УДК 519.816

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2020.5.1

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ: МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ПОДХОД [1]

В.В. Подиновский, А.П. Нелюбин

Аннотация. Предложен новый подход к определению понятия средней величины для конечного множества X чисел $x_1, x_2, ..., x_n$: удаленность произвольной точки x от каждой отдельной точки x_i оценивается расстоянием $f_i(x)$ между ними, а удаленность точки x от всего множества X характеризуется векторным критерием $(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$; при помощи этого критерия задается отношение предпочтения в удаленности; средней величиной считается точка x^*, недоминируемая по такому отношению. Исследованы свойства и структура средних для нескольких отношений предпочтения, в том числе отношения Парето и отношения, порождаемого информацией о равноважности критериев. Выяснена взаимосвязь между введенными средними величинами и основными статистическими средними — медианой, средними арифметической, квадратической, геометрической и гармонической. Рассмотрены вопросы построения множеств таких средних, предложен эффективный метод построения для случая, когда одинаково важные критерии имеют шкалу первой порядковой метрики. Обсуждены направления возможных обобщений введенного понятия на многомерный случай.

Ключевые слова: средние величины, многокритериальные задачи выбора, отношения предпочтения, недоминируемые точки, теория важности критериев, равноважные критерии, теория мажоризации.

ВВЕДЕНИЕ

В управлении, экономике, социологии, технике и других областях науки и практики широко применяются средние величины. В общей теории статистики это понятие определяется таким образом: «Средней величиной называется статистический показатель, который дает обобщенную характеристику варьирующего признака однородных единиц совокупности. <...> Сущность средней заключается в том, что в ней взаимопогашаются случайные отклонения значений признака и учитываются изменения, вызванные основным фактором» [1]. И еще: «Средняя величина — это обобщающая характеристика единиц совокупности по какому-либо варьирующему признаку <...> Средние величины позволяют сравнивать уровни одного и того же признака в различных совокупностях и находить причины этих расхождений» [2].

Однако следует иметь в виду важное обстоятельство: «... не существует возможности нахождения некой универсальной формулы, исчерпывающей понятие средней величины и обладающей конструктивными достоинствами». (*Из предисловия в книге* [3].) Поэтому актуальной остается проблема поиска подходов к общей формулировке понятия средней величины и ее конкретизации для различных ситуаций (задач). В нашей статье предлагаются новые подходы к решению указанной проблемы, основанные на идеях и методах многокритериальной оптимизации.

1. СВЕДЕНИЯ О СРЕДНИХ ВЕЛИЧИНАХ

Вначале для удобства читателя приведем необходимые сведения о средних величинах. Пусть имеется совокупность X, состоящая из $n \geq 2$ действительных чисел, называемых далее данными, или

[1] Исследования финансировались в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

точками и являющихся результатами измерения интенсивности некоторого выделенного признака:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}. \qquad (1)$$

Эти данные являются однородными в том смысле, что измерения производились по одной и той же шкале [4], характеризуемой множеством допустимых преобразований Φ — числовых функций φ, так что вместо признака (1) можно рассматривать множество

$$\varphi(X) = \{\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n)\} \qquad (2)$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$. Для основных типов шкал [4] областью определения функций φ является вся числовая прямая $\mathrm{Re} = (-\infty, +\infty)$ или же положительный луч $\mathrm{Re}_+ = [0, +\infty)$.

Упорядоченные соответственно по неубыванию и невозрастанию множества

$$X_\uparrow = \langle x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\rangle;$$
$$X_\downarrow = \langle x_{[1]}, x_{[2]}, ..., x_{[n]}\rangle, \qquad (3)$$

где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$ и $x_{[1]} \ge x_{[2]} \ge ... \ge x_{[n]}$, получаются из совокупности чисел (1) при помощи соответствующих перестановок. Отметим, что множество (1) в статистике называется выборкой, а первая совокупность из множества (3) — вариационным рядом.

Функция n переменных $g(X) = g(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *средней величиной*, *средней* или *средним* (*по Коши*), если

$$\min\{x_1, x_2, ..., x_n\} \le g(x_1, x_2, ..., x_n) \le \le \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}. \qquad (4)$$

Иногда дополнительно требуется, чтобы оба неравенства в выражении (4) были строгими [3]. Поскольку все данные в признаке (1) считаются «одинаково весомыми», то функция g должна быть симметрической, так что, в частности, $g(X) = g(X_\uparrow) = g(X_\downarrow)$. Функция f может задаваться аналитически, алгоритмически или иными способами. Она может быть как однозначной, так и многозначной, и средняя называется соответственно однозначной или многозначной. Адекватный вид средней, т. е. тот конкретный вид функции g, которую можно корректно применять, зависит от типа шкалы, по которой производились измерения для получения признака (1) [5].

Вначале рассмотрим случай качественных данных, когда шкала порядковая, а множество $\Phi = \Phi_п$ включает все возрастающие непрерывные на Re функции:

$$\Phi_п = \{\varphi: x > y \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(y); \lim_{x \to a}\varphi(x) = \varphi(a)\}.$$

Преобразования данных (1) с учетом $\varphi \in \Phi_П$ сохраняет их упорядочение: $x_i > x_j \Rightarrow \varphi(x_i) > \varphi(x_j)$. Поэтому адекватной средней для порядковой шкалы является, например, медиана μ_X, которая определяется с помощью вариационного ряда так: если число n нечетное, то медиана равна центральному члену ряда: $\mu_X = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$; если же число n четное, то медианой является любое число, заключенное между значениями двух центральных членов $x_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ и $x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, так что медиана оказывается многозначной средней.

Будем теперь полагать, что данные (1) являются количественными, т. е. измерения производились в шкале интервалов ($\Phi = \Phi_и$) или же шкале отношений ($\Phi = \Phi_о$):

$$\Phi_и = \{\varphi: \varphi(x) = kx + l, k > 0\},$$
$$\Phi_о = \{\varphi: \varphi(x) = kx, k > 0\}.$$

Множество $\Phi_и$ состоит из всех возрастающих линейных функций, а множество $\Phi_о$ — из всех возрастающих линейных однородных функций. Для таких данных медиана, разумеется, тоже является адекватной средней. Более того, здесь в случае четного числа n для устранения многозначности часто за медиану принимают среднюю арифметическую центральных членов $x_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ и $x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ или же иное число, лежащее между ними [3].

В случаях, когда все числа в данных (1) неотрицательны, а шкала измерений является шкалой отношений, на практике широко применяется средняя степенная

$$g^s(X) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^s\right)^{1/s}, \quad s \ne 0. \qquad (5)$$

Отметим следующие свойства этой средней [3]:

- $g^s(X)$ непрерывна по совокупности переменных x_i на Re_+^n и непрерывна по s на Re, кроме точки $s = 0$;
- $g^s(X)$ возрастает по каждой переменной x_i и возрастает по s, если не все x_i равны;
- справедливы формулы:

$$\lim_{s \to -\infty} g^s(X) = \min_{i \in N} x_i, \ \lim_{s \to 0} g^s(X) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n},$$

$$\lim_{s \to +\infty} g^s(X) = \max_{i \in N} x_i, \qquad (6)$$

где $N = \{1, 2, ..., n\}$. Если доопределить по непрерывности функцию $g^s(X)$ для $s = 0$, положив ее равной, с учетом второго равенства из (6), средней геометрической $g^0(X) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$, то функция $g^s(X)$ при изменении s от $-\infty$ до $+\infty$ будет пробегать все значения из интервала $(\min_{i\in N} x_i, \max_{i\in N} x_i)$.

При $s = 1$ средняя степенная $g^s(X)$ оказывается равной средней арифметической $g^1(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, которая определена и в том более общем случае, когда числа x_i в данных (1) могут иметь любой знак. Среднюю арифметическую можно корректно применять, когда данные (1) получены измерениями по шкале интервалов.

2. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Теперь приведем необходимые сведения из теории многокритериальной оптимизации [6]. Далее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия решения по $n \geq 2$ критериям:

$$\langle V, f, R\rangle. \tag{7}$$

Здесь V — множество *вариантов* (действий), или стратегий, планов, альтернатив (оно содержит не менее двух вариантов); $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ — *векторный критерий*, состоящий из n частных критериев f_i: $V \to Z_i$, т. е. *критерий* f_i — это функция с областью определения V и числовой областью значений $Z_i \subseteq \mathrm{Re}$. Каждый вариант v из множества V характеризуется своей *векторной оценкой* $y(v) = f(v) = (f_1(v), f_2(v), ..., f_n(v))$. Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок. Множество всех векторных оценок есть $Z = Z_1 \times Z_2 \times ... \times Z_n$. Через Y обозначается множество достижимых векторных оценок, т. е. множество значений векторного критерия: $Y = f(V) = \{y \in Z | \exists v \in V\colon y = f(v)\}$.

Предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), моделируются на множестве Z при помощи *отношения нестрогого предпочтения* R, так что yRz означает, что векторная оценка y не менее предпочтительна, чем оценка z. Отношение R является *квазипорядком*, т. е. оно рефлексивно и транзитивно: верно yRy и (yRz, zRu) влечет yRu при любых $y, z, u \in Z$. Если найдутся две векторные оценки y и z, несравнимые по R, т. е. для которых неверно ни yRz, ни zRy, то квазипорядок называется частичным, или несвязным, в противном случае — полным, или связным.

