УДК 004.724.2 + 004.272.43

РАСШИРЕННОЕ МУЛЬТИКОЛЬЦО С ИНКРЕМЕНТИРОВАННЫМ ДИАМЕТРОМ

В.С. Подлазов

Рассмотрена задача одновременного повышения числа узлов и числа разных путей между ними (параллельности) системных сетей благодаря только адаптивной маршрутизации при минимальном увеличении диаметра сети. Задача решена для полного двумерного мультикольца экспериментальным путем. На основе экспериментальных результатов построено четырехмерное расширенное мультикольцо, содержащее существенно большее число узлов и имеющее большую параллельность, чем известные сети с одинаковой степенью сетевых узлов.

Ключевые слова: системная сеть суперкомпьютеров, экспериментальное исследование, полное мультикольцо, обобщенный гиперкуб, число узлов сети, параллельность сети, диаметр сети, пропускная способность и канальная отказоустойчивость сети.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа продолжает серию экспериментальных исследований [1—3] возможностей улучшения характеристик системных сетей путем минимальных изменений их структуры и/или условий функционирования.

Исследования ориентированы на системные сети с сетевыми узлами большой степени (48—64 порта) и с малым диаметром (3—4 шага) [4—8]. К таким сетям можно отнести сети суперкомпьютеров Black Widow (CRAY) [4], PERCS-P775 (IBM) [5] и XC30 (сеть Dragonfly — CRAY) [6, 7], а также сеть «Сплющенная бабочка» (Flattened Butterfly — CRAY) [8]. Все они содержат десятки тысяч сетевых узлов и имеют разные топологии — многокаскадной сети Клоза [4], двухуровневой иерархии полных графов [5] и обобщенного гиперкуба [6, 8]. При этом в сетях [5—8] к каждому сетевому узлу подсоединено несколько абонентов (процессоров).

Целью проводимых исследований [1—3] состоит в увеличении числа узлов сети и/или числа разных путей между узлами без изменения степени самих узлов. Улучшение этих характеристик системных сетей обеспечивает повышение производительности и отказоустойчивости суперкомпьютеров в целом. Исследования проводятся для так называемых полных мультиколец [9], которые по числу узлов и маршрутным свойствам изоморфны обобщенным гиперкубам [10—12].

Ранее [1, 2] автором решалась задача увеличения числа узлов и/или числа разных путей без изменения степени узлов и диаметра сети для двумерного и четырехмерного мультиколец только путем подбора длин шагов колец, составляющих мультикольцо. Такое мультикольцо было названо расширенным, и оно при диаметре в четыре шага может содержать десятки тысяч узлов. При этом число узлов оказалось в нем на 70 % больше, чем в аналогичном обобщенном гиперкубе, а число разных путей между любыми двумя узлами увеличилось с 1 до 9. Заметим, что эти результаты малоприменимы для обобщенного гиперкуба, так как их достижение нарушает форму гиперкуба.

В работе [3] рассматривалась задача нахождения максимального числа разных путей между узлами полного мультикольца или обобщенного гиперкуба с минимально увеличенным (инкрементированным) диаметром. Получены точные эмпирические формулы числа разных путей между узлами для сетей с разной степенью узлов и разного диаметра. Эти результаты применимы и для обобщенного гиперкуба.

В настоящей статье рассматривается возможность одновременного увеличения числа узлов и числа разных путей между узлам полного мультикольца средствами адаптивной маршрутизации в предположении минимального увеличения диаметра сети на один шаг при сохранении степени узлов. Сначала строится двумерное мультикольцо с инкрементированным диаметром и для него находятся числа узлов и числа разных путей при использовании узлов разной степени. Затем на базе этого мультикольца и двумерного расширенного мультикольца из работы [1] строится четырехмерное расширенное мультикольцо с инкрементированным диаметром и для него находятся числа узлов разных степеней и числа разных путей между ними.

1. ПОСТАНОВКА ЭКПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть имеется коммутируемое мультикольцо [9] с N узлами, каждый степени m, состоящее из набора m колец с шагами ${}^0S = 1$, ${}^1S$, ..., ${}^{m-1}S$, где ${}^iS \neq {}^jS$. По определению это означает, что каждому узлу инцидентны m дуг с длинами ${}^0S = 1$, ${}^1S$, ..., ${}^{m-1}S$, где длина дуги определяется разницей по mod$N$ номеров инцидентных ей узлов. Будем характеризовать такое мультикольцо набором длин дуг $C_m = ({}^0S, ..., {}^{m-1}S)$ и задавать его парой $\{N, C_m\}$.

