнозирования, в том числе отступлений с неглубокой историей регистрации, предложено применить повышающую дискретизацию вдоль железнодорожного полотна (полтора километра, два километра и т. д.).

**Доступность данных.** Фрагмент кода и фрагмент данных (три года однотипных измерений на двух участках трассы), подтверждающие изложенные результаты,

можно найти на GitHub автора: <https://github.com/avladova/Railway-track-deviations> или на сайте <http://vladova.ru/About>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Kostrzewski, M., Melnik, R.* Condition Monitoring of Rail Transport Systems: A Bibliometric Performance Analysis and Systematic Literature Review // *Sensors*. – 2021. – Vol. 21, no. 14. – Art. no. 4710.
2. *Tsunashima, H.* Condition Monitoring of Railway Tracks from Car-Body Vibration Using a Machine Learning Technique // *Applied Sciences*. – 2019. – Vol. 9. – Art. no. 2734.
3. *Liu, X., Markine, V.L.* Train Hunting Related Fast Degradation of a Railway Crossing-Condition Monitoring and Numerical Verification // *Sensors*. – 2020. – Vol. 20, no. 8. – Art. no. 2278.
4. *Vladova, A.Yu.* Identification of the Railway Track Technical State // 2021 14th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). – Moscow: IEEE, 2021. – P. 1–5.
5. *Дубицкий И.С., Енин А.В., Владова А.Ю.* Анализ динамики износа железнодорожных путей // Материалы 14-й междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2021). – Москва, 2021. – С. 979–985. [*Dubitskii I.S., Enin A.V., Vladova A.Yu.* Analiz dinamiki iznosa zheleznodorozhnykh putei // Materialy 14-i mezhdunar. konf. «Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnykh sistem» (MLSD'2021). – Moskva, 2021. – С. 979–985. (In Russian)]
6. *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М: Финансы и статистика (ФС), 2003. [*Lukashin, Yu.P.* Adaptivnyye metody kratkosrochnogo prognozirovaniya vremennykh ryadov. – M: Finansy i statistika (FS), 2003. (In Russian)]
7. *Владова А.Ю.* Гармонический анализ температур мерзлого грунта полосы отведения линейного объекта // Безопасность труда в промышленности. – 2017. – № 7. – С. 25–30. [*Vladova, A.Yu.* Garmonicheskij analiz temperatur merzlogo grunta polosa otvedeniya linejnogo ob'ekta // Bezopasnost' truda v promyshlennosti. – 2017. – No. 7. – P. 25–30. (In Russian)]
8. *Vladova, A.Yu.* Remote Geotechnical Monitoring of a Buried Oil Pipeline // *Mathematics*. – 2022. – Vol. 10, no. 11. – Art. no. 1813.
9. *Любушин А.А.* Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. – М.: Наука, 2007. [*Lyubushin, A.A.* Analiz dannykh sistem geofizicheskogo i ekologicheskogo monitoringa. – M.: Nauka, 2007. (In Russian)]
10. *Валеев С.Г.* Регрессионное моделирование при обработке данных. – Казань: Изд-во ФЭН Академии наук Республики Татарстан, 2001. [*Valeev, S.G.* Regressionnoe modelirovanie pri obrabotke dannykh. – Kazan': Izd-vo FEN Akademii nauk Respubliki Tatarstan, 2001. (In Russian)]
11. *Herzen, J., Lässig, F., Piazzetta, S.G., et al.* Darts: User-Friendly Modern Machine Learning for Time Series // *Journal of Machine Learning Research*. – 2022. – Vol. 23. – P. 1–6.
12. *Hosseini, R., Yang, K., Chen, A., Patra, S.* A flexible forecasting model for production systems // *ArXiv*: 2105.01098v1. – 2021. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.01098>.
13. *Taylor, S., Letham, B.* Forecasting at scale // *The American Statistician*. – 2018. – Vol. 72, no. 1. – P. 37–45.

14. Vandeput, N. Forecast KPI: RMSE, MAE, MAPE & Bias Towards Data Science. – URL: <https://towardsdatascience.com/forecast-kpi-rmse-mae-mape-bias-cdc5703d242d> (Дата обращения 04.02.2023) [Accessed February 4, 2023].
15. Hartomo, K., Nataliani, Y. A new model for learning-based forecasting procedure by combining k-means clustering and time series forecasting algorithms // PeerJ Computer Science. – 2021. – Vol. 7, no. 2. – Art. no. e534. – DOI: <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.534>.
16. Vivas E., Allende-Cid H., Salas R. A Systematic Review of Statistical and Machine Learning Methods for Electrical Power Forecasting with Reported MAPE Score // Entropy. – 2020. – Vol. 22, no. 12. – Art. no. 1412.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии  
А.С. Манделем.*

*Поступила в редакцию 30.11.2021,  
после доработки 27.03.2023.  
Принята к публикации 13.04.2023.*

**Владова Алла Юрьевна** – д-р техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва,  
✉ [avladova@ipu.ru](mailto:avladova@ipu.ru)

## CREATING FEATURE SPACES AND AUTOREGRESSIVE MODELS TO FORECAST RAILWAY TRACK DEVIATIONS

A.Yu. Vladova

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

✉ [avladova@ipu.ru](mailto:avladova@ipu.ru)

**Abstract.** Diagnosis of railway tracks reveals the deviations of rail parameters in the plan and profile from their nominal values. If the deviations approach the limit values, the speeds of trains must be reduced. Therefore, forecasting changes in the deviations is a topical problem. Despite the significant amount of diagnostic data collected, railway operators underuse machine learning methods to improve the quality of prediction. The proposed approach differs from known counterparts as follows. First, the dimensionality of the feature space is increased by calculating the variation of the amplitudes of deviations from the nominal values and two types of areas (the deviation length multiplied by the amplitude and the deviation length multiplied by the variation of the amplitude); subsequently, this space is represented in the 3D matrix form. Second, a set of control parameters is formed; it includes the time and space discretization step, the type of seasonal fluctuations, the number of trend change points, etc. Third, the deviations are predicted in groups differing in type and position along the track. Forecasting is based on minimizing the empirical risk criterion. As a result, a family of autoregressive models is obtained for each discretization interval along the length of the railway track.

