УДК 519.816

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2021.2.3

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ: МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ПОДХОД. II[1]

В.В. Подиновский, А.П. Нелюбин

Аннотация. Ранее авторами был предложен новый подход к определению средних величин и исследованы свойства введенных средних. В настоящей статье представлены новые свойства таких средних. Изучен вопрос об устойчивости средних к малым изменениям исходных данных и определено, какие из них являются устойчивыми. Рассмотрены случаи, когда имеются данные с повторениями, данные с неопределенностями, а также порядковые данные. Предложен простой и точный аналитический метод построения множества средних для наиболее интересного для приложений случая, когда шкала критериев, по которым оценивается близость выделенной точки к заданным, является шкалой первой порядковой метрики. Изложение сопровождается простыми расчетными примерами, иллюстрирующими основные теоретические результаты.

Ключевые слова: средние величины, многокритериальные задачи выбора, отношения предпочтения, теория важности критериев, теория мажоризации.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья представляет собой непосредственное продолжение статьи авторов [1], в которой предложен новый подход к определению средних величин как недоминируемых точек по специальным отношениям предпочтения. Для удобства читателя вначале кратко приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения из работы [1].

Пусть имеется совокупность X, состоящая из $n \geq 2$ действительных чисел, называемых далее данными, или точками, и являющихся результатами измерения интенсивности некоторого выделенного признака:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}. \qquad (1)$$

Эти данные являются однородными в том смысле, что измерения производились по одной и той же шкале, которая не менее совершенна, чем шкала интервалов [2]. Упорядоченные соответственно по неубыванию и невозрастанию множества

$$X_{\uparrow} = \langle x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)} \rangle; \quad X_{\downarrow} = \langle x_{[1]}, x_{[2]}, \ldots, x_{[n]} \rangle,$$

где $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ и $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \ldots \geq x_{[n]}$, получаются из совокупности чисел (1) при помощи соответствующих перестановок.

Пусть x — произвольное фиксированное число — точка на числовой прямой Re. Удаленность ее от отдельной точки x_i из множества X можно оценить расстоянием $y_i = |x - x_i|$. Тогда удаленность точки x от совокупности всех точек из множества X характеризуется вектором $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, составленным из таких расстояний. Его можно считать значением векторного критерия $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, где $f_i(x) = |x - x_i|$. Областью значений Z этого векторного критерия является положительный ортант $\mathrm{Re}_+^n = [0, +\infty)^n$ — множество n-мерных векторов с неотрицательными компонентами. Значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ векторного критерия f, называемое векторной оценкой точки x, для краткости будем обозначать также $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_i = f_i(x)$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

[1] Исследования финансировались в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

Пусть на множестве Z задано отношение предпочтения — строгий частичный порядок P^Γ, где Γ — информация о предпочтениях ЛПР, касающаяся удаленности: если верно $y'P^\Gamma y''$, то точка $y' = f(x')$ ближе ко множеству значений векторного критерия $Y = \{y \in Z |\, y = f(x),\, x \in X\}$, чем $y'' = f(x'')$. Отношение P^Γ порождает имеющий аналогичный смысл отношение P_Γ на числовой прямой: $x'P_\Gamma x'' \Leftrightarrow y'P^\Gamma y''$, где $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$. На роль наиболее близких к X и представляющих все множество X могут претендовать те и только те точки, которые недоминируемы по P_Γ. (Точка x недоминируема по P_Γ, если не существует точки x' такой, что верно $x'P_\Gamma x$.) Если множество таких точек $G^\Gamma(X)$ внешне устойчиво (т. е. для каждой доминируемой точки x найдется недоминируемая точка x' такая, что верно $x'P_\Gamma x$), то все они будут именоваться ПН-средними (средними по Подиновскому — Нелюбину), а более конкретно (для рассматриваемой информации Г) и кратко — средними по P_Γ.

Естественно полагать, что предпочтения с увеличением значений критериев f_i убывают или, иными словами, что критерии желательно минимизировать. При отсутствии иной информации о предпочтениях на множестве Z предпочтения описывает отношение Парето $P^\varnothing$, определяемое так: $yP^\varnothing z \Leftrightarrow (y_i \le z_i,\, i = 1, 2, \ldots, n$, причем хотя бы одно из неравенств является строгим). Отношение $P^\varnothing$ порождает на числовой прямой Re отношение Парето $P_\varnothing$: $xP_\varnothing x' \Leftrightarrow yP^\varnothing y'$. Оказывается, что средними по $P_\varnothing$ являются все точки отрезка с концами $x_{(1)} = \min\limits_{i \in N} x_i$ и $x_{(n)} = \max\limits_{i \in N} x_i$, т. е. $G^\varnothing(X) = \bar{X} = [x_{(1)}, x_{(n)}]$. Таким образом, понятие средних по $P_\varnothing$ оказывается эквивалентным понятию средних по Коши [3].

Пусть все критерии имеют равную важность (информация E) [4]. В этом случае удаленность точки x от множества X оценивается отношением P_E на числовой прямой Re. Оно порождается отношением P^E на множестве Re^n, которое определяется каждым из двух равносильных решающих правил:

$$yP^E z \Leftrightarrow [y_{(1)} \le z_{(1)},\, y_{(2)} \le z_{(2)},\, \ldots,\, y_{(n)} \le z_{(n)},$$

причем хотя бы одно из нестрогих неравенств является строгим];

$$yP^E z \Leftrightarrow [y_{[1]} \le z_{[1]},\, y_{[2]} \le z_{[2]},\, \ldots,\, y_{[n]} \le z_{[n]},$$

причем хотя бы одно из нестрогих неравенств является строгим]. (2)

Здесь ПН-средними (по P_E), составляющими множество $G^E(X)$, являются недоминируемые по P_E точки числовой прямой.

