УДК 519.816

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2020.1.5

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ НЕЧИСЛОВОМ ОЦЕНИВАНИИ ПРЕДПОЧТЕНИЙ И ВЕРОЯТНОСТЕЙ[1]

В.В. Подиновский

Аннотация. Отмечено, что практические задачи принятия решений часто предполагают учет не полностью выявленных предпочтений, а также неопределенных факторов. Известные подходы к анализу таких задач основаны на введении количественных вероятностей и применении функции полезности. Однако это требует получения достаточно сложной и потому ненадежной и не всегда доступной информации. В настоящей статье предложены методы анализа решений в условиях неопределенности, для реализации которых не требуются функции полезности и количественные вероятности. Они основаны на идеях и результатах теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений в условиях определенности. Учитываются качественная вероятность и порождаемые ею частичные отношения предпочтения и безразличия на множестве стратегий. Рассмотрены вычислительные методы построения таких отношений. Приведены расчетные примеры.

Ключевые слова: принятие решений в условиях неопределенности, неполная информация о предпочтениях и неопределенных факторах, отношения предпочтения, качественная вероятность.

ВВЕДЕНИЕ

Практические задачи принятия решений часто предполагают необходимость учета неопределенных факторов, значения которых заранее точно неизвестны. Основные, наиболее распространенные подходы к анализу таких задач предполагают построение функции полезности, т. е. функции, математическое ожидание которой моделирует предпочтения ЛПР (лица, принимающего решение) на множестве распределений вероятностей на множестве исходов [1—5]. Однако построение функции полезности — проблема весьма сложная и потому не всегда решаемая [6]. И даже само допущение существования функции полезности является достаточно сильным, так как может привести к появлению разного рода «парадоксов» — выводов, не согласующихся со здравым смыслом или очевидно ожидаемых ЛПР результатов [7, 8]. С другой стороны, наличие функции полезности предполагает, что задано (полностью или хотя бы частично) распределение вероятностей на множестве значений неопределенного фактора. Однако в сложных задачах принятия решений социально-экономического, политического и иного характера объективных вероятностей обычно не существует и приходится обращаться к экспертным оценкам. Но, как известно, количественные оценки весьма сложны для человека, а потому недостаточно надежны и могут содержать явные ошибки [8].

Поэтому теоретический и практический интерес представляет проблема разработки методов анализа решений в условиях неопределенности, для реализации которых не требуются функции полезности и количественные вероятности. Оказывается, что ряд таких методов можно построить на основе результатов теории качественной важности критериев [9, 10], разработанной для анализа многокритериальных задач, так как понятие важности критериев оказывается в некоторых отношениях формально схоже с понятием вероятности. На это обстоятельство ранее уже указывалось в работах [11, 12].

Первые результаты приложения теории важности критериев к задачам принятия решений при

[1] Исследования финансировались в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5—100».

неопределенности были получены в работе [13]. В данной статье, являющейся, по сути, обзорно-исследовательской, подходящие определения и методы теории качественной важности изложены сразу в терминах анализа (однокритериальных) решений при неопределенности. Кроме того, представлены и новые результаты, которые, в свою очередь, приложимы и к многокритериальным задачам. Теоретические положения иллюстрируются простыми расчетными примерами.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОБЛЕМНОЙ СИТУАЦИИ

Далее принята математическая модель ситуации принятия решения в условиях неопределенности в виде

$$\langle \eta, S, \Lambda, \Theta, f, \Pi, R, \Gamma \rangle. \qquad (1)$$

Здесь:

η — тип постановки задачи (выбрать одну наилучшую стратегию (η_1) или же l лучших (η_l), упорядочить все стратегии по предпочтительности ($\eta_{\rightarrow}$) и др.);

S — множество стратегий (планов, альтернатив, вариантов, действий, решений, ...);

$\Lambda = \{\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^m\}$ — конечное множество значений неопределенного фактора, $m \geq 2$; его элементы называются «состояниями природы», или элементарными событиями, а его подмножества именуются событиями;

Θ — числовая модель оценивания предпочтительности последствий; она включает в свой состав множество $V \subseteq (-\infty, +\infty)$ числовых оценок последствий; предполагается, что предпочтения возрастают на множестве V, т. е. чем оценка v больше, тем она предпочтительнее; множество V может быть континуальным (например, $V = [v_*, v^*]$ для денежных выигрышей) или дискретным (например, для пятибалльной целочисленной шкалы $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$); если специально не указано иное, то считается, что последствия (выигрыши) оцениваются в порядковой шкале[2] [14]; но шкала может быть и более совершенной (см. § 5);

f — функция выигрыша (критерий, показатель эффективности или качества и т. п.) — отображение $S \times \Lambda \rightarrow V$, т. е. $v = f(s, \lambda)$ — оценка последствия применения стратегии s, если реализуется значение неопределенного фактора λ (т. е. V — это область значений функции f); каждая стратегия s характеризуется вектором[3] (векторной оценкой последствий) $x = (f(s, \lambda^1), f(s, \lambda^2), ..., f(s, \lambda^m))$; множество всех векторных оценок x (как достижимых, т. е. соответствующих стратегиям и значениям неопределенного фактора, так и гипотетических) есть $X = V^m$.

Π — нечисловая модель вероятностей; она содержит (бинарное) отношение (нестрогого превосходства) вероятности $\succsim$ на множестве $L = 2^\Lambda$ подмножеств множества Λ: запись $A \succsim B$ означает, что событие A не менее вероятно, чем событие B; свойства отношения $\succsim$ рассматриваются в § 2; кроме этого, модель Π может содержать и иные отношения (см. § 6);

R — отношение нестрогого предпочтения ЛПР на множестве X: запись xRy означает, что вектор x не менее предпочтителен, чем вектор y; оно порождает отношение (строгого) предпочтения P и безразличия (равенства по предпочтительности) I: xPy верно, когда верно xRy и неверно yRx, и xIy верно, когда верно и xRy, и yRx; запись xPy означает, что вектор x предпочтительнее, чем вектор y, а xIy означает, что векторы x и y безразличны (одинаковы по предпочтительности); иными словами, отношения I и P являются симметричной и асимметричной частями отношения R, т. е. $I = \text{Sym } R = R \cap R^{-1}$, $P = \text{As } R = R \setminus \text{Sym } R$, где R^{-1} — отношение, обратное к отношению R; предполагается, что отношение R есть квазипорядок (оно рефлексивно: xRx верно для любого $x \in X$, и транзитивно: для любых $x, y, z \in X$ из xRy и yRz следует xRz), но лишь частичный, т. е. не всякие векторы x и y из множества X сравнимы по отношению R: может не выполняться ни xRy, ни yRx; для квазипорядка R отношение P оказывается строгим частичным порядком (оно иррефлексивно: yPy неверно для любого $y \in Z$, и транзитивно), а отношение I — эквивалентностью (оно симметрично: для любых $x, y \in X$ из xRy следует yRx, рефлексивно и транзитивно); отношения R, P, I порождают на

[2] Шкала предполагается порядковой в смысле моделирования предпочтений. Однако «естественная» шкала может быть количественной. Так, для денег имеем шкалу отношений; например, можно сказать, что сумма в 20 руб. в 2 раза больше, чем сумма в 10 руб., но при этом нельзя утверждать, что она предпочтительнее в 2 раза.