**Keywords:** time series, diagnosis, software package, discrete technological process.

# ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕЖДУ ОКОЛОЗЕМНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ МЕТОДОМ ПЕРЕБОРА ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ВНУТРИ СЕТКИ ДАННЫХ

Е.В. Саввина

**Аннотация.** Рассматривается задача проектирования оптимальной траектории межорбитального перелета космического аппарата. Приведены алгоритм и результаты реализованного в цикле расчета оптимальных траекторий перелета между околоземными эллиптическими орбитами с различными значениями параметров для космического аппарата с химическим разгонным блоком и фиксированной тягой. Исследование проведено в четыре этапа: формирование первичных диапазонов поиска начальных приближений для типовых оптимизационных задач; интегрирование в цикле с целью нахождения областей сходимости для типовой вариационной задачи; нахождение положения оптимума для каждой постановки задачи внутри принятых диапазонов, реализованное путем расчета невязок конечных условий; анализ полученных результатов. Для решения поставленной задачи применяются численные методы математического анализа, методы математического программирования. Минимизация риска «перешагивания» потенциально оптимального результата достигнута путем варьирования точности на разных этапах расчета. Результатом исследования явилось улучшение первичного решения для «опорного» варианта задачи, выявление областей сходимости, а также наборы векторов начальных приближений, обеспечивающих сходимость, для дальнейшего анализа. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития идеи выстраивания и уточнения алгоритма с целью подбора оптимальных начальных приближений для типовых (оптимизация траектории орбитального перелета космического аппарата) и иных оптимизационных задач.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, оптимизация траектории перелета, принцип максимума, математическое моделирование, нелинейное программирование.

## ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день существует много методов решения задач оптимального управления, однако одним из самых распространенных подходов в задачах динамической оптимизации остается принцип максимума Понтрягина [1]. Этот метод позволяет получить требуемые условия оптимальности, включая случаи, когда оптимальное управление лежит на границе допустимой области, а также вывести все необходимые условия для задачи вариационного исчисления, сведя поставленную задачу к краевой задаче теории дифференциальных уравнений [1]. Как и другие методы [2], применение принципа максимума требует наличия начального приближения для значений используемых

параметров, и правильный выбор начальных приближений значительно способствует более быстрой сходимости, а также успешному нахождению положения оптимума. В то же время существует проблема такого выбора, которая, в частности, связана с ветвлением оптимальных решений и значительной восприимчивостью невязок краевой задачи к вариациям ее параметров [3]. Более того, согласно, в частности, изложенному в работах [2, 4], несмотря на возможность создавать формализованные алгоритмы оценивания при известном начальном приближении, для выбора хороших приближений рекомендуется в большей степени полагаться на интуицию и априорное знание.

Современная литература предлагает некоторые практические методы, призванные облегчить процесс выбора начальных приближений, такие как

гомтопия максимальной величины тяги [5], нормализация ребер [6], оценка ребер по эталонной траектории [7] и т. д. В частных случаях некоторые разработанные методы оказываются полезными. Такими являются, например, приближенные решения для задачи перефазировки, которые были разработаны для получения начальных приближений для непрямых методов [7–10]. Анализ релевантных работ демонстрирует сфокусированность на конкретных задачах, решение некоторых из них приводит к формированию новых (вспомогательных) методов для поиска начальных приближений для релевантных задач. При этом большинство из современных подходов все еще опирается на метод проб и ошибок, который часто оказывается эффективнее более «тонких» подходов и состоит в выборе начальных приближений с опорой на использование априорного знания и интуиции [2–4, 8].

Таким образом, нахождение алгоритмов, которые будут эффективны в подборе подходящих начальных приближений для задач оптимального управления направляется все больше усилий мирового научного сообщества (см., к примеру, работы [2, 4–6, 8]).

Данная статья демонстрирует реализацию первого этапа исследования, направленного на выявление закономерностей, существующих между компонентами векторов, обеспечивающих сходимость для типовых задач построения оптимальной траектории перелета между околоземными орбитами. Представленная первая часть работы в рамках сформированных диапазонов выявляет области сходимости для типовых оптимизационных задач и сводится к формированию векторов начальных приближений, обеспечивающих лучшие решения внутри исследуемой сетки данных. Ожидается, что данная работа в дальнейшем будет способствовать уточнению алгоритмов выбора начальных приближений для типовых задач.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках данной работы рассмотрена задача проектирования оптимальной траектории межорбитального перелета.

### 1.1. Общая формулировка и параметры оптимизационной задачи

Космический аппарат (КА) находится на некоторой начальной заданной орбите в окрестности

Земли. В составе КА есть химический разгонный блок (некоторые характеристики его известны). Этот разгонный блок должен обеспечить перелет КА на рабочую околоземную орбиту с заданными характеристиками.

Требуется найти рациональную схему перелета между орбитами. В качестве критерия оптимизации рассматривается масса космического аппарата, выводимая на рабочую орбиту, эта масса максимизируется. Время перелета не ограничено.

Фиксированные для всех рассмотренных случаев параметры оптимизационной задачи таковы: масса КА на начальной орбите 5000 кг; тяга ракетного нерегулируемого двигателя 5 кН, допускается произвольное число его включений; удельный импульс 330 с; схема перелета аппарата ограничена одним витком; орбиты принадлежат одной плоскости, линии апсид орбит совпадают; гравитационное поле ньютоновское.

Рассмотрены следующие вариативные параметры: высота перигея начальной орбиты и высота ее апогея; высота перигея конечной орбиты и высота ее апогея.

Выбранные характеристики схемы перелета:

- точка старта КА с начальной орбиты,
- число активных и пассивных участков на траектории перелета,
- длительности активных и пассивных участков траектории и их расположение на траектории перелета (иначе – моменты включения и выключения двигателя),
- программа угла тангажа на каждом активном участке,
- точка конечной орбиты, в которой оканчивается перелет.