Отношение R порождает *отношение безразличия* I и (строгого) *предпочтения* P следующим образом: $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$; $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge z\cancel{R}y$ (здесь $z\cancel{R}y$ означает, что zRy неверно). Отношение R определяется составом информации о предпочтениях ЛПР. Запись yIz означает, что векторные оценки y и z одинаковы по предпочтительности, или безразличны, а запись yPz означает, что векторная оценка y предпочтительнее, чем оценка z. Отношение R, заданное на множестве Z подходящим решающим правилом на основе имеющейся информации Γ о предпочтениях ЛПР, обозначается R^Γ. Отношения R^Γ, I^Γ и P^Γ порождают имеющие аналогичный смысл отношения R_Γ, I_Γ и P_Γ на множестве V:

$$vR_\Gamma w \Leftrightarrow f(v)R^\Gamma f(w), \quad vI_\Gamma w \Leftrightarrow f(v)I^\Gamma f(w),$$
$$vP_\Gamma v \Leftrightarrow f(v)P^\Gamma f(w). \tag{8}$$

(Достижимая) векторная оценка $y^* \in Y$ называется *недоминируемой* (по P^Γ), если не существует (достижимой) векторной оценки $y \in Y$ такой, что верно $yP^\Gamma y^*$; в противном случае она — доминируемая (по отношению P^Γ векторной оценкой y). Недоминируемым векторным оценкам соответствуют недоминируемые варианты: вариант v^* недоминируем (по P_Γ), если не существует варианта v такого, что верно $vP_\Gamma v^*$. Пусть Y^Γ и V^Γ — множества недоминируемых векторных оценок и вариантов соответственно. Любые две недоминируемые векторные оценки (недоминируемые варианты) либо безразличны, либо несравнимы. Множество Y^Γ (множество V^Γ) называется внешне устойчивым, если для всякой доминируемой векторной оценки y (доминируемого варианта v) найдется недоминируемая векторная оценка y^* (недоминируемый вариант v^*) такая (такой), что верно $y^*P^\Gamma y$ (соответственно $v^*P_\Gamma v$). Оптимальный (наилучший) вариант надлежит выбрать среди множества недоминируемых вариантов, если оно внешне устойчиво.

Множества $R_+^\Gamma(y) = \{z \in A | zR^\Gamma y\}$ и $R_-^\Gamma(y) = \{z \in A | yR^\Gamma z\}$ называются соответственно верхним и нижним срезами множества $A \subseteq Z$ отношением R^Γ через точку $y \in A$. Если верхний срез через каждую точку $y \in Y$ является множеством замкнутым и ограниченным, то множество недоминируемых векторных оценок Y^Γ не пусто и, более того, внешне устойчиво [7]. Полезно иметь в виду, что если множество стратегий $V \subset \mathrm{Re}^m$ является замкнутым и ограниченным, а все критерии f_i — непрерывные на V функции, то и множество V^Γ замкнуто и ограничено.

Будем далее полагать, что предпочтения ЛПР с увеличением значений критериев f_i убывают, или, иными словами, что критерии желательно минимизировать[2]. При отсутствии иной информации о предпочтениях на множестве Z предпочтения описывает отношение Парето $P^\varnothing$, определяемое так:

$$yP^\varnothing z \Leftrightarrow (y_i \le z_i,\ i = 1, 2, ..., n;\ y \ne z). \qquad (9)$$

Отношение $R_\varnothing$ определяется n нестрогими неравенствами из (9). Отношение $P^\varnothing$ порождает на V отношение Парето $P_\varnothing$: $vP_\varnothing w \Leftrightarrow f(v)P^\varnothing f(w)$.

Недоминируемые по $P^\varnothing$ векторные оценки (и недоминируемые по соответствующему отношению $P_\varnothing$ варианты) называются оптимальными по Парето и составляют множество $Y^\varnothing$ (соответственно $V_\varnothing$). Определение отношения $P_\varnothing$ и множества $V_\varnothing$ корректно, даже если каждый критерий имеет свою всего лишь порядковую шкалу: после применения к критериям f_i соответствующих допустимых преобразований φ_i (возрастающих на Re непрерывных функций) указанные отношение и множество не изменяются.

Теперь предположим, что все критерии имеют общую порядковую шкалу, так что $Z_1 = Z_2 = ... = Z_n = Z_0$, и $Z = Z_0^n$. Рассмотрим случай, когда все критерии равноважны [8]. Пусть Π — множество перестановок $\pi = \langle\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n)\rangle$ множества $\{1, 2, ..., n\}$. Критерии $f_1, f_2, ..., f_n$ называются *равноважными* (имеющими одинаковую важность), если одинаковы по предпочтительности всякая векторная оценки y и полученная из нее при помощи любой перестановки $\pi \in \Pi$ векторная оценка $\pi(y) = (y_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, ..., y_{\pi(n)})$. Информацию о том, что все критерии равноважны, будем обозначать через E. Отношение нестрогого предпочтения R^E (квазипорядок), порождаемое на Z такой информацией, задается следующим образом:

$yR^Ez \Leftrightarrow$ найдутся такие перестановки $\pi, \rho \in \Pi$, что

$$y_{\pi(1)} \le z_{\rho(1)},\ y_{\pi(2)} \le z_{\rho(2)},\ ...,\ y_{\pi(n)} \le z_{\rho(n)}; \qquad (10)$$

при этом yI^Ez, когда все n нестрогих неравенств выполняются как равенства, и yP^Ez, когда хотя бы одно из неравенств является строгим. Эти отношения порождают, согласно выражению (8), соответствующие отношения R_E, I_E и P_E на множестве вариантов V.

Следующие равносильные утверждения задают простые правила проверки справедливости выполнения соответствующих соотношений (см. выражение (3)):

$$yR^Ez \Leftrightarrow y_{(1)} \le z_{(1)},\ y_{(2)} \le z_{(2)},\ ...,\ y_{(n)} \le z_{(n)};$$

$$yR^Ez \Leftrightarrow y_{[1]} \le z_{[1]},\ y_{[2]} \le z_{[2]},\ ...,\ y_{[n]} \le z_{[n]}. \qquad (11)$$

И здесь также справедливы замечания, аналогичные приведенным сразу после выражения (10).

Отношения P^E и P_E порождают соответствующие множества Y^E и V_E недоминируемых соответственно по P^E и P_E векторных оценок и вариантов. Определения отношений R_E, P_E, I_E и множества V_E корректны, даже если общая шкала критериев всего лишь порядковая.

Заданная на Z симметрическая функция $\psi(y)$ называется возрастающей (неубывающей, убывающей, невозрастающей) по P^E, если из yP^Ez следует $\psi(y) > \psi(z)$ (соответственно $\psi(y) \ge \psi(z)$, $\psi(y) < \psi(z)$, $\psi(y) \le \psi(z)$). Примером такой убывающей по P^E функции является $\psi_\Sigma(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$, а невозрастающей — функция $\psi^\spadesuit(y|a) = \min_{\pi \in \Pi}\max_{i \in N}\{y_{\pi(i)} - a_i\}$, где a — произвольный вектор из Z.

Пусть y^* — точка минимума функции $\psi(y)$, неубывающей по P^E на Z. Для того, чтобы точка y^* была недоминируемой по P^E, достаточно, чтобы функция ψ была убывающей по P^E или чтобы эта точка была единственной (с точностью до эквивалентности I^E) точкой минимума указанной функции. Если y^* — недоминируемая по P^E точка, то она является единственной (с точностью до эквивалентности I^E) точкой минимума функции $\psi^\spadesuit(y|y^*)$ на Y, причем этот минимум равен нулю. Следовательно, все недоминируемые по P^E векторные оценки будут найдены в результате решения параметрической задачи минимизации функции $\psi^\spadesuit(y|a)$ для $a \in Y$ (но при этом могут быть выделены и доминируемые).

Выделить оптимальные варианты среди недоминируемых по P_E позволяет дополнительная информация о предпочтениях, касающаяся, в частности, возможности взаимной компенсации значений критериев. Если увеличение бóльших значений одних критериев не компенсируется уменьшени-

[2] Это следует помнить при обращении к указанной в статье литературе, так как в ней предполагается, что критерии желательно максимизировать.

ем меньших значений других, то предпочтения на множестве Z описываются лексикографическим отношением R^{EL}:

$$yR^{EL}z \Leftrightarrow (y_{[1]} < z_{[1]}) \vee (y_{[1]} = z_{[1]},\, y_{[2]} < z_{[2]}) \vee \ldots \vee \vee (y_{[i]} = z_{[i]},\, i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (12)$$

причем $yP^{EL}z$ верно, если последние n равенств в (12) не выполнены. Отношение R^{EL} — полный квазипорядок. Векторная оценка $y^* \in Y$ оптимальна по R^{EL}, если $y^* R^E y$ для любой $y \in Y$. Отношение R^{EL} порождает на V отношение R_{EL}. Все оптимальные векторные оценки (варианты) эквивалентны по I^E (соответственно по I_E) и недоминируемы по P^E (по P_E).

