

СИНТЕЗ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ¹

Ю.А. Полунин

Предложен синтез методов регрессионного анализа и нелинейной динамики для описания и исследования дискретных данных, порождаемых нелинейными социально-экономическими процессами. Отмечено, что такой подход оказывается эффективным для анализа дискретных эмпирических данных нелинейных процессов, развивающихся в условиях ограничений, когда приращения процессов пропорциональны достигнутому уровню с поправкой на влияние ограничений. Применение предлагаемого подхода проиллюстрировано на примере анализа динамики выручки российских компаний крупного и среднего бизнеса за период с 2009 по 2015 г. Получены обобщающие результаты, позволяющие выявить различный характер динамики темпов прироста выручки различных групп компаний, оценить их текущее положение и дальнейшую динамику. Предложены модели для различных закономерностей развития процессов, проявляющихся в различных влияниях ограничений.

Ключевые слова: нелинейные процессы, дискретные эмпирические данные, отображения как модели нелинейной динамики, темпы прироста, модели регрессионного анализа, взаимосвязь параметров отображений и коэффициентов регрессий, особые точки и их устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Для обработки эмпирических данных социально-экономических процессов широко применяются методы регрессионного анализа. Наряду со многими достоинствами их применение в анализе порождает и проблему: о динамике социально-экономических процессов, как правило, имеется нечеткое теоретическое представление, отсутствует априорная информация о классе истинной функции регрессии, поэтому в качестве моделей регрессионного анализа используются достаточно универсальные функции, например, полиномы. Полученные на основании таких моделей результаты трудно интерпретировать для более глубокого понимания закономерностей реального процесса. Дальнейшую интерпретацию можно провести, если в качестве базовой принять модель, взаимосвязанную с моделью регрессионного анализа и отражающую хотя бы какую-нибудь специфику анализируемых социально-экономических процессов.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-07944-а «Разработка алгоритмов и математических моделей для анализа и прогноза процессов развития и самоорганизации в социально-экономических системах».

Тогда можно перейти от результатов регрессионного анализа к параметрам другой модели и провести углубленный анализ на ее основе.

Найти универсальную базовую модель, отражающую специфику всех социально-экономических процессов, невозможно в силу их многообразия. Однако можно выделить класс социально-экономических процессов, имеющих достаточно общие закономерности и учесть эти закономерности при выборе базовых моделей анализа. Для такого подхода в настоящей статье предлагаются базовые модели, которыми после соответствующих преобразований можно воспользоваться и в качестве моделей регрессионного анализа.

В качестве мостика между регрессионным анализом и интерпретацией его результатов можно принять базовые модели, отражающие специфику некоторого класса социально-экономических процессов. Предлагаемые в статье методы эффективны для процессов, имеющих следующие особенности.

- Из теоретических рассуждений невозможно определить истинные функции, генерирующие значения процессов, поэтому нужно рассматривать несколько альтернативных моделей, а для выбора оптимальной применять статистические критерии.



- Измерения процессов дискретны — это специфика большинства процессов как социальных, так и экономических.
- Процессы развиваются в условиях ограничений. Как правило, такие ограничения носят ресурсный характер. В силу влияния ограничений процессы имеют нелинейный характер. Существование ограничений в экономике и менеджменте столь обычно, что управлению в условиях ограничений посвящена специальная теория ограничений [1].
- Приращения процессов зависят от текущего состояния с поправкой на влияние ограничений.
- Процессы, как правило, протекают в быстротекущей среде. Это приводит к тому, что однородные участки занимают короткие временные интервалы.
- Возможны ситуации, когда анализируемые процессы развиваются в среде, где взаимодействуют несколько процессов, и такие ситуации необходимо учитывать.

Таковыми особенностями обладают многие социально-экономические процессы, например: динамика показателей деятельности компаний, таких как выручка; протекание избирательной кампании, описываемое измерениями числа сторонников кандидатов; формирование общественного мнения, описываемое числом людей, поддерживающих некую идею; дискуссии в Интернете, описываемые числом вступивших в дискуссию; логическая динамика стоимости акций и т. п.

Для анализа таких процессов предлагается в качестве базовых моделей применить нелинейные отображения, связывающие значения процессов во времени. Эти отображения должны позволять преобразовывать их в модели регрессионного анализа. Будем употреблять термин «отображения», как это принято в нелинейной динамике. Фактически это уравнения, описывающие изменение значений процесса в виде $X_{n+1} = G\{X\}$, где X_{n+1} — следующее значение процесса (на временном шаге $n + 1$), $G\{X\}$ — нелинейная функция от текущего и предыдущих значений процесса. Функция $G\{X\}$ отражает особенности социально-экономических процессов, сформулированные выше. Если рассматривается взаимодействие нескольких процессов, то аргументами нелинейной функции служат значения взаимодействующих процессов. В рамках данной статьи отображения будем рассматривать как итерируемые или дискретные отображения [2].

Применение нелинейных отображений в качестве базовых позволяет перейти от коэффициентов регрессионных моделей к оценкам параметров отображений. Это, в свою очередь, позволяет получить описание процесса в категориях нелинейной динамики:

— значения ограничений процессов и значения особых (неподвижных) точек с оценкой их устойчивости — такие характеристики позволяют в ходе анализа рассуждать о пределах развития процессов и характере динамики при сильном влиянии ограничений.

— значения нормированных интенсивностей — позволяют описывать и сопоставлять характер динамики различных процессов как количественно, так и качественно.

Кроме того, появляется возможность моделирования дальнейшего развития процессов на основании коэффициентов регрессионных моделей.

В дальнейшем полученные результаты могут быть интерпретированы в категориях конкретного социально-экономического процесса. Так, например, в рассматриваемом далее анализе динамики выручки российских компаний удалось выявить особенности изменения выручки для разных групп компаний, что позволило:

— описать картину жизненного цикла российских компаний в категориях темпов прироста выручки;

— для различных групп компаний оценить размеры рыночных ниш по выручке и их стабильность;

— проследить особенности влияния предыстории на размеры рыночных ниш для различных групп компаний;

— выявить группы однотипных компаний по характеру динамики выручки.

1. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ВЫРУЧКИ РОССИЙСКИХ КОМПАНИЙ

Рассмотрим применение предлагаемого метода на примере анализа выручки российских компаний. Задачи анализа динамики всей совокупности российских компаний появились относительно недавно с появлением обязательной отчетности компаний и созданием баз данных по ней. Динамику выручки российских компаний можно рассматривать как соответствующую особенностям социально-экономических процессов, перечисленных во Введении. Проведенный анализ является следующим шагом в статистическом оценивании данных о выручке российских компаний, часть предыдущих результатов приведена в работе [3]. Далее будут рассмотрены только основные результаты, раскрывающие применяемую методологию (экономическая трактовка результатов будет представлена в статье А.Ю. Юданова и автора). Помимо демонстрации предлагаемого метода в ходе его применения получены интересные результаты об особенностях развития российских компаний.

Анализ построен таким образом, что в ходе его достигаются две цели: благодаря применению

предлагаемого метода для описания разных по динамике ситуаций демонстрируется его широкая эффективность, а также выявляются основные закономерности изменения выручки российских компаний, позволяющие классифицировать компании по динамике развития.

Анализируются содержащиеся в системе «СПАРК-Интерфакс» данные по российским компаниям, которые существовали, как минимум, с 2009 г., и в 2015 г. их выручка была не менее 200 млн. руб. Всего таких компаний в Российской Федерации оказалось 38 410, именно все их данные и использованы в анализе.

