УДК 519.816

СОГЛАСИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВЫБОРА[1]

В.В. Подиновский

Предложен подход к определению понятия согласительного (суррогатного) решения задачи выбора наилучшей альтернативы из конечного множества альтернатив с параметрической моделью предпочтений. Введено понятие максимально правдоподобно оптимальной альтернативы. Указаны пути нахождения таких альтернатив для многокритериальных задач с моделями предпочтений, основанными на функциях ценности или бинарных отношениях.

Ключевые слова: многокритериальные задачи принятия решений, неполная информация о предпочтениях, суррогатные веса критериев.

ВВЕДЕНИЕ

Для решения многокритериальных задач привлекается в той или иной форме (в зависимости от применяемого метода) информация о предпочтениях лица, принимающего решение (ЛПР), на основе которой строится математическая модель (его) предпочтений. Чаще всего для этого используются функции ценности или бинарные отношения предпочтения. Практически в силу ряда объективных и субъективных причин (например, из-за сложности анализируемой задачи или недостатка времени) далеко не всегда удается получить достоверную информацию о предпочтениях ЛПР в объеме, необходимом для формирования решения задачи в соответствии с ее постановкой (например, для выделения одной наилучшей альтернативы). Существует несколько подходов к решению задач при неполной информации о предпочтениях [1]. Часть таких подходов основывается не только на информации о предпочтениях ЛПР, но и на тех или иных эвристических соображениях. Решения, полученные в рамках таких подходов, назовем *согласительными*, так как для их принятия нужно осознанное согласие ЛПР.

К (непараметрическим) согласительным решениям могут быть отнесены полные упорядочения конечного множества альтернатив, основанные на частичных их упорядочениях, построенных с использованием накопленной информации о предпочтениях [2]. Параметрические согласительные решения (под названием *суррогатные* — см. обзор в работе [3] и § 2 далее) были введены несколько десятилетий назад в ряде работ для многокритериальных задач, в которых моделью предпочтений служит аддитивная функция ценности, причем значения весов критериев точно не известны. Согласительные решения, основанные на использовании суррогатных весов критериев, можно назвать общими: они назначаются без учета специфики множества альтернатив и соответствующих им значений критериев. Это, с одной стороны, их достоинство, так как их можно применять, не оглядываясь на указанную специфику, и применительно к различным постановкам задачи (выбрать одну наилучшую или несколько лучших альтернатив, упорядочить альтернативы по предпочтительности и др.). С другой стороны, из общих соображений понятно, что применение согласительных решений, которые будут учитывать эту специфику, — такие решения будем называть частными, — должно быть более эффективным. В данной статье после краткого обзора литературы по суррогатным решениям описывается общий подход к определению (частного) согласительного решения многокритериальных задач выбора, названного *максимально правдоподобно оптимальным*, и указываются

[1] Статья подготовлена в ходе проведения исследований в 2016 г., которые финансировались в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и Проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов Российской Федерации среди ведущих мировых научно-образовательных центров (5-100).

пути нахождения таких решений, конкретизированные для нескольких известных параметрических моделей предпочтений. Основные результаты статьи были аннотированы в докладе [4].

1. СУРРОГАТНЫЕ ВЕСА КРИТЕРИЕВ

В многокритериальных задачах для принятия решения о выборе лучшей альтернативы используется математическая модель вида

$$\langle X, f, \mathcal{P}\rangle. \qquad (1)$$

Здесь X — множество альтернатив, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ — векторный критерий, $m > 1$, $f_1, f_2, , f_m$ — (частные) критерии, т. е. функции f_i: $X \to Z_i$, где $Z_i \subseteq \mathrm{Re} = (-\infty, +\infty)$ — область значений («шкала») критерия f_i. Каждая альтернатива x полностью характеризуется ее векторной оценкой $y(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$, так что сравнение альтернатив по предпочтительности осуществляется путем сравнения их векторных оценок. Множество всех векторных оценок (область значений векторного критерия) есть $Z = Z_1 \times Z_2 \times ... \times Z_m$. Множеством достижимых векторных оценок является $Y = f(X) = \{y = f(x), x \in X\}$. Модель предпочтений $\mathcal{P}$ строится на основе информации о предпочтениях ЛПР. Первоначально она конструируется на множестве Z, а затем индуцируется на множество X.

Суррогатные веса критериев предлагались для наиболее распространенной модели предпочтений в виде аддитивной функции ценности:

$$v(z|w) = \sum_{i=1}^{m} w_i v_i(z_i). \qquad (2)$$

Здесь $v_i(z_i)$ — частные функции ценности с областью значений $Z_0 = [0, 1]$ (эти функции считаются известными, причем всеми ими значения 0 и 1 достигаются); w_i — веса критериев — положительные (или неотрицательные) числа, в сумме равные 1; вектор весов $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$ в функции (2) играет роль параметра. В качестве функций $v_i(z_i)$ могут выступать нормированные значения критериев. Если критерий f_i желательно максимизировать (т. е. его большие значения предпочтительнее меньших) или же, наоборот, минимизировать (его меньшие значения предпочтительнее больших), то часто используются соответственно формулы:

$$v_i(z_i) = k\frac{z_i - f_{i*}}{f_i^* - f_{i*}}, \quad v_i(z_i) = k\frac{f_i^* - z_i}{f_i^* - f_{i*}},$$

где f_i^* и f_{i*} — максимальное и минимальное значения критерия f_i на множестве альтернатив X соответственно, $k > 0$ — масштабирующий множитель (обычно $k = 1$, но в статье [5], например, $k = 100$). Если веса критериев w_i известны точно, то каждая альтернатива x характеризуется числом $v(f(x))$: чем оно больше, тем альтернатива предпочтительнее. Поэтому, например, наилучшей будет альтернатива, для которой значение функции $v(f(x))$ на множестве X максимально.

Если никаких сведений о весомости критериев нет ($\Xi = \varnothing$), то множество $W^{\varnothing}$ состоит из всех векторов $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$ с положительными (или неотрицательными) компонентами w_i, в сумме равными 1. Для этого случая в работе [6] предложено выбирать равные веса (equal weights): $w_i(\mathrm{EW}) = 1/m$, $i = 1, 2, ..., m$. Однако, как уже указывалось, от ЛПР обычно удается получить некоторую информацию о его предпочтениях Ξ, но она может быть неполна и позволит выделить из множества $W^{\varnothing}$ лишь некоторое его подмножество W^{Ξ}.