[3] Термин «вектор» употребляется здесь для обозначения упорядоченного набора m чисел, который не рассматривается как элемент векторного пространства Re^m. Более точными были бы термины «m-ка » «кортеж», но они не знакомы широкому кругу читателей литературы по принятию решений и далее не употребляются. Этот упорядоченный набор считается элементом векторного пространства Re^m, когда используется информация об отношении ЛПР к риску (см. § 5 и 6).

множестве стратегий S аналогичные по смыслу отношения R_*, P_*, I_* следующим образом:

$$s'R_*s'' \Leftrightarrow x'Rx'', \quad s'P_*s'' \Leftrightarrow x'Px'', \quad s'I_*s'' \Leftrightarrow x'Ix'',$$

где $x' = (f(s', \lambda^1), f(s', \lambda^2), ..., f(s', \lambda^m))$ и $x'' = (f(s'', \lambda^1), f(s'', \lambda^2), ..., f(s'', \lambda^m))$. Именно отношения R_*, P_*, I_* непосредственно применяются для формирования решения анализируемой задачи принятия решения с учетом типа ее постановки; например, если требуется выбрать одну наилучшую (оптимальную) стратегию, то строится множество недоминируемых по отношению P_* стратегий, среди которых (если множество P_* внешне устойчиво) и надлежит выделить наилучшую;

Γ — информация об отношении ЛПР к риску; оно может быть не склонным к риску ($\Gamma = \{\gamma^1\}$), склонным к риску ($\Gamma = \{\gamma^2\}$) или безразличным (нейтральным) к риску ($\Gamma = \{\gamma^3\}$), но такой информации может и не быть ($\Gamma = \varnothing$).

Отношение R заранее неизвестно: его нужно построить на основе модели оценивания предпочтительности последствий Θ, модели вероятностей неопределенного фактора П и информации об отношении ЛПР к риску Г. Методы построения этого отношения рассматриваются далее в § 3—7.

2. ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Отношение $\succsim$ порождает отношения превосходства по вероятности $\succ$ и равновероятности ~: $A \succ B$ верно, когда верно $A \succsim B$ и неверно $B \succsim A$, и $A \sim B$ верно, когда верно и $A \succsim B$, и $B \succsim A$. Запись $A \succ B$ означает, что событие A более вероятно, чем событие B, а запись $A \sim B$ означает, что события A и B равновероятны.

Выделим важные частные виды отношения вероятности $\succsim$, которые будут употребляться в дальнейшем.

Полная качественная вероятность. Отношение $\succsim$ называется (*полной*) *качественной* (или *сравнительной*) *вероятностью*, если оно обладает свойствами (удовлетворяет аксиомам де Финетти (1931 г.)) [15, 16]:

А1. *Сравнимость*: для любых A и B выполнено, по крайней мере, одно из соотношений: $A \succsim B$ или $B \succsim A$;

А2. *Транзитивность*: из соотношений $A \succsim B$ и $B \succsim C$ следует $A \succsim C$;

А3. *Существенность*: $\Lambda \succ \varnothing$ и для любого A выполнено $A \succsim \varnothing$;

А4. *Аддитивность*: если $A \cap C = B \cap C = \varnothing$, то соотношения $A \succsim B$ и $A \cup C \succsim B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно.

Отметим, что из аксиом А1 и А2 следует рефлексивность.

Пусть на множестве Λ задана количественная вероятность Pr рядом распределения

$$\Pr(\lambda^1) = p_1, \ ..., \ \Pr(\lambda^m) = p_m,$$

так что вероятность события A

$$\Pr A = \sum_{j:\lambda^j \in A} p_j.$$

Говорят, что количественная вероятность *численно представляет* качественную вероятность, или что количественная вероятность *согласована* с качественной, если выполнено условие: для любых событий A и B

$$A \succsim B \Leftrightarrow \Pr A \geq \Pr B. \tag{2}$$

Если задана количественная вероятность Pr, то порождаемое ею согласно условию (2) отношение $\succsim$ удовлетворяет всем аксиомам А1 — А4, т. е. является полной качественной вероятностью. Оказывается, однако, что предположение о том, что всякую полную качественную вероятность можно представить некоторой количественной, неверно! Контрпример был построен в работе [17]; для удобства читателя он воспроизводится в Приложении 1. В свете этого утверждения становится понятным, что методы, опирающиеся на предположение о существовании количественной вероятности (в том числе методы теории полезности), при наличии качественной вероятности в принципе не применимы.

Частичная качественная вероятность. Отношение $\succsim$ называется *частичной качественной* (или *частичной сравнительной*) *вероятностью* [18, 19], если оно удовлетворяет аксиомам А2 — А4 и аксиоме

А5. *Рефлексивность*: для любого A выполнено $A \succsim A$.

Порядковая вероятность. Отношение $\succsim$ называется *частичной порядковой* (или *частичной ординальной*) *вероятностью*, если оно упорядочивает по вероятности лишь отдельные элементарные события и является частичным квазипорядком. Если такое отношение упорядочивает по вероятности все элементарные события, то оно называется (*полной*) *порядковой* (или *ординальной*) *вероятностью*. Если перенумеровать элементарные события в порядке невозрастания их вероятности, то (полную) порядковую вероятность можно кратко представить так:

$$\{\lambda^1\} \sim ... \sim \{\lambda^{i_1}\} \succ \{\lambda^{i_1+1}\} \sim ... \\ ... \sim \{\lambda^{i_2}\} \succ ... \succ \{\lambda^{i_{\tau-1}+1}\} \sim ... \sim \{\lambda^{i_\tau}\} \tag{3}$$

(очевидно, что $i_\tau = m$). Таким образом, элементарные события объединяются в τ групп так, что элементарные события из одной и той же группы равновероятны, а элементарные события из группы с меньшими номерами вероятнее элементарных событий из групп с большими номерами. В интересах дальнейшего изложения обозначим через M_t множество номеров элементарных событий из t-й группы, $t = 1, 2, ..., \tau$.

3. ПОСТРОЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И БЕЗРАЗЛИЧИЯ

Разберем, как строится отношение R на основе информации о неопределенном факторе — с учетом вероятности $\succsim$. При наличии информации об отношении ЛПР к риску ее также следует учитывать (см. § 4).

