УДК 519.83

ЕЩЕ РАЗ О НЕКОРРЕКТНОСТИ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

В.В. Подиновский, О.В. Подиновская

В опубликованной в журнале «Проблемы управления» статье авторов содержится пример двухкритериальной задачи, показывающий, что применение метода анализа иерархий (МАИ) может привести к явно неверным результатам. Однако в опубликованной в этом же журнале, № 3, 2012, статье утверждается, что в ней указано на «ошибку авторов статьи при использовании средств МАИ, в силу чего утверждение о несостоятельности МАИ, основанное на рассматриваемой задаче, неправомерно». В данной работе показано, что средства при решении контрпримера были применены без нарушения рекомендаций МАИ, а также приведены еще два контрпримера, подтверждающие выводы авторов.

Ключевые слова: принятие многокритериальных решений, метод анализа иерархий, дескриптивный и нормативный подходы, шкала отношений, приоритеты вариантов, теория измерений.

ВВЕДЕНИЕ

Согласно методу анализа иерархий — МАИ (the analytic hierarchy process — AHP) сравнение вариантов по предпочтительности относительно каждого из критериев следует производить по шкале отношений, а нормализацию приоритетов вариантов по отдельным критериям осуществлять вне связи с приоритетами (оценками важности) критериев [1, 2]. Известно, однако, что такая техника расчетов, предполагающая применение аддитивных функций ценности, согласно математической теории измерений неправомерна [3, 4] (в работе [5] применение подобной нормализации было названо «интеллектуальной ошибкой»). И уже только по этой причине следует признать, что МАИ не может считаться корректным методом. И строить контрпримеры для доказательства справедливости такой научной оценки метода не требуется.

В статье [6] был приведен иллюстративный пример двухкритериальной задачи, который наглядно показал, что применение МАИ «из-за недостатков в теоретической базе метода может привести к явно неверным результатам». При решении этой задачи был применен самый известный и самый распространенный подход МАИ, именуемый дескриптивным. Однако автор статьи [7] утверждает, что для решения этой задачи нужно было применять не дескриптивный, а нормативный подход, который при решении этой задачи не приводит к неверным результатам.

В настоящей работе выясняется, что для применения дескриптивного подхода к решению указанной задачи «противопоказаний» нет. Приводятся два иллюстративных примера задач, при решении которых и нормативный подход приводит к ошибочным результатам.

1. ПРИМЕР 1

Для удобства дальнейшего изложения вначале приведем в кратком изложении двухкритериальную задачу из статьи [6] и результаты ее решения. Имеются четыре варианта (альтернативы): x^1, x^2, x^3 и x^4, оцениваемые по двум критериям f_1 и f_2 равной важности. Критерии имеют общую шкалу с градациями: e — отлично (*excellent*), g — хорошо (*good*), m — посредственно (*mediocre*). Варианты x^j характеризуются следующими векторными оценками $f(x^j) = (f_1(x^j), f_2(x^j))$:

$$f(x^1) = (e, g); f(x^2) = (m, e); f(x^3) = (g, g); f(x^4) = (e, m).$$

Требуется ранжировать (упорядочить) варианты по предпочтительности.

Из интуитивных соображений ясно, что варианты x^2 и x^4 одинаковы по предпочтительности (ввиду «абсолютной симметрии этих вариантов в рассматриваемой задаче» [7]), а наилучшим следует считать вариант x^1.

В результате решения задачи при помощи теории важности критериев — ТВК [8] в статье [6] была получена следующая частичная упорядоченность вариантов: наилучшим является вариант x^1; варианты x^2 и x^4 одинаковы по предпочтительности; вариант x^3 несравним по предпочтительности ни с x^2, ни с x^4. Эта упорядоченность согласована с высказанными выше интуитивными ожиданиями. И решения задачи при помощи ТВК было проведено в статье [6] для того, чтобы показать: интуитивные соображения об ожидаемых результатах решения задачи можно обосновать при помощи корректного ее анализа. Тот факт, что полученная упорядоченность вариантов лишь частичная — естественное следствие того, что шкала критериев считалась порядковой: при совершенствовании шкалы за счет дополнительной информации о предпочтениях эта упорядоченность может быть продолжена до полной. Легко убедиться в справедливости следующих утверждений [8]: 1) если рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется, то вариант x^3 предпочтительнее каждого из вариантов x^2 и x^4; 2) если рост предпочтений вдоль шкалы критериев ускоряется, то каждый из вариантов x^2 и x^4 предпочтительнее варианта x^3; 3) при равномерном росте предпочтений вдоль шкалы критериев все три варианта x^2, x^3 и x^4 одинаковы по предпочтительности. Подчеркнем, что для получения последних результатов достаточно оказалось лишь качественной информации о предпочтениях.