Специфика рассматриваемого анализа в том, что необходимо обработать данные при малом числе годовых измерений. Зато есть большие по объему данные за каждый год (более 38 тыс. компаний). Это позволяет, для уменьшения дисперсий оценок, применять медианные оценки в каждой, достаточно большой группе, на которые разбиваются компании. Для непрерывного описания всех российских компаний как единого целого и демонстрации возможностей предлагаемого метода для разных условий принцип разбиения компаний на группы таков: все компании разбиваются в зависимости от темпов прироста выручки за период с 2010 по 2015 г. на шестнадцать одинаковых по размерам взаимно пересекающихся групп. Группы формировались в зависимости от значений процентилей темпов прироста выручки для всей совокупности компаний (табл. 1). Размер каждой группы 25 % общего числа компаний (что составляет 9602 компании в каждой группе). Принцип формирования двух соседних групп: из группы с меньшим диапазоном темпов прироста исключаются

пять процентов компаний (общего числа компаний) с наименьшими темпами прироста, взамен в новую группу добавляется пять процентов компаний со следующими по значению темпами прироста. Каждые из соседних групп перекрываются, имея одинаковыми 20 % общего числа компаний. Две ближайшие группы отличаются между собой на 1920 компаний, что составляет пять процентов общего числа компаний в российской экономике, отвечающих выбранным критериям. Можно сказать, что каждый раз при переходе к следующей группе происходит сдвиг на пять процентилей. В ходе анализа применяется шестнадцать раз однотипная обработка и сравниваются полученные результаты. Такие многократные повторы соответствуют применению метода в различных ситуациях как для растущих, так и для уменьшающихся по выручке компаний. Поскольку для описания каждой группы применяются медианные оценки, то большой объем группы позволяет существенно, почти на два порядка, уменьшить дисперсию оценок по сравнению с дисперсией в группе. Результаты расчетов медиан выручки для каждой группы с 2009 по 2015 г. приведены в табл. 1.

Главная задача анализа, приведенного в данной статье, — демонстрация на реальных данных возможностей предлагаемого метода. Перед нами стоит задача пойти в анализе представленных данных дальше коэффициентов регрессионных моделей благодаря глубокой их интерпретации, что позволило бы получить представление о характере динамики выручки компаний на различных этапах их жизненного цикла.

Рассмотрим подходы к решению подобных задач. С учетом дискретности измерений анализ

Таблица 1

Медианы выручки (млн руб.) по группам компаний
(группы образованы в зависимости от процентилей темпов прироста выручки всех компаний за период с 2010 по 2015 г.)

Группы компаний с темпами прироста, процентиля	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.
менее 25-го	449	578,7	637,8	636,8	596,6	547,9	448
30—5	378,3	457,8	532,3	550,9	541,5	521,2	468,4
35—10	344,8	416	491,2	520,3	525,3	518,6	489,6
40—15	321,9	387	464,6	501,6	514	520,2	505,9
45—20	304,8	370,8	450,7	493,3	514,2	529,5	530
50—25	284	346,2	431,4	480,3	507,3	535,2	543
55—30	269	331,2	419,9	473,4	506,7	546,8	562,6
60—35	245,5	305,3	400,5	457,9	492,9	541,8	567,3
65—40	225,5	279,5	375,8	438,3	480,5	534,7	568,4
70—45	204,5	253,8	351,4	419,8	465,6	524,3	571,6
75—50	178,3	226,2	327	395,6	446,5	516	573,3
80—55	153,3	192,7	295,4	367,3	424,9	499,5	567,4
85—60	127,5	162,4	260,1	338	403,3	483,6	562,3
90—65	103,6	128,8	229,7	311	382,6	467,7	560,9
95—70	78,4	90,5	187,7	269,6	345,9	435,4	543,7
более 75-го	55,7	56,4	147,4	234,6	312,3	418,4	544,9



эмпирических данных социально-экономических процессов в общем случае можно отнести к анализу временных рядов. Общие методы анализа временных рядов хорошо освоены и широко применяются, они представлены, например, в справочнике [4], а взгляд на анализ временных рядов с позиций эконофизики и социофизики рассмотрен в работе [5]. Очень широко применяются линейные стохастические модели, например, модели авторегрессии, полиномиальные или скользящего среднего [6]. Применению методов регрессионного анализа с применением полиномов для описания нелинейной динамики, например, посвящена работа [7]. Но интерпретация полученных статистических результатов затруднена как в силу абстрактности принятых моделей, так и в силу необходимости рассматривать результаты, полученные линейными методами применительно к нелинейным процессам. Часто для анализа нелинейных процессов применяют и другой подход, заключающийся в построении нелинейных динамических моделей, как правило, в виде отображений или дифференциальных уравнений, реализующих идеи и методы нелинейной динамики. Категории нелинейной динамики позволяют в случае отображений описать сложную динамику простыми детерминированными нелинейными моделями. Применение подходов нелинейной динамики приводит к новым концепциям в анализе временных рядов, которые могут привести к более глубокому пониманию анализируемых процессов. Применяя в анализе специально подобранные нелинейные модели, можно получить новый взгляд на структуры временных рядов. Такой подход описан в книге [8], а в работе [9] приведены конкретные примеры нелинейного анализа с помощью специального пакета программ. В работе [10] рассматриваются подходы к выявлению бизнес-циклов при помощи параметрических нелинейных моделей временных рядов. Во всех рассмотренных нелинейных подходах используется априорная или постулируемая информация о законах генерации данных. Для многих социально-экономических процессов и, в частности, для рассматриваемого нами примера такой подход мало применим в силу отсутствия достоверной априорной информации.

Ни в одной из упомянутых работ нет попыток переходов от результатов, полученных методами регрессионного анализа, к интерпретации их в категориях нелинейной динамики.

С учетом особенностей процессов и для обеспечения взаимосвязи моделей регрессионного анализа и нелинейной динамики целесообразно в качестве базовых моделей воспользоваться нелинейными отображениями, позволяющими связать коэффициенты регрессии и параметры отображений. Тогда полученные в ходе регрессионного ана-

лиза результаты можно интерпретировать в дальнейшем с позиций нелинейной динамики.

Цитата из работы [11] объясняет целесообразность применения отображений: «Переход от непрерывной системы m дифференциальных уравнений к $(m - 1)$ -мерному отображению в ряде задач очень полезен. Прежде всего потому, что о многих нелинейных явлениях гораздо проще говорить на языке дискретных отображений, чем на языке непрерывных динамических систем. Кроме того, многие системы дифференциальных уравнений порождают похожие отображения. Поэтому сейчас часто одномерные и двумерные отображения рассматривают как упрощенные модели различных процессов».

Для реализации предлагаемого подхода необходимо на первом этапе анализа выбрать детерминированные модели нелинейной динамики, которые могут рассматриваться как альтернативные. Эти модели представляют собой нелинейные отображения, описывающие анализируемый процесс в виде последовательности значений, когда последующие значения зависят от предыдущих. При дискретности измерений социально-экономических процессов, протекающих в быстроменяющейся среде, для анализа доступно малое число данных, что видно и в табл. 1 (данные ранее 2009 г. нельзя использовать в силу их неоднородности с анализируемым временным участком: кризис 2008 г. резко поменял картину), это налагает ограничения на возможное число неизвестных коэффициентов регрессионных моделей. Соответственно, здесь не подходят для описания и анализа сложные базовые отображения, содержащие очень много параметров.