Для векторов и матриц одинаковых размерностей введем обозначения:

$$a \geqq b \Leftrightarrow a_i \ge b_i, \quad i = 1, 2, ..., n;$$

$$a \ge b \Leftrightarrow (a \geqq b,\ a \ne b); \quad a > b \Leftrightarrow a_i > b_i,$$
$$i = 1, 2, ..., n \text{ (здесь } n > 1);$$

$$\|a_{ij}\| \geqq \|b_{ij}\| \Leftrightarrow a_{ij} \ge b_{ij}, \ \ i = 1, 2, ..., m, \ \ j = 1, 2, ..., n;$$

$$\|a_{ij}\| \ge \|b_{ij}\| \Leftrightarrow (\|a_{ij}\| \geqq \|b_{ij}\|, \|a_{ij}\| \ne \|b_{ij}\|);$$

$$\|a_{ij}\| > \|b_{ij}\| \Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij}, \ \ i = 1, 2, ..., m, \ \ j = 1, 2, ..., n$$
$$\text{(здесь } m > 1 \text{ или } n > 1).$$

Поскольку с увеличением оценки v на множестве V предпочтения возрастают, то на множестве X оказывается определенным отношение Парето $R^{\varnothing}$: $xR^{\varnothing}y \Leftrightarrow x \ge y$. Заметим, что $xP^{\varnothing}y \Leftrightarrow x \ge y$, а $I^{\varnothing}$ есть отношение равенства векторов $=$.

Пусть A и B — два сравнимых по вероятности $\succsim$ события, т. е. верно $A \sim B$, $A \succ B$ или $B \succ A$. Без ограничения общности примем, что они несовместны, т. е. $A \cap B = \varnothing$ (в противном случае будем рассматривать события $A \backslash C$ и $B \backslash C$, где $C = A \cap B$). Кроме того, будем полагать, что множества A и B не пусты. Рассмотрим векторную оценку $x^{AB} = (x_1, ..., x_m)$, в которой все компоненты с номерами i, для которых $\lambda^i \in A$, равны между собой, и все компоненты с номерами j, для которых $\lambda^j \in B$, также равны между собой. Обозначим через $x^{A \leftrightarrow B}$ вектор, полученный из оценки x^{AB} заменой каждой компоненты с номером i, для которого $\lambda^i \in A$, (любой) компонентой с номером j, для которого $\lambda^j \in B$, и каждой компоненты с номером j, для которого $\lambda^j \in B$, (любой) компонентой с номером i, для которого $\lambda^i \in A$. Например, если $n = 6$ и $A = \{\lambda^1, \lambda^5, \lambda^6\}$, $B = \{\lambda^2, \lambda^3\}$, то для $x^{AB} = (2, 4, 4, 3, 2, 2)$ имеем $x^{A \leftrightarrow B} = (4, 2, 2, 3, 4, 4)$.

Пусть события A и B равновероятны: $A \sim B$. С учетом специфики структуры векторных оценок x^{AB} и $x^{A \leftrightarrow B}$ для ЛПР они будут одинаковы по предпочтительности, что можно записать так: $x^{AB} I^{A \sim B} x^{A \leftrightarrow B}$. Следовательно, соотношение $A \sim B$ порождает на X рефлексивное и симметричное отношение $I^{A \sim B}$, которое включает в себя все пары векторов вида x^{AB} и $x^{A \leftrightarrow B}$.

Пусть теперь событие A более вероятно, чем B: $A \succ B$. Рассмотрим векторную оценку x^{AB}. Пусть в ней (любая) компонента с номером i, для которой $\lambda^i \in A$, больше (любой) компоненты с номером j, для которой $\lambda^j \in B$. Тогда для ЛПР векторная оценка x^{AB} будет более предпочтительна, чем оценка $x^{A \leftrightarrow B}$, что можно записать так: $x^{AB} P^{A \succ B} x^{A \leftrightarrow B}$. Следовательно, соотношение $A \succ B$ порождает на Z иррефлексивное отношение $P^{A \succ B}$, которое включает в себя все пары векторов вида x^{AB} и $x^{A \leftrightarrow B}$, удовлетворяющие указанному условию неравенства.

Соотношение $B \succ A$ аналогично порождает на множестве Z иррефлексивное отношение $P^{B \succ A}$.

Поскольку отношение нестрогого предпочтения R на множестве X, которое нужно построить на основе вероятности $\succsim$, должно быть квазипорядком, то его можно представить как наименьший квазипорядок на X, который включает в свой состав отношение Парето $R^{\varnothing}$ и выше определенные отношения $I^{A \sim B}$ и $P^{A \succ B}$ для всех пар событий A, B, сравнимых по $\succsim$, т. е. является транзитивным замыканием объединения всех этих отношений. Определенное указанным образом отношение будем обозначать $R^{\succsim}$. Таким образом, $x\ R^{\succsim}\ y$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка

$$x R^{\pi_1} z^1,\ z^1 R^{\pi_2} z^2,\ ...,\ z^t R^{\pi_{t+1}} y, \tag{4}$$

где $z^1, z^2, ..., z^t \in X$ и каждое R^{π_l}, $l = 1, 2, ..., t + 1$, есть $R^{\varnothing}$, $I^{A \sim B}$ или $P^{A \succ B}$.

Данное определение отношения $R^{\succsim}$ неконструктивно. Поэтому практически важно указать эффективные методы его построения хотя бы для отдельных частных случаев.

Рассмотрим случай, когда множество оценок последствий конечно:

$$V = \{v^1, v^2, ..., v^n\}, \text{ где } v^1 < v^2 < ... < v^n. \tag{5}$$

Тогда множество векторных оценок $X = V^m$ также конечно (в нем будет $N = n^m$ элементов — векторных оценок x). Бинарное отношение ρ на множестве X можно задать квадратной булевой матрицей смежности $B(\rho) = \|b_{ij}(\rho)\|$ порядка N, где

$$b_{ij}(\rho) = \begin{cases} 1 \text{ при } (x^i, x^j) \in \rho, \\ 0 \text{ при } (x^i, x^j) \notin \rho. \end{cases}$$

Для булевых матриц определены операции: транспонирование ^{T}, сложение $+$, поэлементное умножение $*$, умножение $\times$, образование асимметричной разности \:

$$\|a_{ij}\| \backslash \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|,$$

$$\text{где } c_{ij}(\rho) = \begin{cases} 1 \text{ при } a_{ij} = 1 \text{ и } b_{ij} = 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Операциям над бинарными отношениями — взятия обратного отношения $^{-1}$, пересечения отношений $\cap$, объединения отношений $\cup$, разности отношений \, умножения отношений $\circ$ и построения транзитивного замыкания $\hat{\rho}$ соответствуют операции над их матрицами смежности [20]:

$$B(\rho^{-1}) = B(\rho)^T,\ B(\rho^1 \cap \rho^2) = B(\rho^1) \circ B(\rho^2),$$
$$B(\rho^1 \cup \rho^2) = B(\rho^1) + B(\rho^2),$$

$$B(\rho^1 \backslash \rho^2) = B(\rho^1) \backslash B(\rho^2),\ B(\rho^1 \circ \rho^2) = B(\rho^1) \times B(\rho^2),$$
$$B(\hat{\rho}) = B(\rho) + B^2(\rho) + \ldots + B^n(\rho).$$