Пусть, наконец, стало известно, что общая шкала равноважных критериев является шкалой первой порядковой метрики [9]. Это означает, что если в произвольной векторной оценке y, в которой $y_i > y_j$, заменить y_i на $y_i - \delta$, а y_j — на $y_j + \delta$, где δ — положительное число такое, что $y_i - \delta \ge y_j + \delta$, то полученная таким образом векторная оценка z будет предпочтительнее, чем исходная y. Отношение нестрогого предпочтения $R^{E\Delta}$, порождаемое такой информацией на Z, задается так [10, 11]:

$$yR^{E\Delta}z \Leftrightarrow (y_{[1]} \le z_{[1]},\, y_{[1]} + y_{[2]} \le z_{[1]} + z_{[2]}, \ldots, y_{[1]} + y_{[2]} + \ldots + y_{[n]} \le z_{[1]} + z_{[2]} + \ldots + z_{[n]}). \qquad (13)$$

И здесь справедливы замечания, аналогичные приведенным сразу после выражения (10).

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН КАК НЕДОМИНИРУЕМЫХ ТОЧЕК

Рассмотрим множество данных X (см. (1)). Пусть x — произвольное фиксированное число — точка на числовой прямой Re. Удаленность ее от отдельной точки x_i из X можно оценить расстоянием $y_i = |x - x_i|$. Тогда удаленность x от совокупности всех точек из X характеризуется вектором $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, составленным из таких расстояний. Его можно считать значением векторного критерия $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, где $f_i(x) = |x - x_i|$. Областью значений Z этого векторного критерия является положительный квадрант $\mathrm{Re}^n_+ = [0, +\infty)^n$ — множество векторов с неотрицательными компонентами, а множество значений $Y = f(X) \subset Z$ может иметь довольно сложную конфигурацию уже при $n = 3$. Для случаев $n = 2$ и $n = 3$ оно изображено на рис. 1 и 2.

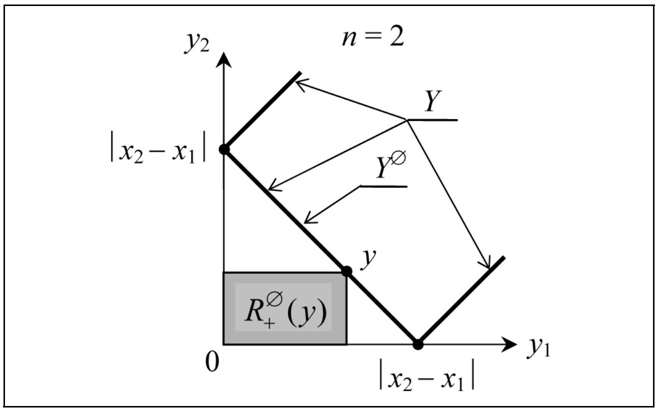

Рис. 1. График множества векторных оценок Y

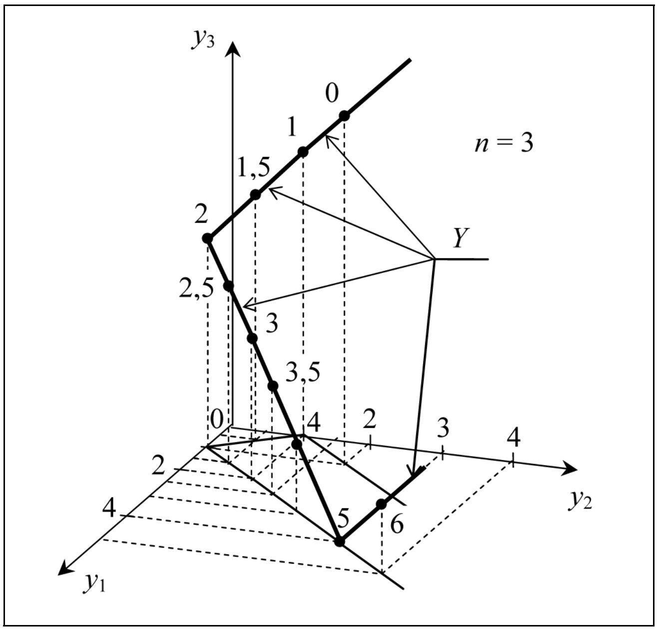

Рис. 2. График множества векторных оценок $Y(X = \{1, 2, 5\}$; числа у точек ломаной Y — значения x; на плоскости $y_1 0 y_2$ — проекция $Y)$

По терминологии дифференциальной геометрии [12] непрерывное отображение f: $\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}^n_+$ — это параметрическая кривая (параметр x), и притом простая (так как отображение взаимно-однозначное). Проще говоря, $Y = f(X)$ — (непрерывная) кривая в многомерном пространстве (без самопересечений).

Пусть на множестве Z задано отношение нестрого предпочтения — частичный квазипорядок R^{Γ}, где Γ — информация о предпочтениях ЛПР, касающаяся удаленности: если верно $xP_{\Gamma}x'$, то точка x ближе к совокупности точек X, чем x'. Следовательно, на роль наиболее близких к X и представляющих все множество X могут претендовать лишь те точки, которые недоминируемы по P_Γ. Если множество таких точек $G^\Gamma(X)$ внешне устойчиво, то все они будут именоваться ПН-средними (средними по Подиновскому — Нелюбину), а более конкретно (для рассматриваемой информации Г) и кратко — средними по P_Γ.

Утверждение 1. *Средними по* $P_\varnothing$ *являются все точки отрезка от* $x_{(1)} = \min_{i \in N} x_i$ *до* $x_{(n)} = \max_{i \in N} x_i$, *т. е.* $G^\varnothing(X) = \bar{X} = [x_{(1)}, x_{(n)}]$. *Это множество внешне устойчиво.* ♦

Доказательство этого и следующих утверждений вынесено в Приложение.

Таким образом, понятие средних по $P_\varnothing$ оказывается эквивалентным понятию средних по Коши.

На рис. 1 множество $Y^\varnothing$ векторных оценок средних по $P_\varnothing$ — это один отрезок. На рис. 2 множество $Y^\varnothing$ состоит из двух звеньев ломаной — от (0, 1, 4) до (1, 0, 3) и от (1, 0, 3) до (4, 3, 0).

Множество $G^\varnothing(X)$ имеет очень простую структуру и задается явно. Однако для других отношений P_Γ сложность конфигурации множества Y^Γ приводит к сложности конфигурации и структуры множества ПН-средних $G^\Gamma(X)$, что существенно затрудняет его построение (см. далее).

Отметим, что если φ — возрастающая на Re_+ функция, то замена исходных критериев $f_i(x) = |x - x_i|$ на критерии $\varphi(f_i(x))$ не изменяет множество $G^\varnothing(X)$. Например, можно перейти к «гладким» критериям $f_i(x) = (x - x_i)^2$.

4. СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ РАВНОВАЖНЫХ КРИТЕРИЯХ

Далее будем полагать, что все критерии имеют равную важность (информация E). В этом случае удаленность точки x от множества X оценивается отношением R_E на Re^n, которое определяется согласно соотношениям (11) каждым из двух равносильных правил:

$$xR_Ex' \Leftrightarrow f_{(1)}(x) \le f_{(1)}(x'),$$
$$f_{(2)}(x) \le f_{(2)}(x'),\ \ldots,\ f_{(n)}(x) \le f_{(n)}(x');$$
$$xR_Ex' \Leftrightarrow f_{[1]}(x) \le f_{[1]}(x'),$$
$$f_{[2]}(x) \le f_{[2]}(x'),\ \ldots,\ f_{[n]}(x) \le f_{[n]}(x'), \qquad (14)$$

где $f_i(x) = |x - x_i|$. ПН-средними (по R_E), составляющими $G^E(X)$, здесь являются недоминируемые по P_E точки числовой прямой.

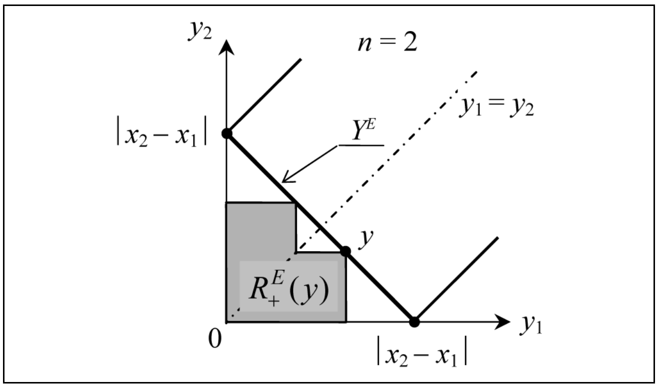

Рис. 3. График множества векторных оценок Y^E

Утверждение 2. *Множество* $G^E(X) \subseteq G^\varnothing(X) = \bar{X}$ *и внешне устойчиво.* ♦

Отметим, что если φ — возрастающая на Re_+ функция, то замена исходных критериев $f_i(x)$ на критерии $\varphi(f_i(x))$ не изменяет отношение R_E и множество $G^E(X)$.

Пример 1. Нетрудно понять, что при $n = 2$ любые две различные точки из $\bar{X}$ несравнимы по отношению P_E и поэтому имеет место равенство $G^E(X) = \bar{X}$. Заметим, что верхние срезы Re_+^n отношением P^E не выпуклы (рис. 3).

Пример 2. Пусть $n = 3$ и $X = \{1, 2, 5\}$. Здесь $G^E(X) = [1{,}5; 3]$. На рис. 2 множество Y^E состоит из двух звеньев ломаной — от (1/2, 1/2, 3 1/2) до (1, 0, 3) и от (1, 0, 3) до (2, 1, 2). ♦

В этих двух примерах структура множества $G^E(X)$ проста — это один отрезок. Однако при больших значениях n это множество может представлять собой объединение нескольких промежутков, границы которых могут им не принадлежать! Это — следствие невыпуклости и замкнутости верхних срезов Re_+^n отношением P^E.