Как уже было отмечено, отображения должны отвечать важному условию: путем преобразований из них можно получить линейную модель регрессионного анализа. В рассмотренных далее нелинейных отображениях такой переход удается реализовать, преобразовав значения анализируемого процесса в значения их темпов прироста. Это преобразование позволяет перейти от базовых нелинейных отображений к линейным (по неизвестным коэффициентам) регрессионным моделям, описывающим закономерности изменения темпов прироста. На основе коэффициентов регрессионной модели можно будет оценить параметры базовых нелинейных отображений и проводить дальнейший анализ динамики процессов с учетом их свойств.

Изменения выручки компаний протекают в соответствии с сформулированными выше особенностями социально-экономических процессов, позволяющими воспользоваться базовыми нелинейными моделями: размер (по выручке) рыночной ниши определяет ограничения процессов,

приращения выручки зависят от достигнутых значений. Поэтому для анализа данных о выручке российских компаний предлагается воспользоваться базовым нелинейным отображением, назовем его комбинированным, соответствующим специфике динамики выручки. В нем комбинируется влияние на динамику текущей ситуации и предыстории. В ходе анализа динамики выручки компаний вполне естественно учесть влияние на будущие результаты предыдущих состояний компании. При таких условиях для анализа динамики выручки целесообразно описать будущее значение выручки X_{n+1} отображением:

$$X_{n+1} = X_n + X_n A_{comb} (K_{comb} - \rho_{comb} X_n - \rho_{comb} lag_1 X_{n-1} - \rho_{comb} lag_2 X_{n-2} - \dots), \quad (1)$$

где n — дискретное время, выраженное в шагах отображения (в нашем случае это годы отчетности компаний), A_{comb} — интенсивность изменения выручки при отсутствии ограничений, K_{comb} — ограничение динамики выручки, связанное с размером рыночной ниши, $\rho_{comb} lag_i$ — соответствующие масштабирующие коэффициенты значений процесса, характеризующие влияние текущего состояния и предыстории (их знаки отражают усиление или уменьшение влияния ограничения). Выражение в скобках описывает влияние ограничения на приращение выручки — чем меньше его значение, тем меньше приращение. При существовании компании в рыночной нише приращение выручки будет зависеть от оставшейся незанятой части ниши и возможности ее расширения или уменьшения, именно этот факт отражает выражение в скобках.

Аналогично альтернативным полиномиальным моделям в регрессионном анализе, где рассматриваются модели с разными степенями, в случае отображения (1) можно считать, что альтернативные модели включают в себя слагаемые с разными лагами. Комбинированное отображение (1) с разными значениями масштабирующих коэффициентов позволяет рассматривать целый класс альтернативных моделей как хорошо исследованных, так и с неисследованными свойствами. Так, отображение Ферхюльста [12] является частным случаем комбинированного отображения ($\rho_{comb} = 1$, а все остальные коэффициенты равны нулю), а при $\rho_{comb} lag = 1$ и равенстве всех остальных коэффициентов нулю комбинированное отображение становится логистическим отображением с запаздыванием.

При отображении (1) в анализе возникает проблема: какие члены отображения необходимы для описания конкретного процесса изменения выручки компаний. Фактически речь идет о поиске наиболее адекватной модели исследуемого нелинейного процесса. Оценить степень адекватности

альтернативных моделей позволяют методы регрессионного анализа, в частности, оценки их коэффициентов детерминации. Для такого подхода нам необходимо преобразовать отображение (1) в линейную модель регрессионного анализа. Для перехода от нелинейного комбинированного отображения к линейной модели регрессионного анализа перенесем X_n в левую часть отображения (1) и разделим левую и правую части на X_n . В результате, раскрыв скобку, получим:

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = A_{comb} K_{comb} - A_{comb} \rho_{comb} X_{n1} - A_{comb} \rho_{comb} lag_1 X_{n-1} - A_{comb} \rho_{comb} lag_2 X_{n-2} - \dots \quad (2)$$

В левой части получилось выражение для темпов прироста процесса, обозначим его:

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = \omega_{n+1}. \quad (3)$$

Тогда выражение (2) с учетом обозначения (3) представляет собой описание зависимости изменения темпов прироста нелинейного процесса. Эти зависимости для анализируемого временного интервала можно представить в виде линейной модели регрессионного анализа, описывающей тенденцию изменения темпов прироста процесса. Такая модель получена на основе базового отображения (1):

$$\omega_{n+1} = A_{comb} K_{comb} reg - A_{comb} reg \rho_{comb} X_n - A_{comb} reg \rho_{comb} lag_1 X_{n-1} - A_{comb} reg \rho_{comb} lag_2 X_{n-2} - \dots + e_n, \quad (4)$$

где $A_{comb} reg$ — средняя за рассматриваемый временной интервал интенсивность процесса², $K_{comb} reg$ — среднее значение ограничения процесса, а e_n — случайное возмущение. Переход от отображения (2), полученного преобразованием базового отображения (1), к модели регрессионного анализа (4) заключается не только в использовании новых переменных с дополнительным индексом. Этот переход позволяет установить взаимосвязь параметров базовых нелинейных моделей и коэффициентов регрессии. На основе эмпирических данных мы можем получить оценки коэффициентов в линейной модели регрессионного анализа:

$$\omega_{n+1} = const_{comb} + \zeta_{comb} X_n + \zeta_{comb} lag_1 X_{n-1} + \zeta_{comb} lag_2 X_{n-2} + \dots + \xi_{n comb}, \quad (5)$$

где ζ — коэффициенты линейной модели регрессионного анализа.

² В настоящей статье средние значения параметров нелинейных отображений, оценки которых получены с помощью методов регрессионного анализа, снабжены дополнительным индексом «reg».

Регрессионные модели (4) и (5) оказываются эквивалентными, их коэффициенты связаны соотношениями: const_{comb} это оценка $A_{comb\ reg} K_{comb\ reg}$ и т. д. Точность предлагаемой модели в описании эмпирических данных с поправкой на объем исходной выборки и сложность модели (число неизвестных параметров) можно оценить значением скорректированного коэффициента детерминации R^2 .

Казалось бы, что нового принесет подход, когда в качестве основного рабочего инструмента у нас выступает линейная модель регрессионного анализа? Но теперь, с учетом базовой модели, все коэффициенты линейной регрессии оказываются взаимосвязаны в рамках нелинейной базовой модели, позволяющей интерпретировать результаты расчетов в категориях нелинейной динамики. В качестве первого шага в интерпретации коэффициентов регрессии следует обратить внимание на то, что значение константы в регрессионной модели является оценкой произведения интенсивности процесса на его ограничение $A_{comb\ reg} K_{comb\ reg}$. Это произведение можно рассматривать как оценку нормированной интенсивности процесса. Нормировка заключается в делении левой и правой частей отображения (1) на ограничение процесса K_{comb} , что делает значение ограничения процесса в новой записи равным единице, а значения самого процесса выражаются в долях ограничения. Это позволяет сопоставлять по нормированной интенсивности процессы с разными значениями ограничений. Кроме того, динамика очень многих нелинейных отображений определяется значением нормированной интенсивности, например, применимая для многих классов отображений теория универсальности Фейгенбаума базируется на значениях нормированных интенсивностей [11, 13].