Весьма интересен для практики случай, когда информация Ξ позволяет упорядочить критерии по весомости и (возможно, после надлежащей перенумерации критериев) записать неравенства для весов: $w_1 \ge w_2 \ge ... \ge w_m$. Ему посвящено значительное число публикаций (см. обзоры в работах [3, 7]). Пусть $W^{\ge}$ — множество векторов весов w с указанным образом упорядоченными по величине компонентами. В работе [8] приведено несколько формул для суррогатных значений весов, в том числе ранговых весов (rank-sum weights) $w_i(\mathrm{RS})$ (получаются нормализацией рангов) и обратно-ранговых весов (reciprocal of the ranks weights) $w_i(\mathrm{RR})$ (основаны на числах, обратных к рангам: $1, 1/2, ..., 1/m$):

$$w_i(\mathrm{RS}) = \frac{m+1-i}{\sum_{j=1}^{m} j} = \frac{2(m+1-i)}{m(m+1)}, \; w_i(\mathrm{RR}) = \frac{1/i}{\sum_{j=1}^{m} 1/j}, \quad i = 1, ..., m.$$

Были предложены (ранговые) центроидные веса (rank-order centroid weights) [9, 10]:

$$w_i(\mathrm{ROC}) = \frac{1}{m}\sum_{j=i}^{m}\frac{1}{j}, \quad i = 1, ..., m. \qquad (3)$$

Имеются несколько соображений для введения именно центроидных весов [9—11]. Прежде всего, вектор $w(\mathrm{ROC})$ представляет все множество $W^{\ge}$ в том смысле, что является его центром тяжести (centroid). Он также является центром тяжести вершин этого многомерного многогранника (т. е. центром тяжести системы, состоящей из одинаковых точечных масс, помещенных во все его вершины). Поэтому он может быть рассчитан следующим путем: нужно найти все векторы-вершины многомерного многогранника $W^{\ge}$, а затем найти их среднее арифметическое. Таких вершин всего m — это $w^1 = (1, 0, ..., 0)$, $w^2 = (1/2, 1/2, 0, ..., 0)$, $w^3 = (1/3, 1/3, 1/3, 0, ..., 0)$, ..., $w^m = (1/m, 1/m, ..., 1/m)$ (см., например, работу [5]). Поэтому $w(\mathrm{ROC}) = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} w^l$.

Рассмотрим теперь вектор весов как случайный вектор $\tilde{w}$. Поскольку никакой дополнительной информации об этом векторе, кроме его принадлежности к множеству $W^{\geq}$, нет, то, согласно принципу недостаточного основания [12], плотность распределения вероятностей этого вектора можно полагать равномерной на множестве $W^{\geq}$. И тогда математическое ожидание случайного вектора весов $E[\tilde{w}]$ будет равно $w(\mathrm{ROC})$. Наконец, поскольку, в силу известных свойств оператора нахождения математического ожидания функции случайной величины $v(z|\tilde{w}) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{w}_i v_i(z_i)$ (см. формулу (2)), верна цепочка равенств

$$E[v(z|\tilde{w})] = \sum_{i=1}^{m} E[\tilde{w}_i] v_i(z_i) = \sum_{i=1}^{m} w_i(\mathrm{ROC}) v_i(z_i),$$

то использование центроидных весов приводит к упорядочиванию альтернатив x согласно соответствующим математическим ожиданиям случайных величин $v(z|\tilde{w})$ как функций случайного вектора $\tilde{w}$.

В работе [11] был проведен сравнительный анализ трех рассмотренных видов суррогатных весов и показано, что применение центроидных весов в определенных смыслах более эффективно. Там же указано, что понятие центроидных весов очевидным образом обобщается на случай, когда множество W^{Ξ} есть произвольный многомерный многогранник. Однако эти веса обладают и заметными недостатками. Так, в работе [13] отмечено, что центроидные веса наименее значимых критериев оказываются во много раз меньше весов наиболее значимых критериев и потому оказывают весьма незначительное влияние на выбор решений. (Например, уже при $m = 5$, согласно выражению (3), имеем $w_1(\mathrm{ROC}) : w_5(\mathrm{ROC}) = 0{,}457 : 0{,}040 = 11{,}425$.) Там же предложены два пути сглаживания указанного «экстремального» эффекта:

— ограничить степени превосходства в весомости некоторым числом h; например, если $m = 3$ и $h = 9$, то вместо (1, 0, 0), (1/2, 1/2, 0), (1/3, 1/3, 1/3) нужно взять (9/11, 1/11, 1/11), (9/19, 9/19, 9/19), (1/3, 1/3, 1/3) (ибо 9/11:1/11 = 9 и 9/19:1/19 = 9), и тогда вместо $w(\mathrm{ROC}) = (0{,}611;\ 0{,}278;\ 0{,}111)$ получим вектор весов $w = (0{,}542;\ 0{,}299;\ 0{,}159)$, где $w_1 = \frac{1}{3}(9/11 + 9/19 + 1/3) = 0{,}542$, и т. д.;

— принять геометрический закон убывания весов, т. е. w_i: $w_{i+1} = \tau < 1$ (для центроидных весов указанные дроби лежат в пределах 0,4 — 0,45 при $m = 3$ и в пределах 0,5 — 0,55 при $m = 5$); например, при $r = 0{,}6$ для $m = 3$ получаем вектор весов $w = (0{,}510;\ 0{,}306;\ 0{,}184)$.

Предлагались и другие суррогатные веса. Так, в работе [6] приведена такая формула для ранговых экспоненциальных весов (ranks exponent weights):

$$w_i(\mathrm{RE}) = (m + 1 - i)^{\tau} / \sum_{j=1}^{m} (m + 1 - i)^{\tau},$$

которые являются обобщением ранговых весов. Параметр τ должен оцениваться ЛПР: с ростом этого параметра убывание весов w_i ускоряется. В работе [14] были предложены веса, учитывающие распределение вероятностей рангов (rank order distribution weights) $w_i(\mathrm{ROD})$, и выявлено, что в некоторых случаях они предпочтительнее, чем центроидные веса. В работах [3, 15] предложены формулы для суррогатных весов для случая, когда имеется порядковая информация не только об упорядочении весомостей критериев, но и интенсивностях весомости.

Все предлагавшиеся формулы для суррогатных весов являются, по сути своей, эвристическими. Выбирать конкретную формулу предлагается ЛПР в соответствии с его представлениями о «скорости» убывания весомости от первого критерия до последнего [7].

2. МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНО ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛЬТЕРНАТИВЫ

Далее рассматривается задача выбора наилучшей альтернативы из конечного множества альтернатив $X = \{x^1, x^2, ..., x^n\}$, $n \geq 2$. Пусть модель предпочтений $\mathcal{P}$ из выражения (1) является параметрической: она включает в себя параметр γ (он может быть векторным или иметь иную математическую природу) с областью значений Γ. В качестве такой модели на множестве Z может выступать либо параметрическое семейство $V(\Gamma)$ функций ценности $v(z|\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, либо семейство $\Re(\Gamma)$ отношений нестрогого предпочтения $R(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$: соотношение $yR(\gamma)z$ означает, что при фиксированном значении параметра γ векторная оценка y не менее предпочтительна, чем z. Принимается, что отношение $R(\gamma)$ есть квазипорядок (оно рефлексивно и транзитивно). Этот квазипорядок является связным, если для любых векторных оценок y и z верно $yR(\gamma)z$ или $zR(\gamma)y$; в противном случае он называется несвязным. Квазипорядок $R(\gamma)$ порождает на Z отношения (строгого) предпочтения $P(\gamma)$ и безразличия $I(\gamma)$ следующим образом: $yP(\gamma)z$, когда $yR(\gamma)z$ верно, но $zR(\gamma)y$ неверно;

$yI(\gamma)z$, когда верно $yR(\gamma)z$ и $zR(\gamma)y$. Функция ценности $v(z|\gamma)$ и квазипорядок $R(\gamma)$ индуцируют на X функцию ценности $v(f(x)|\gamma)$ и связный квазипорядок $R_X(\gamma)$, определяемый так: $x'R_X(\gamma)x''$ верно тогда и только тогда, когда выполнено $f(x')R(\gamma)f(x'')$.