Мультикольцо $\{N, C_m\}$ имеет диаметр D, если любые два узла соединяет хотя бы один путь длины, не большей D, т. е. содержащий не более D дуг. Эта сеть имеет внутреннюю параллельность σ, если между любыми двумя узлами существует не менее σ разных путей с длиной, не большей D.

Мы называем мультикольцо полным n-мерным k-ичным мультикольцом, если оно содержит $N = k^n$ сетевых узлов с $m = n(k - 1)$ дуплексными портами, объединенных m симплексными кольцами с шагами $C_{n(k-1)} = \{1, 2, ..., (k - 1); k, 2k, ..., (k - 1)k; ...; k^{n-1}, 2k^{n-1}, ..., (k - 1)k^{n-1}\}$, задаваемых значениями младших n разрядов в k-ичной системе счисления. Оно имеет диаметр $D_n = n$, т. е. в нем кратчайший путь между любыми двумя узлами проходится не более, чем по n дугам разных колец.

Теперь допустим как и в работе [3], что любой путь в мультикольце $\{k^n, C_{n(k-1)}\}$ может проходиться благодаря адаптивной маршрутизации не по n, а по $n + 1$ дугам, т. е. инкрементируем диаметр мультикольца на 1 до значения $D = n + 1$.

В данной работе ставится **задача экспериментального** нахождения двумерных мультиколец $\{R_2, C_{2(k-1)}\}$ с числом узлов $R_2 \geq N_2 = k^2$ и внутренней параллельностью σ_2 без изменения длин шагов в $C_{2(k-1)}$, но благодаря инкрементированию диаметра до значения $D_2 = 3$ и применения адаптивной маршрутизации.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Поставленная задача решалась в широком диапазоне изменения значений $\boldsymbol{k}$ посредством прямого подсчета числа разных путей с длиной не больше трех дуг. Метод подсчета состоит в следующем.

Мультикольцо $\{R_2, C_{2(k-1)}\}$ описывается таблицей смежности $TA(R_2, m)$ с $R_2 \geq N^2$ строками и $m + 1 = 2k - 1$ столбцами (табл. 1).

В каждой строке таблицы первый столбец содержит номер узла-приемника, в который входят дуги из узлов-источников, номера которых перечисляются в остальных ячейках строки. Каждый столбец в таблице $TA(R_2, m)$ представляет собой циклическую последовательность 1, 2, ..., R_2, смещенную вниз на длину дуги между источником и приемником. Поэтому значения в $C_{2(k-1)}$ задаются как разница номеров строк в таблице $TA(R_2, m)$ содержащих единицу в столбцах источников и столбце приемника.

Каждой таблице $TA(R_2, m)$ ставится в соответствие матрица смежности A приемников и источников размера $R_2 \times R_2$, в которой $A_{i,j} = 1$, если имеется дуга из $C_{2(k-1)}$ от источника j к приемнику i, и $A_{i,j} = 0$ в противном случае. На базе матрицы A строится матрица числа путей между узлами Ω размера $R_2 \times R_2$, которая задается как $\Omega = \sum_{i=1}^{3} A^i$. Для этих матриц номера узлов традиционно задаются значениями на единицу меньше, чем в таблице $TA(R_2, m)$, т. е. числами от 0 до $R_2 - 1$.

Таблица $TA(R_2, m)$ задает мультикольцо $\{R_2, C_{2(k-1)}\}$ с диаметром $D_2 = 3$ и внутренней параллельностью σ_2, если значение каждого элемента матрицы Ω удовлетворяет условию $\Omega_{i,j} \leq \sigma_2$.

Поставленная задача решается сначала для $\sigma_2 = 1$ посредством построения матриц A и Ω для каждого значения R_2 и нахождения максимального R_2, для которого $1 = \min\Omega_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq R_2 - 1$. Затем значения σ_2 последовательно увеличиваются на единицу до значения σ_{max}, и для каждого из них

Таблица 1

Таблица TA(10, 4) для двумерного троичного мультикольца с динами дуг C_4 = {1, 2, 3, 6}

Приемник	Источники			
1	10	9	8	5
2	1	10	9	6
3	2	1	10	7
4	3	2	1	8
5	4	3	2	9
6	5	4	3	10
7	6	5	4	1
8	7	6	5	2
9	8	7	6	3
10	9	8	7	4

Таблица 2

Экспериментальные результаты для числа измерений $R_2(k, \sigma_2)$

k	σ_2									
	1	2	3	$k-1$	k	$2(k-1)$	$2k$	$3(k-1)$	$3k$	σ_{max}
4	28	27	26	26	24	22	19	19	17	16
5	45	44	43	40	39	34	30	29	26	25
6	66	65	64	59	58	48	46	40	38	36
7	91	90	89	82	77	68	62	55	52	49
8	120	119	118	104	103	87	80	70	68	64
9	153	152	151	134	133	108	106	88	86	81
10	190	189	188	168	160	138	129	108	106	100
11	231	230	229	198	197	164	154	131	128	121
12	276	275	274	239	238	192	191	155	152	144
13	325	324	323	284	273	232	220	181	178	169

ищется максимальное R_2, для которого $\sigma_2 = \min\Omega_{i,j}$, $0 \le i,\ j \le R_2 - 1$.

3. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном параграфе рассматриваются экспериментальные результаты. В табл. 2 приведены экспериментальные результаты для значений числа узлов R_2 в зависимости от значений основания $\boldsymbol{k}$ и внутренней параллельности σ_2.

Значения параметра σ_{max} зависят от k. Поэтому они в явном виде не приведены, а их конкретные числовые значения даны в табл. 3, взятой из работы [3]. Отметим, что значения $N_2 = k^2$ в столбце σ_{max} связаны со значениями R_2 при $\sigma_2 = 1$ и $\sigma_2 = 3k$ выражениями $R_2(k, 1) = 2N_2 - k$ и $R_2(k, 3k) = N_2 + k - 4$, $k > 4$, соответственно.

Таблица 3

Экспериментальные результаты из [3] для значений параметра σ_{max}

k	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
σ_{max}	13	19	25	31	37	45	49	55	61	67

Таблица 4

Экспериментальные результаты для числа узлов $R_2(k, \sigma_2)$ в симметричных мультикольцах

k	σ_2							
	3	$k-1$	k	$2(k-1)$	$2k$	$3(k-1)$	$3k$	σ_{max}
5	45	40	40	35	32	29	26	25
7	91	84	77	70	63	60	55	49
9	153	135	135	108	108	95	91	81
11	231	198	198	165	154	138	133	121
13	325	286	273	234	221	189	183	169

Для практических целей удобно использовать симметричные полные мультикольца с встречными дугами одинаковой длины: $C_{2(k-1)} = \{\pm 1, \pm 2, ..., \pm(k-1)/2; \pm k, \pm 2k, ..., \pm k(k-1)/2\}$. Наличие симметричных мультиколец приводит к использованию в них дуплексных колец, что позволяет значительно сократить общую длину шагов, т. е. длину необходимых кабелей. Нетрудно видеть, что симметричные мультикольца существуют только для нечетных k. Проведенные эксперименты показали (табл. 4), что для симметричных мультиколец значения $R_2(k, \sigma_2)$ оказываются не меньше, чем для исходных мультиколец (см. табл. 2). Более того, максимальные значения R_2 в них достигаются уже при $\sigma_2 = 3$, т. е. они всегда содержат не менее трех разных маршрутов. Отметим, что симметричное двумерное мультикольцо наиболее близко по структуре к обобщенному двумерному гиперкубу.

4. РАСШИРЕННЫЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ МУЛЬТИКОЛЬЦА

На основе двумерных мультиколец можно построить четырехмерное мультикольцо с инкрементированным диаметром $D_4 = 5$. Младшие два измерения в нем образует симметричное мультикольцо из раздела 3 (см. табл. 4), а старшие два измерения — двумерное расширенное мультикольцо из работы [1]. Это делается точно также как при построении 4-мерного расширенного мультикольца [2]. Оба двумерных мультикольца имеют одинаковые степени узлов (число дуплексных портов), однако расширенное мультикольцо использует оптимально подобранные длины шагов колец и не использует инкрементирования диаметра. Использование расширенного мультикольца дает синер-

Таблица 5

Число узлов R_2^* и число разных путей σ_2^* в двумерном расширенном мультикольце

Число путей	m_2^*	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
	k_2^*	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sigma_2^* = 1$	R_2^*	13	21	35	51	67	90	112	135	163	189
$\sigma_2^* = 2$	R_2^*	7	16	27	42	56	75	96	120	144	168
$\sigma_2^* = 3$	R_2^*	6	13	19	29	39	49	61	78	94	111

гетический эффект в части повышения числа узлов и числа разных путей. Их число в таком двумерном расширенном мультикольце приводятся в табл. 5 [1, 2].

Построим два четырехмерных мультикольца с инкрементированным диаметром, в которых степени узлов (число дуплексных портов) оказываются примерно одинаковыми с сетями в работах [5, 6].

