

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СИСТЕМЫ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Е.А. Постнова

Исследована задача оптимального управления системой, описываемой моделью двойного интегратора дробного порядка, когда начальные и конечные условия зависят от выбора соответствующих моментов времени. Рассмотрено несколько случаев, физически аналогичных переводу системы из состояния покоя в состояние прямолинейного равномерного движения, в состояние равноускоренного и периодического движений, а также из состояния равномерного движения в равноускоренное. Проанализированы зависимости нормы управления от времени управления и от значений показателя дробного дифференцирования.

**Ключевые слова:** дробная производная Капуто, двойной интегратор, проблема моментов, оптимальное управление.

### ВВЕДЕНИЕ

Сравнительно недавно (в конце 1990-х гг.) для описания динамических систем с управлением стали применять аппарат дробного исчисления (интегро-дифференциальное исчисление дробного порядка) [1]. Он позволяет учитывать наличие нелокальных зависимостей (пространственных и временных) при описании свойств некоторых материалов (например, полимеров) и динамики процессов [2]. Так, в работе [3] предложено применять дробные производные для описания процесса распространения плоских электромагнитных волн в изотропной однородной диэлектрической среде с потерями. Для моделирования вязкоупругих систем применяется так называемый реологический элемент, для которого связь между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  описывается дробной производной:

$\sigma = p \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}} \varepsilon$ , где  $p$  — коэффициент пропорциональности [4]. В ряде исследований в области электродинамики и электрохимии было выяснено, что электролитические среды и диэлектрические материалы проявляют «дробное поведение» в том смысле, что частотная зависимость импеданса может быть дробно-степенной функцией. В работе [5] показано, что дробные интегралы могут быть полезны для вычисления массы среды с нецелочисленной размерностью. Показано, что подход,

предполагающий дробное интегрирование, потенциально более продуктивен в исследованиях физики фрактальной среды, чем традиционные методы, оперирующие целочисленным интегрированием. Известна технология синтеза так называемых ультраконденсаторов [6, 7], использующая пористые электроды фрактальной структуры, наполненные электролитом и разделенные тонкой пористой мембраной, препятствующей замыканию электродов. Исследования показали [7], что адекватные математические модели таких конденсаторов представляются динамическими системами дробного порядка. В 1930-е гг. в исследованиях по электрической проводимости мембран клеток биологических организмов было установлено, что выражению для реактивного сопротивления мембраны соответствует передаточная функция, характерная для интегратора дробного порядка [8].

Применение дробного исчисления в автоматическом управлении можно условно разделить на две группы. Первую образуют методы математического и компьютерного моделирования систем дробного порядка, в которых проявляются свойства «дробной динамики» (связанной с наличием дробно-степенных трендов в экспериментальных зависимостях). Ко второй относятся методы применения дробного исчисления для синтеза систем управления динамическими системами как целого, так и дробного порядков, в частности, синтеза контроллеров нецелого порядка [9]. Например, в



работе [10] рассматриваются динамические системы произвольного (дробного) действительного порядка. Предложена концепция контроллеров дробного порядка, включающих в себя интегратор и дифференциатор дробного порядка.

В исследовании задач оптимального управления в основном рассматривались непрерывные управления, для поиска которых применялся вариационный метод, не позволяющий явным образом учитывать ограничения на норму управления. В последние годы появились работы [11–13], в которых для исследования задач оптимального управления системами нецелого порядка применяется метод моментов, позволяющий работать с разрывными управлениями и рассматривать явные ограничения на норму управления.

В настоящей работе для исследования задачи оптимального управления двойным интегратором дробного порядка также применяется метод моментов. При этом начальные и конечные условия параметрически зависят от выбора соответствующих моментов времени.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача оптимального управления движением для двойного интегратора [14] — двумерной системы нецелого порядка вида

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha q_1(t) = q_2(t), \\ {}^C D_t^\beta q_2(t) = u(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  — фазовые координаты системы, зависящие от времени  $t \in [t_0, T]$  и являющиеся дифференцируемыми функциями;  $t_0$  — начальный момент времени;  $T$  — конечный момент времени,  $T > t_0$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  — показатели дробного дифференцирования, принимающие значения на интервале  $(0, 1]$ ;  $u(t)$  — искомая функция управления, заданная в пространстве  $u(t) \in L_2[t_0, T]$ . Оператор дробного дифференцирования  ${}^C D_t^\alpha$  (и, аналогично,  ${}^C D_t^\beta$ ) понимается в смысле Капуто:

$${}^C D_t^\alpha q(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{q(t') dt'}{(T-t')^\alpha}, \quad (2)$$

где  $\Gamma(1-\alpha)$  — гамма-функция Эйлера:  $\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty x^{-\alpha} e^{-x} dx$ .