Пусть теперь увеличение удаленности точки x от одних точек x_i не компенсируется уменьшением ее удаленности от других. Это означает, что если в произвольной векторной оценке y, в которой $y_i > y_j$, заменить y_i на $y_i - \delta$, а y_j — на $y_j + \delta$, где δ — положительное число такое, что $y_i - \delta \ge y_j + \delta$, то полученная таким образом векторная оценка z будет предпочтительнее, чем исходная y. Отношение строгого предпочтения $P^{E\Delta}$, порождаемое такой информацией на Z, задается так [5, 6]:

$$yP^{E\Delta} z \Leftrightarrow (y_{[1]} \le z_{[1]},\, y_{[1]} + y_{[2]} \le z_{[1]} + z_{[2]},\, \ldots,$$
$$\ldots,\, y_{[1]} + y_{[2]} + \ldots + y_{[n]} \le z_{[1]} + z_{[2]} + \ldots z_{[n]},$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим).

Здесь ПН-средними являются точки, недоминируемые по $P_{E\Delta}$. Так как $P_{E\Delta} \supset P_E \supset P_\varnothing$, то $G^{E\Delta}(X) \subseteq G^E(X) \subseteq G^\varnothing(X) = \bar{X}$. Структура множества $G^E(X)$ может быть весьма сложной — оно может состоять из нескольких числовых промежутков и быть незамкнутым и не открытым. Например, для $X = \{1, 2, 5, 9, 11\}$ имеем $G^E(X) = [1{,}5;\, 7{,}5) \cup (8{,}5;\, 9{,}5)$. А вот структура множества $G^{E\Delta}(X)$ оказывается совсем простой — это отрезок $[\alpha, \beta]$, где $x_{(1)} \le \alpha \le \beta \le x_{(n)}$. Так, если $X = \{1, 2, 5, 9, 11\}$, то $G^{E\Delta}(X) = [5;\, 6]$. В вырожденном случае, когда $\alpha = \beta$, отрезок $[\alpha, \beta]$ стягивается в одну точку. Для расчета величин α и β были разработаны специальные решающие правила [1]. Более простое такое правило предлагается в § 1.

1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕЛИЧИН α И β

Нам далее понадобится множество $H = \{1, 2, \ldots, h\}$, где $h = \lfloor (n + 1)/2 \rfloor$ — целая часть числа $(n + 1)/2$. Следующее утверждение позволяет достаточно просто найти среднюю величину $G^{E\Delta}(X) = [\alpha, \beta]$.

Утверждение 1. *Справедливы формулы:*

$$\alpha = \frac{1}{2} \min_{p \in H} (x_{(p)} + x_{(n+1-p)}),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \max_{p \in H} (x_{(p)} + x_{(n+1-p)}). \qquad (3)$$

Доказательство этого и следующих утверждений вынесено в Приложение.

Формула (3) дает простой и точный аналитический метод нахождения средних по $P_{E\Delta}$.

Пример 1. При $n = 5$ имеем $h = \lfloor (n + 1)/2 \rfloor = 3$, так что $H = \{1, 2, 3\}$. Для $X = \{1, 2, 7, 8, 11\}$, пользуясь Утверждением 1, последовательно вычисляем:

$$\alpha = 1/2\min\{x_{(1)} + x_{(5)}, x_{(2)} + x_{(4)}, x_{(3)} + x_{(3)}\} = \\ = 1/2\min\{1 + 11, 2 + 8, 7 + 7\} = \\ = 1/2\min\{12, 10, 14\} = 5;$$

$$\beta = 1/2\max\{x_{(1)} + x_{(5)}, x_{(2)} + x_{(4)}, x_{(3)} + x_{(3)}\} = \\ = 1/2\max\{12, 10, 14\} = 7;$$

Таким образом, $G^{E\Delta}(X) = [\alpha, \beta] = [5, 7]$. ♦

2. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПН-СРЕДНИХ

Практически важным и теоретически интересным представляется вопрос о том, насколько сильно могут изменяться средние величины при небольшом изменении исходных данных (1).

Поскольку $G^{\varnothing}(X) = \bar{X} = [x_{(1)}; x_{(n)}]$, то малое изменение величин x_i может привести лишь к малому изменению чисел $x_{(1)}$ и $x_{(n)}$, так что множество средних $G^{\varnothing}(X)$ является устойчивым.

А вот средняя по P_E может быть неустойчивой в том смысле, что сколь угодно малое изменение (сдвиг) даже только одной из точек в множестве X может привести к «большому» изменению множества $G^E(X)$. Следующие примеры иллюстрируют такую возможность.

Пример 2. Для $X = \{1, 2, 3\}$ имеем: $G^E(X) = [1{,}5; 2{,}5]$. Однако при сколь угодно малом положительном числе ε для $X^\varepsilon = \{1, 2 - \varepsilon, 3\}$ оказывается, что $G^E(X^\varepsilon) = [1{,}5 - 0{,}5\varepsilon; 2]$. Правая граница отрезка средних по P_E изменилась сразу на 0,5. ♦

Пример 3. Для $X = \{10, 25, 40, 110\}$ имеем: $G^E(X) = [25, 60]$. Однако при сколь угодно малом положительном числе ε для $X^\varepsilon = \{10, 25, 40 + \varepsilon, 110\}$ оказывается, что $G^E(X^\varepsilon) = [17{,}5; 60]$. В этом примере примечательно еще и то, что левая граница средних по P_E уменьшилась на 7,5 при том, что координата одной из точек множества X увеличилась на ε. ♦

Выясним теперь, устойчива ли средняя по $P_{E\Delta}$.

Пример 4. В условиях примера 2 имеем: $G^{E\Delta}(X) = \{2\}$ и $G^{E\Delta}(X^\varepsilon) = [2 - \varepsilon; 2]$. Здесь отклонение одной из точек множества X на ε приводит к отклонению одной из границ средних по $P_{E\Delta}$ также на ε. ♦

Пример 5. В условиях примера 3 имеем: $G^{E\Delta}(X) = [32{,}5; 60]$ и $G^{E\Delta}(X^\varepsilon) = [32{,}5 + 0{,}5\varepsilon; 60]$. В этом примере отклонение одной из точек множества X на ε приводит к отклонению одной из границ средних по $P_{E\Delta}$ на $0{,}5\varepsilon$. ♦

Рассмотрим общий случай. Пусть множество X точек (1) изменилось до множества $X^\varepsilon = \{x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, ..., x_n + \varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ — произвольные вещественные числа.