Пример 3. При $n = 6$ имеем:

$$G^E(\{10, 11, 15, 61, 107, 110\}) = $$
$$= [10{,}5; 83) \cup (83{,}5; 84{,}5) \cup (106{,}5; 109);$$

$$G^E(\{10, 11, 40, 55, 70, 110\}) = $$
$$= [10{,}5; 18) \cup (18; 67{,}5) \cup (68; 75);$$

$$G^E(\{10, 57, 61, 64, 109, 110\}) = $$
$$= (56{,}5; 57{,}5) \cup (58{,}5; 88{,}5) \cup (108; 109{,}5]. \ ♦$$

Примеры 2 и 3 иллюстрируют и следующее

Утверждение 3. *Если* $x_{(i)}$ *и* $x_{(i+1)}$ *— два неравных смежных члена вариационного ряда с минимальным расстоянием* $x_{(i)} - x_{(i+1)}$ *между ними и такой интервал единствен, то их середина — точка* $x^c = 1/2(x_{(i)} + x_{(i+1)})$ *входит в состав* $G^E(X)$*; при этом если* $x_{(i)}$ *есть* $x_{(1)}$ *(соответственно* $x_{(i+1)}$ *есть* $x_{(n)}$*),* *то x^c — это левая (соответственная правая) точка множества $G^E(X)$.* ♦

Не при всяком значении параметра s средняя степенная $g^s(X)$ (см. формулу (5)) является и средней по P_E, если $x_{(1)} \neq x_{(n)}$ и $(x_{(1)}, x_{(n)}) \not\subset G^E(X)$, ибо продолженная по непрерывности функция $g^s(X)$ при возрастании s на Re пробегает все значения из интервала $(x_{(1)}, x_{(n)})$ (см. § 2). Однако справедливо

Утверждение 4. *Средняя арифметическая является и средней по P_E, т. е. $g^1(X) \in G^E(X)$.* ♦

Пример 4. Согласно примеру 3 для $X = \{10, 57, 61, 64, 109, 110\}$ имеем: $G^E(X) = (56{,}5; 57{,}5) \cup (58{,}5; 88{,}5) \cup (108; 109{,}5]$: здесь средняя геометрическая $g^0(X) = 54{,}66 \notin G^E(X)$ и средняя гармоническая $g^{-1}(X) = 35{,}75 \notin G^E(X)$, но, конечно, $g^1(X) = 68{,}5 \in G^E(X)$. В примере 2 для $X = \{1, 2, 5\}$ имеем $G^E(X) = [1{,}5; 3]$; здесь средняя квадратическая $g^2(X) = 3{,}162 \notin G^E(X)$, но $g^1(X) = 2{,}67 \in G^E(X)$.

Утверждение 5. *Медиана является и средней по P_E, т. е. при нечетном n, когда медиана однозначна, верно $\mu(X) = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \in G^E(X)$, а при нечетном n, когда медиана многозначна, верно $\mu(X) = [x_{\left(\frac{n}{2}\right)}, x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}] \subseteq G^E(X)$.* ♦

Это утверждение иллюстрируют примеры 2 и 3.

5. СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ РАВНОВАЖНЫХ КРИТЕРИЯХ И ОТСУТСТВИИ КОМПЕНСАЦИИ УДАЛЕННОСТЕЙ

Пусть увеличение удаленности точки x от одних точек x_i не компенсируется уменьшением ее удаленности от других. В этом случае для определения ПН-средних можно воспользоваться отношением R_{EL}, задаваемым на X правилом согласно отношению (12):

$$xR_{EL}x' \Leftrightarrow [f_{[1]}(x) < f_{[1]}(x')] \vee [f_{[1]}(x) = f_{[1]}(x'), f_{[2]}(x) < f_{[2]}(x')] \vee \ldots \vee [f_{[i]}(x) = f_{[i]}(x'), i = 1, 2, \ldots, n]. \quad (15)$$

Поскольку расстояние от середины отрезка $\bar{X}$ — точки $x^c = 1/2(x_{[1]} + x_{[n]})$ — до каждой из двух крайних точек множества X равно $d = 1/2(x_{[1]} - x_{[n]})$, а для любой другой точки x расстояние до одной из крайних точек больше, чем d, то точка x^c является оптимальной по R_E, т. е. верно $x^cR_{EL}x$. Следовательно, x^c является однозначной средней по R_{EL} и $G^{EL}(X) = \{x^c\}$. Так как $P_{EL} \supset P_E$, то $x^c \in G^E(X)$, т. е. в число средних по R_E всегда входит середина отрезка $\bar{X}$.

6. СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ РАВНОВАЖНЫХ КРИТЕРИЯХ СО ШКАЛОЙ ПЕРВОЙ ПОРЯДКОВОЙ МЕТРИКИ

Будем рассматривать случай, когда векторная оценка z, полученная из произвольной векторной оценки y, в которой $y_i > y_j$, заменой y_i на $y_i - \delta$ и y_j на $y_j + \delta$, где δ — положительное число такое, что $y_i - \delta \geq y_j + \delta$, будет предпочтительнее, чем исходная y в том смысле, что она, как более «сконцентрированная», считается более подходящей для роли средней (такая информация будет обозначаться буквой Δ). Это означает (см. § 2), что общая шкала равноважных критериев является шкалой первой порядковой метрики. Отношение нестрогого предпочтения $R_{E\Delta}$, порождаемое совокупной информацией E и Δ на Re^n, задается, согласно отношению (13), таким решающим правилом:

$$xR_{E\Delta}x' \Leftrightarrow [f_{[1]}(x) \leq f_{[1]}(x'), f_{[1]}(x) + f_{[2]}(x) \leq f_{[1]}(x') + f_{[2]}(x'), \ldots, f_{[1]}(x) + f_{[2]}(x) + \ldots + f_{[n]}(x) \leq f_{[1]}(x') + f_{[2]}(x') + \ldots + f_{[n]}(x')]. \quad (16)$$

ПН-средними здесь являются точки, недоминируемые по $P_{E\Delta}$. Так как $P_{E\Delta} \supset P_E$, то $G^E(X) \supseteq G^{E\Delta}(X)$.

Отметим, что верхние срезы Re^n_+ отношением $P^{E\Delta}$ — выпуклые множества (рис. 4).

Так как $P_{EL} \supset P_{E\Delta}$, то $G^E(X) \supseteq G^{EL`}(X) = \{x^c\}$.

Утверждение 6. *Средняя арифметическая является и средней по $P_{E\Delta}$, т. е. $g^1(X) \in G^{E\Delta}(X)$.*

Утверждение 7. *При нечетном n, когда медиана однозначна, она является и средней по $P_{E\Delta}$, т. е. верно $\mu(X) \in G^{E\Delta}(X)$; при четном n, когда медиана многозначна, верно лишь $\mu(X) \cap G^{E\Delta}(X) \neq \varnothing$.*

Пример 5. При $n = 5$ для $X = \{1, 2, 3, 5, 11\}$ имеем $G^{E\Delta}(X) = [3; 6]$, $\mu(X) = 3$, $g^1(X) = 4{,}4$. При $n = 4$ для

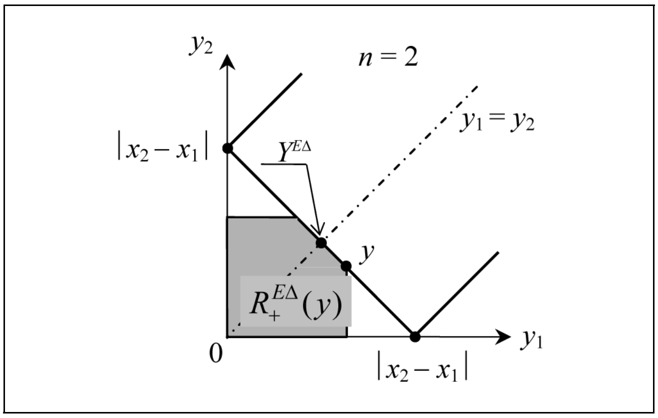

Рис. 4. График множества векторных оценок $Y^{E\Delta}$

$X = \{10, 11, 12, 110\}$ имеем $G^{E\Delta}(X) = [11{,}5; 60]$, $\mu(X) = [11; 12]$, $g^1(X) = 35{,}75$, а для $X = \{10, 11, 20, 110\}$ имеем $G^{E\Delta}(X) = [15{,}5; 60]$, $\mu(X) = [11; 20]$, $g^1(X) = 35{,}75$. ♦

Введем в рассмотрение функции

$$\sigma_k(x) = \sum_{i=1}^{k} f_{[i]}(x), \quad k = 1, 2, ..., n. \qquad (17)$$

Утверждение 8. *Функции* (17) *являются выпуклыми кусочно-линейными, их графики — ломаные линии.* ♦

С помощью функций (17) решающее правило (16) можно переписать в таком виде:

$$xR_{E\Delta}x' \Leftrightarrow \sigma_k(x) \le \sigma_k(x'), \quad k = 1, 2, ..., n. \qquad (18)$$

Заметим, что, согласно решающему правилу (18), отношение $R_{E\Delta}$ можно считать отношением Парето (отношением покомпонентного нестрогого доминирования) по векторному критерию $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x), ..., \sigma_n(x))$, и множество $G^{E\Delta}(X)$ считать множеством Парето для векторного критерия $\sigma(x)$.