### 1.2. Математическая модель, описывающая перелет КА

Выбрана математическая модель, описывающая движение КА с использованием вектора фазовых координат КА со следующими компонентами: радиальная скорость  $V_r$ , нормальная скорость  $V_n$ , величина радиуса  $r$  и величина полярного угла  $\beta$ . Так как последовательность активных и пассивных участков не фиксирована, а происходит поиск оптимального закона включения и выключения двигателя, то к перечисленным переменным целесообразно добавить массу космического аппарата  $m$ . Таким образом, конечный вектор рассматриваемых фазовых координат имеет вид



$$z = \begin{pmatrix} V_r \\ V_n \\ r \\ \beta \\ m \end{pmatrix}. \quad (1)$$

При этом движение космического аппарата может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \frac{P \sin(\vartheta)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r}, \\ \dot{V}_n &= \frac{P \cos(\vartheta)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r}, \\ \dot{r} &= V_r, \\ \dot{\beta} &= \frac{V_n}{r}, \\ \dot{m} &= -q\delta. \end{aligned} \quad (2)$$

В этой системе:

$P$  – величина тяги двигателя (считаем ее нерегулируемой, ее значение известно);

$\vartheta$  – истинная аномалия;

$\mu$  – гравитационный параметр Земли;

$q$  – массовый расход двигателя, его значение известно;

$\delta$  – функция тяги, она принимает всего два значения (0 и 1): когда  $\delta = 1$ , двигатель включен, когда  $\delta = 0$ , двигатель выключен;

$\varphi$  – угол тангажа КА (угол между направлением вектора тяги и местным горизонтом);

$\delta(t)$  и  $\varphi(t)$  – оптимизируемые управления движением КА.

На первом этапе анализа в качестве начальных условий можно зафиксировать условия движения в перигее начальной орбиты:

$$\begin{aligned} V_r(t_0) &= 0, \\ V_n(t_0) &= \sqrt{\frac{\mu}{p_0}(1+e_0)}, \\ r(t_0) &= \frac{p_0}{1+e_0}, \\ \beta(t_0) &= 0, \\ m(t_0) &= m_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $t_0$  – это время старта, которое можно положить равным нулю (время отсчитывать от момента старта);  $p_0$  и  $e_0$  – фокальный параметр и эксцентриситет начальной орбиты; используемый в соотношениях индекс  $f$  обозначает принадлежность конечным условиям движения. Угловую дальность

(полярный угол) предлагается отсчитывать от линии апсид начальной орбиты.

Транспортная задача первого этапа такова: для набора начальных условий (3) найти такие управляющие функции ( $\delta(t)$  и  $\varphi(t)$ ) и такое время перелета  $t_f$ , чтобы КА с минимальными затратами топлива  $m(t_f) \rightarrow \max$  попал в точку фазового пространства

$$\begin{aligned} V_r(t_f) &= 0, \\ V_n(t_f) &= \sqrt{\frac{\mu}{p_f}(1-e_f)}, \\ r(t_f) &= \frac{p_f}{1-e_f}, \\ \beta(t_f) &= \pi. \end{aligned}$$

### 1.3. Формулировка оптимизационной математической проблемы

Вводится вспомогательная функция (гамильтониан). Его вид можно рассматривать как скалярное произведение вектора правых частей уравнений, описывающих движение КА на вводимый вектор сопряженных переменных. Размерность последнего вектора равна размерности принятого фазового вектора, а каждый элемент сопряженного вектора соответствует определенной фазовой переменной. То есть вектор фазовых переменных имеет размерность, равную пяти (1).

Вводимый вектор сопряженных переменных имеет вид

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda V_r \\ \lambda V_n \\ \lambda r \\ \lambda \beta \\ \lambda m \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \lambda V_r \left( \frac{P \sin(\vartheta)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \right) + \\ &+ \lambda V_n \left( \frac{P \cos(\vartheta)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r} \right) + \lambda r V_r + \lambda \beta \frac{V_n}{r} - \lambda m q \delta. \end{aligned}$$

По принципу максимума выбираемый закон управления обеспечивает максимум гамильтониана, т. е. оптимальные управления ( $\delta(t)$  и  $\varphi(t)$ ) можно искать, исходя из условия максимума гамильтониана.

При этом удается показать, что

$$\cos(\vartheta_{\text{opt}}) = \frac{\lambda V_n}{\lambda V}, \quad \sin(\vartheta_{\text{opt}}) = \frac{\lambda V_r}{\lambda V},$$

где

$$\lambda V = \sqrt{\lambda V_r^2 + \lambda V_n^2},$$

$$\delta_{\text{opt}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi < 0, \end{cases}$$

$$\Psi = \frac{P}{m} \lambda V - \lambda m q \quad \text{или} \quad \Psi = \frac{W}{m} \lambda V - \lambda m.$$

Здесь  $\Psi$  – функция переключения двигателя;  $W$  – скорость истечения двигателя. Используемый индекс  $\text{opt}$  обозначает, что соотношения с параметрами, где он фигурирует, получены из условия максимума гамильтониана.

Полученная программа угла тангажа такова:

$$\text{tangag} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\lambda V_n}{\sqrt{(\lambda V_n)^2 + (\lambda V_r)^2}}\right), & \text{если } \lambda V_r > 0 \\ -\arccos\left(\frac{\lambda V_n}{\sqrt{(\lambda V_n)^2 + (\lambda V_r)^2}}\right), & \text{если } \lambda V_r \leq 0 \end{cases}.$$