Утверждение 2. *Средняя по $P_{E\Delta}$ является устойчивой в таком смысле: при изменении множества точек X до X^ε границы множества средних $G^{E\Delta}(X) = [\alpha, \beta]$ изменятся не более, чем на величину*

$$\max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, ..., |\varepsilon_n|\}. \quad (4)$$

Таким образом, средние по $P_{\varnothing}$ и по $P_{E\Delta}$ являются устойчивыми к малым изменениям данных (1), а средние по P_E могут быть весьма неустойчивыми.

3. СЛУЧАЙ ДАННЫХ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Пусть имеется совокупность данных с повторениями: величина x_1 повторяется β_1 раз, величина x_2 повторяется β_2 раз, ..., величина x_n повторяется β_n раз, т. е. вместо данных (1) имеется таблица:

Таблица 1

Данные с повторениями

Значение x_i	x_1	x_2	...	x_n
Вес β_i	β_1	β_2	...	β_n

В статистике числа β_i называются весами, или (абсолютными) частотами, и они используются для расчетов взвешенных средних. Например, средняя взвешенная арифметическая рассчитывается по формуле:

$$g^1(X) = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i,$$

где $\sigma = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$.

Все результаты, полученные ранее, включая определения ПН-средних, сразу переносятся и на этот, более общий случай, так как можно рассматривать совокупность величин $x_1, x_1, ..., x_1$ (всего β_1 штук), x_2 (всего β_2 штук) и т. д., т. е. представить данные из табл. 1 в виде (1):

$$(\underbrace{x_1, ..., x_1}_{\beta_1}, \underbrace{x_2, ..., x_2}_{\beta_2}, ..., \underbrace{x_n, ..., x_n}_{\beta_n}).$$

Однако применение прежних методов построения ПН-средних здесь может оказаться весьма обременительным, если размерность задачи резко возрастет. Поэтому целесообразно пользоваться решающими правилами, разработанными в теории количественной важности критериев с непрерывной (континуальной) шкалой [6], рассматривая натуральные числа β_i как количественные величины важности критериев, а вместо обозначений P^E и $P^{E\Delta}$ соответствующих отношений использовать обозначения P^β и $P^{\beta\Delta}$.

Для формулировки указанных правил для векторных оценок y и z введем в рассмотрение такие множество и величины:

$$W(y, z) = \{y_1\} \cup \{y_2\} \cup \ldots \cup \{y_n\} \cup \{z_1\} \cup \{z_2\} \cup \ldots \ldots \cup \{z_n\} = \{w_1, w_2, \ldots, w_q\}, \quad w_1 > w_2 > \ldots > w_q;$$

$$b_k(y) = \sum_{i: y_i \geq w_k} \beta_i, \quad b_k(z) = \sum_{i: z_i \geq w_k} \beta_i, \quad k = 1, 2, \ldots, q - 1. \tag{5}$$

Решающее правило для отношения P^β:

$$yP^\beta z \Leftrightarrow b_k(y) \leq b_k(z), \quad k = 1, 2, \ldots, q - 1, \tag{6}$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим.

Решающее правило для отношения $P^{\beta\Delta}$:

$$yP^{\beta\Delta} z \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} b_j(y)(w_j - w_{j+1}) \leq \leq \sum_{j=1}^{k} b_j(z)(w_j - w_{j+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, q - 1, \tag{7}$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим.

Пример 6. Исходные данные заданы в табл. 2.

Таблица 2

Данные к примеру 6

Значение x_i	1	2	4	5	7	9	11
Вес β_i	2	1	4	1	2	3	1

С помощью решающих правил (6) и (7) сравним точки 5 и 3, имеющие векторные оценки

$$y = f(5) = (4, 3, 1, 0, 2, 4, 6) \text{ и}$$

$$z = f(3) = (2, 1, 1, 2, 4, 6, 8).$$

Здесь $\sigma = 14$, $W = (8, 6, 4, 3, 2, 1, 0)$, так что $q = 7$.

Для сокращения записи с учетом формул (5) и (7) введем в рассмотрение векторы:

$$b(y) = (b_1(y), b_2(y), \ldots, b_6(y)),$$

$$b(z) = (b_1(z), b_2(z), \ldots, b_6(z));$$

$$d(y) = (d_1(y), d_2(y), \ldots, d_6(y)),$$

$$d(z) = (d_1(z), d_2(z), \ldots, d_6(z)),$$

где

$$d_k(y) = \sum_{j=1}^{k} b_j(y)(w_j - w_{j+1}), \quad d_k(z) = \sum_{j=1}^{k} b_j(z)(w_j - w_{j+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, 6.$$

Согласно формулам (5) и (7) имеем:

$$b(y) = (0, 1, 6, 7, 9, 13), \ b(z) = (1, 4, 6, 6, 9, 14);$$

$$d(y) = (0, 2, 8, 15, 24, 37), \ d(z) = (2, 10, 16, 22, 31, 45).$$

Поскольку $b_1(y) = 0 < b_1(z) = 1$, но $b_4(y) = 7 > b_1(z) = 6$, то, согласно правилу (6), неверно ни $yP^\beta z$, ни $zP^\beta y$. Однако, так как все шесть неравенств (7) выполнены, и среди них есть строгое, то верно $yP^{\beta\Delta}z$. ♦

А формулу (3) удобнее использовать, предварительно представив данные с повторениями в виде (1).

Пример 7. Представим данные из примера 6 (из табл. 2) в виде (1), для удобства сведя их в табл. 3, в которой указаны и номера точек i (для удобства введено обозначение $x_{(i)}$).