Пусть Γ^Ξ — подмножество множества Γ, выделяемое на основе накопленной информации о предпочтениях Ξ. Альтернатива x^* (и ее векторная оценка $f(x^*)$) называется потенциально оптимальной для $V(\Gamma^\Xi)$ или, соответственно, для $\Re(\Gamma^\Xi)$, если найдется такое значение параметра $\gamma \in \Gamma^\Xi$, что эта альтернатива является оптимальной по $v_X(f(x)|\gamma)$ или, соответственно, по $R_X(\gamma)$, т. е. для любой альтернативы $x \in X$ верно $v(f(x^*)|\gamma) \ge v(f(x)|\gamma)$ или, соответственно, $f(x^*)R(\gamma)f(x)$. В противном случае она называется заведомо доминируемой для $V(\Gamma^\Xi)$ или, соответственно, для $\Re(\Gamma^\Xi)$. Поскольку множество X конечно, то множество потенциально оптимальных альтернатив для $V(\Gamma^\Xi)$ или для $\Re(\Gamma^\Xi)$ (если отношения $R(\gamma)$ связные) является непустым и, более того, покрывающим X, т. е. для любой альтернативы x найдется потенциально оптимальная альтернатива x^* такая, что для некоторого значения параметра γ^* верно $v(f(x^*)|\gamma^*) \ge v(f(x)|\gamma^*)$ или, соответственно, $f(x^*)R(\gamma^*)f(x)$ [16]. Для многокритериальных задач разработаны методы проверки потенциальной оптимальности альтернатив [17—20]. Далее предполагается, что даже если отношения $R(\gamma)$ несвязны, потенциально оптимальные для $\Re(\Gamma^\Xi)$ альтернативы существуют и, более того, множество таких альтернатив является покрывающим.

Обозначим через Γ_j^Ξ множество значений параметра $\gamma \in \Gamma^\Xi$, при которых альтернатива x^j является оптимальной по $v_X(x|\gamma)$ или, соответственно, по $R_X(\gamma)$. Объединение всех множеств Γ_j^Ξ равно множеству Γ^Ξ, причем множества Γ_j^Ξ и Γ_k^Ξ, $j \ne k$, могут пересекаться. Пусть $\mathrm{mes}\Gamma_j^\Xi$ — мера множества Γ_j^Ξ (ее для разных моделей предпочтений можно определять по-разному, с учетом их специфики — см. далее). В рассматриваемом случае, когда информация Ξ позволила лишь выделить из множества Γ^Ξ подмножества Γ_j^Ξ, представляется логичным полагать (принять допущение), что чем больше мера множества Γ_j^Ξ, тем более предпочтительна альтернатива x^j. Поэтому альтернативу x^j, для которой соответствующая мера максимальна, и следует считать наилучшей. Такая альтернатива будет называться *максимально правдоподобно оптимальной*, или, кратко, *мп-оптимальной*. Для большей наглядности и удобства можно вместо абсолютной величины меры $\mathrm{mes}\Gamma_j^\Xi$ использовать относительную величину $Pr_j = \mathrm{mes}\Gamma_j^\Xi/\mathrm{mes}\Gamma^\Xi$. Предлагаемое обозначение Pr_j можно объяснить так. Будем рассматривать параметр γ как случайную величину $\tilde{\gamma}$. Поскольку нет никаких оснований полагать, что одни значения параметра γ более возможны (вероятны), чем другие, то, в соответствии с принципом недостаточно основания [12], примем, что случайный вектор $\tilde{\gamma}$ имеет равномерную плотность распределения вероятностей на Γ^Ξ. Тогда тот факт, что альтернатива x^j окажется оптимальной по $v_X(x|\gamma)$ или, соответственно, по $R_X(\gamma)$, где γ — реализация случайной величины $\tilde{\gamma}$, является случайным событием, вероятность которого, согласно геометрическому определению вероятности, равна как раз Pr_j. Поэтому наилучшей следует считать ту альтернативу, для которой указанная вероятность максимальна. Иными словами, наилучшей предлагается считать ту альтернативу x^*, для которой вероятность того, что она будет оптимальной по $v_X(x|\tilde{\gamma})$ или $R_X(\tilde{\gamma})$, максимальна. С другой стороны, важно отметить, что величины Pr_j можно рассматривать как характеристики робастности согласительных решений о выборе альтернатив x^j.

При малой размерности задачи мп-оптимальные альтернативы можно найти аналитически.

Пример 1. В двухкритериальной задаче множество X состоит из пяти альтернатив, для которых значения частных функций ценности $v_i(y_i)$ заданы табл. 1, а графики векторов частных ценностей $v^j = (v_1^j,\ v_2^j) = (v_1^j(y_1^j),\ v_2^j(y_2^j))$ представлены на рис. 1.

При упорядочении весов $w_1 > w_2$ имеем (см. формулу (3)): $w(\mathrm{ROC}) = (0{,}75;\ 0{,}25)$. Соответствующие значения функции (2) для альтернатив записаны в последнюю строку табл. 1, откуда видно, что оптимальной является альтернатива x^3. Рис. 1 показывает, что потен-

Таблица 1

Значения функций ценности для альтернатив

Альтернативы x^j	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
Значения функции $v_1(y_1^j)$	0	0,85	0,9	0,95	1
Значения функции $v_2(y_2^j)$	1	0,8	0,7	0,53	0
Значения функции $v(y)$ для $w(\mathrm{ROC})$	0,25	0,8375	0,85	0,845	0,75

циально оптимальными являются все альтернативы, кроме x^1. Для нахождения областей $\Gamma_j^{\Xi} = W_j^{\geq}$ значений параметра w, при которых в качестве оптимальных выделяются потенциально оптимальные альтернативы, здесь, используя формулу (2), достаточно найти значения веса w_1, при которых выполняются равенства $v(y^2|w) = v(y^3|w)$, $v(y^3|w) = v(y^4|w)$ и $v(y^4|w) = v(y^5|w)$, так как на границах смежных областей значения функции ценности равны. Первое из этих равенств в развернутом виде записывается так:

$$0{,}85w_1 + 0{,}8(1 - w_1) = 0{,}9w_1 + 0{,}7(1 - w_1).$$

Из этого уравнения получаем $w_1 = 0{,}667$. Из уравнений, записываемых на основе второго и третьего равенств, получаем соответственно $w_1 = 0{,}773$ и $w_1 = 0{,}914$. Следовательно, с округлением до трех знаков:

$$W_2^{\geq} = [(0{,}5;\ 0{,}5),\ (0{,}667;\ 0{,}333)],$$

$$W_3^{\geq} = [(0{,}667;\ 0{,}333),\ (0{,}773;\ 0{,}227)],$$

$$W_4^{\geq} = [(0{,}773;\ 0{,}227),\ (0{,}914;\ 0{,}086)],$$

$$W_5^{\geq} = [(0{,}914;\ 0{,}086),\ (1;\ 0)].$$

Например, $W_2^{\geq}$ — это отрезок с координатами концов (0,5; 0,5) и (0,667; 0,333) — см. рис. 2. Мерами этих отрезков служат их длины. Поэтому $W_2^{\geq} = 0{,}236$, $W_3^{\geq} = 0{,}150$, $W_4^{\geq} = 0{,}199$, $W_5^{\geq} = 0{,}122$. Поскольку длина отрезка с концами (0,5; 0,5) и (1; 0) равна 0,707, то искомые вероятности $Pr_j = \mathrm{mes}\, W_j^{\geq}/\mathrm{mes}\, W^{\geq}$

$$\mathrm{Pr}_2 = 0{,}334; \quad \mathrm{Pr}_3 = 0{,}212; \quad \mathrm{Pr}_4 = 0{,}281; \quad \mathrm{Pr}_5 = 0{,}173.$$

Следовательно, согласно предлагаемому подходу, в качестве наилучшей рекомендуется выбрать альтернативу x^2. Заметим, что альтернатива x^3 (выделяемая с использованием центроидных весов) уступает и ей, и альтернативе x^4! ♦

В отдельных случаях для нахождения мп-оптимальных стратегий могут оказаться эффективными алгоритмические методы (см. § 4). В общем же случае можно воспользоваться методом статистического моделирования (методом Монте-Карло) [21]. Согласно этому методу, следует организовать N реализаций случайной величины $\tilde{\gamma}$, имеющей равномерно распределение вероятностей на множестве Γ^{Ξ}, и для каждой альтернативы x^j подсчитать число N_j случаев, когда она оказывалась оптимальной. Тогда оценками искомых вероятностей Pr_j будут дроби N_j/N. Для того чтобы эти оценки были приемлемо точными, число N должно быть достаточно большим (например, можно взять $N = 10\,000$). С помощью современной вычислительной техники проведение расчетов согласно указанному методу трудностей не вызывает даже при достаточно большой размерности исходной задачи выбора.