Обозначим области минимальных значений выпуклых кусочно-линейных функций $\sigma_k(x)$ через $M_k = \{x: \sigma_k(x) = \min\sigma_k(x)\}$. Эти области являются отрезками $M_k = [a_k, b_k]$ (но некоторые отрезки стягиваются в одну точку). Пусть $\alpha = \min_k b_k$, $\beta = \max_k a_k$. Так как минимум функции $\sigma_1(x) = f_{[1]}(x)$ всегда достигается только в середине отрезка $\bar{X}$ — точке $x^c = 1/2(x_{(1)} + x_{(n)})$, то $M_1 = \{x^c\}$. Поэтому верны соотношения: $\alpha = \min_k b_k \le b_1 = x^c = a_1 \le \max_k a_k = \beta$, так что $\alpha \le \beta$.

Следующее утверждение показывает, что структура множества $G^{E\Delta}(X)$ совсем простая.

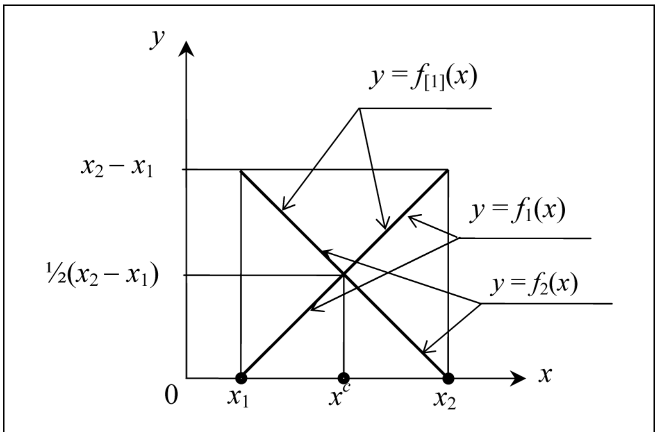

Рис. 5. Графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на $\bar{X}$

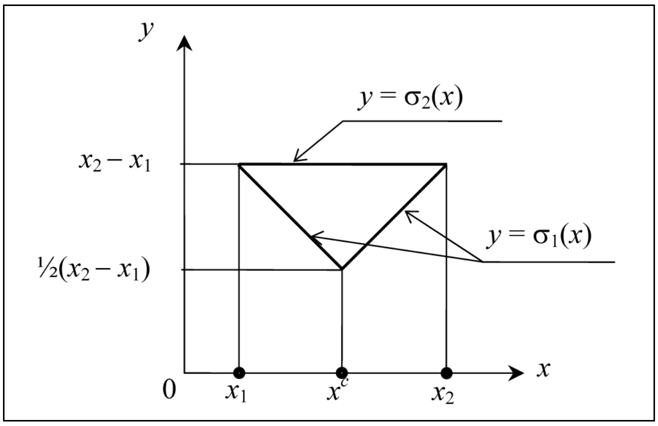

Рис. 6. Графики функций $y = \sigma_1(x)$ и $y = \sigma_2(x)$ на $\bar{X}$

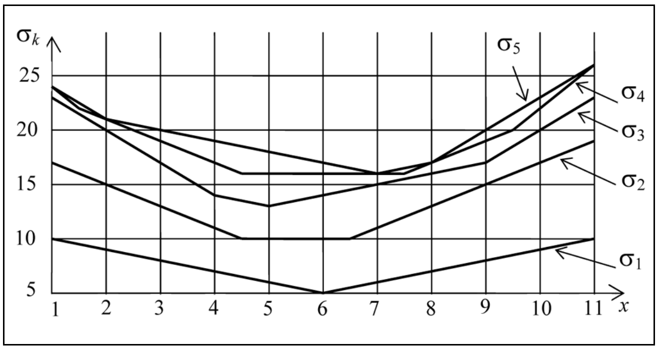

Рис. 7. Графики функций $\sigma_k(x)$

Утверждение 9. *Множество* $G^{E\Delta}(X)$ *внешне устойчиво и является отрезком* $[\alpha, \beta]$.

Пример 6. При $n = 2$ множество $G^{E\Delta}(X)$ состоит из одной точки x^c (см. рис. 4—6).

Пример 7. При $n = 5$ для $X = \{1, 2, 7, 8, 11\}$ графики функций $y = \sigma_k(x)$ представлены на рис. 7. Он показывает, что здесь $M_1 = \{6\}$, $M_2 = [4{,}5; 6{,}5]$, $M_3 = \{5\}$, $M_4 = [4{,}5; 7{,}5]$, $M_5 = \{7\}$, $\alpha = 5$, $\beta = 7$. Поэтому $G^{E\Delta}(X) = [5; 7]$.

Пример 8. При $n = 3$ для $X = \{1, 2, 5\}$ имеем: $G^{E\Delta}(X) = [2; 3] \subset G^E(X) = [1{,}5; 3]$.

При $n = 5$ для $X = \{1, 2, 5, 9, 11\}$ имеем: $G^{E\Delta}(X) = [5; 6] \subset G^E(X) = [1{,}5; 7{,}5) \cup (8{,}5; 9{,}5)$.

При $n = 6$ для $X = \{10, 11, 15, 61, 107, 110\}$ имеем:

$$G^{E\Delta}(X) = [38; 60] \subset G^E(X) = [10{,}5; 83) \cup (83{,}5; 84{,}5) \cup (106{,}5; 109).$$

7. О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

Для построения множества $G^E(X)$ можно воспользоваться известными в теории многокритериальной оптимизации подходящими методами построения множеств недоминируемых вариантов [6, 8], основанных на применении семейств функций, возрастающих (убывающих) или хотя бы не убывающих (не возрастающих) по P_E. Например, можно решать параметрическую задачу минимизации на X функции одной переменной $\psi^{\spadesuit}(f(x)|c) = \min_{\pi \in \Pi}\max_{i \in N}\{f_{\pi(i)}(x) - c_i\}$, варьируя векторный параметр $c \in f(\bar{X})$. Однако уже при «не очень большом» количестве точек n число $n!$ членов в этой функции, среди которых ищется максимум, становится слишком большим.

Учитывая одномерность множества X, можно пойти другим путем: построить равномерную сетку с «небольшим» шагом h, покрывающую множество $\bar{X}$, и искать недоминируемые по P_E точки среди узлов этой сетки прямым перебором (с помощью известных приемов сокращения объема перебора [13]). Шаг сетки зависит от требуемой точности расчетов и может уменьшаться в процессе их проведения при решении задачи построения $G^E(X)$. Именно при помощи такого способа находились множества $G^E(X)$ в примерах 2 и 3.

Пример 9. Покажем вкратце, как можно решить задачу построения $G^E(X)$ для $X = \{1, 2, 5, 9, 11\}$. Расчеты на компьютере с постепенным уменьшением шага сетки дали следующие результаты построения множества недоминируемых точек:

Шаг $h = 1$: $[2; 7] \cup [9; 9]$.
Шаг $h = 0{,}1$: $[1{,}5; 7{,}4] \cup [8{,}6; 9{,}4]$.
Шаг $h = 0{,}01$: $[1{,}50; 7{,}49] \cup [8{,}51; 9{,}49]$.
Шаг 0,001: $[1{,}500; 7{,}499] \cup [8{,}501; 9{,}499]$.
Шаг 0,0001: $[1{,}5000; 7{,}4999] \cup [8{,}5001; 9{,}4999]$.

При переборе с шагом 0,01 было выяснено, что точка 4,5 доминирует над точками 7,5 и 8,5, а точка 2,5 доминирует над точкой 9,5. Поэтому, с учетом утверждения 2, принято $G^E(X) = [1{,}5; 7{,}5) \cup (8{,}5; 9{,}5)$. ♦

Отметим еще следующее утверждение, которое может оказаться полезным при построении $G^E(X)$.

Утверждение 10. *Если все исходные точки множества расположены в узлах равномерной сетки, то для проверки принадлежности к средним по R_E любого узла этой сетки достаточно сравнить его векторную оценку с векторными оценками остальных узлов этой сетки.* ♦

Заметим, что такую равномерную сетку всегда можно построить, если координаты всех точек множества — рациональные числа (а на практике — целые числа или десятичные дроби).

Для нахождения множества $G^{E\Delta}(X)$ можно воспользоваться аналогом описанного выше метода, основанного на применении равномерной сетки: построить при ее помощи графики функций $y = \sigma_k(x)$, а затем выделить отрезок $[\alpha, \beta]$ (см. утверждение 9).

8. О СРАВНЕНИИ МНОЖЕСТВЕННЫХ СРЕДНИХ ПО ВЕЛИЧИНЕ

Практически важно умение сравнивать средние, полученные при измерениях по одной и той же шкале, по величине. Для однозначных средних такой вопрос не стоит, так как сравнение двух средних сводится просто к сопоставлению двух чисел. Многозначные средние в статистике обычно «уточняют», заменяя одним числом (пример — медиана для нечетного числа n).