Теперь обратимся к решению задачи при помощи МАИ, проведенному в статье [6]. Пусть, в соответствии с допущением МАИ об измерении предпочтений в шкале отношений, $a > 1$ — степень превосходства в предпочтительности шкальной оценки e над оценкой g, и $b > 1$ — степень превосходства в предпочтительности шкальной оценки g над оценкой m. Степень превосходства оценки e над оценкой m равна ab. Исходя из согласованных матриц парных сравнений вариантов по предпочтительности относительно первого и второго критериев, построенных согласно указанным данным о соотношении градаций шкалы по предпочтительности, были получены векторы приоритетов вариантов [6]:

$$(p_1(x^1),\ p_1(x^2),\ p_1(x^3),\ p_1(x^4)) =$$

$$= \left(\frac{ab}{2ab+b+1},\ \frac{1}{2ab+b+1},\ \frac{b}{2ab+b+1},\ \frac{ab}{2ab+b+1}\right);$$

$$(p_2(x^1),\ p_2(x^2),\ p_2(x^3),\ p_2(x^4)) =$$

$$= \left(\frac{b}{ab+2b+1},\ \frac{ab}{ab+2b+1},\ \frac{b}{ab+2b+1},\ \frac{1}{ab+2b+1}\right),$$

где $p_i(x^j)$ — приоритет варианта x^j по критерию f_i.

Варианты x^j сравниваются по предпочтительности согласно величинам их интегральных, или глобальных приоритетов

$$h(x^j) = w_1p_1(x^j) + w_2p_2(x^j),$$

где w_1 и w_2 — приоритеты критериев относительно цели. В нашей задаче критерии равноважны, и поэтому $w_1 = w_2 = 1/2$.

Разность $h(x^2) - h(x^4)$ положительна при любых значениях $a > 1$ и $b > 1$. Знак разности $h(x^2) - h(x^1)$ зависит от конкретных величин a и b. В частности, она положительна для каждой из следующих трех комбинаций значений параметров a и b: $a = 3$, $b = 2$; $a = 3$, $b = 3$; $a = 4$, $b = 2$.

Таким образом, согласно МАИ, все варианты упорядочены по предпочтительности, причем вариант x^2 всегда предпочтительнее варианта x^4, и существуют условия, при которых вариант x^2 является наилучшим, что не согласуется с интуитивными ожиданиями, представленными выше. Причина этого, как показано в статье [6], состоит как раз в том, что МАИ присуща «интеллектуальная ошибка», о которой речь шла выше.

Рассмотрим теперь аргументы, приведенные в статье [7] с целью доказательства неправомерности применения дескриптивного подхода к решению нашей задачи.

1. «В процессе решения задачи на основе ТВК авторы прибегают к сравнению варианта x^1, имеющего векторную оценку (e, g) с *гипотетическим*, *безразличным* вариантом x^5, имеющим векторную оценку (g, e). И здесь мы отметим следующее обстоятельство: использование *гипотетических* вариантов — «безопасный» прием с позиций ТВК, *не является* «безопасным» в рамках дескриптивного подхода МАИ. Иными словами, использование *гипотетических* вариантов, т. е. *дополнительных* вариантов при неизменной структуре множества критериев, приводит к изменению порядка ранжированных вариантов, если эта ранжировка выполнялась на основе парных сравнений. Этот факт известен как *нарушение принципа инвариантности* при использовании *дескриптивного* подхода в МАИ <...>. Формально в силу этого обстоятельства «дескриптивный подход» некорректно применять для решения рассматриваемой задачи, если сравнивать результаты на его основе с решением на основе ТВК.».

Постараемся дать ответ на эту не вполне ясно сформулированную критику. Во-первых, порядок решения задачи определенным методом (в данном случае МАИ) нелогично ставить в зависимость от того, будет ли сравниваться получаемый при этом результат с результатами, полученными (или которые могут быть получены) другими методами (в данном случае ТВК), или не будет. Во-вторых, введение гипотетического варианта x^5 было сделано в ходе решения задачи при помощи ТВК. А в ходе решения задачи с использованием МАИ никакого дополнительного варианта не вводилось.