Свойствам нелинейных отображений и методам их исследования посвящены многие работы, например, [11–13]. Отметим в качестве классической работы статью [13], результаты которой привели к созданию «теории универсальности», обобщающей свойства многих классов нелинейных систем. Это позволяет применять в анализе как простых, так и сложных систем одинаковые базовые модели. Однако, в силу многообразия нелинейных отображений, свойства даже достаточно простых отображений не всегда исследованы. В ходе анализа реальных процессов может возникнуть необходимость применять отображения с неизвестными свойствами. Общие подходы к анализу свойств отображений описаны в работах [2, 14].

В зависимости от знаков коэффициентов регрессии модель (5) может описывать как влияние положительных для развития процесса факторов, обеспечивающих больший рост благодаря умень-

шению влияния ограничений, так и обратный эффект. В нашем анализе факторами служат данные о предыстории (лаговые значения процесса). Знаки коэффициентов слагаемых, связанных со значениями процесса, несут информацию о соотношениях благоприятных и неблагоприятных для динамики выручки факторов, а сравнение значений регрессионных стандартизированных коэффициентов (бета-коэффициентов) позволяет оценивать значимости воздействующих на процесс факторов.

Воспользуемся описанным подходом для анализа динамики выручки российских компаний. На основании данных, приведенных в табл. 1, рассчитаны темпы прироста медиан выручки в каждой группе, значения которых также использовались в регрессионном анализе, они приведены в табл. 2.

Коэффициенты регрессионных моделей (4) определяются для каждой группы в соответствии с данными, приведенными в табл. 1 и 2.

Как показали расчеты альтернативных моделей регрессионного анализа для всей совокупности групп компаний, оптимальными по структуре оказались линейные модели регрессионного анализа, включающие в себя лишь текущее и предыдущее значения выручки:

$$\omega_{n+1} = \text{const}_{comb} + \zeta_{comb} X_n + \zeta_{comb\ lag1} X_{n-1} + \xi_{n\ comb} \quad (6)$$

Оценить точность регрессионных моделей, соответствующих структуре (6), для каждой группы можно по данным табл. 3, где приведены оценки коэффициента детерминации «скорректированный R^2 ». Там же приведены результаты дисперсии

Таблица 2

Темпы прироста медиан выручки по группам компаний

Группы компаний с темпами прироста, проценти	2011 г.	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.
менее 25-го	0,1	0	-0,06	-0,08	-0,18
30–5	0,16	0,03	-0,02	-0,04	-0,1
35–10	0,18	0,06	0,01	-0,01	-0,06
40–15	0,2	0,08	0,02	0,01	-0,03
45–20	0,22	0,09	0,04	0,03	0
50–25	0,25	0,11	0,06	0,06	0,01
55–30	0,27	0,13	0,07	0,08	0,03
60–35	0,31	0,14	0,08	0,1	0,05
65–40	0,34	0,17	0,1	0,11	0,06
70–45	0,38	0,19	0,11	0,13	0,09
75–50	0,45	0,21	0,13	0,16	0,11
80–55	0,53	0,24	0,16	0,18	0,14
85–60	0,6	0,3	0,19	0,2	0,16
90–65	0,78	0,35	0,23	0,22	0,2
95–70	1,07	0,44	0,28	0,26	0,25
более 75-го	1,61	0,59	0,33	0,34	0,3

онного анализа по проверке гипотезы, что рассматриваемая в каждой группе зависимость линейная. Гипотеза проверяется на основании F -критерия, по значениям которого оценивается значимость нулевой гипотезы об отсутствии линейной зависимости.

Оценки «скорректированный R^2 » для всех групп компаний заключены в диапазоне 0,791...0,996. Такие значения говорят о высокой объясняющей способности предлагаемых моделей регрессионного анализа на базе комбинированного отображения (6). Представленные результаты расчетов дисперсионного анализа по проверке гипотезы о линейности регрессионных моделей (F -критерий и оценка значимости нулевой гипотезы об отсутствии линейной зависимости) позволяют утверждать (с учетом сильной взаимосвязанности данных по группам компаний), что применимость линейной модели регрессионного анализа для любой из групп допустима: значимость нулевой гипотезы в каждой группе мала, и линейные модели обладают достаточно высокой аппроксимирующей точностью.

Таким образом, тип моделей регрессионного анализа говорит нам о том, что для интерпретации их коэффициентов целесообразно воспользоваться базовой моделью в виде двумерного нелинейного отображения. Чтобы продолжить анализ в категориях нелинейной динамики с помощью регрессионных коэффициентов нам необходимо знать свойства двумерных отображений и как оценить эти свойства через коэффициенты регрессионных моделей.

Таблица 3

Оценки коэффициентов детерминации и значимости нулевой гипотезы об отсутствии линейной зависимости для регрессионных моделей каждой из групп

Группы компаний с темпами прироста, проценты	Скорректированный R^2	F -критерий	Значимость нулевой гипотезы
менее 25-го	0,85	12,374	0,075
30—5	0,804	9,207	0,098
35—10	0,916	22,929	0,042
40—15	0,971	67,294	0,015
45—20	0,996	514,341	0,002
50—25	0,984	127,939	0,008
55—30	0,955	43,194	0,023
60—35	0,896	18,264	0,052
65—40	0,899	18,855	0,05
70—45	0,866	13,898	0,067
75—50	0,791	8,587	0,104
80—55	0,805	9,255	0,098
85—60	0,843	11,762	0,078
90—65	0,855	12,83	0,072
95—70	0,876	15,082	0,062
более 75-го	0,848	12,136	0,076

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ СВОЙСТВ ДВУМЕРНОГО КОМБИНИРОВАННОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

На основании оценок, полученных в ходе регрессионного анализа, мы определили, что для анализа динамики выручки в базовом отображении (1) необходимо учитывать только текущее и лаговое значения. Рассмотрим, как можно определить свойства оптимального для нашего анализа базового отображения и оценить их на основании полученных значений коэффициентов регрессионных моделей. Базовым для регрессионной модели (6) служит комбинированное отображение в виде:

$$X_{n+1} = X_n + X_n A_{comb} (K_{comb} - \rho_{comb} X_n - \rho_{comb lag} X_{n-1}), \quad (7)$$

где A_{comb} — интенсивность комбинированного отображения, K_{comb} — ограничение комбинированного отображения, ρ_{comb} — масштабирующий коэффициент текущего значения процесса, $\rho_{comb lag}$ — масштабирующий коэффициент предыдущего значения процесса.

При ненулевых масштабирующих коэффициентах свойства двумерного комбинированного отображения сильно отличаются от свойств одномерных отображений как Ферхюльста, так и логистического с запаздыванием, несмотря на то, что его можно трактовать как комбинацию этих двух простых отображений. Свойства двумерного комбинированного отображения не исследовались. Поэтому рассмотрим его основные свойства в общем виде. Одна из важных особенностей любого отображения состоит в наличии особых (неподвижных) точек, в которых процессы останавливаются. Значения координат особых точек соответствуют значениям величины, характеризующей процесс — в нашем случае значениям выручки. Далее для краткости будем говорить о значениях особых точек. Значения особых (неподвижных) точек в нашем анализе динамики выручки можно трактовать как «потенциал развития компании» или, в общем виде, как «цели процесса», кроме того, представляют интерес оценки устойчивости особых точек.