Поэтому $B(\mathrm{Sym}\ \rho) = B(\rho) \circ B(\rho)^T$, $B(\mathrm{As}\ \rho) = B(\rho) \backslash B(\mathrm{Sym}\ \rho)$. Для построения транзитивного замыкания существуют эффективные алгоритмы [21]. Заметим еще, что

$$\rho^1 \subseteq \rho^2 \Leftrightarrow B(\rho^1) \leqq B(\rho^2), \quad \rho^1 \subset \rho^2 \Leftrightarrow B(\rho^1) \leq B(\rho^2).$$

Таким образом, с помощью матричных операций можно построить отношение $R^{\succsim}$. Современная вычислительная техника позволяет реализовать этот путь при «не очень большой» размерности задачи («не очень больших» числах m и n). Однако этот путь, даже если его удается реализовать, может оказаться весьма обременительным. Поэтому практически важна разработка эффективных методов построения отношений $R^{\succsim}$, не ограниченных размерностью задач, для различных частных видов отношения вероятности $\succsim$.

4. СЛУЧАЙ ПОРЯДКОВОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Для описания метода построения отношения $R^{\succsim}$, когда вероятность $\succsim$ — частичная порядковая, введем в рассмотрение множества (где x, y — произвольные векторные оценки):

$Z^+(y) = \{x \in X |$ существует цепочка (4), в которой нет $R^{\varnothing}\}$,

$Z^-(x) = \{y \in X |$ существует цепочка (4), в которой нет $R^{\varnothing}\}$,

$Z^=(x) = \{y \in X |$ существует цепочка (4), в которой все R^{π_t} суть $I^{A \sim B}\} \cup \{x\}$.

Понятно, что каждое из этих множеств содержит не более чем $m!$ элементов.

Теорема 1 [22]. *Для частичной порядковой вероятности $\succsim$ справедливы утверждения:*

- *$xR^{\succsim}y$ верно тогда и только тогда, когда существует $z \in Z^+(y)$ такой, что $x \geqq z$;*
- *$xR^{\succsim}y$ верно тогда и только тогда, когда существует $z \in Z^-(x)$ такой, что $z \geqq y$;*
- *$xI^{\succsim}y$ верно тогда и только тогда, когда $y \in Z^=(x)$ или, что равносильно, когда $x \in Z^=(y)$.*

Пример 1. Пусть $m = 4$; частичная порядковая вероятность $\succsim$ содержит, помимо пар вида (λ^i, λ^i), еще $\lambda^1 \succ \lambda^2$ и $\lambda^3 \sim \lambda^4$; $x = (2, 1, 6, 5)$, $y = (1, 2, 4, 6)$. Имеем: $Z^+(y) = \{(1, 2, 4, 6), (2, 1, 4, 6), (1, 2, 6, 4), (2, 1, 6, 4)\}$. Поскольку $z = (2, 1, 6, 4) \in Z^+(y)$ и верно $x \geqq z$, то, согласно теореме 1, справедливо $xR^{\succsim}y$. Далее, $Z^=(y) = \{(1, 2, 4, 6), (1, 2, 6, 4)\}$ и $x \notin Z^=(y)$. Поэтому $xI^{\succsim}y$ неверно. В итоге имеем $xP^{\succsim}y$. ♦

Теорема 1 прямо указывает на алгоритмический метод построения отношения $R^{\succsim}$. Для сравнения двух векторных оценок он эффективен даже при «не очень большом» числе n, но для построения всего отношения R на множество X этот метод может оказаться чрезмерно обременительным. Однако для полной порядковой вероятности, задаваемой выражением (3), существуют аналитические методы построения $R^{\succsim}$.

Для произвольных $x, y \in X$ введем в рассмотрение множество чисел, которые являются компонентами вектора x или y:

$$W(x, y) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \cup \{x_m\} \cup \{y_1\} \cup \{y_2\} \cup \ldots$$
$$\ldots \cup \{y_m\}.$$

Число q элементов этого множества зависит от x и y. Обозначим эти числа через w^k и перенумеруем их по возрастанию: $w^1 < w^2 < \ldots < w^q$. Пусть $h_{kt}(x)$ — число компонент вектора x с номерами i

из групп M_1, M_2, ..., M_t (см. выражение (3)) таких, что $x_i > w^k$; аналогичный смысл имеет число $h_{kt}(y)$. Введем в рассмотрение $(q - 1)\times\tau$-матрицы $H(x) = \|h_{kt}(x)\|$ и $H(y) = \|h_{kt}(y)\|$.

Теорема 2 [23]. *Для (полной) порядковой вероятности соотношение* $xR^{\succsim}y$ *верно тогда и только тогда, когда* $H(x) \geqq H(y)$*; при этом* $xP^{\succsim}y$*, когда* $H(x) \geq H(y)$*, и* $xI^{\succsim}y$*, когда* $H(x) = H(y)$. ♦

Если множество оценок V конечно, то его в теореме 2 можно использовать вместо множества $W(x, y)$.

Пример 2. Пусть $m = 4$; (полную) порядковую вероятность $\succsim$ можно кратко представить в виде $\lambda^1 \succ \lambda^2 \sim \lambda^3 \succ \lambda^4$; $x = (4, 5, 2, 1)$, $y = (1, 2, 5, 4)$. Имеем: $\tau = 3$, $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2, 3\}$, $M_3 = \{4\}$; $W(x, y) = \{1, 2, 4, 5\}$, $q = 4$ и

$$H(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad H(y) = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку здесь $H(x) \geq H(y)$, то, по теореме 2, верно $xP^{\succsim}y$. ♦

Обозначим через $a_{\downarrow} = (a_{[1]}, a_{[2]}, ..., a_{[n]})$ вектор, образованный из вектора $a = (a_1, ..., a_n)$ упорядочением его компонент по невозрастанию: $a_{[1]} \geq ... \geq a_{[n]}$. Под $a^{[1, j]}$ будем понимать вектор, составленный из первых j компонент вектора a, т. е. $a^{[1, j]} = (a_1, ..., a_j)$. Запись $a_{\downarrow}^{[1, j]}$ будет обозначать вектор, полученный из вектора $a^{[1, j]}$ упорядочением его компонент по невозрастанию. Например, если $a = (3, 4, 1)$, то $a^{[1, 2]} = (3, 4)$ и $a_{\downarrow}^{[1, j]} = (4, 3)$.