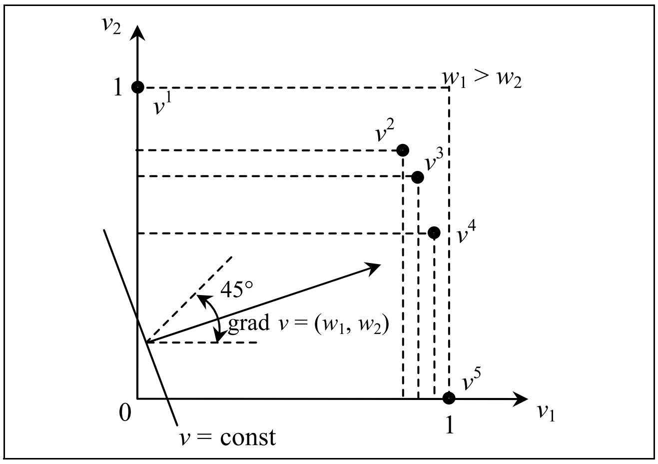

Рис. 1. Векторы частных ценностей альтернатив $v^j = (v_1^j,\ v_2^j)$

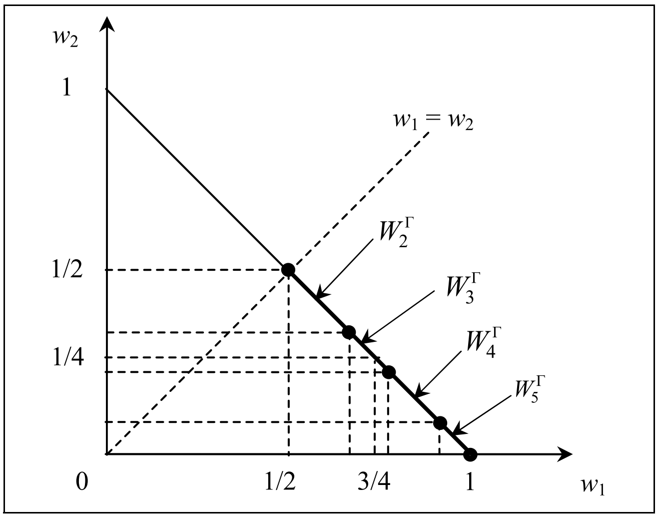

Рис. 2. Области W_j^{Γ}; w(ROC) = (3/4, 1/4)

Покажем, как предложенный подход можно реализовать применительно к нескольким параметрическим моделям предпочтений.

3. МОДЕЛЬ ПРЕДПОЧТЕНИЙ С АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕННОСТИ

Пусть моделью предпочтений служит аддитивная функция ценности (2), в которой функции $v_i(z_i)$ считаются известными, а роль параметра γ играет вектор весов w. Множества $\Gamma_j^{\Xi} = W_j^{\Xi}$ определяются так:

$$W_j^{\Xi} = \{w \in W^{\Xi} | v(f(x^j)|w) \geq v(f(x^k)|w),\ k \neq j\}. \quad (4)$$

Поэтому для определения принадлежности значения w случайного параметра $\tilde{w}$, которое получено при очередной реализации, к множеству $W_j^{\geq}$ нужно проверить выполнение всех неравенств в выражении (4). Но проще, как уже указывалось, при каждой реализации k для полученного значения вектора весов $w(k) \in W^{\geq}$ выделять оптимальную альтернативу $x^{j(k)}$ при помощи функции ценности $v(f(x)|w(k))$ (см. формулу (2)) и в итоге получить числа N_j, равные числу реализаций, в которых альтернативы x^j оказывались оптимальными.

Пусть теперь моделью предпочтений служит аддитивная функция ценности (2), в которой и веса, и частные функции ценности неизвестны. Для вектора весов $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$ задана область возможных значений W^{Ξ}, а для частных функций ценности $v_i(z_i)$ с общей областью значений [0, 1] известны семейства функций $V_i(\Xi)$, к которым они принадлежат. При указанной формулировке модель предпочтений не является параметрической. Приведем ее к параметрическому виду. Для произвольного фиксированного частного критерия f_i из множества его значений $y_i^1 = f_i(x^1)$, $y_i^2 = f_i(x^2)$, ..., $y_i^n = f_i(x^n)$ сформируем множество упорядоченных по возрастанию чисел $\langle a_i^1, a_i^2, ..., a_i^{n_i}\rangle$, $n_i \leq n$. Обозначим через $a_i^{r(j)}$ то из чисел a_i^r, $r = 1, 2, ..., n_i - 1$, которое равно значению частного критерия f_i для альтернативы x^j, т. е. такое, что $a_i^{r(j)} = y_i^j$. Пусть $v_i^r = v_i(a_i^r)$. Согласно принятому допущению $v_i^1 = 0$ и $v_i^{n_i} = 1$. Введем в рассмотрение разности $\delta_i^r = v_i^{r+1} - v_i^r$, $r = 1, 2, ..., n_i - 1$. Эти разности, согласно принятому допущению, удовлетворяют условиям:

$$\delta_i^r > 0, \quad r = 1, 2, ..., n_i - 1,$$
$$\sum_{r=1}^{n_i-1} \delta_i^r = 1, \quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (5)$$

Теперь можно записать:

$$v_i(f_i(x^j)) = v_i(y_i^j) = v_i(a_i^{r(j)}) = \sum_{r=1}^{r(j)-1} \delta_i^r. \qquad (6)$$

Заметим, что здесь при $r(j) = 1$ сумма равно нулю. С учетом записи (6) аддитивная функция ценности (2) для $z = f(x^j) = y^j$ приобретает вид:

$$v(f(x^j)|\gamma) = \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{r=1}^{r(j)-1} \delta_i^r. \qquad (7)$$

В функции (7) в роли параметра γ выступает пара $\langle w, \delta\rangle$, где под δ понимается совокупность векторов разностей $\delta^i = (\delta_i^1, \delta_i^2, ..., \delta_i^{n_i})$, $i = 1, 2, ..., m$. Если никаких дополнительных ограничений на значения частных функций ценности нет (т. е. они являются порядковыми), то областью значений параметра γ является множество $W^{\Xi} \times \Delta^1 \times \Delta^2 \times ... \times \Delta^m$, где Δ^i — область значений вектора δ^i, определяемая условиями (5). Но этот случай применительно к функции ценности (3) для практики неинтересен [1].