Начальные и конечные условия для системы (1) определим в виде:

$$q_1(t_0) = q_1^0, \quad q_2(t_0) = q_2^0, \quad (3)$$

$$q_1(T) = q_1^T, \quad q_2(T) = q_2^T. \quad (4)$$

Функции в правых частях условий (3) и (4) зависят от выбора начального и конечного моментов времени и являются непрерывными функциями своего аргумента. Такой вид начальных и конечных условий, параметрически зависящих от начального и конечного моментов времени, соответствует случаю перевода системы (движущейся точки) из одного состояния движения в другое состояние движения и отличается от рассмотренных ранее [11–14] случаев перевода системы из одной неподвижной точки в другую. Ранее такой тип условий для систем целого порядка был рассмотрен А.Г. Бутковским [15].

Особо отметим связь функций в первом и втором звене двойного интегратора (1). При значении показателей дробного дифференцирования  $\alpha = 1$ ,  $\beta \neq 1$  связь в первом звене между фазовыми координатами  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  является классической, т. е. они представляют координату и скорость (импульс) соответственно, а во втором звене — неклассической, что подобно действию силы (управления) на систему через некоторый привод, обладающий памятью. При нецелых значениях  $\alpha$  и  $\beta$  связь функций в обоих звеньях системы (1) является неклассической, и в данном случае уже не всегда корректно отождествлять вторую из фазовых координат со скоростью системы.

В данной работе рассмотрены следующие случаи выбора начальных и конечных условий, выраженных параметрическими зависимостями:

$$\begin{cases} q_1^0 = q_2^0 = 0, \\ q_1^T = T - t_0, \\ q_2^T = 1; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} q_1^0 = q_2^0 = 0, \\ q_1^T = (T - t_0)^2 + (T - t_0) + 1, \\ q_2^T = 2(T - t_0) + 1; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} q_1^0 = q_2^0 = 0, \\ q_1^T = \cos(T - t_0), \\ q_2^T = -\sin(T - t_0); \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} q_1^0 = t_0, \\ q_2^0 = 1, \\ q_1^T = (T - t_0)^2 + (T - t_0) + 1, \\ q_2^T = 2(T - t_0) + 1. \end{cases} \quad (8)$$

Выбранные таким образом зависимости соответствуют (при  $\alpha = 1$ ): переводу системы из состояния покоя в состояние равномерного движения — случай (5); переводу системы из состояния покоя в состояние равноускоренного движения — случай (6); переводу системы из состояния покоя в периодическое движение — случай (7); переводу системы из состояния прямолинейного равномерного движения в состояние равноускоренного движения — случай (8).

Задача оптимального управления (задача А) была поставлена следующим образом. Найти управление  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , такое, чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния (3) в заданное конечное состояние (4). При этом необходимо, чтобы норма управления  $\|u(t)\|$  в пространстве  $L_2[t_0, T]$  достигла минимального значения, когда

$$\text{значение } T \text{ задано [15]. Здесь } \|u\| = \sqrt{\int_{t_0}^T |u(t)|^2 dt}.$$

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Решение поставленной задачи можно свести к следующей  $l$ -проблеме моментов [12–15]. Пусть заданы некоторые числа  $C_i(T)$ ,  $l > 0$  и функции  $g_i(t) \in L_2[t_0, T]$ ,  $i = 1, 2$ , связанные с параметрами  $(t_0, T)$ . Необходимо найти такую функцию  $u(t) \in L_2[t_0, T]$ , чтобы выполнялись соотношения:

$$\int_{t_0}^T g_i(t')u(t')dt' = C_i(T), \quad (9)$$

$$\|u(t)\| \leq l.$$

Решение  $l$ -проблемы моментов (9) сводится к задаче условной минимизации:  $\frac{1}{\lambda} =$

$$= \min_{\xi_1, \xi_2} \left[ \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^2 \xi_i g_i(t') \right]^2 dt' \Big]^{1/2} \text{ при выполнении ра-}$$