2. «...*нормативный подход* в решении рассматриваемого «контрпримера» *необходим* в силу постановки задачи, так как оценки по критериям f_1 и f_2 (e — отлично, g — хорошо, m — посредственно) с очевидностью предполагают сравнение рассматриваемых вариантов с некоторым *стандартом* по этим критериям. Именно для таких постановок и разработан «нормативный» подход в МАИ.».

При нормативном подходе используется понятие идеальной альтернативы, или стандарта, как некоего фиктивного варианта, который имеет самые высокие оценки по всем критериям; относительно него и производится нормировка приоритетов вариантов по критериям. К сожалению, четких, однозначных рекомендаций, когда следует применять дескриптивный, а когда — нормативный подход, в литературе по МАИ нет. По этой причине были проведены исследования по сравнению результатов, получаемых при разных подходах. «В статистических испытаниях с 10 критериями и 3 вариантами оба способа дали одинаковые результаты выбора в 92 % случаев» [2, *с. 45*]. По этой же причине решение задачи о покупке дома в работе [2, *с. 40—45*)] выполнено параллельно двумя подходами. В обоих случаях получена одна и та же упорядоченность вариантов по предпочтительности: <*B*, *A*, *C*>, так что наиболее предпочтительным оказался вариант *B*. Но тут следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Рассмотрим, например, интегральные приоритеты вариантов *B* и *A*:

при дескриптивном подходе: $h^д(B) = 0{,}369$; $h^д(A) = 0{,}346$;

при нормативном подходе: $h^н(B) = 0{,}383$; $h^н(A) = 0{,}315$.

Поскольку МАИ позиционируется как метод измерения предпочтений в шкале отношений, то имеет смысл рассчитать отношения:

$$h^д(B) : h^д(A) = 1{,}07; \quad h^н(B) : h^н(A) = 1{,}22.$$

Второе из этих соотношений больше первого на 14 %. А ведь в сложных и ответственных задачах принятия решений интегральные приоритеты используются как количественные оценки для формулировки практических рекомендаций, например, по распределению ресурсов.

По нашему мнению, не очевидно, что для решения нашей задачи нужно сравнивать варианты «с некоторым стандартом». Более того, так поступать, в свете выше изложенного, вовсе не обязательно.

2. ПРИМЕР 2

Пусть в задаче из примера 1 имеется только три варианта x^1, x^2 и x^3 со следующими векторными оценками:

$$f(x^1) = (m, e); \quad f(x^2) = (e, m), \quad f(x^3) = (g, g).$$

Следуя статье [7] в рамках нормативного подхода, обозначим через $i(e)$, $i(g)$ и $i(m)$ «интенсивности» соответствующих шкальных оценок. Используя прежние обозначения для степеней превосходства в предпочтительности и полагая $i(e) = 1$, получаем:

$$i(e) = 1, \quad i(g) = 1/a, \quad i(m) = 1/(ab).$$

Для ненормированных приоритетов вариантов имеем выражения:

$$h^\bullet(x^1) = \frac{1}{2}(1/ab + 1) = (ab + 1)/(2ab);$$

$$h^\bullet(x^2) = \frac{1}{2}(1 + 1/ab) = (ab + 1)/(2ab);$$

$$h^\bullet(x^3) = \frac{1}{2}(1/a + 1/a) = 1/a.$$

Предположим, что имеется информация о том, что рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется: при переходе от шкальной оценки m к оценке g предпочтения возрастают больше, чем при переходе от оценки g к e. Тогда интуитивно ясно, что наиболее предпочтительным является вариант x^3 (и этот вывод легко получить при помощи ТВК).

Рассмотрим разность

$$h^\bullet(x^2) - h^\bullet(x^3) = (a - 2 + 1/b)/2a.$$

Эта разность при любых значениях параметров a и b из «фундаментальной шкалы» МАИ {1, 2, ..., 9}, таких, что $a > 1$ и $b > 1$, положительна, так что вариант x^2 (а также и вариант x^1), согласно нормативному подходу, оказывается предпочтительнее варианта x^3!