Таблица 3

Данные к примеру 7

Номер i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Значение $x_{(i)}$	1	1	2	4	4	4	4	5	7	7	9	9	9	11

Пользуясь формулами (3), последовательно вычисляем:

$$\alpha = 1/2\min\{x_{(1)} + x_{(14)}, x_{(2)} + x_{(13)}, x_{(3)} + x_{(12)}, x_{(4)} + x_{(11)}, x_{(5)} + x_{(10)}, x_{(6)} + x_{(9)}, x_{(7)} + x_{(8)}\} = = 1/2\min\{1 + 11, 1 + 9, 2 + 9, 4 + 9, 4 + 7, 4 + 7, 4 + 5\} = 1/2\min\{12, 10, 11, 13, 11, 9\} = 4{,}5;$$

$$\beta = 1/2\max\{x_{(1)} + x_{(14)}, x_{(2)} + x_{(13)}, x_{(3)} + x_{(12)}, x_{(4)} + x_{(11)}, x_{(5)} + x_{(10)}, x_{(6)} + x_{(9)}, x_{(7)} + x_{(8)}\} = = 1/2\max\{12, 10, 11, 13, 11, 11, 9\} = 6{,}5.$$

Таким образом, $G^{\beta\Delta}(X) = [4{,}5; 6{,}5]$. ♦

4. СЛУЧАЙ ДАННЫХ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

Пусть заданы не точные данные — числа x_i, а данные с неопределенностями $\tilde{x}_i$. Причинами появления неопределенности могут быть ошибки измерения, округление данных, их группировки и т. д.

Если эти данные — случайные величины $\tilde{x}_i$, то критерии оказываются функциями случайных величин: $\tilde{f}_i(x) = |x - \tilde{x}_i|$. Если известны распределения вероятностей случайных величин $\tilde{x}_i$, то можно перейти к математическим ожиданиям $\bar{f}_i(x) = E[\tilde{f}_i(x)]$. В частности, если случайная величина $\tilde{x}_i$ имеет равномерное распределение на отрезке $[a_i, b_i]$ (например, вследствие округления данных), то

$$\bar{f}_i(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_i + b_i) - x, x \le a_i, \\ \frac{1}{b_i - a_i}\left(x^2 - x(a_i + b_i) + \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2)\right), a_i < x < b_i, \\ x - \frac{1}{2}(a_i + b_i), x \ge b_i. \end{cases} \quad (8)$$

Вывод этой формулы приведен в Приложении. График функции (8) представлен на рисунке.

Если известны только множества X_i возможных значений данных, то можно воспользоваться одним из принципов принятия решений при неопределенности [7]. Для принципа недостаточного основания, согласно которому распределения вероятностей на множестве X_i принимаются равномерными, получаем $\bar{f}_i(x) = E[\tilde{f}_i(x)]$ для этих распределений. Для принципа максимина получаем $f_i^*(x) = \max_{x_i \in X_i} |x - x_i|$. Если множество X_i есть отрезок $[a_i, b_i]$, то, как легко видеть,

$$f_i^*(x) = \begin{cases} b_i - x, x \le \frac{1}{2}(a_i + b_i), \\ x - a_i, x > \frac{1}{2}(a_i + b_i). \end{cases} \quad (9)$$

Можно использовать и общепринятый в статистике прием — заменить отрезки $[a_i, b_i]$ их серединами — точками $\frac{1}{2}(a_i + b_i)$, и тогда критериями будут функции

$$f_i^c(x) = \left| x - \frac{1}{2}(a_i + b_i) \right|. \quad (10)$$

Графики функций (9) и (10) представлены на рисунке.

Таким образом, задача формально оказывается приведенной в рамки рассмотренного ранее случая точных данных x_i. Вопрос о том, какой из возможных способов такого приведения лучше применять при решении той или иной прикладной задачи, требует специальных исследований. Однако можно сразу указать следующее:

- верно равенство $f_i^*(x) = f_i^c(x) + \frac{1}{2}(b_i - a_i)$; поэтому если длины всех интервалов равны, то все соответствующие ПН-средние будут равными;

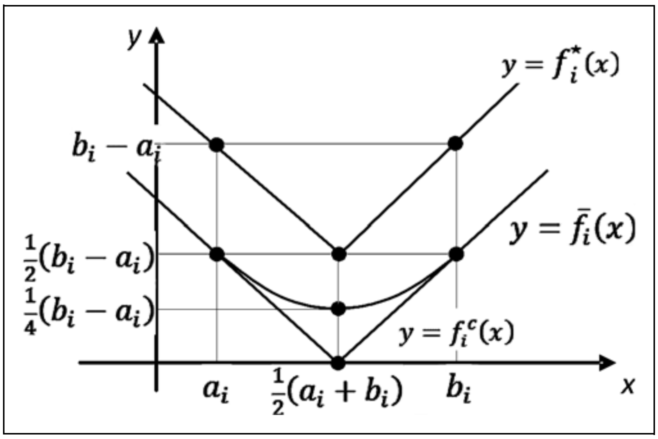

Рис. Графики функций $y = f_i^*(x)$, $y = \bar{f}_i(x)$ и $y = f_i^c(x)$ (вне отрезка $[a_i, b_i]$ графики двух последних функций совпадают)

- поскольку $\bar{f}_i(x)$ и $f_i^c(x)$ вне отрезка $[a_i, b_i]$ равны, то при «небольших» длинах этих отрезков по сравнению с размахом величин данных $b_n - a_1$ соответствующие ПН-средние будут отличаться «не сильно».

Обозначим через $G^E(X, f)$ и $G^{E\Delta}(X, f)$ множество средних по P_E и, соответственно, по $P_{E\Delta}$ точек при использовании функции $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ в качестве вектора расстояний от точки x до отрезков множества X.

Пример 8. Определим ПН-среднее по P_E для $X = \{1, [2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon], 5\}$. Здесь крайние точки 1 и 5 известны точно, а точка 2 измерена с погрешностью $\varepsilon > 0$.

При использовании функции расстояний $f_i^c(x)$ получаем среднее $G^E(X, f^c) = [1{,}5; 3]$.