Теорема 3. *Для (полной) порядковой вероятности соотношение* $xR^{\succsim}y$ *верно тогда и только тогда, когда* $x_{\downarrow}^{[1, t]} \geqq y_{\downarrow}^{[1, t]}$, $t = i_1, ..., i_{\tau}$*; при этом* $xP^{\succsim}y$*, когда* $x_{\downarrow}^{[1, t]} \geq y_{\downarrow}^{[1, t]}$ *хотя бы для одного* t*, и* $xI^{\succsim}y$*, когда* $x_{\downarrow}^{[1, t]} = y_{\downarrow}^{[1, t]}$ *для всех* $t = i_1, ..., i_{\tau}$. ♦

Эта теорема (для многокритериальных задач) была представлена в работе [23] без доказательства. В предположении существования функции полезности она была доказана в работе [24], а без такого допущения — в работе [25].

Пример 3. В условиях примера 2:

$$x^{[1, 1]} = 4, \quad x^{[1, 3]} = (4, 5, 2), \quad x^{[1, 4]} = (4, 5, 2, 1);$$

$$x_{\downarrow}^{[1, 1]} = 4, \quad x_{\downarrow}^{[1, 3]} = (5, 4, 2), \quad x_{\downarrow}^{[1, 4]} = (5, 4, 2, 1);$$

$$y^{[1, 1]} = 1, \quad y^{[1, 3]} = (1, 2, 5), \quad x^{[1, 4]} = (1, 2, 5, 4);$$

$$y_{\downarrow}^{[1, 1]} = 1, \quad y_{\downarrow}^{[1, 3]} = (5, 2, 1), \quad y_{\downarrow}^{[1, 4]} = (5, 4, 2, 1).$$

Поскольку здесь $x_{\downarrow}^{[1, 1]} > y_{\downarrow}^{[1, 1]}$, $x_{\downarrow}^{[1, 3]} \geq y_{\downarrow}^{[1, 3]}$ и $x_{\downarrow}^{[1, 4]} = y_{\downarrow}^{[1, 4]}$, то, по теореме 3, верно $xP^{\succsim}y$.

5. ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И БЕЗРАЗЛИЧИЯ ПРИ ИЗВЕСТНОМ ОТНОШЕНИИ ЛПР К РИСКУ

Под лотереей, пользуясь принятой в теории принятия решений при риске терминологией [26], будем понимать случайную величину с конечным числом значений из множества V, вероятности которых известны. Лотерея называется невырожденной, если ни одна из этих вероятностей не равна 1. Здесь примем, что множество оценок V является числовым промежутком, причем «естественная» шкала не менее совершенна, чем шкала отношений[4] (см. сноску 2 на с. 49).

По определению, ЛПР *не склонен* (соответственно, *склонен*, *безразличен*) к риску, если средний ожидаемый выигрыш любой невырожденной лотереи (т. е. получение наверняка выигрыша, равного математическому ожиданию случайного выигрыша) более предпочтителен (соответственно, менее предпочтителен, безразличен) самой лотереи (т. е. участию в ней) [26].

Для всякого $x \in X$ определяются верхний и нижний срезы отношения R через x:

$$R_+(x) = \{y \in X | yRx\}, \quad R_-(x) = \{y \in X | xRy\}.$$

Квазипорядок R называется вогнутым (соответственно, выпуклым), если верхний (соответственно, нижний) его срез через любой $x \in X$ является выпуклым множеством.

Теорема 4 [13]. *Справедливы утверждения:*

- *для не склонного к риску ЛПР* $\{\gamma^1\}$ *квазипорядок* R *является вогнутым*;
- *для склонного к риску ЛПР* $\{\gamma^2\}$ *квазипорядок* R *является выпуклым*;
- *для безразличного к риску ЛПР* $\{\gamma^3\}$ *квазипорядок* R *является и вогнутым, и выпуклым*. ♦

Согласно теореме 4 отношение нестрогого предпочтения $R^{\succsim 1}$, задаваемое на основе вероятности $\succsim$ для ЛПР, не склонного к риску $\{\gamma^1\}$, определяется как наименьший вогнутый квазипорядок, продолжающий отношение $R^{\succsim}$ на множестве X, т. е. должно выполняться $R^{\succsim} \subset R^{\succsim 1}$ (это влечет $I^{\succsim} \subseteq I^{\succsim 1}$) и $P^{\succsim} \subseteq P^{\succsim 1}$. Верхние срезы отношения $R^{\succsim 1}$ являются выпуклыми замыканиями соответствующих срезов отношения $R^{\succsim}$. Аналогично, отно-

---

[4] Так что в этом параграфе элементы множества X — это векторы в пространстве Re^m.

шение нестрогого предпочтения $R^{\succsim 2}$, задаваемое на основе вероятности $\succsim$ для ЛПР, склонного к риску $\{\gamma^2\}$, определяется как наименьший выпуклый квазипорядок, продолжающий отношение $R^{\succsim}$ на множестве X. Нижние срезы отношения $R^{\succsim 2}$ являются выпуклыми замыканиями соответствующих нижних срезов отношения $R^{\succsim}$. Наконец, отношение нестрогого предпочтения $R^{\succsim 3}$, задаваемое на основе вероятности $\succsim$ для ЛПР, безразличного к риску $\{\gamma^3\}$, определяется как наименьший одновременно вогнутый и выпуклый квазипорядок, продолжающий отношение $R^{\succsim}$ на множестве X. Верхние и нижние срезы отношения $R^{\succsim 3}$ являются выпуклыми замыканиями соответствующих верхних и нижних срезов отношения $R^{\succsim}$.

Данное определение отношения $R^{\succsim}$ неконструктивно. Однако для случая порядковой вероятности $\succsim$ можно предложить эффективный метод построения этого отношения.

Введем обозначения $\bar{R}_+(x)$, $\bar{R}_-(x)$, $\bar{Z}^+(x)$ и $\bar{Z}^-(x)$ для выпуклых замыканий множеств $R_+(x)$, $R_-(x)$, $Z^+(x)$ и $Z^-(x)$ соответственно. Заметим, что $xR^{\succsim 1}y$ (соответственно, $xR^{\succsim 2}y$; $xR^{\succsim 3}y$), верно тогда и только тогда, когда справедливо $x \in \bar{R}_+(y)$ (соответственно, $y \in \bar{R}_-(x)$; $x \in \bar{R}_+(y)$ или $y \in \bar{R}_-(x)$).

Теорема 5. *Для частичной порядковой вероятности $\succsim$ справедливы утверждения:*

- *$xR^{\succsim 1}y$ верно тогда и только тогда, когда существует вектор $z \in \bar{Z}^+(y)$, такой, что $x \geqq z$;*
- *$xR^{\succsim 2}y$ верно тогда и только тогда, когда существует вектор $z \in \bar{Z}^-(x)$, такой, что $z \geqq y$;*
- *$xR^{\succsim 3}y$ верно тогда и только тогда, когда существует вектор $z \in \bar{Z}^+(y)$, такой, что $x \geqq z$, или когда существует вектор $z \in \bar{Z}^-(x)$, такой, что $z \geqq y$.* ♦

Доказательство этой теоремы вынесено в Приложение 2. Она указывает эффективный метод проверки справедливости соотношений $xR^{\succsim 1}y$, $xR^{\succsim 2}y$ и $xR^{\succsim 3}y$. Например, для проверки соотношения $xR^{\succsim 1}y$ нужно выяснить, существует ли в выпуклом замыкании $\bar{Z}^+(y)$ множества $Z^+(y)$ вектор z такой, что верно $z \geqq y$. А так как множество $Z^+(y)$ содержит конечное число векторов, то последняя задача сводится к проверке совместности системы линейных неравенств и равенств, которую можно осуществить с помощью любой компьютерной системы решения задач линейного программирования.