венства:  $\xi_1 C_1 + \xi_2 C_2 = 1$  [14]. Функции  $g_i(t')$  и числа  $\xi_i$  — вспомогательные. Значение  $\lambda$  — норма оптимального управления:  $\lambda = \|u(t)\|$ . Зная точки  $\xi_1^*$  и  $\xi_2^*$ , в которых достигается минимум функции

$$\left[ \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^2 \xi_i g_i(t') \right]^2 dt' \Big]^{1/2}, \text{ получим формулу для нахождения оптимального управления [14]:}$$

$$u(t) = \lambda^2 (\xi_1^* g_1(t) + \xi_2^* g_2(t)).$$

Имеет место

**Утверждение.** Пусть дана система (1) с начальными условиями (3), тогда выражения для координат  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  имеют вид:

$$q_1(t) = q_1^0 + \frac{q_2^0 (T-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_0}^t \frac{u(t') dt'}{(T-t')^{1-\alpha-\beta}}, \quad (10)$$

$$q_2(t) = q_2^0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^t \frac{u(t') dt'}{(T-t')^{1-\beta}}. \quad \blacklozenge \quad (11)$$

Доказательство см. в Приложении.

Для исследуемой задачи (1), (3), (4), когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто (2), решение (10), (11) при  $t = T$  может быть переписано в форме (9), при этом будут справедливы следующие выражения для вспомогательных функций  $g_i$  и моментов  $C_i(T)$ :

$$g_1(t') = \frac{(T-t')^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

$$C_1(T) = q_1^T - \frac{q_2^0}{\Gamma(\alpha)} \frac{(T-t_0)^\alpha}{\alpha} - q_1^0 \equiv C_1, \quad (12)$$

$$g_2(t') = \frac{(T-t')^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad C_2(T) = q_2^T - q_2^0 \equiv C_2. \quad (13)$$

В работе [11, теорема 1] было получено условие, при котором проблема моментов (9) может быть поставлена и будет разрешима. В рассматриваемом случае с учетом формул (12), (13) и в предположении  $u(t) \in L_2[t_0, T]$  данное условие сводится к выполнению неравенства  $\beta > 0,5$ .

Далее в работе для удобства записи введены обозначения:

$$K_1 = \frac{1}{C_1^2 \Gamma^2(\alpha+\beta)} \cdot \frac{(T-t_0)^{2(\alpha+\beta)-1}}{(2\alpha+2\beta-1)},$$

$$K_2 = \frac{2(T-t_0)^{\alpha+2\beta-1}}{C_1 \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha+\beta) (\alpha+2\beta-1)},$$

$$K_3 = \frac{(T-t_0)^{2\beta-1}}{\Gamma^2(\beta) (2\beta-1)}. \quad (14)$$

Выполняя условную минимизацию для решенной записанной выше задачи, можно показать, что значения  $\xi_1^*$  и  $\xi_2^*$ , при которых достигается мини-



мум искомой функции, выражаются через обозначения (14) как

$$\xi_1^* = \frac{1}{C_1} - \frac{C_2}{C_1} \xi_2^*, \quad \xi_2^* = \frac{2K_1 C_2 - K_2}{2(K_1 C_2^2 - K_2 C_2 + K_3)}.$$

Тогда норма оптимального управления записывается в виде:

$$\|u(t)\| = [K_1(1 - \xi_2^*)^2 + K_2 \xi_2^*(1 - \xi_2^* C_2) + K_3(\xi_2^*)^2]^{-1/2}.$$

Оптимальное управление в данном случае определяется выражением:

$$u(t) = \lambda^2 \left( \frac{(T-t)^{\alpha+\beta-1}}{C_1 \Gamma(\alpha+\beta)} - \left( \frac{C_2(T-t)^{\alpha+\beta-1}}{C_1 \Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{(T-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) \frac{2K_1 C_2 - K_2}{2(K_1 C_2^2 - K_2 C_2 + K_3)} \right).$$