С учетом полученных законов оптимального управления (программы угла тангажа и оптимальной функции тяги) уравнения, описывающие изменение фазовых переменных на оптимальной траектории, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \frac{P \lambda V_r}{m \lambda V} \delta_{\text{opt}} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r}, \\ \dot{V}_n &= \frac{P \lambda V_n}{m \lambda V} \delta_{\text{opt}} - \frac{V_r V_n}{r}, \\ \dot{r} &= V_r, \\ \dot{\beta} &= \frac{V_n}{r}, \\ \dot{m} &= -q \delta_{\text{opt}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из принципа максимума следует, что сопряженные переменные должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} H &= \lambda V_r \left( \frac{P \sin(\vartheta)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \right) + \\ &+ \lambda V_n \left( \frac{P \cos(\vartheta)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r} \right) + \lambda r V_r + \lambda \beta \frac{V_n}{r} - \lambda m q \delta, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda V_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V_r} = \lambda V_n \frac{V_n}{r} - \lambda r, \\ \frac{d\lambda V_n}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V_n} = -\lambda V_r \frac{2V_n}{r} + \lambda V_n \frac{V_r}{r} - \lambda \beta \frac{1}{r}, \\ \frac{d\lambda r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \lambda V_r \left( -\frac{2\mu}{r^3} + \frac{V_n^2}{r^2} \right) + \\ &+ \lambda V_n \left( -\frac{V_r V_n}{r^2} \right) + \lambda \beta \frac{V_n}{r^2}, \\ \frac{d\lambda \beta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулировка краевой задачи принципа максимума принимает вид: найти такие значения компонент сопряженного вектора в начальной точке траектории  $\lambda V_r(t_0)$ ,  $\lambda V_n(t_0)$ ,  $\lambda r(t_0)$ ,  $\lambda \beta(t_0)$ ,  $\lambda m(t_0)$  и такое время перелета  $t_f$  (всего шесть неизвестных), при которых выполняются шесть условий:

$$\begin{aligned} H(t_0) &= 0; \\ V_r(t_f) &= 0; \\ V_n(t_f) &= \sqrt{\frac{\mu}{P_f}} (1 - e_f); \\ r(t_f) &= \frac{P_f}{1 - e_f}; \\ \beta(t_f) &= \pi; \\ \lambda m(t_f) &= 1. \end{aligned}$$

Второй этап анализа требует отказа от фиксации начальной и конечной точек перелета. Для того, чтобы можно было это реализовать, требуется ввести условия трансверсальности.

#### 1.4. Условия трансверсальности в начальной и конечной точках траектории перелета

Условие трансверсальности есть условие перпендикулярности вектора сопряженных переменных всем касательным векторам граничного многообразия.

Для варианта, когда значения фазовых переменных в граничной точке (сначала рассматривается начальная точка) есть функция некоторого выбираемого параметра (в рассматриваемом случае истинной аномалии точки начальной орбиты  $\nu_0$ ), касательный вектор начального многообразия имеет компоненты



$$\left[ \frac{d}{d\nu_0}(V_{r0}), \frac{d}{d\nu_0}(V_{n0}), \frac{d}{d\nu_0}(r_0), \frac{d}{d\nu_0}(\beta_0), \frac{d}{d\nu_0}(m_0) \right].$$

Находя производные, получим компоненты вектора в виде

$$\left[ \frac{e_0 \cos(\nu_0)}{\sqrt{p_0}}, \frac{-e_0 \sin(\nu_0)}{\sqrt{p_0}}, \frac{p_0 e_0 \sin(\nu_0)}{(1 + e_0 \cos(\nu_0))^2}, 1, 0 \right].$$

Условия оптимальности точки старта с начальной орбиты представляют собой условия перпендикулярности вектора сопряженных переменных и записанного касательного вектора. Условие перпендикулярности можно записать в виде:

$$\lambda V_r(t_0) \frac{e_0 \cos(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} - \lambda V_n(t_0) \frac{e_0 \sin(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} + \lambda r(t_0) \frac{p_0 e_0 \sin(\nu_0)}{(1 + e_0 \cos(\nu_0))^2} + \lambda \beta(t_0) \cdot 1 + \lambda m(t_0) \cdot 0 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda \beta(t_0) = -\lambda V_r(t_0) \frac{e_0 \cos(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} + \lambda V_n(t_0) \frac{e_0 \sin(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} - \lambda r(t_0) \frac{p_0 e_0 \sin(\nu_0)}{(1 + e_0 \cos(\nu_0))^2}.$$

Аналогично условие оптимальности точки окончания перелета (оптимальности конечной угловой дальности) имеет вид

$$\lambda \beta(t_f) = -\lambda V_r(t_f) \frac{e_f \cos(\beta_f)}{\sqrt{p_f}} + \lambda V_n(t_f) \frac{e_f \sin(\beta_f)}{\sqrt{p_f}} - \lambda r(t_f) \frac{p_f e_f \sin(\beta_f)}{(1 + e_f \cos(\beta_f))^2}.$$

## 2. ФОРМИРОВАНИЕ СЕТКИ ДАННЫХ ДЛЯ ПОИСКА НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Алгоритм дальнейшего исследования состоит из четырех этапов:

- Выполнение расчета оптимальных траекторий перелета между околоземными эллиптическими орбитами с разными параметрами для аппарата с химическим разгонным блоком и фиксированной тягой с целью выявления и уточнения диапазонов поиска начальных приближений для типовых задач. Результат – сетка данных для перебора в качестве входных в векторе начальных значений.

- Интегрирование в цикле с целью нахождения областей сходимости и достижения положения оптимума вариационной задачи.

- Нахождение положения оптимума для каждой постановки задачи внутри принятых диапазонов, реализованное путем расчета невязок конечных условий.

- Анализ полученных результатов.

Для первичного выбора диапазона поиска начальных приближений для рассмотренных задач была решена оптимизационная задача со следующими данными орбиты: высота перигея начальной орбиты 500 км. Высота ее апогея 1500 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2000 км, высота апогея 10 000 км. С использованием метода по Й. Барду [2] были найдены следующие начальные приближения, обеспечившие массу на конечной орбите в 3203,788 кг:

$$\begin{pmatrix} \lambda m(t_0) \\ \lambda V_r(t_0) \\ \lambda V_n(t_0) \\ \lambda r(t_0) \\ t_f \\ \nu_0 \\ \beta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,065851324495908 \\ 1,3618066619686777 \\ 1,4193211140743078 \\ 6,803580030230557 \\ -0,6054269338992805 \\ 3,14159265358979 \end{pmatrix}.$$

Схема перелета после расчета невязок показана на рисунке, где  $r t t_{j1}^1$  – полученная ходе интегрирования методом Рунге – Кутты четвертого порядка с переменным шагом траектория перелета;  $\beta t_{j1}^1$  – изменение величины полярного угла  $\beta t^1$  на полученной траектории.