Пример 4. Пусть $m = 4$; частичная порядковая вероятность $\succ$ содержит, помимо пар вида (λ^i, λ^i), еще $\lambda^1 \succ \lambda^2$ и $\lambda^3 \sim \lambda^4$; $x = (3, 4, 3, 3)$, $y = (1, 5, 2, 4)$. Имеем: $Z^+(y) = \{(1, 5, 2, 4), (5, 1, 2, 4), (1, 5, 4, 2), (5, 1, 4, 2)\}$. При помощи теоремы 1 нетрудно проверить, что $xR^{\succsim}y$ неверно. Для проверки соотношения $xR^{\succsim 1}y$, согласно первому утверждению теоремы 5, составим систему неравенств:

$$3 \geq \alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4, \quad 4 \geq 5\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4,$$

$$3 \geq 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4, \quad 3 \geq 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0, \quad \alpha_4 \geq 0.$$

Эта система совместна: например, подходят значения $\alpha_1 = 0{,}25$; $\alpha_2 = 0{,}25$; $\alpha_3 = 0{,}5$; $\alpha_4 = 0$. Следовательно, верно $xR^{\succsim 1}y$. А поскольку одно из четырех записанных выше неравенств выполняется как строгое, то верно $xP^{\succsim 1}y$. Заметим, что в роли вектора z здесь выступил вектор

$$(2, 4, 3, 3) = 0{,}25 \cdot (1, 5, 2, 4) + 0{,}25 \cdot (5, 1, 2, 4) + \\ + 0{,}5 \cdot (1, 5, 4, 2) + 0 \cdot (5, 1, 4, 2).$$

6. ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И БЕЗРАЗЛИЧИЯ ПРИ ШКАЛЕ ОЦЕНОК ПЕРВОЙ ПОРЯДКОВОЙ МЕТРИКИ

Ранее везде полагалось, что шкала оценок V в модели (1) для предпочтений порядковая. Здесь мы рассмотрим случай, когда эта шкала конечна (причем $n > 2$) и представляет собой шкалу первой порядковой метрики [1], т. е. упорядочены по предпочтительности не только сами оценки v^j (см. выражение (5)), но и их разности. Ограничимся рассмотрением случая, когда эти разности вдоль шкалы оценок V убывают (что соответствует «убыванию предельной ценности»):

$$v^2 - v^1 > v^3 - v^2 > \ldots > v^n - v^{n-1}. \tag{6}$$

Далее для простоты записи положим, что $V = \{1, 2, ..., m\}$. Информацию о наличии шкалы первой порядковой метрики обозначим через Δ. Эта информация задает на множестве X отношения предпочтения:

$$xP^{A \sim B \& \Delta}y^{AB} \Leftrightarrow [(x = (y^{AB}|\, y_i + \delta,\ i{:}\ \lambda^i \in A;\ y_j - \delta,\\ j{:}\ \lambda^j \in B),\ y_i + \delta \leq y_j - \delta) \vee (x = (y^{AB}|\, y_j + \delta,\\ j{:}\ \lambda^j \in B;\ y_i - \delta,\ i{:}\ \lambda^i \in A),\ y_j + \delta \leq y_i - \delta)],\quad x \in X;$$

$$xP^{A \succ B \& \Delta}y^{AB} \Leftrightarrow (x = (y^{AB}|\ y_i + \delta,\ i{:}\ \lambda^i \in A;\ y_j - \delta,\\ j{:}\ \lambda^j \in B),\ y_i + \delta \leq y_j - \delta),\quad x \in X$$

(числа δ — натуральные).

Отношение $R^{\succsim\Delta}$ определяется как транзитивное замыкание объединения всех отношений $I^{A\sim B}$, $P^{A\succ B}$, $P^{A\sim B\&\Delta}$, $P^{A\succ B\&\Delta}$ и $R^{\varnothing}$. Таким образом, $xR^{\succsim\Delta}y$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка (4), в которой $z^1, z^2, ..., z^t \in X$ и каждое отношение R^{π_l}, $l = 1, 2, ..., t$, есть $I^{A\sim B}$, $P^{A\succ B}$, $P^{A\sim B\&\Delta}$, $P^{A\succ B\&\Delta}$ или $R^{\varnothing}$.

Так как множество оценок V конечно, то отношение $R^{\succsim\Delta}$ можно построить с помощью его матричного представления (см. § 3). Для случая (полной) порядковой вероятности $\succsim$ проверку справедливости соотношения $xR^{\succsim\Delta}y$ можно провести при помощи алгоритмического метода [27].

Если, помимо информации (6), известно отношение ЛПР к риску, например, что он не склонен к риску $\{\gamma^1\}$, то соответствующее отношение нестрогого предпочтения $R^{\succsim\Delta 1}$ определяется как наименьший вогнутый квазипорядок, продолжающий отношение $R^{\succsim\Delta}$ на множестве X. Верхние срезы отношения $R^{\succsim\Delta 1}$ являются выпуклыми замыканиями соответствующих срезов отношения $R^{\succsim\Delta}$.

7. ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И БЕЗРАЗЛИЧИЯ ПРИ ИНФОРМАЦИИ О СРАВНИТЕЛЬНОЙ СИЛЕ ПРЕВОСХОДСТВА В ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть модель вероятностей П, помимо отношения вероятности $\succsim$, содержит также четырехместные отношения $\triangleright$ и $\approx$, сравнивающие интенсивности превосходства в вероятности одних событий над другими (эти отношения родственны отношениям сравнительного превосходства в важности одних критериев над другими [9]).

Пусть A, B, C, D — четыре попарно несовместных события таких, что $A \succ B$ и $C \succ D$, причем превосходство в вероятности события A над событием B больше (или же равно), чем превосходство в вероятности события C над событием D. Последний факт будет обозначать так:

$$[A \succ B] \triangleright [C \succ D]$$

(соответственно $[A \succ B] \approx [C \succ D]$).