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее представлены основные результаты проведенных исследований поведения системы (1) для различных сочетаний начальных и конечных условий (5)–(8). Акцент сделан на анализ зависимости нормы управления  $\|u(t)\|$  от времени  $T$  и от показателей дробного дифференцирования (п. 3.1); временную динамику функции управления и фазовых координат (п. 3.2); связь фазовых координат, т. е. влияние значений  $\alpha$  и  $\beta$  в первом звене двойного интегратора на характер поведения системы (п. 3.3).

Все полученные зависимости рассчитаны и построены в программной среде Matlab.

#### 3.1. Поведение нормы управления

В случае перехода системы в прямолинейное равномерное движение (5) оказалось, что существуют такие значения показателей дробного дифференцирования  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых норма управления не зависит от времени перехода  $T$  (рис. 1). Данный результат с физической точки зрения может означать существование систем, при оптимальном переводе которых из начального состояния в конечное, энергия управляющего воздействия не зависит от времени перехода. В целом же, зависимость нормы  $\|u(t)\|$  от времени  $T$  при произвольных значениях показателей дробного дифференцирования характеризуется резким падением на очень малых временах перехода, а на больших временах становится равной некоторой константе (рис. 2). При этом для показателей, близких к единице зависимость является монотонной, а для меньших значений показателей она может иметь минимум в области малых значений времени  $T$ .

Поведение нормы управления в случае (6) перехода системы из состояния покоя в равноуско-

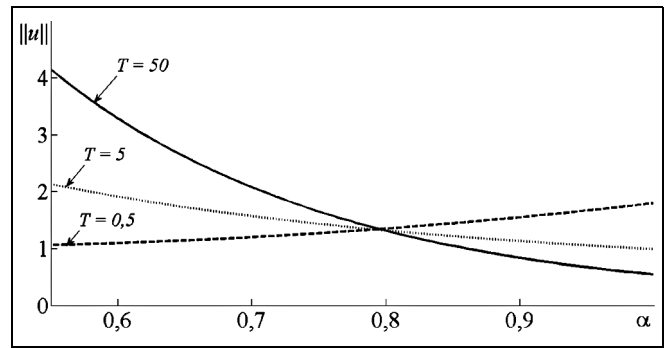


Рис. 1. Зависимость нормы управления от показателя дробного дифференцирования  $\alpha$  при  $\beta = 0,76$  для условий (5)

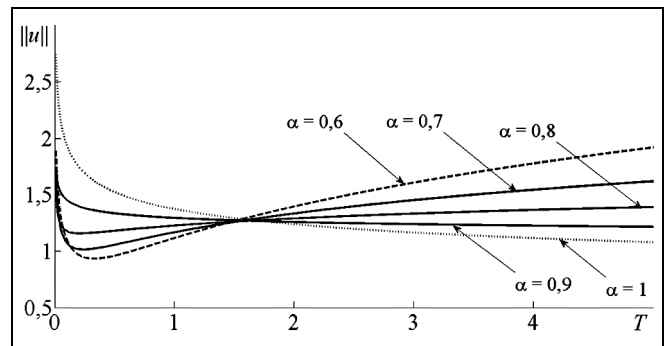


Рис. 2. Поведение нормы управления для условий (5): зависимость от времени  $T$  при  $\alpha = 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$  и фиксированном  $\beta = 0,65$

ренное движение (рис. 3) не характеризуется наличием ярко выраженного минимума, как на рис. 2. А если переход системы начать из состояния прямолинейного равномерного движения (8), то на малых временах, порядка  $T < 1$ , достигается четко выраженный минимум нормы управления  $\|u(t)\|$  (рис. 4).