Рассмотрим теперь случай, когда на частные функции ценности $v_i(z_i)$ налагаются некоторые дополнительные ограничения. Пусть известно, что функции $v_i(z_i)$ являются строго вогнутыми (это соответствует случаю убывания маргинальных, или предельных, ценностей). Условие вогнутости с использованием разностей δ_i^r можно представить такими характеристическими неравенствами [22]:

$$\frac{\delta_i^1}{a_i^2 - a_i^1} > \frac{\delta_i^2}{a_i^3 - a_i^2} > ... > \frac{\delta_i^{n_i-1}}{a_i^{n_i} - a_i^{n_i-1}},$$
$$i = 1, 2, ..., m. \qquad (8)$$

Пусть $\Delta_{\downarrow}^i$ — множество векторов разностей δ^i, удовлетворяющих ограничениям (5) и (8). При отыскании согласительных решений в соответствии с предложенным подходом следует ввести в рассмотрение $m + 1$ независимых случайных векторов — вектор весов $\tilde{w}$, имеющий равномерное распределение вероятностей на W^{Ξ}, и векторы разностей δ^i, имеющих равновероятные распределения вероятностей на $\Delta_{\downarrow}^i$.

4. МОДЕЛЬ ПРЕДПОЧТЕНИЙ С ИНТЕРВАЛАМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЗАМЕЩЕНИЙ КРИТЕРИЕВ

Пусть моделью предпочтений служит модель из теории параметрической важности и интервалов неопределенности замещений критериев [23], когда имеется информация Ξ об интервалах неопределенности замещений (ИНЗ) каждого из критериев, кроме первого, на первый критерий, называемый базисным, которая представляется в виде кортежа

$$\lambda = \langle\lambda_{21}, ..., \lambda_{m1}\rangle, \qquad (9)$$

где $\lambda_{i1} = (\lambda_{i1}^-, \lambda_{i1}^+)$ — ИНЗ критерия f_i на f_1, $0 < \lambda_{i1}^- < \lambda_{i1}^+$. Пусть $d = y - z$, $M' = \{2, ..., m\}$ и $M^>(\delta) = \{i \in M' | \delta_i > 0\}$, $M^<(\delta) = \{i \in M' | \delta_i < 0\}$. Решающее правило, задающее на $Z = Z_1 \times Z_2 \times ... \times Z_m$

отношение предпочтения P^λ, таково [24]: если $y \neq z$, то

$$yP^\lambda z \Leftrightarrow d_1 + \sum_{i \in M^>(\delta)} d_i\lambda_{i1}^- + \sum_{i \in M^<(\delta)} d_i\lambda_{i1}^+ \geq 0. \quad (10)$$

Это решающее правило справедливо, если $Z = \mathrm{Re}^m$ или если выполнены некоторые ограничения на множества Z_i [23]. Здесь под квазипорядком R^λ можно понимать объединение отношений P^λ и отношения равенства векторов.

Как правило, не все альтернативы сравнимы по R^λ, и поэтому встает вопрос о сужении этих ИНЗ для того, чтобы выделить наилучшую альтернативу. Здесь параметрами являются концы ИНЗ из выражения (9), т. е. числа λ_{i1}^- и λ_{i1}^+. Поэтому роль множества Γ^Ξ здесь играет множество Λ ИНЗ $\hat{\lambda}$, вложенных в первоначальные ИНЗ (9): $\hat{\lambda} \subset \lambda$, т. е. для которых верны неравенства $\lambda_{2i}^- \leq \hat{\lambda}_{2i}^- < \hat{\lambda}_{2i}^+ \leq \lambda_{2i}^+$, $i = 2, 3, ..., m$, где хотя бы одно из $2(m - 1)$ нестрогих неравенств выполняется как строгое. Важно иметь в виду, что если $\hat{\lambda}' \subset \hat{\lambda}''$, то $P^{\hat{\lambda}'} \supseteq P^{\hat{\lambda}''}$. Если формально положить $\lambda_{i1}^- = \lambda_{i1}^+$ для всех $i \neq 1$, то неравенство из решающего правила (10) будет равносильно неравенству $y_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_{i1}^- y_i \geq z_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_{i1}^- z_i$, так что исходная модель с ИНЗ выродится в модель с аддитивной функцией ценности. А поскольку множество альтернатив X конечно, то, как несложно проверить, при достаточно узких ИНЗ $\hat{\lambda}$ найдутся альтернативы, оптимальные по $P^{\hat{\lambda}}$, т. е. потенциально оптимальные альтернативы. Понятно, что альтернатива, доминируемая по P^λ, не может быть потенциально оптимальной. Пусть N — множество номеров недоминируемых по P^λ альтернатив.

Пусть $\Lambda(j)$ — подмножество Λ всех таких ИНЗ $\lambda(j) = (\lambda_1(j), \lambda_2(j), ..., \lambda_m(j))$, где $\lambda_i(j) = (\lambda_i^-(j), \lambda_i^+(j))$, при которых альтернатива x^j будет оптимальной, т. е. для любого $k \neq j$ будет, согласно (9), верно $y^jR^{\lambda(j)}y^k$. Положим $\delta_i = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$, $i = 2, 3, ..., m$. Учитывая, что критерии $f_2, f_3, ..., f_m$ могут иметь разную размерность, удобно сразу ввести относительную меру ИНЗ $\lambda(j)$ — величину $\mathrm{mes}\lambda(j) = \prod_{i=2}^{m} (\lambda_{i1}^+(j) - \lambda_{i1}^-(j))/\delta_i$. Пусть $\mathrm{mes}\lambda^*(j)$ — наибольшее из всех чисел $\mathrm{mes}\lambda(j)$ для $\lambda(j) \in \Lambda(j)$. Если множество $\Lambda(j)$ пусто, то $\mathrm{mes}\lambda^*(j) = 0$. Искомые вероятности Pr_j равны $\mathrm{mes}\lambda^*(j)$.

Пример 2. В двухкритериальной задаче с $Z = \mathrm{Re}^2$ множество X состоит из трех альтернатив, значения критериев для которых приведены в табл. 2. Кортеж λ состоит из единственного ИНЗ $\lambda_{21} = (0{,}2; 2)$, так что $\delta_2 = 1{,}8$.

Используя решающее правило (10), несложно убедиться в том, что нет пар векторных оценок, сравнимых по R^λ, так что все альтернативы недоминируемы по P^λ.

Запишем условия, при которых альтернатива x^1 будет оптимальна по отношению $P^{\lambda(1)}$, где $\Lambda(1) = \{\lambda_{21}(1)\}$, $\lambda_{21}(1) = (\lambda_{21}^-(1), \lambda_{21}^+(1))$, $\lambda_{21}^- \leq \lambda_{21}^-(1) < \lambda_{21}^+(1) \leq \lambda_{21}^+(1) \leq \lambda_{21}^+$:

для выполнения $y^1P^{\lambda(1)}y^2$: $-1 + 2\lambda_{21}^-(1) \geq 0$, откуда $\lambda_{21}^-(1) \geq 0{,}5$;

для выполнения $y^1P^{\lambda(1)}y^3$: $-6 + 6\lambda_{21}^-(1) \geq 0$, откуда $\lambda_{21}^-(1) \geq 1$.

Следовательно, наиболее широким искомым интервалом является $\lambda_{21}(1) = (1, 2)$, и поэтому $\mathrm{mes}\lambda^*(1) = 1/1{,}8 \approx 0{,}555$.