При использовании функции расстояний $f_i^*(x)$, по сравнению с функцией $f_i^c(x)$, к расстоянию до измеренной с погрешностью точки добавляется константа ε. В результате получаем среднее

$$G^E(X, f^*) = \begin{cases} [1;\ 1+\varepsilon) \cup \left[1{,}5 + \frac{1}{2}\varepsilon;\ 3\right], 0 < \varepsilon < 1, \\ [1;\ 3], \varepsilon \ge 1. \end{cases}$$

При использовании функции расстояний $\bar{f}_i(x)$ получаем среднее

$$G^E(X, \bar{f}) = \begin{cases} [1;\ 1+\varepsilon) \cup [1{,}5;\ 3], 0 < \varepsilon < 0{,}5, \\ [1;\ 3], \varepsilon \ge 0{,}5. \end{cases} \ \blacklozenge$$

Когда длины всех интервалов равны, например, когда все точки из множества X измерены с одинаковой погрешностью, оказывается, что ПН-средние по P_E совпадают при любых из рассмотренных функциях расстояний: $G^E(X, f^*) = G^E(X, \bar{f}) = G^E(X, f^c)$. Это следует из того, что $f_i^*(x') \le f_i^*(x'') \Leftrightarrow \bar{f}_i(x') \le \bar{f}_i(x'') \Leftrightarrow f_i^c(x') \le f_i^c(x'')$ для любых точек x' и x'', а также $f_i^*(x) \le f_j^*(x) \Leftrightarrow \bar{f}_i(x) \le \bar{f}_j(x) \Leftrightarrow f_i^c(x) \le f_j^c(x)$ для любых номеров i и j из множества $\{1, ..., n\}$. Поэтому отношения P_E, определяемые правилами (2), совпадают для указанных трех функций расстояний.

При равных длинах интервалов ПН-средние по $P_{E\Delta}$ могут отличаться для функции расстояний $\bar{f}_i(x)$, как показано в следующем примере.

Пример 9. Определим ПН-среднее по $P_{E\Delta}$ для $X = \{[1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon], [2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon], [5 - \varepsilon; 5 + \varepsilon]\}$. Здесь все точки измерены с одинаковой погрешностью $\varepsilon > 0$.

При использовании функции расстояний $f_i^c(x)$ получаем среднее $G^{E\Delta}(X, f^c) = [2; 3]$.

При использовании функции расстояний $\bar{f}_i(x)$ получаем среднее

$$G^{E\Delta}(X, \bar{f}) = \begin{cases} [2;\ 3],\ 0 < \varepsilon \le 1, \\ \left[1{,}5 + \frac{1}{2}\varepsilon;\ 3\right],\ 1 < \varepsilon < 2\frac{1}{3}, \\ \left[2\frac{2}{3};\ 3\right],\ \varepsilon \ge 2\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Заметим, что в этом примере при увеличении ε левая граница отрезка ПН-средних по $P_{E\Delta}$ переместилась из медианы в среднее арифметическое. ♦

5. СЛУЧАЙ ПОРЯДКОВЫХ ДАННЫХ

Пусть шкала, в которой измерены данные, образующие множество $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, является порядковой. Удаленность («расстояние») $\delta(x', x'')$ точки x' от точки x'', среди которых есть точка из множества X, будем оценивать числом шагов «по кочкам» — точкам из множества X. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$, где $f_i(x) = \delta(x, x_i)$. Здесь имеет смысл рассматривать только ПН-средние по $P_\varnothing$ и P_E.

Утверждение 3. *Средними по $P_\varnothing$ являются все заданные точки, и только они: $G^\varnothing(X) = X$.*

Утверждение 4. *При нечетном n медиана $\mu_X = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ является и средней по P_E, а при четном n средними по P_E являются точки $x_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ и $x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Если в множестве X нет совпадающих точек, то указанные одна точка (при нечетном n) или две точки (при четном n) исчерпывают множество средних $G^E(X)$.*

Пример 10. Пусть $n = 3$ и $x_1 < x_2 < x_3$ (можно записать любые числа, удовлетворяющие этим неравенствам). Обозначим через x_0, x_{12}, x_{23} и x_4 произвольные точки, лежащие соответственно левее x_1, между x_1 и x_2, между x_2 и x_3 и правее x_3. Тогда

$$f(x_0) = (1, 2, 3),\quad f(x_1) = (0, 1, 2),\quad f(x_{12}) = (1, 1, 2),$$
$$f(x_2) = (1, 0, 1),\quad f(x_{23}) = (2, 1, 1),\quad f(x_3) = (2, 1, 0),$$
$$f(x_4) = (3, 2, 1).$$

Множество точек, недоминируемых по $P_\varnothing$, есть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Далее:

$$f_\uparrow(x_1) = (0, 1, 2),\quad f_\uparrow(x_2) = (0, 1, 1),\quad f_\uparrow(x_3) = (0, 1, 2),$$

и поэтому единственной недоминируемой по P_E точкой является $\mu_X = x_2$. ♦

Пример 11. Пусть $n = 3$ и $x_1 = x_2 < x_3$. Аналогично примеру 10, можно убедиться в том, что множество точек, недоминируемых по $P_\varnothing$, есть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и двумя недоминируемыми по P_E точками являются x_1 и x_2. ♦

Пример 12. Пусть $n = 4$ и $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Используя обозначения, аналогичные обозначениям из примера 10, имеем:

$$f(x_0) = (1, 2, 3, 4),\quad f(x_1) = (0, 1, 2, 3),$$
$$f(x_{12}) = (1, 1, 2, 3),\quad f(x_2) = (1, 0, 1, 2),$$
$$f(x_{23}) = (2, 1, 1, 2),\quad f(x_3) = (2, 1, 0, 1),$$
$$f(x_{34}) = (3, 2, 1, 1),\quad f(x_4) = (3, 2, 1, 0),$$
$$f(x_5) = (4, 3, 2, 1).$$

Множество недоминируемых по $P_\varnothing$ точек есть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Далее:

$$f_\uparrow(x_1) = (0, 1, 2, 3),\quad f_\uparrow(x_2) = (0, 1, 1, 2),$$
$$f_\uparrow(x_3) = (0, 1, 1, 2),\quad f_\uparrow(x_4) = (0, 1, 2, 3),$$