Для сравнения поведения нормы управления в случаях (5) и (6) введем обозначения:  $\|u\|_p$  — норма управления при переходе в равноускоренное движение;  $\|u\|_n$  — норма управления при переходе в прямолинейное движение. Анализ зависимости  $\|u\|_p / \|u\|_n$  от  $\alpha$  показал, что данное отношение норм управления во всем диапазоне изменения показателей дробного дифференцирования оказывается больше единицы. При этом для перехода системы в равноускоренное движение на малых временах перехода  $T = 0,01$  требуется значительно больше усилия (примерно в 10–150 раз) по сравнению с переходом в прямолинейное движение (рис. 5). На больших временах  $T > 0,01$  наблюдается резкий спад значений до 2–5 раз.

При переходе системы из состояния покоя в состояние периодического движения (7) норма уп-

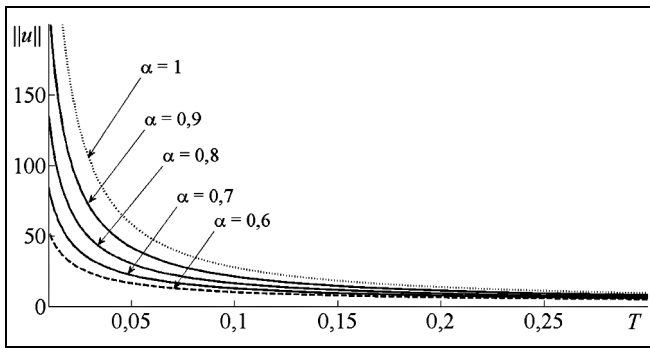


Рис. 3. Поведение нормы управления для условий (6): зависимость от времени  $T$  при  $\alpha = 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$  и  $\beta = 0,65$

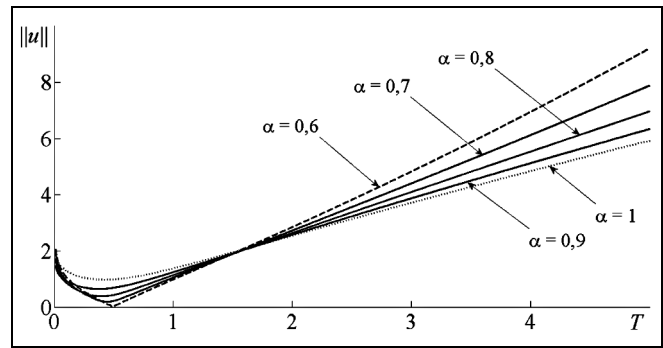


Рис. 4. Поведение нормы управления для условий (8): зависимость от времени  $T$  при  $\alpha = 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$  и  $\beta = 0,65$

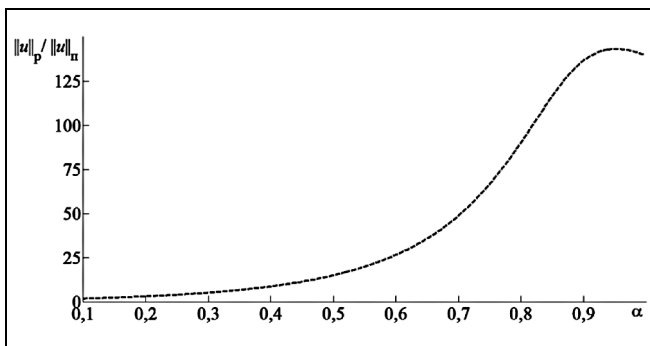


Рис. 5. Зависимость отношения норм управлений  $\|u\|_p / \|u\|_n$  от  $\alpha$  при  $\beta = 0,6$  и  $T = 0,01$

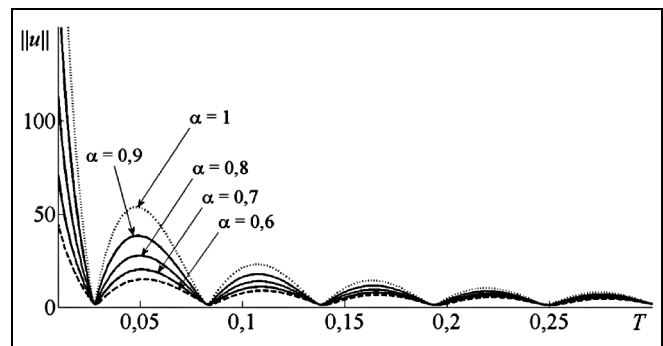


Рис. 6. Поведение нормы управления для условий (7): зависимость от времени  $T$  при  $\alpha = 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$  и  $\beta = 0,65$

равления демонстрирует периодическую зависимость от времени, и ее амплитуда растет с увеличением показателя дробного дифференцирования (рис. 6).