Рассмотрим векторную оценку $x^{AB,\ CD} = (x_1, ..., x_m)$, в которой все компоненты с номерами i, для которых λ^i входит в одно и то же множество из A, B, C, D, равны между собой. Под x_{i_A} (соответственно, под x_{i_B}, x_{i_C}, x_{i_D}) будем понимать число, равное компоненте x_i вектора $x^{AB,\ CD}$ при $\lambda^i \in A$ (соответственно, при $\lambda^i \in B$, $\lambda^i \in C$, $\lambda^i \in D$). Обозначим через $x^{A\leftrightarrow B,\ C\leftrightarrow D}$ вектор, полученный из оценки $x^{AB,\ CD}$ заменой каждой компоненты с номером i, для которого $\lambda^i \in A$, (любой) компонентой с номером x_{i_B}, и каждой компоненты с номером i, для которого $\lambda^i \in B$, (любой) компонентой с номером x_{i_A}, и аналогично для событий C и D. Например, если $n = 7$ и $A = \{\lambda^1\}$, $B = \{\lambda^3, \lambda^4\}$, $C = \{\lambda^5, \lambda^6\}$, $D = \{\lambda^7\}$, то для $x^{AB,\ CD} = (2, 3, 4, 4, 1, 1, 5)$ имеем $x_{i_A} = 2$, $x_{i_B} = 4$, $x_{i_C} = 1$, $x_{i_D} = 5$ и $x^{A\leftrightarrow B,\ C\leftrightarrow D} = (4, 3, 2, 2, 5, 5, 1)$.

Пусть верно $[A \succ B] \approx [C \succ D]$. Тогда, с учетом специфики векторных оценок $x^{AB,\ CD}$ и $x^{A\leftrightarrow B,\ C\leftrightarrow D}$, оказываются определенными на множестве X отношения безразличия и предпочтения:

- $x^{A,B,CD} I^{[A\succ B]\approx[C\succ D]} x^{A\leftrightarrow B,\ C\leftrightarrow D}$ верно тогда и только тогда, когда $x_{i_A} = x_{i_D} \neq x_{i_B} = x_{i_C}$;
- $x^{A,B,CD} P^{[A\succ B]\approx[C\succ D]} x^{A\leftrightarrow B,\ C\leftrightarrow D}$ верно тогда и только тогда, когда $x_{i_B} \geq x_{i_C} > x_{i_D} \geq x_{i_{BA}}$, причем хотя бы одно из двух нестрогих неравенств выполняется как строгое.

Пусть верно $[A \succ B] \triangleright [C \succ D]$. Тогда, с учетом специфики векторных оценок $x^{AB,\ CD}$ и $x^{A\leftrightarrow B,\ C\leftrightarrow D}$, оказывается определенным на множестве X отношение предпочтения: $x^{AB,\ CD} P^{[A\supset B]\triangleright[C\supset D]} x^{A\leftrightarrow B,\ C\leftrightarrow D}$ верно тогда и только тогда, когда $x_{i_B} \succ x_{i_C} > x_{i_D} \succ x_{i_{BA}}$.

Отношение нестрогого предпочтения, порождаемое на множестве X вероятностью $\succsim$, дополненной сведениями о равенстве или превосходстве в вероятности одних событий над другими, определяется как транзитивное замыкание объединения $R^{\succsim}$ и отношений всех трех введенных видов. Иначе говоря, в цепочке (4) каждое R^{π_l}, $l = 1, 2, ..., t + 1$, есть $R^{\varnothing}$, $I^{A\sim B}$, $P^{A\succ B}$, $I^{[A\succ B]\approx[C\succ D]}$, $P^{[A\succ B]\approx[C\succ D]}$ или $P^{[A\succ B]\triangleright[C\succ D]}$.

В случае, когда множество оценок V конечно, это отношение можно построить при помощи его матричного представления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы, учитывающие качественную информацию о предпочтениях и вероятностях, позволяют сравнить по предпочтительности не все стратегии и потому часто могут не привести к получению решения требуемого типа (например, выбрать одну наилучшую стратегию). Поэтому, согласно итеративному подходу к анализу задач принятия решений [28], следует учитывать дополнительную, более сильную, но и более сложную информацию. При невозможности получения дополнительной информации стоит подумать о применении согласительных, или суррогатных решений [29].

К сожалению, представленный арсенал различных по эффективности методов анализа задач принятия решений при неопределенности, учитывающих нечисловые оценки предпочтений и вероятностей, явно недостаточен для удовлетворения запросов практики. Поэтому актуальна проблема разработки эффективных методов подобного рода для различных сочетаний видов информации о предпочтениях и вероятностях как в рамках теории принятия решений при неопределенности, так и в рамках теории принятия многокритериальных решений.

В теории важности критериев разработаны также методы анализа решений, основанные на количественных оценках важности и опирающиеся на строгое определение понятия превосходства в важности одних критериев над другими в некоторое число раз [30—33]. Однако рассмотрение вопроса о приложении этих методов к задачам анализа решений при неопределенности выходит за рамки настоящей статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Приведем здесь контрпример из работы [17] в наших обозначениях, для простоты представляя события с помощью мультипликативной записи, состоящей из номеров составляющих их элементарных событий; например, вместо $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\}$ будем писать 124 и вместо $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\} \succ \{\lambda^3\}$ соответственно $124 \succ 3$.

Пусть $n = 5$. Рассмотрим отношение вероятности, записанное в виде единой цепочки:

$$\begin{gathered} 12345 \succ 1345 \succ 1245 \succ 1235 \succ 145 \succ 135 \succ 2345 \succ \\ \succ 345 \succ 125 \succ 1234 \succ 15 \succ 245 \succ 235 \succ 134 \succ 45 \succ \\ \succ 124 \succ 35 \succ 123 \succ 25 \succ 14 \succ 13 \succ 234 \succ 5 \succ 34 \succ \\ \succ 12 \succ 1 \succ 24 \succ 23 \succ 4 \succ 3 \succ 2 \succ \varnothing. \end{gathered}$$

Проверка показывает, что все аксиомы А1 — А4 выполнены и это отношение вероятности есть полная качественная вероятность.

Предположим, что существуют количественные вероятности p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, которые представляют эту качественную вероятность. Из приведенной цепочки выделим четыре звена:

$$1 \succ 24, \quad 34 \succ 12, \quad 25 \succ 14, \quad 124 \succ 35.$$

Им соответствуют четыре строгих неравенства:

$$p_1 > p_2 + p_4, \quad p_3 + p_4 > p_1 + p_2, \quad p_2 + p_5 > p_1 + p_4,$$
$$p_1 + p_2 + p_4 > p_3 + p_5.$$

Однако система из этих четырех неравенств несовместна. Действительно, сложив их левые и правые части, получим

$$2p_1 + 2p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5 > 2p_1 + 2p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5,$$

т. е. $0 > 0$. Полученное противоречие доказывает, что предположение о возможности представления рассматриваемой качественной вероятности с помощью количественных вероятностей неверно.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 5. Вначале заметим, что точку из выпуклого замыкания объединения конечного числа выпуклых множеств можно представить в виде выпуклой комбинации точек, каждая их которых может принадлежать только к одному из этих множеств. Действительно, пусть в выпуклой комбинации встречается, например, векторная сумма $\alpha_{i'}x_{i'} + \alpha_{i''}x_{i''}$, где $\alpha_{i'}$ и $\alpha_{i''}$ положительны, а точки $x_{i'}$ и $x_{i''}$ принадлежат одному и тому множеству. Эту сумму можно заменить в выпуклой комбинации на одно слагаемое

$$\alpha^0_{i'i''}\left(\frac{\alpha_{i'}}{\alpha^0_{i'i''}}x_{i'} + \frac{\alpha_{i''}}{\alpha^0_{i'i''}}x_{i''}\right),$$

где $\alpha^0_{i'i''} = \alpha_{i'} + \alpha_{i''}$, а вектор, стоящий в скобках, принадлежит тому же множеству.