Будем применять общие методы исследования свойств нелинейных отображений, изложенные в работах [2, 14]. Для этого отображение (7) удобно представить в двумерном виде:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + X_n A_{comb} \times \\ \times (K_{comb} - \rho_{comb} X_n - \rho_{comb lag} Y_n), \\ Y_{n+1} = X_n. \end{cases} \quad (8)$$



Свойства особых точек комбинированного отображения (8) будем определять в соответствии с методами, применимыми для двумерных отображений. На первом этапе определяются значения особых (неподвижных) точек. Для нахождения особых точек подставим в систему отображений (8) условия остановки процессов $X_i^* = X_{n+1} = X_n$ и $Y_i^* = Y_{n+1} = Y_n$, в результате получим:

$$\begin{cases} X_i^* A_{comb} (K_{comb} - \rho_{comb} X_i^* - \rho_{comb} lag Y_i^*) = 0, \\ Y_i^* = X_i^*. \end{cases} \quad (9)$$

Решая систему уравнений (9), получаем значения двух особых точек: одна из них нулевая, т. е. $X_1^* = 0$ и $Y_1^* = 0$; значения другой:

$$X_2^* = \frac{K_{comb}}{\rho_{comb} + \rho_{comb} lag} \quad \text{и} \quad Y_2^* = \frac{K_{comb}}{\rho_{comb} + \rho_{comb} lag}. \quad (10)$$

Вполне естественно, что для комбинированного отображения (7) значения особых точек X_i^* и Y_i^* одинаковы, ведь в особой точке текущее и лаговое значения совпадают. Для понимания характера динамики процессов крайне важно знать поведение процесса вблизи особой точки. Если процесс, находясь вблизи особой точки, на каждом шаге приближается к ней, то особая точка устойчива. Термин «особая точка и ее устойчивость», вообще-то подразумевает поведение процесса за бесконечное время, но окрестности особой точки реальные процессы могут достигать быстро, а вся дальнейшая динамика в районе особой точки определяется ее устойчивостью.

Для анализа устойчивости особых точек необходимо составить матрицу Якоби системы уравнений (8):

$$\begin{vmatrix} \left(\begin{array}{cc} 1 + A_{comb} K_{comb} - & -A_{comb} \rho_{comb} lag X \\ -2A_{comb} \rho_{comb} X - A_{comb} \rho_{comb} lag Y & \end{array} \right) & \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Область устойчивости особых точек удобно представить в осях якобиана J и следа S матрицы Якоби в виде треугольника устойчивости [14]. Это графическое представление универсального сценария устойчивости двумерных отображений. Координаты вершин треугольника: нижняя вершина $J = -1$, $S = 0$; верхняя левая $J = 1$, $S = -2$; верхняя правая $J = 1$, $S = 2$. Треугольник определяет зону устойчивости особых точек. Выход за левую границу треугольника соответствует потере устойчивости, приводящей к колебаниям, либо переход к аттрактору «бесконечность» (это так назы-

ваемый жесткий переход через мультипликатор, равный -1). Выход за правую границу треугольника устойчивости соответствует смене особой точки. Выход за верхнюю границу приводит к сложной динамике, в частности, к квазигармоническим колебаниям.

Для комбинированного отображения (10) якобиан

$$J = A_{comb} \rho_{comb} lag X, \quad (11)$$

а след

$$S = 1 + A_{comb} K_{comb} - 2A_{comb} \rho_{comb} X - A_{comb} \rho_{comb} lag Y. \quad (12)$$

Для первой, нулевой особой точки, подставив ее значения $X_1^* = 0$ и $Y_1^* = 0$, получим: $J_1 = 0$, $S_1 = 1 + A_{comb} K_{comb}$. Такие значения якобиана соответствуют вырождению треугольника устойчивости в отрезок прямой. Поэтому условие устойчивости нулевой особой точки имеет вид:

$$|1 + A_{comb} K_{comb}| < 1 \quad \text{или} \quad -2 < A_{comb} K_{comb} < 0.$$

Рассмотрим теперь ситуацию со второй, ненулевой особой точкой (10).

Подставляя выражения для второй особой точки в формулы (11) и (12), получим:

$$J_2 = \frac{\rho_{comb} lag}{\rho_{comb} + \rho_{comb} lag} A_{comb} K_{comb},$$

$$S_2 = 1 + A_{comb} K_{comb} - 2 \frac{\rho_{comb}}{\rho_{comb} + \rho_{comb} lag} A_{comb} K_{comb} - \frac{\rho_{comb} lag}{\rho_{comb} + \rho_{comb} lag} A_{comb} K_{comb}.$$

Посмотрим, как на основе значений коэффициентов регрессии можно определить значения координат особых точек и их устойчивость. С учетом соотношений коэффициентов моделей (4) и (5) можно записать равенства коэффициентов регрессии и оценок средних параметров базовых моделей: $\text{const}_{comb} = A_{comb reg} K_{comb reg}$; $\varsigma_{comb} = -A_{comb reg} \rho_{comb}$; $\varsigma_{comb lag} = -A_{comb reg} \rho_{comb lag}$. С учетом этих равенств якобиан и след матрицы могут быть выражены через коэффициенты регрессии, это позволяет определять значения координат особых точек и анализировать их устойчивость непосредственно по полученным коэффициентам регрессии. Для первой, нулевой особой точки, $X_1^* = 0$:

$$J_1 = 0 \quad \text{и} \quad S_1 = 1 + A_{comb} K_{comb} = 1 + \text{const}_{comb}. \quad (13)$$

Для второй, ненулевой особой точки:

$$X_2^* = \frac{K_{comb}}{\rho_{comb} + \rho_{comb\ lag}} = -\frac{\text{const}_{comb}}{\zeta_{comb} + \zeta_{comb\ lag}}, \quad (14)$$

$$J_2 = \frac{\rho_{comb\ lag}}{\rho_{comb} + \rho_{comb\ lag}} A_{comb} K_{comb} = \frac{\zeta_{comb\ lag}}{\zeta_{comb} + \zeta_{comb\ lag}} \text{const}_{comb}, \quad (15)$$

$$S_2 = 1 + \text{const}_{comb} - 2\frac{\zeta_{comb}}{\zeta_{comb} + \zeta_{comb\ lag}} \text{const}_{comb} - \frac{\zeta_{comb\ lag}}{\zeta_{comb} + \zeta_{comb\ lag}} \text{const}_{comb}. \quad (16)$$

Таким образом, по значениям коэффициентов регрессии можно рассчитать значения особых точек, якобиана, следа матрицы и оценить устойчивость особых точек. Кроме того, появляется возможность моделировать дальнейшее развитие процесса, используя реальные значения процесса и параметры нелинейной базовой модели, определенные по коэффициентам регрессии.

3. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА КОМПАНИЙ

В табл. 4 приведены значения коэффициентов линейных регрессионных моделей для каждой из групп и оценки значений ненулевых особых точек, рассчитанных по формуле (14). Оценки устойчивости получены путем расчета якобиана и следа

матрицы по формулам (15) и (16). Для группы компаний с темпами прироста «менее 25-го перцентиля», как будет показано ниже, целесообразно рассматривать модель без константы (значение константы оказывается статистически незначимым и выпадающим из общего ряда оценок для других групп). Отсутствие константы в модели для этой группы соответствует движению типичной компании к нулевой особой точке. Расчеты для такого случая осуществлялись по формуле (13).

Полученные результаты позволяют оценить взаимосвязанность однотипных коэффициентов регрессионных моделей различных групп компаний. В качестве первого шага оценим взаимосвязанность значений констант. Оценки констант регрессионных моделей в рамках предлагаемого подхода являются и оценками нормированных интенсивностей процессов, их значения можно сравнивать между собой независимо от уровня ограничений процессов. В исходном отображении (7) выражение нормированной интенсивности определяется как $A_{comb} K_{comb}$. Переходя к средним значениям за рассматриваемый период $A_{comb\ reg} K_{comb\ reg}$ получаем оценку средней нормированной интенсивности процесса, описываемого моделью регрессионного анализа.