Характерно, что при переходе системы в равноускоренное движение из состояния покоя (6) или из состояния прямолинейного движения (8), норма управления будет минимальна на малых временах перехода, а при переходе в периодическое движение (7) минимум достигается только на больших временах.

### 3.2. Особенности фазовой динамики системы

Для анализа фазовой динамики системы сравнивались зависимости функции управления  $u(t)$  и фазовых координат  $q_1$  и  $q_2$  от времени  $t$ . Были выбраны одинаковые значения дробных показателей дифференцирования для всех случаев (5)–(8), рассматриваемых в работе:  $\alpha = 0,65$  и  $\beta = 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$ .

При исследовании поведения системы в случаях (5) и (8) оказалось, что значения управлений и фазовой координаты  $q_2$  лежат в четвертом квадран-

те координатной плоскости и плавно стремятся к некоторой константе с увеличением  $t$ .

В случае (6) характер фазовой динамики системы аналогичен случаю (5), но только значения управлений и фазовой координаты  $q_2$  лежат в первом квадранте координатной плоскости.

При переходе системы из состояния покоя в состояние периодического движения (7) функции  $u(t)$ ,  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  периодически изменяются со временем, и их амплитуды стремятся к нулю на больших временах.

### 3.3. Поведение системы при классической и неклассической связи фазовых координат

Отметим следующую закономерность связи фазовых координат в первом звене двойного интегратора. Значения функции, полученной как отношение норм управлений классического к неклассическому случаю  $\|u\|_{\text{кл}} / \|u\|_{\text{нкл}}$ , когда показатели дробного дифференцирования равны ( $\alpha = 1, \beta = 1$ ) и не равны ( $\alpha \neq 1, \beta = 1$ ) соответственно, лежат в интервале от 0 до 2 и имеют характерный максимум (рис. 7). При переходе системы в случае (6) за-

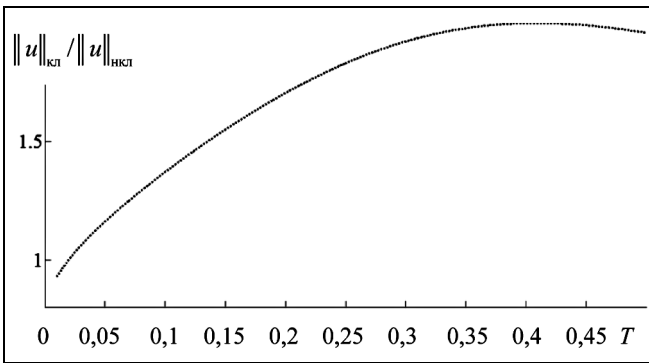


Рис. 7. Зависимость отношения норм функций управления  $\|u\|_{\text{кл}}/\|u\|_{\text{нкл}}$  от времени в случае (5):  $\alpha = 0,6$ ;  $\beta = 1$  и  $T = 0,5$

висимость не будет иметь экстремумов, и значения функции будут плавно уменьшаться с увеличением времени. В случае периодического движения (7) наблюдается периодическое изменение отношения  $\|u\|_{\text{кл}}/\|u\|_{\text{нкл}}$  от времени, при этом все значения функции будут лежать в верхней полуплоскости.

В процессе исследования было также замечено, что фазовые координаты  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  чувствительны к выбору значения показателя дробного дифференцирования  $\beta$ , т. е. сильно зависят от связи во втором звене двойного интегратора при переводе системы из состояния прямолинейного равномерного движения в состояние равноускоренного движения. Подобной чувствительности не наблюдается в случае перевода системы в равноускоренное движение из состояния покоя, а также в случаях (5) и (7).

Полученные в данной работе формулы для расчета управления, при переходе к классическому случаю ( $\alpha = 1, \beta = 1$ ), соответствуют результатам, приведенным в работе А.Г. Бутковского [15] для двойного интегратора (1) с условиями (3), (4) при сочетании начальных и конечных условий (5).