При сложной структуре множеств средних $G^\Gamma(X')$ и $G^\Gamma(X'')$ для решения вопроса их сравнения можно воспользоваться идеями вероятностного, или стохастического доминирования [14]. Будем полагать, что все точки множества ПН-средних одинаково значимы. Длиной $D^\Gamma(X)$ множества $G^\Gamma(X)$, состоящего из l непересекающихся непустых интервалов с концами $x^1, x^2; x^3, x^4; \ldots; x^{2l-1}, x^{2l}$ будем называть сумму длин всех этих интервалов: $D^\Gamma(X) = \sum_{k=1}^{l} |x^{2k} - x^{2k-1}|$. Длиной $D_x^\Gamma(X)$ части этого множества, лежащей правее точки x, будем называть сумму составляющих его (части) одного интервала и всех других интервалов, лежащих правее нее. Относительная длина $d_x^\Gamma(X)$ получается нормировкой: $d_x^\Gamma(X) = D_x^\Gamma(X){:}\ D^\Gamma(X)$.

Будем считать, что средняя $G^\Gamma(X')$ не меньше средней $G^\Gamma(X'')$ и писать $G^\Gamma(X') \succeq G^\Gamma(X'')$, если $d_x^\Gamma(X') \geq d_x^\Gamma(X'')$ при каждом $x \in \mathrm{Re}$. Если при этом неравенство будет строгим хотя бы при одном $x \in \mathrm{Re}$, то первая средняя больше второй. Введенное указанным образом отношение «быть не меньше» является частичным квазипорядком, а отношение «быть больше» обозначается $\succ$ и является строгим частичным порядком (оно иррефлексивно и транзитивно). Последнее отношение является, по существу, отношением вероятностного доминирования, или стохастического доминирования первого порядка[3] [13].

Пример 10. Пусть $G^E(X') = [1; 2) \cup (5; 8)$, $G^E(X'') = [1{,}5; 4{,}5] \cup (8; 9]$. Графики функций $d_x^E(X')$ и $d_x^E(X'')$ представлены на рис. 8. Поскольку ни один из этих графиков не лежит под другим, то рассматриваемые средние не сравнимы по $\succeq$, т. е. это отношение не позволяет

---

3 Справедливо равенство $d_x^\Gamma(X) = 1 - F(x)$, где $F(x)$ — функция распределения вероятностей случайной величины с постоянной плотностью вероятности $1/D^\Gamma(X)$ на $G^\Gamma(X)$.

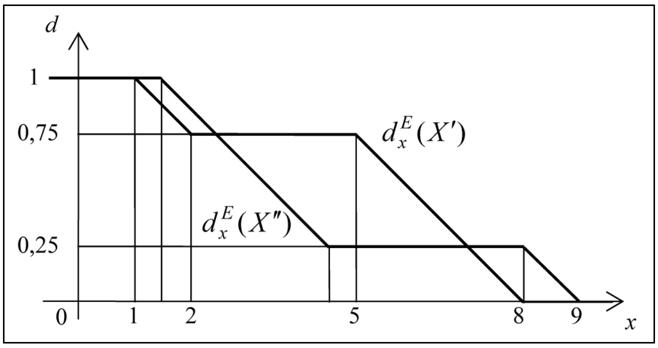

Рис. 8. Графики функций $d_x^E(X')$ и $d_x^E(X'')$

утверждать, что одна из средних больше другой или же что они равны. ♦

Отношение $\succeq$ является слабым в том смысле, что редко позволяет сравнить по величине множественные средние. Воспользовавшись идеями стохастического доминирования второго порядка, отношение $\succeq$ можно расширить, но практически это не очень эффективно.

Можно, разумеется, «сжать» множественные средние до однозначных. Но при этом будет потеряно много информации, т. е. результаты сравнения будут весьма грубыми. Например, среднюю $G^{\Gamma}(X)$, состоящую из l непересекающихся непустых интервалов с концами $x^1, x^2; x^3, x^4; ...; x^{2l-1}, x^{2l}$, можно представить одной точкой — центром тяжести этих интервалов $x^{\Gamma}(X)$.

Пример 11. Для средних из примера 8 имеем:

$$x^E(X') = (1{,}5 \cdot 1 + 6{,}5 \cdot 3)/4 = 4{,}875;$$

$$x^E(X'') = (3 \cdot 3 + 8{,}5 \cdot 1)/4 = 4{,}375.$$

Поскольку 4,875 > 4,375, то, согласно рассматриваемому подходу, следует принять, что средняя $G^E(X')$ больше, чем средняя $G^E(X'')$. ♦

Полезно иметь в виду, что если $G^{\Gamma}(X') > G^{\Gamma}(X'')$, то $x^{\Gamma}(X') > x^{\Gamma}(X'')$ (см. [13]).

Сравнивать средние $G^{E\Delta}(X')$ и $G^{E\Delta}(X'')$ проще, чем средние $G^E(X')$ и $G^E(X'')$, так как первые всегда являются отрезками $[\alpha', \beta']$ и $[\alpha'', \beta'']$ соответственно. Поскольку график функции $d_x^{E\Delta}(X)$ — ломаная с одним участком $[\alpha, \beta]$ убывания от 1 до 0, то $G^{E\Delta}(X') \subseteq G^{E\Delta}(X'')$ верно тогда и только тогда, когда $\alpha' \geq \alpha''$ и $\beta' \geq \beta''$.

9. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Выше рассматривалась проблема определения средних для точек на прямой. Однако предложенный подход к определению ПН-средних очевидным образом распространяется и на более общие случаи.

Пусть, например, $x_1, x_2, ..., x_n$ — точки в m-мерном евклидовом пространстве E^m. Тогда близость точки x к совокупности указанных n точек можно характеризовать значением векторного критерия $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$, где $f_i(x) = d(x, x_i)$ — расстояние между точками x и x_i. А далее можно формулировать определения ПН-средних вполне аналогично предложенным выше для одномерного случая. Однако свойства средних и методы построения множеств средних здесь оказываются более сложными. Рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной статьи. Отметим лишь, что средние по $P_{\varnothing}$ образуют выпуклую оболочку заданных n точек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные новые понятия средних основаны на единообразном подходе, опирающемся на идеи многокритериальной оптимизации, и не предполагают наличие у искомых средних некоторых априорных свойств (что типично при классическом подходе к выбору средних в статистике и иногда может затруднять выбор средней в конкретной задаче [3]), но используют сведения о предпочтительности тех или иных мер удаленности между векторами — значениями векторного критерия, состоящего из расстояний от текущей точки до каждой из заданных.

Оказалось, что такие средние являются множественными, причем множества некоторых средних могут иметь достаточно сложную структуру. Это затрудняет построение множеств средних для выборок большого размера (при большом числе n), но при современном уровне развития вычислительной техники и информационных технологий является эффективно преодолимым затруднением.

Предложенные средние представляются полезным дополнением (но, разумеется, не альтернативой) к арсеналу известных в статистике средних величин, но могут использоваться и самостоятельно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим две точки x' и x'' из отрезка $\bar{X}$. Понятно, что найдутся точки $x_{[i]}$ и $x_{[j]}$ такие, что одна из них будет ближе к точке x', а другая — к точке x''. Следовательно, неверно ни $x'P^{\varnothing}x''$, ни $x''P^{\varnothing}x'$. Пусть теперь $x < x_{[1]}$. Тогда расстояние от точки x до любой точки x_i будет больше, чем от $x_{[1]}$ до x_i, и поэтому $x_{[1]}P^{\varnothing}x$. Аналогичное рассуждение показывает, что если $x > x_{[n]}$, то $x_{[n]}P^{\varnothing}x$. Таким образом, выяснено, что множество $G^{\Gamma}(X) = \bar{X}$ и внешне устойчиво.

Доказательство утверждения 2. Поскольку $P_{\varnothing} \subset P_E$, то $G^E(X) \subseteq G^{\varnothing}(X) = \bar{X}$. Критерии $f(x)$ — непрерывные функции, а множество $\bar{X}$ замкнуто и ограничено. Поэтому множество $G^E(X)$ непусто и внешне устойчиво [8].

Доказательство утверждения 3. Для точки x^c значения первых двух критериев $f_{(1)}(x^c)$ и $f_{(2)}(x^c)$ являются минимально возможными среди $f_{(1)}(x)$ и $f_{(2)}(x)$ для всех $x \in \bar{X}$: если для некоторого x' окажется, что $f_{(1)}(x) < f_{(1)}(x')$ или же $f_{(2)}(x) < f_{(2)}(x')$, то тогда будет соответственно $f_{(2)}(x) > f_{(2)}(x')$ или же $f_{(1)}(x) > f_{(1)}(x')$. Поэтому если рассматриваемый интервал минимальной длины единствен, то $x^c \in G^E(X)$. Предположим, что $x_{(i)} = x_{(1)}$, так что $x_{(i+1)} = x_{(2)}$. Тогда точка $x_{(2)} + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \delta/2$ будет доминировать по P_E над точкой $x_{(2)} - \varepsilon$, так как все остальные точки из X лежат правее, а потому и дальше от $x_{(2)}$. Поэтому точка x^c будет левой границей множества $G^E(X)$. Аналогичные рассуждения показывают, что если $x_{(i)} = x_{(n-1)}$ и $x_{(i+1)} = x_{(n)}$, то точка x^c будет правой границей множества $G^E(X)$.