В первом таком мультикольце возьмем для младших двух измерений мультикольцо из табл. 4 с $k = 9$. Для его реализации потребуется $m_2 = 16$ дуплексных портов. Для старших двух измерений возьмем расширенное мультикольцо из табл. 5 с $k_2^* = 12$. Для его реализации потребуется $m_2^* = 22$ дуплексных порта. В результате четырехмерное мультикольцо будет содержать узлы с $m_4 = 38$ дуплексными портами. Значения числа узлов R_4 и числа разных путей σ_4 для такого мультикольца приведены в табл. 6 в зависимости от числа разных путей σ_2 и σ_2^* в исходных двумерных мультикольцах. Эти значения приведены в формате $R_4\backslash\sigma_4$.

Таблица 6

Значения $R_4\backslash\sigma_4$ при $m_4 = 38$

σ_2^*	σ_2				
	3	8	16	24	45
1	28 917\3	25 515\8	20 412\16	**17 955\24**	**15 309\45**
2	25 704\6	22 680\16	**18 144\32**	**15 960\48**	**13 608\90**
3	16 983\9	**14 985\24**	**11 988\48**	10 545\72	8 991\135

Таблица 7

Значения $R_4\backslash\sigma_4$ при $m_4 = 46$

σ_2^*	σ_2				
	3	12	24	36	67
1	61 425\3	54 054\12	44 226\24	**35 721\36**	**31 941\67**
2	54 600\6	48 048\24	**39 312\48**	**31 752\72**	**28 392\134**
3	36 075\9	**31 746\36**	**25 974\72**	**20 979\108**	**18 759\201**

Сеть Dragonfly суперкомпьютера XC30 [6] имеет сетевые узлы с 40 дуплексными портами. Содержит $N_4 = 11\,616$ сетевых узлов, имеет диаметр $D_4 = 4$ и $\sigma_4 = 4! = 24$ разных путей между узлами. Из табл. 6 видно, что варианты расширенного мультикольца, выделенные полужирным шрифтом, имеют большее число узлов и не меньшее число разных путей.

Во втором четырехмерном расширенном мультикольце возьмем для младших двух измерений мультикольцо из табл. 4 с $k = 13$. Для его реализации потребуется $m_2 = 24$ дуплексных порта. Для старших двух измерений возьмем расширенное мультикольцо из табл. 5 с $k_2^* = 12$. Для его реализации потребуется $m_2^* = 22$ дуплексных порта. В результате расширенное мультикольцо будет содержать узлы с $m_4 = 46$ дуплексными портами. Значения числа узлов R_4 и числа разных путей σ_4 для такого мультикольца приведены в табл. 7 в зависимости от числа разных путей σ_2 и σ_2^* в исходных двумерных мультикольцах. Эти значения приведены в формате $R_4\backslash\sigma_4$.

Сеть суперкомпьютера PERCS-P775 [5] имеет топологию двумерной иерархии полных графов. Она содержит сетевые узлы с 47 дуплексными портами и $N_2 = 16\,384$ сетевых узлов, ее диаметр $D_2 = 3$ при одном пути между узлами или $D_2 = 5$ при наличии 32-х разных путей между узлами. Из табл. 7 видно, что варианты мультикольца, выделенные полужирным шрифтом, имеют существенно большее число узлов и большее число разных путей.

5. ВОЗМОЖНОСТИ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ МУЛЬТИКОЛЕЦ С ИНКРЕМЕНТИРОВАННЫМ ДИАМЕТРОМ

Число узлов и число разных путей в симметричном двумерном мультикольце с инкрементированным диаметром можно еще увеличить путем подбора длин шагов составляющих его колец. Такое мультикольцо мы называем расширенным [1], а число узлов в нем здесь обозначим как $\Re_2$.

Таблица 8

Характеристики двумерного расширенного мультикольца с инкрементированным диаметром

$k = 5$	σ_2	1	2	3	$k-1$	$k-1$	$2(k-1)$	$2k$	$3(k-1)$	$3k$	$4(k-1)$	$4k$
	$\Re_2$	100	88	75	63	63	48	40	35	30	30	25
	R_2	45	45	45	40	40	35	32	29	26	26	24
	$\Re_2/R_2$	2,22	1,96	1,67	1,58	1,58	1,37	1,25	1,21	1,15	1,15	1,04
$k = 7$	σ_2	1	2	3	$k-1$	$k-1$	$2(k-1)$	$2k$	$3(k-1)$	$3k$	$4(k-1)$	$4k$
	$\Re_2$	254	245	217	161	146	104	96	80	69	63	56
	R_2	91	91	91	84	77	70	63	60	55	51	50
	$\Re_2/R_2$	2,79	2,69	2,38	1,92	1,9	1,49	1,52	1,33	1,25	1,24	1,12