#### 4. ПРИМЕР

В настоящее время аппарат дробно-дифференциального исчисления востребован при моделировании и проектировании ядерного реактора. Известно, что из-за высокой вероятности того, что цепная реакция деления станет неконтролируемой, необходимо максимально точно проводить все расчеты, связанные с движением нейтронов внутри ядра реактора. Система уравнений, описывающих движение нейтронов в ядерном реакторе с помощью аппарата дробно-дифференциального исчисления, имеет вид [16], аналогичный системе (1):

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha P(t) = aP(t) + bC(t) + f(t), \\ {}^C D_t^\beta C(t) = cP(t) + dC(t), \end{cases} \quad \begin{cases} {}^C D_t^\alpha q_1(t) = q_2(t), \\ {}^C D_t^\beta q_2(t) = u(t). \end{cases}$$

где  ${}^C D_t^\alpha$  — дробный дифференциальный оператор Капуто с показателем  $\alpha$ ;  $P(t)$  — мощность реактора;  $C(t)$  — средняя концентрация замедленных нейтронов;  $a, b, c$  и  $d$  — константы, связывающие между собой реакционную способность, время распада, среднее время между возникновением нейтронов и последующим их поглощением, вызывающим деление;  $f(t)$  — внешняя сила (управление). В работе [16] проведено сравнение различных моделей в зависимости от значения показателя дробного дифференцирования  $\alpha$  ( $\beta = 1$ ), в том числе и при  $\alpha = 1$ . Показано, что в поведении реактивности в целом преобладает наличие обобщенных гипергеометрических функций. Также в случае периодического изменения мощности  $P(t)$  положительное пиковое значение реактивности в модели FO (Fractional Order — дробного порядка) оказалось меньше, чем у модели IO (Integer Order — целого порядка). Авторам работы [17] удалось показать, что модель FO соответствовала наилучшим образом динамике реактора.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача оптимального управления движением для двойного интегратора дробного порядка. Построено решение поставленной задачи, получены явные формулы для управления и вычислена его норма. Проанализирован ряд примеров, исследованы зависимости нормы и времени оптимального управления от показателей дробного дифференцирования и продемонстрировано, что упомянутые зависимости могут иметь немонотонный, экстремальный характер. Физически это может означать, что существуют такие параметры, при которых внешнее управляющее воздействие достигает минимального значения. Практическое применение этих результатов может привести к уменьшению энергетических затрат на управление всей системы в целом.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при расчетах управления для систем нецелого порядка.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство утверждения.** Двумерная система нецелого порядка, для которой ищется решение, записывается в виде двух дифференциальных уравнений дробного порядка:

Выразим из первого уравнения  $q_1(t)$ , а из второго  $q_2(t)$ , тогда:

$$\begin{cases} q_1(t) = q_1(t_0) + {}_{t_0}I_T^\alpha q_2(t), \\ q_2(t) = q_2(t_0) + {}_{t_0}I_T^\beta u(t). \end{cases}$$

Подставляя начальные условия  $q_1(t_0) = q_1^0$ ,  $q_2(t_0) = q_2^0$  и выражение для  $q_2(t)$  в первое уравнение системы, получим:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1^0 + {}_{t_0}I_T^\alpha [q_2^0 + {}_{t_0}I_T^\beta u(t)] = \\ &= q_1^0 + {}_{t_0}I_T^\alpha q_2^0 + {}_{t_0}I_T^\alpha {}_{t_0}I_T^\beta u(t). \end{aligned}$$

Оператор дробного интегрирования от некоторой функции  $f$  имеет вид [17]:

$${}_{t_0}I_T^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^T \frac{f(t') dt'}{(T-t')^{1-\alpha}}.$$