3. ПРИМЕР 3

Рассмотрим следующую двухкритериальную задачу. Областью значений критерия f_1 является отрезок [0, 2], а областью значений критерия f_2 служит отрезок [0, 3]. На множестве векторных оценок $y = (y_1, y_2)$ — области значений Y векторного критерия $f = (f_1, f_2)$ — предпочтения описываются порядковой, или ординальной функцией ценности

$$v(y) = w_1v_1(y_1) + w_2v_2(y_2),$$

где $w_1 = w_2 = 1/2$, $v_1(y_1) = y_1$, $v_2(y_2) = -\frac{1}{6}y_2^2 + \frac{7}{6}y_2$.

Имеется три варианта x^1, x^2 и x^3 со следующими векторными оценками:

$$f(x^1) = (2, 1); \quad f(x^2) = (1, 0); \quad f(x^3) = (0, 1).$$

Заметим, что $v_1(0) = v_2(0) = 0$, $v_1(1) = v_2(1) = 1$, $v_1(2) = v_2(3) = 2$, так что

$$v(f(x^1)) = 1{,}5; \quad v(f(x^2)) = v(f(x^3)) = 0{,}5.$$

Поэтому упорядоченность вариантов выглядит следующим образом: $\langle x^1, x^2 - x^3 \rangle$, т. е. наиболее предпочтителен вариант x^1, а варианты x^2 и x^3 одинаковы по предпочтительности.

Решим задачу ранжирования вариантов при помощи МАИ. Пусть $a > 1$ — степень превосходства в предпочтительности по первому критерию шкальной оценки 2 над оценкой 1, и $b > 1$ — степень превосходства в предпочтительности шкальной оценки 1 над оценкой 0; степень превосходства оценки 2 над оценкой 0 равна ab. Пусть c — степень превосходства в предпочтительности по второму критерию шкальной оценки 1 над оценкой 0. Заметим, что поскольку векторные оценки (1, 0) и (0, 1) одинаковы по предпочтительности и $w_1 = w_2$, то $c = b$. Согласованные матрицы парных сравнений вариантов по каждому из критериев представлены табл. 1 и 2.

Для этих матриц получаем следующие векторы приоритетов как их правые собственные нормированные векторы, соответствующие максимальному собственному числу 3:

$$(p_1(x^1), p_1(x^2), p_1(x^3)) = \left(\frac{ab}{ab+b+1}, \frac{b}{ab+b+1}, \frac{1}{ab+b+1}\right);$$

$$(p_2(x^1), p_2(x^2), p_2(x^3)) = \left(\frac{b}{2b+1}, \frac{1}{2b+1}, \frac{b}{2b+1}\right).$$

Согласно нормативному подходу приоритеты вариантов по каждому из критериев следует разделить на наибольший из приоритетов, и полученные величины

Таблица 1

Матрица парных сравнений вариантов по первому критерию

f_1	x^1	x^2	x^3
x^1	1	a	ab
x^2	$1/a$	1	b
x^3	$1/ab$	$1/b$	1

Таблица 2

Матрица парных сравнений вариантов по второму критерию

f_2	x^1	x^2	x^3
x^1	1	b	1
x^2	$1/b$	1	$1/b$
x^3	1	b	1

$p_i^*(x^j)$ использовать при формировании интегральных приоритетов вариантов. В рассматриваемой задаче:

$$p_1^*(x^1) = 1, \quad p_1^*(x^2) = 1/a, \quad p_1^*(x^3) = 1/(ab);$$

$$p_2^*(x^1) = 1, \quad p_2^*(x^2) = 1/b, \quad p_2^*(x^3) = 1.$$

Получаем следующие ненормированные интегральные приоритеты вариантов $h^*(x^j) = \frac{1}{2}\, p_1^*(x^j) + \frac{1}{2}\, p_2^*(x^j)$:

$$h^*(x^1) = 1,\ h^*(x^2) = (a + b)/(2ab),\ h^*(x^3) = (ab + 1)/(2ab).$$

После их нормировки приходим к конечному результату:

$$h^{н}(x^1) = 1/s, \quad h^{н}(x^2) = (a + b)/(2abs),$$
$$h^{н}(x^3) = (ab + 1)/(2abs),$$

где $s = (4ab + 1)/(2ab)$.

Поскольку

$$h^{н}(x^3) - h^{н}(x^2) = \frac{(a-1)(b-1)}{2abs} > 0,$$

то вариант x^3 оказывается более предпочтительным по сравнению с вариантом x^2!