и поэтому недоминируемыми по P_E точками являются x_2 и x_3. ♦

Пример 13. Пусть $n = 5$ и $x_1 = x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Тогда

$$f(x_1) = f(x_2) = (0, 0, 1, 2, 3),\quad f(x_3) = (1, 1, 0, 1, 2),$$
$$f(x_4) = (2, 2, 1, 0, 1),\quad f(x_5) = (3, 3, 2, 1, 0).$$
$$f_\uparrow(x_1) = f_\uparrow(x_2) = (0, 0, 1, 2, 3),\quad f_\uparrow(x_3) = (0, 1, 1, 1, 2),$$
$$f_\uparrow(x_4) = (0, 1, 1, 2, 2),\quad f_\uparrow(x_5) = (0, 1, 2, 3, 3).$$

Здесь недоминируемыми по P_E точками являются x_1, x_2 и медиана x_3. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многокритериальный подход к определению средних оказался эффективным для самых различных видов исходных данных, в том числе данных с неопределенностями и порядковых данных.

Среди введенных таким образом средних наиболее перспективными для практического применения являются средние по $P_{E\Delta}$: множество таких средних $G^{E\Delta}(X)$ имеет простую структуру (является отрезком вида $[\alpha, \beta]$) и устойчиво к малым изменениям исходных данных. Кроме того, разработан простой и точный аналитический метод построения множества $G^{E\Delta}(X)$: найдены формулы для расчета границ отрезка — величин α и β. Для упрощенного применения указанной средней отрезок $[\alpha, \beta]$ можно представлять одной точкой — его серединой $\gamma = 1/2\ (\alpha + \beta)$, которую можно назвать *сконцентрированной*, или *стянутой средней* (*по* $P_{E\Delta}$).

Отметим также принципиальное отличие многокритериального подхода к определению понятия средней от подхода, разработанного в теории агрегирующих функций (aggregation function) [8], в которой под средней понимается такое значение числовой функции n переменных x_i, обладающей заранее заданными специальными свойствами (например, симметричностью, монотонностью по каждой переменной и т. д.), которое наиболее близко в определенном смысле ко множеству X.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Введем в рассмотрение функции $\sigma_k(x) = f_{[1]}(x) + f_{[2]}(x) + \ldots + f_{[k]}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В статье [1] выяснено, что эти функции являются выпуклыми кусочно-линейными и их точки минимума на числовой прямой Re составляют отрезки $M_k = [a_k, b_k]$ (но некоторые отрезки стягиваются в одну точку). Оказывается, что $\alpha = \min\limits_k b_k$, $\beta = \max\limits_k a_k$.

Лемма 1. *Координаты концов отрезков* $M_k = [a_k, b_k]$ *можно выразить аналитически через координаты точек из множества* X:

для нечетных

$$k = 2p - 1,\ p = 1, \ldots, h_1:$$
$$M_k = \{1/2(x_{(p)} + x_{(n+1-p)})\}; \tag{П1}$$

для четных

$$k = 2p,\ p = 1, \ldots, h_2:\ M_k = [1/2(x_{(p)} + x_{(n-p)});\ 1/2(x_{(1+p)} + x_{(n+1-p)})], \tag{П2}$$

где $h_1 = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ — *целая часть числа* $(n+1)/2$, $h_2 = \lfloor n/2 \rfloor$ — *целая часть числа* $n/2$.

Доказательство леммы 1. Сумма $\sigma_k(x)$ включает в себя расстояния от точки x до $l(x)$ крайних слева (на числовой оси) и до $r(x)$ крайних справа точек множества X. При этом числа $l(x)$ и $r(x)$ — целые, неотрицательные, в сумме равные k. Функция $\sigma_k(x)$ сначала при $l(x) < r(x)$ убывает, а потом при $l(x) > r(x)$ возрастает. В промежуточных положениях x^* функция принимает минимальные значения. Рассмотрим их детально.

Для нечетных $k = 2p - 1$, где $p = 1, \ldots, h_1$, числа $l(x)$ и $r(x)$ не могут быть равны и поэтому минимум функции находится в одной точке x^*, слева от которой $l(x^* - \varepsilon) < r(x^* - \varepsilon)$, а справа $l(x^* + \varepsilon) > r(x^* + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Такая точка x^* находится ровно посередине между p-й точкой слева и p-й точкой справа, так как в этом случае выполняется условие $r(x^* - \varepsilon) \ge p > l(x^* - \varepsilon)$ и $l(x^* + \varepsilon) \ge p > r(x^* + \varepsilon)$. Следовательно, формула (П1) верна.

Для четных $k = 2p$, где $p = 1, \ldots, h_2$, множество M_k — отрезок, на котором $l(x^*) = r(x^*) = p$. Покажем, что левая граница этого отрезка — точка $x^*_{\min}$ — находится посередине между p-й точкой слева и $(p + 1)$-й точкой справа. Для нее выполняется условие $r(x^*_{\min} - \varepsilon) \ge p + 1$ и $l(x^*_{\min} + \varepsilon) \ge p$. Покажем, что правая граница этого отрезка — точка $x^*_{\max}$ — находится посередине между $(p + 1)$-й точкой слева и p-й точкой справа. Для нее выполняется условие $r(x^*_{\max} - \varepsilon) \ge p$ и $l(x^*_{\max} + \varepsilon) \ge p + 1$. Следовательно, $M_k = [x^*_{\min}, x^*_{\max}]$ и формула (П2) верна. Лемма 1 доказана полностью. •

Отметим прямые следствия из формул (П1) и (П2):

— при нечетных k отрезки M_k вырождаются в точки; в частности, M_1 есть центральная точка $1/2(x_{(1)} + x_{(n)})$;

— M_n при любом n является медианой:

при нечетном $k = n = 2p - 1$, $p = h_1$: $x_{(p)} = x_{(n+1-p)}$;

при четном $k = n = 2p$, $p = h_2$: $x_{(p)} = x_{(n-p)}$; $x_{(1+p)} = x_{(n+1-p)}$.

Покажем, что для определения границ α и β из формул (П1) и (П2) достаточно использовать только формулу (П1).