Тогда второе слагаемое  ${}_{t_0}I_T^\alpha q_2^0$  можно переписать так:

$$\begin{aligned} {}_{t_0}I_T^\alpha q_2^0 &= \frac{q_2^0}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^T \frac{dt'}{(T-t')^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{q_2^0}{\Gamma(\alpha)} \frac{(T-t_0)^\alpha}{\alpha} = \frac{q_2^0 (T-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Учитывая полугрупповое свойство дробных операторов интегрирования [16]:  ${}_{t_0}I_T^\alpha {}_{t_0}I_T^\beta u(t) = {}_{t_0}I_T^{\alpha+\beta} u(t)$  выражение для третьего слагаемого  ${}_{t_0}I_T^\alpha {}_{t_0}I_T^\beta u(t)$  запишем в виде:

$${}_{t_0}I_T^{\alpha+\beta} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_0}^T \frac{u(t') dt'}{(T-t')^{1-\alpha-\beta}}.$$

Окончательно выражение для  $q_1(t)$  примет вид:

$$q_1(t) = q_1^0 + \frac{q_2^0 (T-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_0}^T \frac{u(t') dt'}{(T-t')^{1-\alpha-\beta}}.$$

Выражение для  $q_2(t)$  при подстановке начальных условий запишем как

$$q_2(t) = q_2(t_0) + {}_{t_0}I_T^\beta u(t) = q_2^0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^T \frac{u(t') dt'}{(T-t')^{1-\beta}}.$$

В результате получаем решение для системы (1) с начальными условиями (3):

$$\begin{cases} q_1(t) = q_1^0 + \frac{q_2^0 (T-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_0}^T \frac{u(t') dt'}{(T-t')^{1-\alpha-\beta}}, \\ q_2(t) = q_2^0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^T \frac{u(t') dt'}{(T-t')^{1-\beta}}, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 3–34.
2. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: НАН Украины, 2008. — 256 с.
3. Westerlund S. Dead matter has memory! // Physica Scripta. — 1991. — Vol. 43, N 2. — P. 174–179.
4. Schmidt A., Lothar G. FE Implementation of Viscoelastic Constitutive Stress-Strain Relations involving Fractional Time Derivative. — URL: <https://www.inm.uni-stuttgart.de/institut/mitarbeiter/schmidt/papers/eccmr01.pdf> (дата обращения: 02.01.2018).
5. Tarasov V.E. Continuous Medium Model for Fractal Media // Physics Letters A. — 2005. — Vol. 336. — P. 167–174.
6. Aparicio R., Hajimiri A. Capacity Limits and Matching Properties of Integrated Capacitors // IEEE Journal of solid state circuits. — 2002. — Vol. 37, N 3. — P. 384–393.
7. Dzielinski A., Sierociuk D. Ultracapacitor Modelling and Control Using Discrete Fractional Order State-Space Model // Acta Montanistica Slovaca. — 2008. — Vol. 13, N 1. — P. 136–145.
8. Cole K.S. Electric conductance of biological systems // Proc. Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol., Cold Spring Harbor, N.-Y., 1933. — P. 107–116.
9. Oustaloup A. Systemes asservis d'ordre 1/2, 1, 3/2, 2: une etude comparative aide a les choisir // L'Onde Elec. — 1979. — Vol. 59, N 2. — P. 41–47.
10. Podlubny I. Fractional-Order Systems and PI  $\lambda$  D $\mu$  — Controllers // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1999. — Vol. 44, N 1. — P. 208–214.
11. Кубышкин В.А., Постнов С.С. Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 5. — С. 3–17.
12. Кубышкин В.А., Постнов С.С. Исследование двух задач оптимального управления маятником дробного порядка с помощью метода моментов // Проблемы управления. — 2014. — № 3. — С. 14–22.
13. Кубышкин В.А., Постнов С.С. The optimal control problem for linear systems of non-integer order with lumped and distributed parameters // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. — 2015. — Vol. 4, N 4. — P. 429–443.
14. Кубышкин В.А., Постнов С.С. Исследование задачи оптимального управления для одиночного и двойного интеграторов дробного порядка с помощью метода моментов при поиске допустимых управлений // Проблемы управления. — 2013. — № 3. — С. 9–17.
15. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.
16. Vyawahare V.A., Nataraj P.S.V. Development and analysis of some versions of the fractional-order point reactor kinetics model for a nuclear reactor with slab geometry // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. — 2013. — Vol. 18. — P. 1840–1856.
17. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 541 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Постнова Елена Александровна — аспирант, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ 5elpostnova@gmail.com.