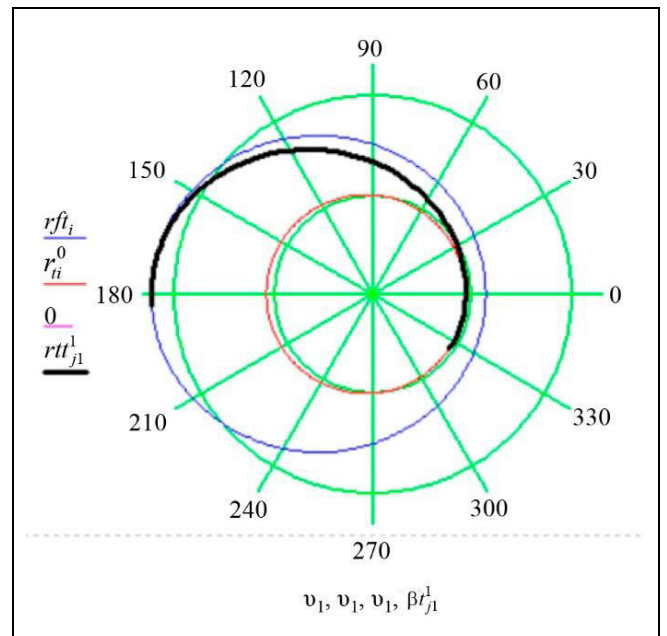


Схема оптимального перелета (подбор начальных значений)

Полученное решение принято в качестве опорного для последующего формирования диапазона значений для каждой из неизвестных переменных. Для определения этого диапазона в начальный момент времени добавлены значения по левой и правой границам, рассчитанные таким образом, чтобы по сформированным векторам начальных данных размеров областей сходимости было достаточно для последующего анализа на предмет выявления закономерностей между значениями параметров и степенью сходимости результатов. При этом диапазоны строились не слишком широкими, чтобы величина шага не оказалась критичной, т. е. чтобы снизить риск «перешагивания» возможного решения в процессе интегрирования.

Таким образом, выбраны следующие диапазоны для поиска хороших приближений для неизвестных переменных в начальный момент времени:

$$\lambda V_{r0} = -0,079, \dots, -0,058,$$

$$\lambda V_{n0} = 1,291, \dots, 1,431,$$

$$\lambda r_0 = 1,361, \dots, 1,491,$$

$$\lambda m_0 = 0,3, \dots, 0,7,$$

$$v_0 = -0,61, \dots, -0,60405.$$

С целью выявления взаимосвязей между значениями параметров и сходимостью было проверено более 4 145 000 вариаций векторов начальных

приближений для каждой из пяти задач в выбранном диапазоне.

Сетка данных загружена в Python и имеет вид, представленный в табл. 1.

### 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НАБОРА ТИПОВЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ЦИКЛЕ

#### 3.1. Алгоритм решения оптимизационной задачи в цикле

Алгоритм реализуется в два этапа в среде математического программирования Mathcad.

На первом этапе решения оптимизационной задачи цель состоит в предварительном нахождении областей, внутри которых обеспечивается сходимость, что достигается путем поиска внутри сетки данных. При этом точность решения устанавливается невысокой –  $10^{-3}$ . Данный шаг предпринимается для минимизации риска «перешагивания» потенциального решения и ввиду наличия трудностей при исследовании всего набора возможных значений параметров с количеством знаков после запятой более трех в принятом диапазоне, так как это приведет к многократному увеличению количества векторов, которые требуется проверить в цикле. На втором этапе происходит возвращение к требуемой точности в  $10^{-14}$  и уточнение предварительного решения путем расчета невязок.

Ниже подробно рассмотрен каждый из этапов.

Таблица 1

**Общий вид сформированной сетки данных для построчного перебора при интегрировании методом Рунге – Кутты четвертого порядка**

$V_r$	$V_n$	$R$	$\lambda V_r$	$\lambda V_n$	$\lambda r$	$v_0$	$\lambda m$
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,3
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,4
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,5
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,6
-0,0394875	1,05887075	0,942166729	-0,079	1,291	1,361	-0,61	0,7
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,3
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,4
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,5
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,6
-0,0394677	1,05888457	0,942154435	-0,079	1,291	1,361	-0,6097	0,7
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,3
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,4
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,5
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,6
-0,0394479	1,05889838	0,942142147	-0,079	1,291	1,361	-0,6093	0,7





### 3.1.1. Первый этап – предварительное решение

Первый шаг в выстраивании алгоритма – ввод данных и приведение их к общему безразмерному виду. Для демонстрации работы алгоритма выбраны все пять наборов вводных параметров:

1. Высота перигея начальной орбиты 400 км. Высота ее апогея 1 400 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 1 900 км, высота апогея 9900 км.

2. Высота перигея начальной орбиты 400 км. Высота ее апогея 1 400 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2 000 км, высота апогея 10 000 км.

3. Высота перигея начальной орбиты 400 км. Высота ее апогея 1 400 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2 100 км, высота апогея 10 100 км.

4. Высота перигея начальной орбиты 500 км. Высота ее апогея 1 500 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2 000 км, высота апогея 10 000 км.

5. Высота перигея начальной орбиты 600 км. Высота ее апогея 1 600 км. Характеристики конечной орбиты: высота перигея 2 000 км, высота апогея 10 000 км.

Все варьируемые характеристики вводятся в виде цикла со счетчиком от 0 до 4 (пять задач). Ввиду значительно увеличенной (в связи с большим перебором внутри сетки данных и введением расчетов в цикле) нагрузкой на систему расчета принято решение разбить программу по этапам на следующие подпрограммы:

- программа с предварительными расчетами, которая записывает результат своей работы в отдельный файл (Excel);
  - программа с основными расчетами в цикле;
  - программа, визуализирующая результаты.
- Вводимые данные для задачи включают:
- значение гравитационного параметра Земли ( $398\,600 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$ ) и радиуса Земли (6 371 км);
  - значение начальной массы КА (5 000 кг), тяга химического ракетного двигателя (5 000 Н) и его удельный импульс (330 с·г);
  - высоты перигея и апогея начальной и конечной орбит, а также величину угла между их линиями апсид;
  - элементы начальной и конечной орбит (радиусы перигея  $r_p$  и апогея  $r_a$ , большую полуось  $A$ , константу энергии  $h$ , эксцентриситет  $e$ , фокальный параметр  $p$ );
  - уравнение орбиты – длину радиуса вектора КА как функцию истинной аномалии:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\vartheta)}$$

Далее введенные размерные величины приводятся к безразмерному виду. Безразмерные величины позволяют снизить нагрузку на вычислительный процессор путем замены «тысячи километров» на нормированные величины. При этом уменьшается число входных аргументов.