Легко увидеть, используя формулы для приоритетов на с. 77, что и при дескриптивном подходе один из этих вариантов оказывается предпочтительнее другого!

Отметим, что если, например, областью значений второго критерия будет отрезок [0, 2] и $v_2(y_2) = (y_2 - 1)^3 + 1$, то результаты окажутся такими же.

4. ОБ ОРДИНАЛЬНЫХ И КАРДИНАЛЬНЫХ МЕТОДАХ

В Заключение статьи [7] утверждается: «Добавим, что в свете классических результатов, полученных К. Эрроу, к *ординальным* методам следует относиться достаточно осторожно, а *кардинальные* представления, аналогичные фундаментальной шкале МАИ и относительности измерений, позволяют надеяться на успешное развитие эффективных в *прикладном* плане методов анализа многокритериальных задач с иерархической и сетевой структурой».

Вопрос о возможностях и перспективах применения ординальных и кардинальных методов для моделирования предпочтений представляет большой теоретический и прикладной интерес, но его обсуждение выходит за рамки данной статьи. Поэтому ограничимся только двумя замечаниями.

1. Известная теорема Эрроу о невозможности [9] и дальнейшие аксиоматические исследования (см. обзорную работу [10]) касаются проблемы группового выбора путем голосования и никакого отношения к проблематике, обсуждаемой в работах [6, 7] и данной статье, не имеют.

2. Возможности применения кардинальных методов для описания предпочтений, особенно тех, которые опираются на шкалы отношений, в свете исследований последних лет [11] представляются, по меньшей мере, весьма сомнительными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод анализа иерархий в глазах его многочисленных приверженцев имеет целый ряд достоинств. Однако его пользователям следует иметь в виду, что в основаниях этого по сути эвристического метода имеется ряд пробелов и ошибочных допущений. Одно из них состоит в том, что можно производить нормализацию приоритетов вариантов по каждому из критериев в отдельности вне связи с приоритетами самих критериев. Применение подобных процедур нормализации было названо «интеллектуальной ошибкой». Поэтому рекомендации, получаемые при решении практических многокритериальных задач принятия решений с применением как дескриптивного, так и нормативного подходов МАИ, нельзя считать научно обоснованными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
2. *Саати Т.Л.* Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети: пер. с англ. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 360 с.
3. *Foundation* of measurement / D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes, A. Tverski. — N.-Y.: Academic Press, 1971. — Vol. 1. — 578 p.
4. *Belton V.*, *Stewart T.J.* Multiple criteria decision analysis. An integrated approach. — Boston: Cluwer, 2003. — 374 p.
5. *Edwards W.*, *Barron F.H.* SMARTS and SMARTER: improved simple methods for multiattribute utility measurement // Organization Behavior and Human Processes. — 1994. — Vol. 60. — P. 306—325.
6. *Подиновский В.В.*, *Подиновская О.В.* О некорректности метода анализа иерархий // Проблемы управления. — 2011. — № 1. — С. 8—13.
7. *Митихин В.Г.* Об одном контрпримере для метода анализа иерархий // Проблемы управления. — 2012. — № 3. — С. 77—79.
8. *Подиновский В.В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Уч. пособие. — М.: Физматлит, 2007. — 64 с.
9. *Arrow K.J.* Social choice and individual values. — N.-Y.: Wiley, 1951. Second edition: New Haven and London: Yale University Press, 1963. / Русский перевод: Эрроу К. Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2004. — 204 с.
10. *Алескеров Ф.Т.* Локальные модели голосования. Обзор аксиоматических методов // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 10. — С. 3—26.
11. *Barzilai J.* Preference function modelling: The mathematical foundations of decision theory // Trends in Multiple Criteria Decision Analysis / Ehrgott M., Figueira J.R., Greco S. (Eds.). — N.-Y.: Springer, 2010. — P. 57—86.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Подиновский Владислав Владимирович — д-р техн. наук, профессор кафедры, вед. науч. сотрудник международной научно-учебной лаборатории анализа и выбора решений; Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики, г. Москва;
☏ (495) 621-13-42, ✉ podinovski@mail.ru,

Подиновская Ольга Владиславна — вед. специалист, Банк ВТБ-24, г. Москва;
☏ (495) 960-24-24, доб. 51-36, ✉ podinovskaya@mail.ru.