Доказательство утверждения 4. Функция $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ является симметрической и возрастает по каждой переменной y_i на Re^n_+, а потому убывает по P^E. Поэтому точка минимума на $\bar{X}$ непрерывной функции $\psi(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, где $f_i(x) = |x - x_i|^2 = (x - x_i)^2$, является недоминируемой по P_E. Но эта функция, согласно известному в математической статистике свойству дисперсии [3], имеет единственную точку минимума $x = g^1(X)$.

Доказательство утверждения 5. Функция $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ является симметрической и возрастает по каждой переменной y_i на Re^n_+, а потому убывает по P^E. Поэтому точка минимума на $\bar{X}$ непрерывной функции $\psi(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, где $f_i(x) = |x - x_i|$, является недоминируемой по P_E. Но для этой функции, как известно из математической статистики [3], точки минимума составляют медиану $\mu(X)$.

Доказательство утверждения 6. Функция $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ является суммой одинаковых возрастающих (не строго) выпуклых функций и потому оказывается невозрастающей по $P^{E\Delta}$. Поэтому единственная точка минимума $x = g^1(X)$ на $\bar{X}$ непрерывной функции $\psi(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, где $f_i(x) = (x - x_i)^2$, является недоминируемой по $P_{E\Delta}$.

Доказательство утверждения 7. При доказательстве предыдущего утверждения было выяснено, что функция $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ является невозрастающей по $P^{E\Delta}$. Поэтому, по крайней мере одна точка минимума на $\bar{X}$ непрерывной функции $\psi(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, где $f_i(x) = |x - x_i|$, среди всех ее точек минимума, которые образуют замкнутое и ограниченное множество — отрезок $\mu(X)$, является недоминируемой по $P_{E\Delta}$. Например, недоминируемой по $P_{E\Delta}$ будет точка минимума на $\mu(X)$ функции $\psi^2(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x)$.

Доказательство утверждения 8. Заметим сначала, что для произвольных значений $x \in \mathrm{Re}$ и $k \in \{1, ..., n\}$ сумма $\sigma_k(x)$ включает в себя расстояния от точки x до $l(x)$ крайних слева (на числовой оси) и до $r(x)$ крайних справа точек множества X. При этом числа $l(x)$ и $r(x)$ — целые, неотрицательные, в сумме равные k. Поэтому можно записать

$$\sigma_k(x) = \sum_{i=1}^{l(x)} (x - x_{(i)}) + \sum_{i=1}^{r(x)} (x_{[i]} - x) =$$

$$= x(l(x) - r(x)) - \sum_{i=1}^{l(x)} x_{(i)} + \sum_{i=1}^{r(x)} x_{[i]}. \qquad (\text{П1})$$

Для доказательства выпуклости функций $\sigma_k(x)$ достаточно показать, что для любого числа $a > 0$ выполняется неравенство $F(x, a, k) = 2\sigma_k(x) - \sigma_k(x - a) - \sigma_k(x + a) \le 0$.

Обозначим для краткости $l = l(x)$, $r = r(x)$, $l^- = l(x - a)$, $r^- = r(x - a)$, $l^+ = l(x + a)$, $r^+ = r(x + a)$. Между этими числами должны выполняться соотношения:

$$l + r = l^- + r^- = l^+ + r^+ = k,$$

$$l^- \le l \le l^+,\ r^+ \le r \le r^-. \qquad (\text{П2})$$

Подставим выражения сумм (П1) для x, $x - a$ и $x + a$ в $F(x, a, k)$ и преобразуем с учетом соотношений (П2):

$$F(x, a, k) = 2x(l - r) - 2\sum_{i=1}^{l} x_{(i)} + 2\sum_{i=1}^{r} x_{[i]} -$$

$$- (x - a)(l^- - r^-) + \sum_{i=1}^{l^-} x_{(i)} - \sum_{i=1}^{r^-} x_{[i]} - (x + a)(l^+ - r^+) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l^+} x_{(i)} - \sum_{i=1}^{r^+} x_{[i]} = x(2l - 2r - l^- + r^- - l^+ + r^+) +$$

$$+ a(l^- - r^- - l^+ + r^+) - \sum_{i=l^-+1}^{l} x_{(i)} + \sum_{i=l+1}^{l^+} x_{(i)} +$$

$$+\sum_{i=r^{+}+1}^{r} x_{[i]} - \sum_{i=r+1}^{r^{-}} x_{[i]} = \sum_{i=l^{-}+1}^{l} (x - a - x_{(i)}) -$$

$$-\sum_{i=l+1}^{l^{+}} (x + a - x_{(i)}) + \sum_{i=r^{+}+1}^{r} (x_{[i]} - x - a) -$$

$$-\sum_{i=r+1}^{r^{-}} (x_{[i]} - x - a). \qquad (\text{П}3)$$

Сопоставим первую и четвертую сумму в получившемся выражении (П3). Из соотношений (П2) следует, что число слагаемых в этих суммах одинаково: $l - l^{-} = r^{-} - r$. Каждое слагаемое в четвертой сумме есть расстояние от точки $x - a$ до точек $x_{[i]}$, $i = r + 1, ..., r^{-}$. Эти расстояния входят в сумму $\sigma_k(x - a)$ и поэтому должны быть не меньше значения $f_{[k]}(x - a) \geq 0$. Каждое слагаемое в первой сумме либо является расстоянием точки $x - a$ до точек $x_{(i)}$, $i = l^{-} + 1, ..., l$, либо вообще отрицательное. Эти расстояния, наоборот, не входят в сумму $\sigma_k(x - a)$ и поэтому должны быть не больше значения $f_{[k]}(x - a)$. Из всего этого делаем вывод, что

$$\sum_{i=l^{-}+1}^{l} (x - a + x_{(i)}) - \sum_{i=r+1}^{r^{-}} (x_{[i]} - x + a) \leq 0. \qquad (\text{П}4)$$

Аналогично сопоставим вторую и третью сумму в выражении П(3). Из соотношений (П2) следует, что число слагаемых в этих суммах одинаково: $l^{+} - l = r - r^{+}$. Каждое слагаемое во второй сумме есть расстояние от точки $x + a$ до точек $x_{(i)}$, $i = l + 1, ..., l^{+}$. Эти расстояния входят в сумму $\sigma_k(x + a)$ и поэтому должны быть не меньше значения $f_{[k]}(x + a) \geq 0$. Каждое слагаемое в третьей сумме либо является расстоянием точки $x + a$ до точек $x_{[i]}$, $i = r^{+} + 1, ..., r$, либо вообще отрицательное. Эти расстояния, наоборот, не входят в сумму $\sigma_k(x + a)$ и поэтому должны быть не больше значения $f_{[k]}(x + a)$. Из всего этого делаем вывод, что

$$-\sum_{i=l+1}^{l^{+}} (x + a - x_{(i)}) + \sum_{i=r^{+}+1}^{r} (x_{[i]} - x - a) \leq 0. \qquad (\text{П}5)$$

Подставляя формулы (П4) и (П5) в выражение (П3), получаем, что $F(x, a, k) \leq 0$. Выпуклость функций $\sigma_k(x)$ доказана.

Графики выпуклых функций $f_i(x) = |x - x_i|$ являются ломаными. Кривая $y = f_{[1]}(x)$ — верхняя огибающая семейства n ломаных $y = f_i(x)$ и потому сама ломаная. Кривая $y = f_{[2]}(x)$ — верхняя огибающая семейства ломаных, оставшихся после удаления ломаной $y = f_{[2]}(x)$, и сама оказывается ломаной. Аналогичные рассуждения для последующих функций $y = f_{[i]}(x)$ показывают, что и их графики — ломаные линии. Но функции $\sigma_k(x)$ — это суммы k первых функций $y = f_{[i]}(x)$, и поэтому их графики тоже являются ломаными. Это означает, что функции $\sigma_k(x)$ являются кусочно-линейными (и выпуклыми). Доказательство утверждения 8 завершено.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 9. Верхний срез множества $f(\bar{X})$ отношением $R^{E\Delta}$ через любую точку $y \in f(\bar{X})$, т. е. множество $R_{+}^{E\Delta}(y) = \{z \in f(\bar{X}) | \sum_{k=1}^{l} (y_{[k]} - z_{[k]}) \leq 0,\ l = 1, 2, ..., n)\}$ — замкнутое и ограниченное, так как функции $y_{[i]}$ непрерывные [15]. Поэтому множество $G^{E\Delta}(X)$ внешне устойчиво [7].

Обозначим через k^{α} и k^{β} те значения k, при которых достигаются $\alpha = \min_k b_k$ и $\beta = \max_k a_k$ соответственно. Отрезок $[x_{(1)}; \alpha]$ принадлежит областям убывания или невозрастания каждой из функций $\sigma_k(x)$, $k = 1, ..., n$. При этом он принадлежит области убывания функции $\sigma_1(x)$. Следовательно, для любой точки x из промежутка $[x_{(1)}; \alpha)$ верно $\alpha P_{E\Delta} x$.

Аналогично, отрезок $[\beta; x_{(n)}]$ принадлежит областям возрастания или неубывания каждой из функций $\sigma_k(x)$, $k = 1, ..., n$. При этом он принадлежит области возрастания функции $\sigma_1(x)$. Следовательно, для любой точки x из промежутка $(\beta; x_{(n)}]$ верно $\beta P_{E\Delta} x$.