На рис. 1 представлен график изменения констант в регрессионных моделях при переходе от группы самых быстрорастущих компаний к группам с отрицательными темпами прироста выручки (по оси абсцисс отложены соответствующие этим группам процентилю).

Таблица 4

Коэффициенты регрессионных моделей, оценки значений особых точек и их устойчивости для каждой из групп компаний

Группы компаний с темпами прироста, процентилю	const _{comb}	Коэффициент		Значение X_2^* , млн руб.	Устойчивость особой точки
		при текущем значении ζ_{comb}	при предыдущем значении $\zeta_{comb\ lag}$		
менее 25-го	0(-0,307)	0,0017	-0,0013	$X_i^* = 0$	на границе устойчивости
30—5	0,516	0,0004	-0,0014	489,6	устойчива
35—10	0,703	-0,0006	-0,0008	500,1	
40—15	0,786	-0,0014	-0,0001	511,6	
45—20	0,787	-0,0019	0,0004	536,5	
50—25	0,775	-0,0022	0,0008	559,2	
55—30	0,748	-0,0024	0,0011	597	неустойчива
60—35	0,75	-0,0025	0,0012	609,6	
65—40	0,735	-0,0026	0,0015	634,9	
70—45	0,731	-0,0027	0,0016	657,9	
75—50	0,759	-0,0031	0,002	700,8	
80—55	0,814	-0,0036	0,0025	743,8	
85—60	0,855	-0,0042	0,0032	839,7	
90—65	1,007	-0,0054	0,0043	915,8	
95—70	1,225	-0,0077	0,0065	1092,5	
более 75-го	1,603	-0,0116	0,0108	2014,2	

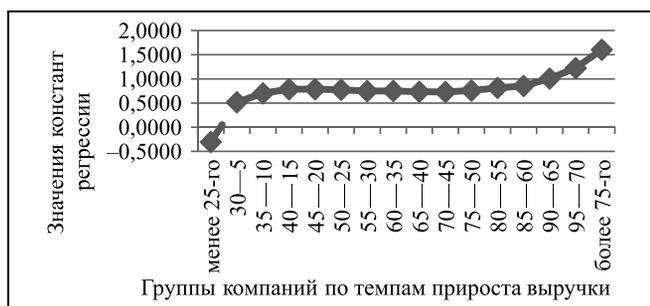


Рис. 1. Значения констант в регрессионных моделях, характеризующих средние нормированные интенсивности процессов изменения выручки для различных групп компаний

Видно, что значения констант лежат на достаточно плавной кривой, за исключением константы регрессионной модели группы компаний с темпами прироста «менее 25-го перцентиля». Обособленность параметра этой группы компаний при визуальном анализе графика подтверждается и статистической проверкой гипотез о равенстве констант нулю: результаты ее показывают, что ненулевыми можно рассматривать все значения констант, за исключением константы в модели группы «менее 25-го перцентиля». Для регрессионной модели этой группы компаний значимость гипотезы о равенстве константы нулю оказалась высокой (0,44), целесообразно рассматривать в дальнейшем именно нулевое значение константы. Равенство константы нулю говорит о том, что единственная модель с параметрами группы «менее 25-го перцентиля» имеет нулевую особую точку — это модель исчезающих компаний. Существование такой непохожей на все остальные группы порождает ряд особенностей в дальнейшем анализе: коэффициенты регрессионной модели для группы «менее 25-го перцентиля» нельзя сравнивать с другими, так как модели оказываются разными по типу, кроме того, нельзя сравнивать и коэффициенты детерминации этой группы с другими. В дальнейшем сравнительный анализ параметров для разных групп будет проводиться без группы «менее 25-го перцентиля».

Значения коэффициентов регрессионных моделей при текущем значении процессов ζ_{comb} и при предыдущем значении $\zeta_{comb\ lag}$ представлены на рис. 2.

На рис. 2 видны достаточно плавные изменения значений регрессионных коэффициентов. Плавности изменения оценок констант и коэффициентов от группы к группе свидетельствуют о применимости метода для различных типов динамики, так как в совокупности российских компаний есть группы с разной динамикой. Коль скоро значения регрессионных коэффициентов демонстрируют взаимосвязанность в виде плавных изменений

для соседних групп, то есть все основания продолжить анализ в оценках параметров нелинейных отображений. Дальнейшие возможности интерпретации результатов регрессионного анализа появляются с применением новых оценок, относящихся к моделям нелинейных процессов, полученных расчетным путем на основе регрессионных коэффициентов. Именно это переход в анализе моделей регрессии был бы невозможен без нелинейных базовых моделей.

Рассмотрим график зависимости оценок значений особых точек, рассчитанных по формуле (14), от значений нормированной интенсивности (это значения констант в регрессионных моделях), приведенный на рис. 3. Он построен на основании данных табл. 4. Значения особых точек для каждой из групп компаний можно рассматривать как «оценки потенциальных возможностей роста».

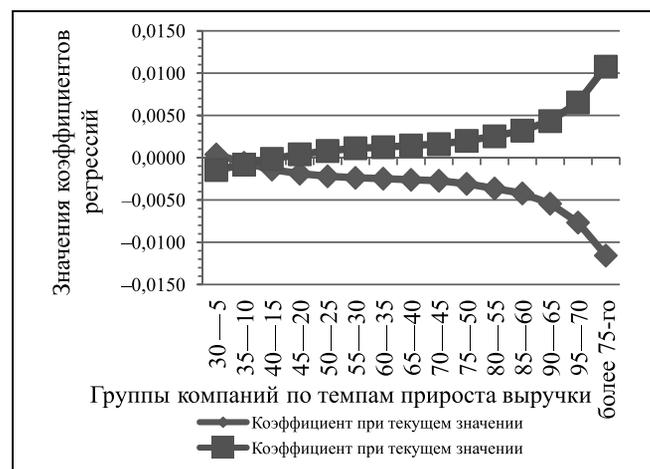


Рис. 2. Значения коэффициентов регрессионных моделей при текущем значении процессов (ζ_{comb}) при предыдущем значении ($\zeta_{comb\ lag}$) для различных групп компаний (значения коэффициентов модели группы компаний «менее 25-го перцентиля» не представлены)

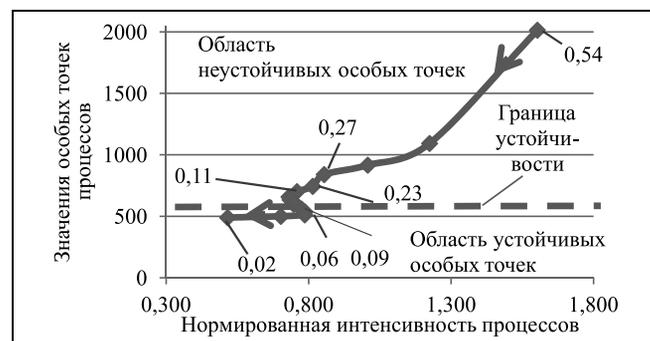


Рис. 3. Зависимость оценок значений особых точек (потенциалов роста выручки) от нормированной интенсивности нелинейных процессов: стрелками обозначены направления уменьшения темпов прироста выручки