Запишем условия, при которых альтернатива x^2 будет оптимальна по отношению $P^{\lambda(2)}$, где $\Lambda(2) = \{\lambda_{21}(2)\}$, $\lambda_{21}(2) = (\lambda_{21}^-(2), \lambda_{21}^+(2))$, $\lambda_{21}^- \leq \lambda_{21}^-(2) < \lambda_{21}^+(2) \leq \lambda_{21}^+$:

для выполнения $y^2P^{\lambda(2)}y^1$: $1 - 2\lambda_{21}^+(2) \geq 0$, откуда $\lambda_{21}^+(2) \leq 0{,}5$;

для выполнения $y^2P^{\Lambda(2)}y^3$: $-5 + 4\lambda_{21}^-(2) \geq 0$, откуда $\lambda_{21}^-(2) \geq 1{,}25$.

Следовательно, искомый интервал пуст, $\mathrm{mes}\lambda^*(2) = 0$ и альтернатива x^2 не является потенциально оптимальной.

Запишем условия, при которых альтернатива x^3 будет оптимальна по отношению $P^{\lambda(3)}$, где $\Lambda(3) = \{\lambda_{21}(3)\}$, $\lambda_{21}(3) = \lambda_{21}^-(3), \lambda_{21}^+(3))$, $\lambda_{21}^- \leq \lambda_{21}^-(3) < \lambda_{21}^+(3) \leq \lambda_{21}^+$:

для выполнения $y^3P^{\lambda(3)}y^1$: $6 - 6\lambda_{21}^+(3) \geq 0$, откуда $\lambda_{21}^+(3) \leq 1$;

для выполнения $y^3P^{\lambda(3)}y^2$: $5 - 4\lambda_{21}^+(3) \geq 0$, откуда $\lambda_{21}^+(2) \leq 1{,}25$.

Следовательно, наиболее широким искомым ИНЗ является $\lambda_{21}(3) = (0{,}2; 1)$, и поэтому $\mathrm{mes}\lambda^*(3) = 0{,}8/1{,}8 \approx \approx 0{,}444$.

Поскольку $\mathrm{mes}\lambda^*(1) = 0{,}555 > \mathrm{mes}\lambda^*(3) = 0{,}444$, то, в соответствии с предлагаемым подходом, наилучшей следует признать мп-оптимальную альтернативу x^1. ♦

Таблица 2

Значения критериев для альтернатив

Альтернативы x^j	x^1	x^2	x^3
Значения критерия $f_1(x^j) = y_1^j$	1	2	7
Значения критерия $f_2(x^j) = y_2^j$	10	8	4

В случае рассматриваемой модели величины Pr_j могут быть найдены алгоритмически. Пусть $\lambda_{i1}^{-}(j) = \lambda_{i1}^{-} + t_{ji}\delta_i$ и $\lambda_{i1}^{+}(j) = \lambda_{i1}^{+} - s_{ji}\delta_i$, где неотрицательные переменные t_{ji} и s_{ji} удовлетворяют неравенству $t_{ji} + s_{ji} \le 1$ (поскольку справедливо неравенство $\lambda_{i1}^{-}(j) < \lambda_{i1}^{+}(j)$). Положим $d^{jk} = y^j - y^k$, $M^{>}(d^{jk}) = \{i \in M' | d_i^{jk} > 0\}$, $M^{>}(d^{jk}) = \{i \in M' | d_i^{jk} < 0\}$. Нахождение величины $\mathrm{mes}\Lambda(j)$ сводится к решению оптимизационной задачи:

$$\prod_{i=2}^{m} (1 - (t_{ij} + s_{ij})) \to \min_{\{t_{ji}, s_{ji}\}} \quad (11)$$

при ограничениях:

$$t_{ji} \ge 0, \quad s_{ji} \ge 0, \quad t_{ji} + s_{ji} \le 1, \quad i = 2, 3, ..., m; \quad (12)$$

$$d_1^{jk} + \sum_{i \in M^{>}(d^{kj})} d_i^{jk}(\lambda_{i1}^{-} + t_{ij}\delta_i) + {} + \sum_{i \in M^{<}(d^{kj})} d_i^{jk}(\lambda_{i1}^{+} - s_{ji}\delta_i) \ge 0, \ k \in N, \ k \ne j. \quad (13)$$

Если для некоторого номера j ограничения (12), (13) несовместны, то соответствующая альтернатива x^j потенциально оптимальной не является и из числа претендентов на оптимальную исключается.

К сожалению, задача (11)—(13) нелинейная и к эквивалентной задаче линейного программирования не сводится.

Введем меру $\mathrm{mes}\lambda^*(j)$ иначе (она будет векторной). Будем рассматривать совокупность $\varepsilon(j)$ величин $\varepsilon_i(j) = [\lambda_{i1}^{+}(j) - \lambda_{i1}^{-}(j)]/\delta_i = (1 - (t_{ij} + s_{ij}))$, $i = 2, 3, ..., m$, как набор $m - 1$ равноважных критериев [25], которые желательно максимизировать. Будем считать, что увеличение больших из величин $\varepsilon_i(j)$ не компенсируется уменьшением меньших из них. Иначе говоря, вначале желательно максимизировать наименьшую из величин $\varepsilon_i(j)$, затем следующую в порядке возрастания (точнее, неубывания) и т. д. Задачи такого рода были названы в работе [25] симметрически-лексикографическими, или *SL*-задачами максимизации, но распространенным является название «лексиминные задачи максимизации» [26]. Сформулируем постановку такой задачи формализованно.

Обозначим через $a_{\uparrow} = (a_{[1]}, a_{[2]}, ..., a_{[q]})$ вектор, полученный из вектора $a = (a_1, a_2, ..., a_q)$ перестановкой его компонент в порядке неубывания. Например, если $a = (3, 2, 7, 3, 5)$, то $a_{\uparrow} = (2, 3, 3, 5, 7)$ и $a_{[4]} = 5$. Введем на множестве q-мерных векторов отношение нестрогого предпочтения — квазипорядок $R^{\uparrow}$ следующим образом:

$$aR^{\uparrow}b \Leftrightarrow (a_{[1]} > b_{[1]}) \vee (a_{[1]} = b_{[1]}, a_{[2]} > b_{[2]}) \vee ... \vee (a_{[i]} = b_{[i]}, i = 1, 2, ..., q - 1, a_{[q]} > b_{[q]}) \vee (a_{\uparrow} = b_{\uparrow}).$$

Этот квазипорядок является связным.

Теперь можно сказать, что $\mathrm{mes}\lambda^*(j)$ есть лексиминный максимум вектор-функции $\varepsilon(j)$ от переменной $\lambda(j)$ на $\Lambda(j)$, т. е. верно $\mathrm{mes}\lambda^*(j)R^{\uparrow}\mathrm{mes}\lambda(j)$ для всех $\lambda(j) \in \Lambda(j)$. Мп-оптимальной следует считать альтернативу x^{j^*}, для которой вектор $\mathrm{mes}\lambda^*(j^*)$ является лексиминным максимумом среди векторов $\mathrm{mes}\lambda^*(j)$, т. е. верно $\mathrm{mes}\lambda^*(j^*)R^{\uparrow}\mathrm{mes}\lambda^*(j)$, $j \in N$.