Математическая модель плоского движения КА представляет собой уравнения движения КА. Используется орбитальная система координат для анализа скорости КА (радиальная  $V_r$  и трансверсальная  $V_n$  компоненты скорости КА). Положение КА рассматривается в полярной системе координат, основная ось которой  $x$  направлена вдоль радиуса вектора апсидальной точки начальной орбиты, из которой реализуется оптимальный импульсный перелет. При этом  $r$  – длина радиуса вектора,  $\theta$  – полярный угол.

Угол  $\theta$  в уравнениях – угол тангажа КА, отмеренный от линии местного горизонта. Все переменные в рассматриваемой системе дифференциальных уравнений безразмерные.

Начальная математическая модель приведена в § 1, см. систему (2). Окончательная модель с применением принципа максимума представлена системой из десяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (4) и (5).

Для интегрирования используется функционал среды математического программирования MathCad – Rkadapt. Поиск начальных приближений для применения Rkadapt осуществляется путем перебора внутри сетки данных, сформированной и обоснованной в § 2. Сетка данных представлена в табл. 1. На данном этапе расчета точность решения устанавливается на уровне  $10^{-3}$ .

Предварительная проверка решений на предмет попадания на заданную конечную орбиту на первой стадии является визуальной, в соответствии с графиками представления результатов, так как конечные условия не учтены и требуемая точность не соблюдается. Фиксируются все наборы векторов, не обеспечивающих сходимость, а также все решения, обеспечивающие сходимость, распределяются по трем группам для дальнейшего анализа:

- попадание на заданную (для каждого случая) орбиту,
- попадание на орбиту выше заданной,
- попадание на орбиту ниже заданной.

При этом, конечная масса на орбите (критерий оптимальности перелета) на данном этапе отмечается, но не учитывается ввиду недостаточной точности.

Таким образом, основным результатом первого этапа включает в себя набор векторов начальных значений, обеспечивающих попадание на заданную (для каждого конкретного случая) орбиту и наборы векторов начальных значений для дальнейшего анализа.

### 3.1.2. Второй этап – оптимальное решение

На втором этапе происходит возвращение к требуемой точности  $10^{-14}$  и работа с наборами векторов, предварительно продемонстрировавших соответствие искомым, т. е. ведущих к попаданию на заданную конечную орбиту.

Для нахождения точного решения и затем положения оптимума строится программа расчета невязок конечных условий при произвольной (заранее не фиксированной) точке выхода на конечную орбиту. Для работы программы в том числе требуются выведенные в § 2 условия трансверсальности.

Результат работы программы – вектор невязок, позволяющий найти действительное решение путем приравнивания величин невязок к нулю и вывода на этой основе фактических начальных значений переменных, а также конечного времени перелета и величины полярного угла, характеризующей точку окончания перелета.

На этом этапе анализируется масса космического аппарата в конце перелета, в соответствии с ее значением выявляется положение оптимума, которое и является решением задачи. Дополнительно оценивается влияние колебаний точки старта в рамках выбранной сетки на величину массы на конечной орбите.

Полученный в рамках выбранной сетки данных результат – это найденные векторы значений,

обеспечивающих оптимальный перелет между рассмотренными орбитами, для постановок 1–5 они приведены в табл. 2, где  $T_F$  – полученное время перелета;  $\beta_F$  – полярный угол, характеризующий точку окончания перелета;  $m_F$  – масса космического аппарата на конечной орбите. Индекс 1 в таблице используется для обозначения параметров в начальный момент времени, значения которых обеспечивают лучший результат в соответствии с установленным критерием максимизации конечной массы аппарата.

Таким образом, реализованный подход позволил улучшить результат по «опорному» варианту задачи (постановка 4) на 365 г относительно решения, предварительно полученного с опорой на метод по Й. Барду [2].

### 3.2. Анализ и обсуждение полученных результатов

Проведен расчет пяти типовых задач в цикле. Выявлены области сходимости, а также лучшие решения внутри сетки, при которых выполняется условие оптимальности – максимизация массы на конечной орбите. При этом благодаря варьированию точности на разных этапах расчета минимизируется риск «перешагивания» потенциально оптимального результата.

Полученные результаты в виде векторов недостающих значений переменных для каждого случая записаны в таблицы Excel с использованием функционала MathCad и в дальнейшем будут оценены и проанализированы статистическими методами в программе, написанной на языке программирования Python.

В результате проведенного расчета и реализованного в работе подхода к величине точности

Таблица 2

**Векторы значений, обеспечивающие оптимальный перелет для постановок 1–5 (анализ внутри сетки данных)**

Характеристика	Постановка 1	Постановка 2	Постановка 3	Постановка 4	Постановка 5
$\mathcal{G}_0^1$	-0,608528181266	-0,687262955509	-0,58694862445	-0,58063271537992	-0,67460422765
$\lambda V_r^1$	-0,065265825615	-0,075257944004	-0,06564653582	-0,06466045327036	-0,06339073139
$\lambda V_n^1$	1,3623340777782	1,3653869345017	1,364158466294	1,36474044140864	1,357648817782
$\lambda r^1$	1,4200011568480	1,4207257561587	1,421069918027	1,42243156356652	1,40764863211
$T_F$	6,7321648922778	7,0228415355241	12,30599404742	12,48386539989280	5,855669428846
$\beta_F$	3,1311300732552	3,166796288751	5,127686975088	5,33807657900554	2,859452408788
$m_F$	3227,339 кг	3182,552 кг	3181,12 кг	3204,153 кг	3247,748 кг



начальный результат по «опорному» варианту задачи был улучшен на 365 г без выхода из рассмотренных для каждой величины диапазонов.