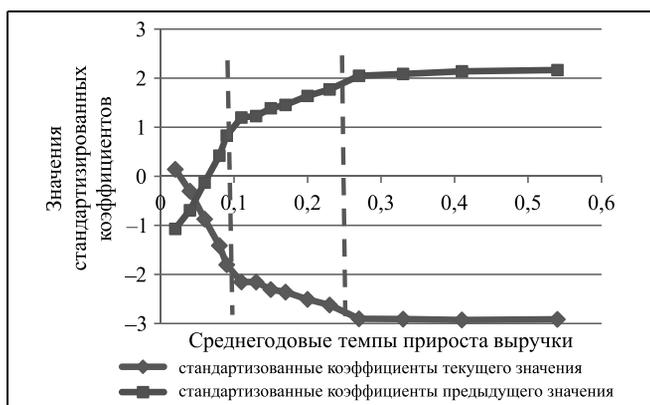


Рис. 4. Значения стандартизованных коэффициентов регрессионных моделей для групп компаний в зависимости от среднегодовых темпов прироста: точка, соответствующая группе «более 75-го перцентиля» — крайняя справа, точка, соответствующая группе «30—5 перцентилей» — крайняя слева; штриховые вертикальные линии разделяют области качественно однородных структур коэффициентов (с примерно линейными зависимостями значений стандартизованных коэффициентов от среднегодовых темпов прироста)

Кроме того, на кривой отмечены среднегодовые темпы прироста выручки для различных групп компаний. Уменьшение значений среднегодовых темпов прироста соответствует последовательным переходам к менее динамичным группам (направления переходов отмечены стрелками): значение 0,54 соответствует среднегодовым темам прироста группы «более 75-го перцентиля»; значение 0,02 — группе «30—5 перцентилей». Дальнейшее уменьшение темпов прироста менее 0,02 соответствует развитию процесса к нулевой особой точке. На рисунке показана также граница устойчивости особых точек.

Данный график можно рассматривать как качественную картину нескольких этапов жизненного цикла типичных компаний российского бизнеса (с важной оговоркой: при неизменности условий развития), описываемую с позиции нелинейных процессов. Для более четкой классификации компаний воспользуемся другими результатами регрессионного анализа: рассмотрим значения стандартизованных коэффициентов (бета-коэффициентов) в зависимости от среднегодовых темпов прироста выручки для каждой из групп компаний, они представлены на рис. 4. Переход в анализе регрессионных моделей к стандартизованным коэффициентам необходим для возможности их сравнения между разными группами компаний.

На рис. 4 отчетливо выделяются три совокупности значений стандартизованных коэффициентов моделей — границы между ними обозначены штриховыми вертикальными линиями. Они отражают разные механизмы прироста выручки компаний. В причинах столь яркого разделения

стандартизованных коэффициентов моделей в дальнейшем еще предстоит разобраться, но эффект безусловно выражен.

К первой совокупности, включающей примерно 40 % российских компаний, относятся компании со среднегодовыми темпами прироста выручки не менее 0,27. В этой совокупности по мере уменьшения темпов прироста, стандартизованные коэффициенты моделей уменьшаются незначительно. Следует обратить внимание, что полученная в результате анализа верхняя граница темпов прироста выручки совокупности быстрорастущих компаний, составляющей 56 % общего числа компаний, близка к аналогичной границе так называемых «газелей», для которых темпы прироста должны быть 30 % и более в течение пяти лет [15], но если взять для «газелей» оценки средних темпов прироста, то они оказываются близки к рассматриваемым значениям. Возвращаясь к графикам на рис. 4, можно сказать, что после кризиса 2008 г. примерно 40 % российских компаний начали быстро расти — они относятся к первой совокупности компаний. Такое заключение можно сделать с учетом, что темпы прироста выручки компаний оценивались за период с 2010 по 2015 г. У второй совокупности моделей по мере уменьшения темпов прироста значения стандартизованных коэффициентов уменьшаются быстрее, чем у первой. Ко второй совокупности относятся примерно 30 % общего числа компаний. Это компании со среднегодовыми темпами прироста от 0,23 до 0,11. Механизм роста выручки этих компаний принципиально отличается от быстрорастущих компаний. Эти две совокупности моделей объединяет только то, что они имеют неустойчивые особые точки. Третья совокупность моделей соответствует наименее динамичным компаниям. Она начинается со среднегодовых темпов прироста 0,09 до 0,02, к ней относятся примерно 25 % компаний. В этой совокупности наиболее сильные изменения значений нормированных коэффициентов в зависимости от среднегодовых темпов прироста выручки. Граница устойчивости особых точек проходит между аналогичными границами второй и третьей совокупностей моделей. Устойчивыми оказываются только особые точки моделей третьей совокупности. Интересно, что область устойчивости начинается с темпов прироста 0,09, которые близки к средней инфляции за анализируемый период. Можно считать, что компании этой совокупности с поправкой на инфляцию имеют нулевые или отрицательные темпы прироста.

Итак, перед нами три типа динамики выручки компаний, которые можно рассматривать как соответствующие разным стадиям жизненного цикла компаний при условии неизменности условий их развития. Четвертая группа компаний на графике не

показана: у нее принципиально другая модель динамики — с нулевой особой точкой. С учетом перекрытия данных в группах можно оценить, что такие компании составляют около 5 % от общего числа, их темпы прироста выручки менее 5-го процентиля.

Данные о выручке российских компаний за период с 2009 по 2015 г. позволяют утверждать, что существует четыре типичных варианта изменения выручки компаний. Причем между этими вариантами существуют достаточно четкие границы, а сами варианты сильно отличаются между собой разным проявлением влияния текущей ситуации и предыстории. Кроме того, в каждом из вариантов по-разному проявляется зависимость между темпами прироста выручки и ее потенциалом роста.

Возвращаясь к рис. 3, можно сказать, что первая часть жизненного цикла компаний начинается с очень высоких темпов прироста выручки, порождаемых удачным рыночным решением (это самая верхняя точка на кривой), но по мере занятия рыночной ниши темпы прироста выручки падают. На графике можно выделить три этапа развития компаний, соответствующие трем совокупностям однородных моделей, рассмотренным выше. Каждый этап обозначен через средние темпы прироста выручки в 2010—2015 гг., однако для другого временного интервала цифры будут несколько отличаться, хотя качественно картина жизненного цикла будет той же. Подтверждения такого взгляда на качественную однотипность развития успешных компаний вне зависимости от временного интервала, даны в статье [15], где приведен совпадающий в деталях обобщенный портрет жизненного цикла быстрорастущих компаний, так называемых «газелей», полученный на основании данных уже с 2003 по 2015 г.