Поскольку $h_1 \ge h_2$ и $x_{(p)} + x_{(n+1-p)} \le x_{(1+p)} + x_{(n+1-p)}$, то $b_{2p-1} \le b_{2p}$ для всех $p = 1, \ldots, h_2$. Следовательно, для определения $\alpha = \min\limits_k b_k$ достаточно рассмотреть только числа b_k с нечетным индексом k.

Поскольку $h_1 \ge h_2$ и $x_{(p)} + x_{(n+1-p)} \ge x_{(p)} + x_{(n-p)}$, то $a_{2p-1} \ge a_{2p}$ для всех $p = 1, \ldots, h_2$. Следовательно, для определения $\beta = \max\limits_k a_k$ также достаточно рассмотреть только числа a_k с нечетным индексом k.

Формулы (3) получаются путем простых алгебраических преобразований из формулы (П1). Утверждение 1 доказано. ♦

Доказательство утверждения 2. Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть первая по порядку точка в множестве* X^ε *имеет смещение относительно первой по порядку точ-*

ки в множестве X на величину δ_1*, вторая по порядку на величину* δ_2 *и т. д. Тогда выполняется неравенство*

$$\max\{|\delta_1|, |\delta_2|, ..., |\delta_n|\} \le \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, ..., |\varepsilon_n|\}. \quad (П3)$$

Доказательство леммы 2. Вначале докажем справедливость неравенства (П3) для случая двух точек $x_1 < x_2$. При сохранении порядка точек в X^ε выражение (П3) выполняется как равенство. Пусть порядок точек изменился, т. е. $x_1 + \varepsilon_1 > x_2 + \varepsilon_2$.

При $|\varepsilon_1| \ge |\varepsilon_2|$ неравенство справедливо только при $\varepsilon_1 > 0$. Тогда:

из $(x_2 + \varepsilon_2) - x_1 < \varepsilon_1 = |\varepsilon_1|$ и $x_1 - (x_2 + \varepsilon_2) < -\varepsilon_2 < |\varepsilon_1|$ следует $|\delta_1| < |\varepsilon_1|$;

из $(x_1 + \varepsilon_1) - x_2 < \varepsilon_1 = |\varepsilon_1|$ и $x_2 - (x_1 + \varepsilon_1) < -\varepsilon_2 < |\varepsilon_1|$ следует $|\delta_2| < |\varepsilon_1|$.

При $|\varepsilon_1| < |\varepsilon_2|$ неравенство справедливо только при $\varepsilon_2 < 0$. Тогда:

из $(x_2 + \varepsilon_2) - x_1 < \varepsilon_1 < |\varepsilon_2|$ и $x_1 - (x_2 + \varepsilon_2) < -\varepsilon_2 = |\varepsilon_2|$ следует $|\delta_1| < |\varepsilon_2|$;

из $(x_1 + \varepsilon_1) - x_2 < \varepsilon_1 < |\varepsilon_2|$ и $x_2 - (x_1 + \varepsilon_1) < -\varepsilon_2 = |\varepsilon_2|$ следует $|\delta_2| < |\varepsilon_2|$.

Для двух точек выражение (П3) доказано. Его смысл заключается в следующем. Вместо множества точек $X^\varepsilon = \{x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2\}$, в котором порядок точек изменился по сравнению с множеством X, можно рассмотреть множество точек $X^\delta = \{x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2\}$, в котором порядок точек не изменился по сравнению с множеством X. При этом множества точек X^ε и X^δ совпадают: $x_1 + \varepsilon_1 = x_2 + \delta_2$, $x_2 + \varepsilon_2 = x_1 + \delta_1$. Но максимальное смещение точек в множестве X^δ по сравнению с множеством X не превышает максимального смещения точек в множестве X^ε по сравнению с множеством X.

Доказанное для двух точек можно обобщить следующим образом. Сначала рассмотрим изменение n точек множества X на множестве X^ε, в котором изменился порядок двух соседних точек. Для этого случая выражение (П3) сохраняется, так как для остальных, не переставленных, точек x_i выполняется равенство $\delta_i = \varepsilon_i$. Затем рассмотрим произвольную перестановку точек при изменении n точек множества X на множестве X^ε. Поскольку произвольная перестановка последовательности элементов может быть получена последовательной перестановкой пар соседних ее элементов, то выражение (П3) сохранится и в этом общем случае. Лемма 2 доказана. •

Из леммы 2 следует, что для доказательства утверждения 2 достаточно рассмотреть случай, когда изменение координат точек из множества X не меняет порядок этих точек в множестве X^ε. Так как при изменении порядка, согласно (П3), оценка сверху (4) не ухудшается.

Согласно Утверждению 1, границы α и β отрезка средних $G^{E\Delta}(X)$ выражаются аналитически через координаты точек x_i по формулам (3), из которых следует справедливость оценок для изменения значений чисел α и β:

$$\Delta\alpha \le \frac{1}{2}\max_{p \in H}(|\varepsilon_{(p)}| + |\varepsilon_{(n+1-p)}|) \le \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, ..., |\varepsilon_n|\};$$

$$\Delta\beta \le \frac{1}{2}\max_{p \in H}(|\varepsilon_{(p)}| + |\varepsilon_{(n+1-p)}|) \le \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, ..., |\varepsilon_n|\}.$$

Следовательно, оценка сверху (4) верна. ♦

В ы в о д формулы (8).

Если $x \le a_i$, то

$$E[\tilde{f}_i(x)] = \int_{a_i}^{b_i}(t - x)\frac{dt}{b_i - a_i} = \frac{1}{2}(a_i + b_i) - x,$$

где t — переменная интегрирования. Если $x \ge b_i$, то

$$E[\tilde{f}_i(x)] = \int_{a_i}^{b_i}(x - t)\frac{dt}{b_i - a_i} = x - \frac{1}{2}(a_i + b_i).$$

Если $a_i < x < b_i$, то

$$E[\tilde{f}_i(x)] = \int_{a_i}^{x}(x - t)\frac{dt}{b_i - a_i} + \int_{x}^{b_i}(t - x)\frac{dt}{b_i - a_i} =$$

$$= \frac{1}{b_i - a_i}\left(x^2 - x(a_i + b_i) + \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2)\right). ♦$$

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 3. Докажем сначала, что любая точка $x \notin X$ является доминируемой по $P_\varnothing$.