Таким образом, настоящая работа демонстрирует эффективность применения метода перебора в рамках сетки данных с целью уточнения и улучшения начального достигнутого результата в задачах построения оптимальной траектории перелета космических аппаратов и представляет собой результат реализации первого (предварительного) этапа исследования, направленного на выявление математических взаимосвязей, существующих между компонентами векторов, обеспечивающих сходимость для типовых задач. Расчеты осуществлены в распараллеленных программах, реализованных в Mathcad 15 и Python 3.9 преимущественно на базе процессора Core i5 1035G1, суммарное время работы программ составило восемь часов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы и расширены возможности эффективного применения математического программирования для решения типовых оптимизационных задач (оптимизация траектории перелета космического аппарата между околоземными орбитами). Кроме того, демонстрируется подход, позволяющий эффективно находить оптимальные (критерий оптимальности – минимизация массового расхода) начальные приближения для вариационной задачи оптимизации траектории перелета между околоземными эллиптическими орбитами.

В результате проведенной работы:

- в программах, реализованных в среде Mathcad и на языке программирования Python, проверено более 4 145 000 вариаций начальных приближений для каждой из задач в выбранном диапазоне с целью выявления взаимосвязей между значениями параметров и сходимостью;
- достигнуто улучшение первичного решения для опорного варианта вариационной задачи оптимизации траектории перелета между двумя эллиптическими околоземными орбитами в пределах рассмотренных диапазонов;
- одновременно исследованы наборы параметров пяти типовых задач, решенных в цикле в среде Mathcad.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития идеи выстраивания и уточнения алгоритма для подбора оптимальных (в зависимости от критериев оптимальности конкретной задачи) начальных приближений для типовых (оптимизация траектории орбитального

перелета космического аппарата) и иных оптимизационных задач. Ожидается, что они позволят упростить процесс решения задач данного класса и будут способствовать дальнейшему уточнению и развитию математического аппарата, позволяющего находить оптимальные решения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ведякова А.О., Милованович Е.В., Слута О.В. Тертычный-Даури В.Ю. Методы теории оптимального управления. – М.: Университет ИТМО, 2021. – 111 с. [Vedyakova, A.O., Milovanovich, E.V., Sluta, O.V., and Tertychny-Dauri, V.U. Methods of Optimal Control Theory. – Moscow: University ITMO, 2021. – 111 s. (In Russian)]
2. Bard, Y. Nonlinear Parameter Estimation. – New York & London: Academic Press edition. – 1979. – 349 p.
3. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. Космические исследования. – 2008. – Т. 46. – № 3. – С. 224–237. [Petukhov, V.G. Optimization of interplanetary trajectories of spacecraft with a ideally regulated engine by the continuation method. – Space Studies. – 2008. – Vol. 46, no. 3. – P. 224–237 (In Russian)]
4. Kitrell, J.R., Mezaki, R., and Watson, C.C. Estimation of parameters for nonlinear least squares analysis // Industrial & Engineering Chemistry. – 1965. – Vol. 57. – P. 18–27.
5. Hofmann, C., and Topputo, F. Embedded Homotopy for Convex Low-Thrust Trajectory Optimization with Operational Constraints // Proceedings of 2022 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. – Charlotte, NC, USA, 2022. – P. 1–16.
6. Jiang, F., Baoyin, F. and Li, J. Practical Techniques for Low-Thrust Trajectory Optimization with Homotopic Approach // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 2012. – Vol. 35, no. 1. – P. 245–258.
7. Wu, D., Wu, C., Lin, F., et al. Analytical Costate Estimation by a Reference Trajectory-Based Least-Squares Method // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2022. – Vol. 45. – P. 1–9.
8. Wu, D., Cheng, L., Gong, S., and Baoyin, H. Approximate time-optimal low-thrust rendezvous solutions between circular orbits // Aerospace Science and Technology. – 2022. – Vol. 131, Part A. – Art. No. 108011.
9. Bevilacqua, R. Analytical Guidance Solutions for Spacecraft Planar Rephasing via Input Shaping // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2014. – Vol. 37. – DOI: 10.2514/1.G000008.
10. Wu, D., Wu, Ch., Lin, F., and Baoyin, H. An Atlas of Optimal Low-Thrust Rephasing Solutions in Circular Orbit // arXiv:2209.07418v1. – 2022. – DOI: 10.48550/arXiv.2209.07418.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 23.01.2023,  
после доработки 21.03.2023.  
Принята к публикации 13.04.2023.

Саввина Елена Валерьевна – соискатель, г. Москва,  
✉ petrakowae@mail.ru

# INTER-ORBITAL SPACECRAFT TRANSFER: TRAJECTORY DESIGN BY ITERATING PARAMETER VALUES WITHIN A DATA GRID

E.V. Savvina

✉ petrakowae@mail.ru

**Abstract.** This paper considers the problem of designing an optimal inter-orbital spacecraft transfer. We present a computational algorithm and modeling results of the optimal transfer trajectory between near-Earth elliptical orbits for spacecraft with a chemical booster and fixed thrust. The trajectory design procedure includes four stages as follows: a) formation of the primary ranges of initial approximations for typical optimization problems; b) iterative integration to find the domains of convergence for a typical variational problem; c) determination of the optimal position for each problem statement within the accepted ranges and its implementation by calculating the terminal conditions residuals; d) analysis of the results obtained. We use numerical methods of mathematical analysis and mathematical programming. The risk of “overstepping” the potentially optimal result is minimized by varying the accuracy at different stages of calculations. Based on the results, we improve the primary solution of the reference problem statement, identify the domains of convergence of solutions, and obtain the sets of initial approximation vectors ensuring convergence of the considered problems for further analysis. The results of this study can be used to develop further and refine an algorithm for selecting optimal initial approximations for different optimization problems (including spacecraft trajectory optimization as a typical one).

**Keywords:** optimal control, spacecraft trajectory optimization, maximum principle, mathematical modeling, nonlinear programming.

## К 110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА БОРИСА НИКОЛАЕВИЧА ПЕТРОВА

11 марта 2023 г. исполнилось 110 лет со дня рождения академика Бориса Николаевича Петрова – выдающегося ученого и организатора науки в области теории автоматического управления. Научная деятельность Б.Н. Петрова тесно связана с Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (до 1969 г. – Институт автоматизации и телемеханики АН СССР), где он прошел путь от инженера до всемирно известного ученого. С 1947 по 1951 гг. он возглавлял Институт.