Таким образом, недоминируемыми по $P_{E\Delta}$ претендуют быть только точки из отрезка $[\alpha; \beta]$. Поскольку множество недоминируемых по $P_{E\Delta}$ точек внешне устойчиво, то достаточно проверить недоминируемость точек отрезка $[\alpha; \beta]$ другими точками этого отрезка. В вырожденном случае $\alpha = x^c = \beta$ только точка x^c является недоминируемой. Если же $\alpha < \beta$, то возьмем произвольные две точки x' и x'', принадлежащие отрезку $[\alpha; \beta]$ (включая его границы). Пусть $x' < x''$. Поскольку функция $\sigma_{k^{\alpha}}(x)$ строго возрастает при $x \geq \alpha$, то $\sigma_{k^{\alpha}}(x') < \sigma_{k^{\alpha}}(x'')$. Поскольку функция $\sigma_{k^{\beta}}(x)$ строго убывает при $x \leq \beta$, то $\sigma_{k^{\beta}}(x') > \sigma_{k^{\beta}}(x'')$. Следовательно, согласно решающему правилу (18), точки x' и x'' несравнимы по отношению $R_{E\Delta}$ и поэтому являются недоминируемыми. Утверждение 9 доказано полностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 10. Пусть шаг равномерной сетки, покрывающей множество $\bar{X}$, равен h. Пронумеруем узлы сетки числами $k = 1, ..., K$. Расстояние между любыми точками будем измерять в числе шагов h. Тогда координата любого узла сетки будет соответствующим целым числом k, а координатой точки x_i станет целое число k_i (в частности, $k_{(1)} = 1$ и $k_{(n)} = L$), и значения критериев $f_i(k) = |k - k_i|$ будут целочисленными.

Рассмотрим произвольный узел сетки t. Если для некоторого $k = 1, ..., K$ выполняется $k P_E t$, то t не является средней по R_E. Пусть такого доминирующего узла k не нашлось. Докажем, что в этом случае точка t является средней по R_E.

Предположим, что это не так и имеется точка $k + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < h$, такая, что $(k + \varepsilon)P_E t$. Тогда, согласно решающему правилу (14), выполняются неравенства

$$f_{(1)}(k+\varepsilon) \le f_{(1)}(t), f_{(2)}(k+\varepsilon) \le f_{(2)}(t), \ldots, f_{(n)}(k+\varepsilon) \le f_{(n)}(t), \quad (\text{П}6)$$

среди которых хотя бы одно должно быть строгим. Фактически же все эти неравенства строгие, так как левые их части — не целые числа, а правые — целые.

Обозначим перестановки номеров компонент $i = 1, \ldots, n$ в векторе $f_\uparrow(k + \varepsilon)$ через $\pi(\varepsilon) = \{1_\varepsilon, 2_\varepsilon, \ldots, n_\varepsilon\}$, а в векторе $f_\uparrow(t)$ через $\pi(t) = \{1_t, 2_t, \ldots, n_t\}$. Тогда неравенства (П6) можно записать так:

$$f_{i_\varepsilon}(k+\varepsilon) < f_{i_t}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (\text{П}7)$$

Векторная оценка $f(k + \varepsilon)$ отличается от векторной оценки $f(k)$ тем, что каждая компонента $f_i(k + \varepsilon)$ равна либо $f_i(k) + \varepsilon$, либо $f_i(k) - \varepsilon$, в зависимости от того, слева или справа от узла k находится точка x_i. Причем, должна быть хотя бы одна увеличенная компонента и хотя бы одна уменьшенная компонента, поскольку узел k находится между крайними точками множества $\bar{X}$.

Если $f_{i_\varepsilon}(k + \varepsilon) = f_{i_\varepsilon}(k) + \varepsilon$, то, согласно (П7), $f_{i_\varepsilon}(k) < f_{i_\varepsilon}(k) + \varepsilon < f_{i_t}(t)$.

Если $f_{i_\varepsilon}(k + \varepsilon) = f_{i_\varepsilon}(k) - \varepsilon$, то должно выполняться $f_{i_\varepsilon}(k) \le f_{i_t}(t)$, поскольку $f_{i_\varepsilon}(k)$ — ближайшее целое число, превышающее $f_{i_\varepsilon}(k + \varepsilon)$, а $f_{i_t}(t)$ — некоторое целое число, превышающее $f_{i_\varepsilon}(k + \varepsilon)$ согласно (П7).

В результате делаем вывод, что неравенство $f_{i_\varepsilon}(k) \le f_{i_t}(t)$ выполняется для каждого $i = 1, \ldots, n$, причем хотя бы для одного i является строгим. Следовательно, для вектора $f^{\pi(\varepsilon)}(k)$, полученного из $f(k)$ перестановкой компонент $\pi(\varepsilon)$, выполняются неравенства:

$$f_i^{\pi(\varepsilon)}(k) \le f_{[i]}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

среди которых хотя бы одно строгое. Но тогда верно $kP_E t$. А это противоречит сделанному предположению, что точка t не доминируема ни одним из узлов сетки. Полученное противоречие завершает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *URL* http://www.grandars.ru/student/statistika/srednie-velichiny.html
2. *Бурханова И.И.* Теория статистики. https://econ.wikireading.ru/33154 [*Burkhanova, I.I.* Theory of Statistics (In Russian)]
3. *Джини К.* Средние величины. — М.: Статистика, 1970. [*Gini, C.* Le Medie. — Torino: Ulet, 1957.]
4. *Пфанцагль И.* Теория измерений. — М.: Мир, 1976. [*Pfanzagl, J.* Theory of Measurement. — Berlin: Springer, 1971.]
5. *Орлов А.И.* Связь между средними величинами и допустимыми преобразованиями шкалы // Математические заметки. — 1981. — Т. 30. — С. 561—568. [*Orlov, A.I.* The Connection Between Mean Quantities and Admissible Transformations of Scale // Mathematical Notes. — 1981. — Vol. 30. — P. 774—778. (In Russian)]
6. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 1982. — Изд. второе, испр. и доп. — М.: Физматлит, 2007. [*Podinovski, V.V., Nogin, V.D.* Pareto-Optimal Solutions of Multi-Criteria Problems. — Moscow: Fizmatlit, 1982. — Second edition, Moscow: Fizmatlit, 2007. (In Russian)]
7. *Hazen, G.B., Morin, L.T.* Optimality Conditions in Non-Conical Multiple-Objective Programming // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1983. — Vol. 40. — P. 25—60.
8. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — Т. 15. — С. 330—344. [*Podinovskii, V.V.* Multicriterial Problems with Uniform Equivalent Criteria // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1975. — Vol. 15. — P. 47—60. (In Russian)]
9. *Fishburn, P.C.* Decision and Value Theory. — New York: Wiley, 1964. — 437 p.
10. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. [*Marshall, A.W., Olkin, I.* Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. — New York: Academic Press, 1979.]
11. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев с непрерывной шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 9. — С. 129—137. [*Podinovskii, V.V.* The Quantita Tive Importance of Criteria with a Continuous First-Order Metric Scale // Automation and Remote Control. — 2005. — Vol. 66, no. 9. — P. 1478—1485.]
12. *Топоногов, В.А.* Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. — М.: Физматкнига, 2012. [*Toponogov, V.A.* Differential Geometry of Curves and Surfaces. — Moscow: Fizmatkniga, 2012. (In Russian)]
13. *Кнут Д.Э.* Искусство программирования, т. 3. Сортировка и поиск, 2-е изд. — М.: Вильямс, 2007. [*Knuth, D.E.* The Art of Computer Programming: Vol. 3: Sorting and Searching, Second edition. — New York: Addison-Wesley, 1998.]
14. *Шоломицкий А.Г.* Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005. [*Sholomitskii, A.G.* The Theory of Risk. Choice Under Uncertainty and Risk Modeling. — Moscow: Publishing house of HSE, 2005. (In Russian)]
15. *Behringer, F.A. von.* Konvexe *n*-Stufen Max-Min-Optimierung. — Zeitschrift für Operations Research, 1970. — B. 14. — S. 276—296.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 14.05.2020, после доработки 16.06.2020.
Принята к публикации 26.06.2020.

Подиновский Владислав Владимирович — д-р техн. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ podinovski@mail.ru,

Нелюбин Андрей Павлович — канд. физ.-матем. наук, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва, ✉ nelubin@gmail.com.

MEAN QUANTITIES: A MULTICRITERIA APPROACH

V.V. Podinovski[1], A.P. Nelyubin[2]

[1] National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
✉ podinovski@mail.ru

[2] Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
✉ nelubin@gmail.com

Abstract. A new approach to defining the concept of the mean quantity for a fixed finite set X of numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is proposed: the distance of an arbitrary point x from each individual point x_i is estimated by the distance $f_i(x)$ between them, and the distance of a point x from the entire set X is characterized by a vector criterion $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$; using this criterion, the preference relation in distance is introduced; the mean value is the point x^*, non-dominated with regard to this relation. Properties and structure of such averages for several preference relations, including the Pareto relation and the relation generated by information about the equal importance of criteria, are investigated. The relationship between the introduced mean quantities and the main statistical averages (arithmetic mean and median) is clarified. The issues of constructing sets of such averages are considered and an effective method of construction is proposed for the case when equally important criteria have the first ordinal metric scale. The directions of possible generalizations of the introduced concept for the multidimensional case are discussed.

Keywords: mean quantities, multi-criterial choice problems, preference relations, non-dominated points, criteria importance theory, criteria of equal importance, theory of majorization.

Funding. The study has been funded by the Russian Academic Excellence Project «5-100».