К сожалению, построение такого расширенного мультикольца требует решения NP-сложной по k переборной задачи. К настоящему времени для симметричных мультиколец ее удалось решить на персональном компьютере только для $k \le 7$. В табл. 8 приведены результаты численных экспериментов. Для сравнения в ней даны значения числа узлов $\Re_2$ и разных путей R_2 из табл. 4, а также отношение значений $\Re_2$ и R_2. Видно, что число узлов в расширенном мультикольце для $k = 7$ оказывается в 1,3—2,4 раза больше при равном числе разных каналов или их число оказывается на треть больше при примерно равном числе узлов. Из табл. 8 следует, также, что дальнейшее увеличение k даст еще большие значения для отношения $\Re_2/R_2$. Опыт построения расширенных мультиколец [1, 2] показывает, что для их построения при $k = 9$ и $k = 11$ необходимо использовать кластер с сотнями процессоров, а при $k = 13$ — с тысячами процессоров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено экспериментальное исследование возможности повышения базовых характеристик системных сетей путем только минимального повышения диаметра сети без изменения степени сетевых узлов. Исследование проведено для сети со структурой двумерного полного мультикольца. На его основе построено четырехмерное расширенное мультикольцо, в котором число узлов и параллельность сети (число разных путей между узлами) оказываются 2—4 раза больше, чем в известных сетях, имеющих близкие значения степени сетевых узлов. Это сети с десятками тысяч сетевых узлов и с диаметром в 3—5 шагов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подлазов В.С.* Расширенное мультикольцо с диаметром 2 // Проблемы управления. — 2015. — № 4. — С. 35—40.
2. *Подлазов В.С.* Системная сеть «обобщенное расширенное мультикольцо» в сравнении с сетью «сплющенная бабочка» // Проблемы управления. — 2016. — № 2. — С. 65—71.
3. *Подлазов В.С.* Внутренняя параллельность системных сетей с инкрементированным диаметром // Проблемы управления. — 2017. — № 3. — С. 43—48.
4. *Scott S., Abts D., Kim J., and Dally W.* The Black Widow High-radix Clos Network // Proc. of 33rd Intern. Symp. Comp. Arch. (ISCA.2006). — 2006. — URL: http://cva.stanford.edu/publications/2006/ISCA_YARC.pdf (дата обращения 12.02.2016).
5. *Arimili B., Arimili R., Chung V.,* et al. The PERCS High-Performance Interconnect // 18th IEEE Symposium on High Performance Interconnects. — 2009. — P. 75—82.
6. *Alverson R., Roweth D., Kaplan L. and Roweth D.* Cray XC® Series Network // URL: http://www.cray.com/Assets/PDF/products/xc/CrayXC30Networking.pdf (дата обращения 12.02.2016).
7. *Kim J., Dally W.J., Scott S. and Abts D.* Technology-driven, highly-scalable dragonfly topology // Proceedings of the 35th annual international symposium on computer architecture — ISCA'2008. — P. 77—88.
8. *Kim J., Dally W.J. and Abts D.* Flattened Butterfly: A Cost-Efficiently Topology for High-Radix Networks // Proc. 34th Intern. Symp. Comp. Archit. (ISCA'2007). — 2007. — P. 126—137. — URL: http://cva.stanford.edu/publications/2007/ISCA_FBFLY.pdf (дата обращения 12.02.2016).
9. *Алленов А.В., Подлазов В.С.* Пропускная способность набора кольцевых каналов II. Кольцевые коммутаторы // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 4. — С. 162—171.
10. *Bhuyan L.N. and Agrawal D.P.* Generalized Hypercube and Hyperbus Structures for a Computer Network // IEEE Trans. on Computers. — 1984. — Vol. C-33, N 4. — P. 323—333.
11. *Подлазов В.С.* Условия неблокируемости мультикольцевых коммутаторов и обобщенных гиперкубов на произвольных перестановках. I. Межузловая коммутация. Мультикольца // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 8. — С. 128—126.
12. *Подлазов В.С.* Условия неблокируемости мультикольцевых коммутаторов и обобщенных гиперкубов на произвольных перестановках. II. Обобщенные гиперкубы. Внутриузловая коммутация // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 9. — С. 114—124.

Статья представлена к публикации членом редсовета чл.-корр. РАН П.П. Пархоменко.

Подлазов Виктор Сергеевич — д-р техн. наук,
гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
✉ podlazov@ipu.ru.