Нахождение векторной величины $\mathrm{mes}\lambda^*(j)$ сводится к последовательности задач линейного программирования [27]. С вычислительной точки зрения удобнее перейти от лексиминной задачи максимизации по векторному критерию $\varepsilon(j)$, где $\varepsilon_i(j) = (1 - (t_{ji} + s_{ji}))$, $i = 2, 3, ..., m$, к лексимаксной задаче минимизации по векторному критерию $\tau(j)$, где $\tau_i(j) = t_{ji} + s_{ji}$, $i = 2, 3, ..., m$. Лексимаксный квазипорядок $R^{\downarrow}$ определяется следующим образом:

$$aR^{\downarrow}b \Leftrightarrow (a_{(1)} < b_{(1)}) \vee (a_{(1)} = b_{(1)}, a_{(2)]} < b_{(2)}) \vee ... \vee (a_{(i)} = b_{(i)}, i = 1, 2, ..., q - 1, a_{(q)} < b_{(q)}) \vee (a_{\downarrow} = b_{\downarrow}),$$

где $a_{\downarrow} = (a_{(1)}, a_{(2)}, ..., a_{(q)})$ — вектор, полученный из вектора $a = (a_1, a_2, ..., a_q)$ перестановкой его компонент в порядке невозрастания. Пусть $\tau^*(j)$ — лексимаксный минимум вектор-функции $\tau(j)$ от переменной $\lambda(j)$ на $\Lambda(j)$, т. е. верно $\tau^*(j)R^{\downarrow}\tau(j)$ для всех $\lambda(j) \in \Lambda(j)$. Мп-оптимальной является альтернатива x^{j^*}, для которой вектор $\tau^*(j^*)$ является лексимаксным минимумом среди векторов $\tau^*(j)$, т. е. верно $\tau^*(j^*)R^{\downarrow}\tau^*(j)$, $j \in N$.

Первая из упомянутой выше последовательности задач линейного программирования для нахождения $\tau^*(j)$ для произвольного фиксированного номера $j \in N$, состоящая в минимизации $\max\{\tau_2(j), \tau_3(j), ..., \tau_m(j)\}$, с использованием известного приема, основанного на введении дополнительной переменной, записывается следующим образом [27, 28]:

$$r_1 \to \min_{r_1, \{t_{ji}, s_{ji}\}} \quad (14)$$

при ограничениях (12), (13) и

$$r_1 \ge t_{ji} + s_{ji}, \quad i = 2, 3, ..., m. \quad (15)$$

Пусть r_1^*, $\{t_{ji}^*, s_{ji}^*\}$ — решение этой задачи, так что r_1^* — минимальное значение r_1. Пусть далее M_1 — совокупность номеров i таких, что $r_1 = t_{ji} + s_{ji}$

и двойственная переменная соответствующего неравенства из формулы (15) отлична от нуля. Если $M_1 = M' = \{2, 3, ..., m\}$, так что множество M_1 содержит $m_1 = m - 1$ чисел, то решение задачи нахождения $\tau^*(j)$ получено: $\tau^*(j) = (r_1^*, r_1^*, ..., r_1^*)$.

В противном случае, когда $m_1 < m - 1$, переходим ко второй задаче:

$$r_2 \to \min_{r_2, \{t_{ji}, s_{ji}\}}$$

при ограничениях (12) и

$$r_2 \geqslant t_{ji} + s_{ji}, \quad i \in M'\backslash M_1;$$

$$d_1^{jk} + \sum_{i \in M_1^>(d^{kj})} d_i^{jk}(\lambda_{i1}^- + t_{ji}^*\delta_i) +$$
$$+ \sum_{i \in M_2^>(d^{kj})} d_i^{jk}(\lambda_{i1}^- + t_{ji}\delta_i) + \sum_{i \in M_1^<(\delta)} d_i^{jk}(\lambda_{i1}^+ - s_{ji}^*\delta_i) +$$
$$+ \sum_{i \in M_2^<(\delta)} d_i^{jk}(\lambda_{i1}^+ - s_{ji}\delta_i) \geq 0, \quad k \in N, \quad k \neq j. \quad (16)$$

Здесь

$$M_1^>(d^{jk}) = \{i \in M_1 | d_i^{jk} > 0\},$$
$$M_1^<(d^{jk}) = \{i \in M_1 | d_i^{jk} < 0\},$$
$$M_2^>(d^{jk}) = \{i \in M'\backslash M_1 | d_i^{jk} > 0\},$$
$$M_2^<(d^{jk}) = \{i \in M'\backslash M_1 | d_i^{jk} < 0\}.$$

Пусть r_2^*, $\{t_{ji}^*, s_{ji}^*\}$ — решение этой задачи, так что r_2^* — минимальное значение r_2. Пусть далее M_2 — совокупность номеров i таких, что $r_2 = t_{ji} + s_{ji}$ и двойственная переменная соответствующего неравенства из формулы (16) отлична от нуля. Если $M_1 \cup M_2 = M'$, то решение задачи нахождения $\tau^*(j)$ получено: первые m_1 компонент вектора $\tau_{\downarrow}^*(j)$ равны r_1^*, а остальные равны r_2^*.

В противном случае переходим к третьей задаче, которая формулируется аналогично второй, и т. д.

Пример 3. В трехкритериальной задаче с $Z = \mathrm{Re}^3$ множество X состоит из трех альтернатив, значения критериев для которых приведены в табл. 3. Кортеж λ состоит из двух ИНЗ $\lambda_{21} = (0,2; 2)$ и $\lambda_{31} = (0,3; 1)$.

Используя решающее правило (9), несложно убедиться в том, что нет пар векторных оценок, сравнимых по R^λ, так что все альтернативы недоминируемы по P^λ и $N = \{1, 2, 3\}$.

Запишем задачу (12)—(15) для $j = 1$, учтя, что $\delta = (1,8; 0,7)$, $d^{12} = (-1, 2, -1)$, $d^{13} = (-6, 6, 1)$:

$$r_1 \to \min_{r_1, t_{12}, s_{12}, t_{13}, s_{13}}$$

при ограничениях

$$r_1 \geq t_{12} + s_{12}, \quad r_1 \geq t_{13} + s_{13},$$
$$t_{12} \geq 0, \ s_{12} \geq 0, \ t_{13} \geq 0, \ s_{13} \geq 0, \ t_{12} + s_{12} \leq 1, \ t_{13} + s_{13} \leq 1,$$
$$-1 + 2\,(0,2 + 1,8t_{12}) - (1 - 0,7s_{13}) \geq 0,$$
$$-6 + 6\,(0,2 + 1,8t_{12}) + (0,3 + 0,7t_{13}) \geq 0.$$

Решив эту задачу с помощью любого пакета программ линейного программирования, например, MS Excel, получим: $r_1^* = 0,391304$; $t_{12}^* = 0,391304$; $s_{12}^* = 0$; $t_{13}^* = 0$; $s_{13}^* = 0,391304$, двойственные переменные для первых двух неравенств отличны от нуля. Поэтому $M_1 = M' = \{2, 3\}$ и $\tau^*(1) = (0,391; 0,391)$.

Запишем задачу (12)—(15) для $j = 2$, учтя, что $d^{21} = (1, -2, 1)$, $d^{23} = (-5, 4, 2)$:

$$r_1 \to \min_{r_1, t_{22}, s_{22}, t_{23}, s_{23}}$$

при ограничениях

$$r_1 \geq t_{22} + s_{22}, \quad r_1 \geq t_{23} + s_{23},$$
$$t_{22} \geq 0, \ s_{22} \geq 0, \ t_{23} \geq 0, \ s_{23} \geq 0, \ t_{22} + s_{22} \leq 1, \ t_{23} + s_{23} \leq 1,$$
$$1 - 2\,(2 - 1,8s_{22}) + (0,3 + 0,7t_{23}) \geq 0,$$
$$-5 + 4\,(0,2 + 1,8t_{22}) + 2\,(0,3 + 0,7t_{23}) \geq 0.$$

Решение этой задачи: $r_1^* = 0,900000$; $t_{22}^* = 0,325000$; $s_{22}^* = 0,575000$; $t_{23}^* = 0,900000$; $s_{23}^* = 0$, двойственные оценки для первых двух неравенств отличны от нуля. Поэтому $M_1 = M' = \{2, 3\}$ и $\tau^*(1) = (0,9; 0,9)$.