Если $x < x_{(1)}$, то справедливо $x_{(1)}P_\varnothing\, x$, так как $f_i(x) = f_i(x_{(1)}) + 1$, $i = 1, ..., n$.

Если $x > x_{(n)}$, то справедливо $x_{(n)}P_\varnothing\, x$, так как $f_i(x) = f_i(x_{(n)}) + 1$, $i = 1, ..., n$.

Если $x_{(k)} < x < x_{(k+1)}$, где $k = 1, ..., n - 1$, то справедливо как $x_{(k)}P_\varnothing\, x$, так и $x_{(k+1)}P_\varnothing\, x$. Покажем только, что $x_{(k)}P_\varnothing\, x$: для $i = 1, ..., k$ выполняется $f_i(x) = f_i(x_{(k)}) + 1$, а для $i = k + 1, ..., n$ выполняется $f_i(x) = f_i(x_{(k)})$.

Таким образом, любая точка, не принадлежащая множеству X, доминируема по $P_\varnothing$ ближайшими слева и справа (если такие есть) точками из множества X.

Осталось доказать, что каждая точка из X недоминируема по $P_\varnothing$ другими точками из множества X. Для каждой точки $x_{(k)}$, $k = 1, ..., n$, выполняется равенство $f_k(x_{(k)}) = 0$. Для другой точки $x_{(m)}$, $m = 1, ..., n$, $m \ne k$, равенство $f_k(x_{(m)}) = 0$ верно только тогда, когда она совпадает с точкой $x_{(k)}$, в противном случае должно выполняться неравенство $f_k(x_{(m)}) > 0$. Получается, что точка $x_{(k)}$ не может быть доминируема по $P_\varnothing$ не совпадающими с ней точками $x_{(m)}$ из множества X, так как $f_k(x_{(k)}) < f_k(x_{(m)})$. Если же точки $x_{(k)}$ и $x_{(m)}$ совпадают, то ни одна из них не может доминировать по $P_\varnothing$ другую. Утверждение 3 доказано. ♦

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 4. Если в множестве X нет совпадающих точек, то для произвольной точки $x_{(k)}$, $k = 1, ..., n$, можно записать в общем виде векторную оценку

$$f(x_{(k)}) = (k, k-1, k-2, ..., 2, 1, 0, 1, 2, ..., n-k-1, n-k).$$

Отсюда сразу видно, что для указанных в утверждении 4 точек $x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ (при нечетном n) или $x_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ и $x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ (при четном n) упорядоченные векторные оценки $f_{\uparrow}(x_{(k)})$ будут лучше по $P_{\varnothing}$, чем для всех остальных точек множества X.

В случае, когда совпадения есть, указанные в утверждении 4 точки также будут недоминируемы по P_E, так как они имеют наименьшие максимальные значения $f_{(n)}(x)$. Но помимо них, недоминируемыми по P_E могут быть и другие точки (см. пример 13). Утверждение 4 доказано. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подиновский В.В.*, *Нелюбин А.П.* Средние величины: многокритериальный подход // Проблемы управления. — 2020. — № 5. — С. 3—16. [*Podinovski*, *V.V.*, *Nelyubin*, *A.P.* Mean Quantities: a Multicriteria Approach // Control Sciences. — 2020. — No. 5. — P. 3—16] (In Russian)]
2. *Пфанцагль И.* Теория измерений. — М.: Мир, 1976. [*Pfanzagl*, *J.* Theory of Measurement. — Berlin: Springer, 1971.]
3. *Джини К.* Средние величины. — М.: Статистика, 1970. [*Gini, C.* Le Medie. — Torino: Ulet, 1957.]
4. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — Т. 15. — С. 330—344. [*Podinovskii, V.V.* Multicriterial Problems with Uniform Equivalent Criteria // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1975. — Vol. 15. — P. 47—60. (In Russian)]
5. *Маршалл А.*, *Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. [*Marshall, A.W., Olkin, I.* Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. — New York: Academic Press, 1979.]
6. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев с непрерывной шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 9. — С. 129—137. [*Podinovskii, V.V.* The Quantitative Importance of Criteria with a Continuous First-Order Metric Scale // Automation and Remote Control. — 2005. — Vol. 66, no. 9. — P. 1478—1485.]
7. *Льюс Р.Д.*, *Райфа Х.* Игры и решения. Введение и критический обзор. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. [*Luce*, *R.D.*, *Raiffa*, *H.* Games and Decisions: Introduction and Critical Survey. — New York: Wiley, 1957.]
8. *Beliakov, G.*, *Pradera, A.*, *Calvo, T.* Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. — New York: Springer, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 14.12.2020, после доработки 21.02.2021.
Принята к публикации 24.02.2021.

Подиновский Владислав Владимирович — д-р техн. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ podinovski@mail.ru,

Нелюбин Андрей Павлович — канд. физ.-мат. наук, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва, ✉ nelubin@gmail.com.

MEANS: A MULTICRITERIA APPROACH. PART II

V.V. Podinovski[1] and A.P. Nelyubin[2]

[1] National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

[2] Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[1]✉ podinovski@mail.ru, [2]✉ nelubin@gmail.com

Abstract. In a recent paper by the authors (see *Control Sciences* 2020, no. 5), a new approach to determining means was proposed, and some of their properties were investigated. Being a direct continuation, this paper presents new properties of the means. Their stability to small changes in the initial data is studied, and stable means are identified. The cases of data with repetitions, data with uncertainty, and ordinal data are considered. A simple and accurate analytical method for constructing a set of means is suggested in the applications-relevant case when the closeness of a point to the given ones is estimated using the first ordinal metric scale of criteria. The presentation is accompanied by simple calculation examples that illustrate the main theoretical results.

Keywords: means, multicriteria choice problems, preference relations, criteria importance theory, theory of majorization.

Funding. This work was supported by the Russian Academic Excellence Project «5-100».