Борис Николаевич отличался энциклопедичностью знаний, спектр его научных интересов был очень широк. Активно работая в области общей теории автоматического управления, он всегда выбирал для изучения и развития самые актуальные задачи.

Им был создан метод структурных преобразований схем автоматических систем и разработан адекватный им математический аппарат – алгебра структурных преобразований. Б.Н. Петров является одним из основоположников теории инвариантности систем управления. Многогранные исследования в области теории инвариантности привели к созданию новых принципов и структур различных типов комбинированных систем.

В 1957 г. Борис Николаевич возглавил работы по теории, проектированию и созданию бесперебойных самонастраивающихся систем (адаптивных систем с моделью). Под руководством и при непосредственном участии Б.Н. Петрова впервые в СССР были разработаны и созданы адаптивные системы управления для нескольких классов ракет Главного конструктора И.С. Селезнева.



Широко известны работы Б.Н. Петрова по исследованию нестационарных и многосвязных систем, работы в области теории чувствительности, в области синтеза алгоритмов управления как обратной задачи динамики.

Борис Николаевич был талантливым педагогом. Свою педагогическую деятельность он начал созданием в 1944 г. в МАИ нового курса лекций «Автоматика мотора и винта». Значение этого курса выходило за рамки технического повествования. Автор создал цикл лекций, который доносил до слушателей самые важные и наиболее свежие результаты в теории автоматического регулирования тех лет.

В 1954 г. Институту автоматизации и телемеханики постановлением Правительства было поручено возглавить исследования в части управления двигательной установкой, разрабатываемой С.П. Королевым межконтинентальной ракеты. Б.Н. Петров взял на себя ответственность за идеологию создания принципиально новых терминальных систем управления расходом топлива жидкостных ракетных двигателей (ЖРД), которые существенно повышали энергетику ракеты путем резкого сокращения гарантийных запасов топлива.

Разработка проблемы построения систем управления тягой ЖРД и синхронизации опорожнения баков ракеты сложной архитектуры была остро необходима и сопровождалась немалыми трудностями, которые сопутствовали созданию принципиально новых систем, начиная «с нулевого уровня», без какой-либо предыстории и при полном отсутствии прототипов систем и литературных источников.

Результаты исследований Б.Н. Петрова и возглавляемого им коллектива Института в период сотрудничества с Главным конструктором ОКБ-1 академиком С.П. Королевым и другими известными деятелями и учеными в области ракетно-космической техники внесли значительный вклад в разработку бортовых систем управления ракет-носителей, обеспечивших запуск первого искусственного спутника Земли и полет первого космонавта Ю.А. Гагарина.

Полученные Борисом Николаевичем и его коллективом результаты носили основополагающий характер. Созданные на их основе системы управления стали составной частью всех крупных жидкостных ракет разработки главных конструкторов С.П. Королева, М.К. Янгеля, В.Н. Челомея, В.Ф. Уткина.

Идеи Б.Н. Петрова получили дальнейшее развитие и применение в современных разработках Института в области ракетно-космической техники и воплотились в терминальных системах управления нового поколения ракет-носителей (РН) и разгонных блоков космического и оборонного назначения (модернизированных РН «Союз-2», семейства РН «Ангара», РН «Сармат», разрабатываемых РН «Союз-5», РН «Амур» и РБ КВТК).

Важным направлением работ Б.Н. Петрова, начиная с 1956 г., была разработка теории и систем управления искусственными спутниками Земли. Борис Николаевич участвовал в создании систем предварительного успокоения гравитационно стабилизированных спутников Земли, систем управления спутников связи и непосредственного телевидения на геостационарной орбите, в создании ряда многоместных пилотируемых кораблей-спутников, в разработке автоматических станций, в выводе на окололунную орбиту первого в мире искусственного спутника Луны.

В последние годы жизни Б.Н. Петров возглавлял Совет «Интеркосмос» при АН СССР. С его деятельностью на этом поприще связано становление, успешное развитие и реализация крупнейших международных космических программ. Одной из таких программ был проект «Союз – Аполлон», над которым работали коллективы ученых, инженеров, конструкторов в СССР и США. Борис Николаевич внес огромный личный вклад в решение многочисленных организационных, научных и технических проблем, связанных с этим проектом.

Под руководством Бориса Николаевича выросли крупные коллективы специалистов. Созданная

им большая научная школа успешно развивает актуальные проблемы современной теории управления.

Б.Н. Петровым написано около 200 публицистических и научно-популярных статей по крупным научным проблемам, связанным с развитием автоматики, вычислительной техники, автоматизации эксперимента, программного управления космическими исследованиями. Он поддерживал все новое и перспективное в науке, не раз отмечал важность развития математической или абстрактной теории систем, которая, как он выражался, раздвигает горизонты науки об управлении.

Борис Николаевич был не только крупным ученым, но и выдающимся организатором науки. В 1953 г. Б.Н. Петров был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1960 г. – академиком. С 1963 г. он бессменно был академиком-секретарем Отделения механики и процессов управления АН СССР, а в 1979 г. его избрали вице-президентом Академии наук СССР.

Б.Н. Петрову было присвоено звание Героя Социалистического Труда, он был награжден пятью орденами Ленина, орденами Октябрьской Революции, Трудового Красного Знамени, Красной Звезды, удостоен Ленинской и Государственных премий СССР.

Его деятельность нашла широкое международное признание. Он был действительным членом Международной Академии астронавтики, иностранным членом Чехословацкой, Венгерской, Болгарской и Польской академий наук, был удостоен ряда иностранных орденов, золотой медали Национального центра космических исследований Франции.

Бориса Николаевича не стало в августе 1980 г., а в ноябре вышло постановление Правительства об увековечении его памяти. Президиум АН СССР учредил золотую медаль имени Б.Н. Петрова (с 1993 г. – премия), присуждаемую за выдающиеся работы в области теории и систем автоматического управления, а также в области экспериментальных исследований по освоению космического пространства.

Имя Бориса Николаевича Петрова навсегда останется в анналах отечественной науки об управлении и космонавтике.

*Сотрудники Института проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН  
Редсовет, редакция, редколлегия*