Первый этап наиболее быстрого роста характеризуется тем, что значения координат особых (неподвижных) точек (потенциальных возможностей роста) сильно зависят от значения нормированной интенсивности и темпов прироста, причем с уменьшением их значений уменьшаются и значения особых точек. Кроме того, все особые точки этой совокупности компаний неустойчивые. Исходя из особенностей значений особых точек, этот этап можно трактовать как «этап сильно изменяющихся оценок потенциала развития». Такой же этап проходят и успешные стартапы, и именно сильной зависимостью оценок потенциала роста от изменяющихся темпов прироста объясняется затруднения в оценках их истинного потенциала развития. Второй этап характеризуется тем, что по мере уменьшения темпов прироста оценки нормированной интенсивности незначительно растут, а значения особых точек уменьшаются, но не так сильно, как на первом этапе. Этот этап можно охарактеризовать как «динамика заполнения реаль-

ных рыночных ниш» или «проявление реальных возможностей роста». Третий этап характеризуется тем, что при значительном изменении нормированных интенсивностей значения особых точек меняются незначительно. Это «этап заполненных сужающихся рыночных ниш». Можно сказать, что компании этой совокупности находятся в некой «зоне застоя», которая характеризуется и малым изменением темпов прироста. Причем этот прирост меньше инфляции, фактически это деградация. Три группы компаний из этой совокупности отличаются от остальных и знаками коэффициентов регрессионных моделей: стандартизированные коэффициенты предыдущих значений становятся отрицательными. Это говорит о том, что прошлое становится для этих компаний отрицательным фактором, ухудшающим рост. Ну а за точкой «0,02» динамика выручки качественно меняется, начинается критический, четвертый этап развития — для этой совокупности моделей компаний особая точка становится нулевой. На этом этапе у компании есть два варианта дальнейшей судьбы: либо разориться, либо найти новое эффективное решение развития и вновь перейти на этап высоких темпов прироста. И многие компании, относящиеся сейчас к группам быстрого роста, успешно прошли этот этап после кризиса 2008 г. Переходы к быстрому росту благодаря удачным решениям могут происходить на любом этапе, но на четвертом этапе они необходимы для дальнейшего выживания.

Рассматривая модели динамики выручки реальных компаний, мы можем классифицировать их по принадлежности к определенному этапу развития и оценить их перспективы при допущении о неизменности условий развития.

Вполне понятно, что картину жизненного цикла для разных временных отрезков можно рассматривать только на качественном уровне. Если количественно получаемые оценки будут меняться от года к году, то на качественном уровне сценарий жизненного цикла остается неизменным даже в кризис. Зададимся вопросом: «Какой сценарий развития будет типичным для группы наиболее быстрорастущих компаний?» Попробуем увидеть его на рис. 3. Для этой группы оценки значений особых точек, которые можно трактовать как «потенциальные цели развития компаний», уменьшаются по мере уменьшения темпов прироста. Но, поскольку темпы прироста компаний этой группы неизбежно начнут уменьшаться при неизменности условий, то будут уменьшаться и значения особых точек — компании в своем развитии начнут «снижать» свои «оценки потенциальных возможностей». Этот эффект хорошо виден в табл. 2. Кроме того, начнут уменьшаться и нормированные интенсивности процессов. Это уменьшение вызовет переход рассматриваемой компании во вторую, более низ-

кую по темпам прироста совокупность — «реальных рыночных ниш». После пребывания во второй совокупности (время этого пребывания может быть разным) компания, при неизменных условиях, перейдет в «совокупность заполненных рыночных ниш». В конце концов, если менеджмент не будет ничего менять, компания попадает на траекторию, приводящую к нулю. Если ничего не изменится, то выручка компании станет стремиться к нулевой. Но ситуация, когда в компании ничего не меняется, не единственная. На любом из рассмотренных этапов компания может провести изменения в развитии, выйдя на новую рыночную нишу, которой соответствуют высокие темпы прироста выручки, что соответствует попаданию в совокупность «сильно изменяющегося потенциала развития» и процесс скольжения вниз по кривой начнется вновь.

Подобный рассмотренному выше подход можно применять и в более сложных случаях для построения альтернативных моделей регрессионного анализа другого класса. Например, воздействие ограничений может проявляться в виде влияния на рассматриваемый процесс других процессов (одним из таких процессов может быть и управляющий процесс), назовем такое отображение гибридным:

$$X_{n+1} = X_n + X_n A_{hib} (K_{hib} - \rho_{hibx} X_n - \rho_{hiby} Y_n - \rho_{hibz} Z_n - \dots),$$

где A_{hib} — интенсивность гибридного процесса, K_{hib} — ограничение процесса, $\rho_{hibx} X_n$, $\rho_{hiby} Y_n$ и $\rho_{hibz} Z_n$ — значения нескольких процессов, с соответствующими масштабирующими коэффициентами. С математической точки зрения комбинированное отображение можно рассматривать как частный случай гибридного отображения, но с позиций содержательного описания процесса и интерпретации получаемых результатов лучше их разделять.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для анализа эмпирических данных нелинейных процессов, развивающихся в условиях ограничений, предложен синтез методов регрессионного анализа и нелинейной динамики, позволяющий переходить от значений коэффициентов линейных регрессионных моделей к оценкам параметров нелинейных отображений. Это обеспечивает более глубокий анализ реальных процессов путем применения категорий нелинейной динамики. Эффективность метода показана на примере анализа данных о выручке всех российских компаний крупного и среднего бизнеса за период с 2009 по 2015 г. На основании этих данных выявлены три типичных варианта изменения выручки компаний, отличающихся влиянием текущего со-

стояния и предыстории. Это позволяет глубже понять механизмы развития компаний в зависимости от темпов прироста выручки (сильное позитивное воздействие предыстории для быстрорастущих фирм и еще более сильное, но негативное влияние предыстории для стагнирующих компаний). Также получена модель жизненного цикла компаний, позволяющая классифицировать конкретные компании по этапам развития. Перспективным представляется применение такого подхода для аналогичного анализа постоянно обновляемых новых годовых данных о компаниях; более сложных моделей нелинейной динамики; анализа разнообразных социально-экономических процессов иной природы, чем популяционная динамика компаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шрагенхайм Э. Управленческие дилеммы: Теория ограничений в действии: пер. с англ. — М.: Альпина Бизнес Букс, 2007. — 288 с.
2. Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В. Введение в физику нелинейных отображений. — Саратов: Научная книга, 2010. — 134 с.
3. Подлазов А.В., Полунин Ю.А., Юданов А.Ю. Статистический анализ выручки крупных и средних российских компаний: препринт № 105. — М.: Институт прикладной математики РАН, 2015.
4. *Handbook of Time Series Analysis*. — Weinheim: Wiley-VCH, 2006. — 493 p.
5. Chakrabarti B.K., Chakraborti A., Chatterjee A. (Eds.). *Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives*. — Berlin: Wiley-VCH, 2006.
6. Shumway R.H.; Stoffer D.S. *Time Series Analysis and its Applications*. — Springer, 2011. — 596 p.
7. Горидько Н.П., Нижегородцев Р.М. Модели зависимости темпов инфляции от объема денежной массы: регрессионный анализ нелинейной динамики // *Экономическая наука современной России*. — 2013. — № 1 (60). — С. 39–46.
8. Kantz H., Schreiber T. *Nonlinear Time Series Analysis: 2 ed.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2003. — 388 p.
9. Huffaker R., Bittelli M., Rosa R. *Nonlinear Time Series Analysis with R*. — Oxford University, 2017. — 384 p.
10. Milas C., Rothman P., Van Dijk D. *Nonlinear Time Series Analysis of Business Cycles*. — Emerald Group Publishing Limited, 2010. — 108 p.
11. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику: изд. 3-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 256 с.
12. Пайген Х.-О., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: пер. с англ. — М.: Мир, 1993. — 176 с.
13. Фейгенбаум М.Ж. Универсальность в поведении нелинейных систем // *Успехи физических наук*. — 1983. — Т. 141, вып. 2.
14. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. Бифуркации отображений. — Саратов: Наука, 2012. — 196 с.
15. Полунин Ю.А., Юданов А.Ю. Российские быстрорастущие компании: испытание депрессией // *Мир новой экономики*. — 2016. — № 2. — С. 103–112.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Полунин Юрий Алексеевич — канд. техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ YPlnn@yandex.ru.

Поступила в редакцию 01.11.2017, после доработки 07.11.2018.
Принята к публикации 12.12.2018.