Запишем задачу (12)—(15) для $j = 3$, учтя, что $d^{31} = (6, -6, -1)$, $d^{23} = (5, -4, -2)$:

$$r_1 \to \min_{r_1, t_{32}, s_{32}, t_{33}, s_{33}}$$

при ограничениях

$$r_1 \geq t_{32} + s_{32}, \quad r_1 \geq t_{33} + s_{33},$$
$$t_{32} \geq 0, \ s_{32} \geq 0, \ t_{33} \geq 0, \ s_{33} \geq 0, \ t_{32} + s_{32} \leq 1, \ t_{33} + s_{33} \leq 1,$$
$$6 - 6\,(2 - 1,8s_{32}) - (1 - 0,73_{33}) \geq 0,$$
$$5 - 4\,(2 - 1,8s_{32}) - 2\,(1 - 0,7s_{33}) \geq 0.$$

Решение этой задачи: $r_1^* = 0,608696$; $t_{32}^* = 0$; $s_{32}^* = 0,608696$; $t_{33}^* = 0$; $s_{33}^* = 0,608696$, двойственные оценки для первых двух неравенств отличны от нуля. Поэтому $M_1 = M' = \{2, 3\}$ и $\tau^*(1) = (0,608; 0,608)$.

Таблица 3

Значения критериев для альтернатив

Альтернативы x^j	x^1	x^2	x^3
Значения критерия $f_1(x^j) = y_1^j$	1	2	7
Значения критерия $f_2(x^j) = y_2^j$	10	8	4
Значения критерия $f_3(x^j) = y_3^j$	5	6	4

Поскольку $\tau^*_{(1)}(1) = 0{,}391 < \tau^*_{(1)}(2) = 0{,}9$ и $\tau^*_{(1)}(1) = 0{,}391 < \tau^*_{(1)}(3) = 0{,}608$, то мп-оптимальной следует считать альтернативу x^1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит подход к определению понятия согласительного решения задачи выбора для случая параметрической модели предпочтений: предложено выбирать максимально правдоподобно оптимальную альтернативу — наиболее вероятную при равновозможных допустимых значениях параметров. Указаны пути выделения таких альтернатив, конкретизированные в виде методов для нескольких параметрических моделей многокритериальных предпочтений, основанных на функциях ценности и отношениях предпочтения.

Применение полученных результатов представляется эффективным для анализа многокритериальных задач выбора с небольшим числом альтернатив, в частности, при использовании интерактивных процедур их решения.

Автор признателен анонимным рецензентам за конструктивные замечания, направленные на улучшение изложения материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подиновский В.В.* Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 11. — С. 141—159.
2. *Fishburn P.C.*, *Gehrlein W.A.* Comparative analysis of methods for constructing weak order from partial order // Journal of mathematical sociology. — 1975. — Vol. 4. — P. 93—102.
3. *Danielson M.*, *Ekenberg L.* Using surrogate weights for handling preference strength in multi-criteria decisions / In: Kamiński B., Kersten G., Szapiro T. (Eds.). Outlooks and insights on group decision and negotiation. — Springer, 2015. — P. 107—118.
4. *Подиновский В.В.* Согласительные решения многокритериальных задач выбора // Информационные технологии в науке, образовании и управлении: материалы Международной конференции IT + S & E`16 (Гурзуф, 22.05.—01.06.2016 г.) / Под ред. Е.Л. Глориозова. — М.: ИНИТ, 2016. — С. 117—123.
5. *Edwards W.*, *Barron H.F.* SMARTS and SMARTER: improved simple methods for multiattribute utility measurement // Organisational behavior and human decision processes. — 1994. — Vol. 60. — P. 306—325.
6. *Dawes R.D.*, *Corrigat B.* Linear models in decision making // Psychological bulletin. — 1974. — Vol. 81. — P. 95—106.
7. *Roszkowska E.* Rank ordering criteria weighting methods — a comparative overview // Optimum: studia ekonomiczne. — 2013. — Vol. 65. — № 5 (65). — P. 14—33.
8. *Stillwell W.G.*, *Seaver D.A.*, *Edwards W.* A comparison of weight approximation techniques in multiattribute utility decision-making // Organizational behavior and human performance. — 1981. — Vol. 28. — P. 62—77.
9. *Solymosi T*, *Dompi J.* Method for determining the weights of criteria: the centralized weights // European journal of operational research. — 1985. — Vol. 26. — P. 35—41.
10. *Barron F.J.* Selecting a best multiattribute alternative with partial information about attribute weights // Acta psychologica. — 1992. — Vol. 80. — P. 91—103.
11. *Barron F.J.*, *Barret B.E.* Decision quality using ranked attribute weights // Management science. — 1996. —Vol. 42. — P. 1515—1523.
12. *Льюс Р.Д.*, *Райфа Х.* Игры и решения. Введение и критический обзор / Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
13. *Belton V.*, *Stewart T.J.* Multiple criteria decision analysis. An integrated approach. — Boston: Cluwer, 2003.
14. *Roberts R.*, *Goodwin P.* Weight approximations in multi-attribute decision models // Journal of multi-criteria decision analysis // Optimization, learning, and decision support. — 2002. — Vol. 11. — P. 291—303.
15. *Danielson M.*, *Ekenberg L.*, *He Y.* Augmenting ordinal methods of attribute weight approximation // Decision analysis. — 2014. — Vol. 11. — P. 21—26.
16. *Подиновский В.В.* Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — № 3. — С. 429—438.
17. *Rios-Insua D.*, *French S.* A framework for sensitivity analysis in discrete multi-objective decision-making // European journal of operational research. — 1991. — Vol. 54. — P. 176—190.
18. *Eum Y.S.*, *Park K.S.*, *Kim S.H.* Establishing dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise weight and value // Computer and operations research. — 2001. — Vol. 28. — P. 397—409.
19. *Подиновский В.В.* Анализ устойчивости результатов выбора при частичном отношении предпочтения // Искусственный интеллект и принятие решений. — 2009. — № 4. — С. 45—52.
20. *Podinovski V.V.* Sensitivity analysis for choice problems with partial preference relations // European journal of operational research. — 2012. — № 1. — P. 198—204.
21. *Ермаков С.М.*, *Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование. — М: Наука, 1982.
22. *Nikaido H.* Convex structures and economic theory. — N.-Y.: Academic Press, 1968.
23. *Подиновский В.В.* Параметрическая важность критериев и интервалы неопределенности замещений в анализе многокритериальных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — № 11. — С. 1979—1998.
24. *Levanon Y.*, *Passy U.* The indifference band in multiple criteria decision problems // Omega. — 1980. — Vol. 8. — P. 647—654.
25. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — № 2. — С. 330—344.
26. *Vilkas E.* An axiomatic definition of the leximin // European journal of political economy. — 1986. — Vol. 2/4. — P. 455—463.
27. *Подиновский В.В.* Задача оценивания коэффициентов важности как симметрически-лексикографическая задача оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 3. — С. 150—162.
28. *Podinovski V.V.* Interval articulation of superiority and precise elicitation of priorities // European journal of operational research. — 2007. — Vol. 180. — P. 406—417.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Подиновский Владислав Владимирович — д-р техн. наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ podinovski@mail.ru.