Учтем еще, что верхний срез отношения $R^{\succsim}$ через y, согласно теореме 1, можно представить в виде объединения конечного числа выпуклых множеств: $\bigcup_{z \in Z^+(y)} R_+^{\varnothing}(z)$. Поэтому любую точку x из выпуклого замыкания верхнего среза $R^{\succsim}(y)$ можно представить в виде выпуклой комбинации точек $u^1, u^2, ..., u^s$, каждая из которых принадлежит соответствующему множеству $R_+^{\varnothing}(z^1)$, $R_+^{\varnothing}(z^2)$, ..., $R_+^{\varnothing}(z^s)$, где s — число векторов во множестве $Z^+(y)$:

$$x = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j u^j, \text{ где все } \alpha_j \ge 0 \text{ и } \sum_{j=1}^{s} \alpha_j = 1.$$

Пусть $w^j = u^j - z^j \geqq 0_{(m)}$, $j = 1, 2, ..., s$, где $0_{(m)}$ — нулевой m-мерный вектор (0, 0, ..., 0). Тогда

$$x = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (z^j + w^j) = z + \delta,$$

где $z = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j z^j \in \bar{Z}_+(y)$ и $\delta = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j w^j \geqq 0_{(m)}$, и $x \geqq z$.

Первое утверждение теоремы 5 доказано. Остальные два доказываются аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fishburn, P.C.* Decision and Value Theory. — New York: Wiley, 1964.
2. *Подиновский В.В.* Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 11. — С. 141—159. [*Podinovskii, V.V.* Decision under multiple estimates for the importance coefficients of criteria and probabilities of values of uncertain factors in the aim function // Automation and Remote Control. — 2004. — Vol. 65, no. 11. — P. 1817—1833.]
3. *Montes*, *I.*, *Miranda*, *E.*, *Montes*, *S.* Stochastic dominance with imprecise information // Computational Statistics and Data Analysis. — 2014. — Vol. 71. — P. 867—885.
4. *Troffaes*, *M.* Decision making under uncertainty using imprecise probabilities // International Journal of Approximate Reasoning. — 2007. — Vol. 45. — P. 17—29.
5. *Montes*, *I.*, *Miranda*, *E.*, *Montes*, *S.* Decision making with imprecise probabilities and utilities by means of statistical preference and stochastic dominance // European Journal of Operational Research. — 2014. — Vol. 234. — P. 209—220.
6. *Льюс, Р.Д.*, *Райфа, Х.* Игры и решения. Введение и критический обзор / пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. [*Luce, R.D.*, *Raiffa, H.* Games and Decisions. — New York: Wiley, 1957.]
7. *Schoemaker, P.* The Expected Utility Model: its Variants, Purposes, Evidence and Limitations // Journal of Economic Literature. — 1982. — Vol. 20. — P. 529—563.
8. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений: учеб. — М.: Логос, 2006. [*Larichev, O.I.* Theory and Methods of Decision Making: manual. — Moscow: Logos, 2006. (In Russian)]
9. *Подиновский В.В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / под ред. Н.Н. Моисеева. — М., 1979. — С. 117—145. [*Podinovski*, *V.V.* Axiomatic Solution of the Problem of Evaluating the Importance of Criteria in Multicriterial Decision-making Problems. In: N.N. Moiseev (ed.), State-of-the-Art of Operations Research Theory. — Moscow: Nauka, 1979. — P. 117—145. (In Russian)]
10. *Подиновский В.В., Потапов М.А., Нелюбин А.П., Подиновская О.В.* Теория важности критериев: современное состояние и направления дальнейшего ее развития // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ—2014. Москва, 16—19 июня 2014 г. ИПУ РАН [Электронный ресурс]. — М., 2014. — С. 7697—7702. — URL: http://vspu2014.ipu.ru/node/8581 [*Podinovski*, *V.V.*, *Potapov*, *M.A.*, *Nelyubin*, *A.P.*, *Podinovskaya*, *O.V.* Criteria Importance Theory: State-of-the-art and Directions of its Further Development. XII All-Russian Meeting on Control Problems VSPU-2014. Moscow, June 16—19, 2014 Institute of Control Science RAS [Electronic resource]. — Moscow, 2014. — P. 7696—7702. URL: http://vspu2014.ipu.ru/node/8581 (In Russian)]
11. *Подиновский В.В.* Задачи принятия решений при качественном оценивании факторов и предпочтений // Математические методы в социологическом исследовании. — М.: Наука, 1981. — С. 115—125. [*Podinovski, V.V.* Problems of Decision-making under Qualitative Assessment of Factors and Preferences. Mathematical Methods in Sociological Research. — Moscow: Nauka, 1981. — P. 115—125. (In Russian)]
12. *Подиновский В.В.* Задачи принятия решений при качественном оценивании факторов // Методологические проблемы использования математических методов в социологических исследованиях. — М.: ИСИ АН СССР, 1980. — С. 115—125. [*Podinovski, V.V.* Problems of Decision-making under Qualitative Assessment of Factors. Methodological Problems of Using Mathematical Methods in Sociological Research. — Moscow: ISR RAS, 1980. — P. 115—125. (In Russian)]
13. *Podinovski, V.V.*, *Podinovski, Vic.V.* Decision Analysis under Partial Information // Trends in Multicriteria Decision Making / Th.J. Stewart, R.C. Van der Honert (Eds.). Lecture Notes in Economic and Mathematical System. — Berlin: Springer, 1998. — Vol. 465. — P. 77—84.
14. *Пфанцагль И.* Теория измерений. — М.: Мир, 1976. [*Pfanzagl*, *J.* Theory of Measurement. — Berlin: Springer, 1971.]
15. *Fishburn, P.C.* The axioms of subjective probability // Statistical Science. — 1986. — Vol. 1. — P. 335—345.
16. *Наумов Г.Е., Подиновский В.В. Подиновский Вик.В.* Субъективная вероятность: способы представления и методы получения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 94—109. [*Naumov, G.Y.*, *Podinovskii*, *V.V.*, *Podinovskii*, *Vic.V.* Subjective Probability: Representation and Derivation Methods // Journal of Computer and System Sciences International. — 1993. — Vol. 31, no. 3. — P. 12—23.]
17. *Kraft, C.H.*, *Pratt, J.W.*, *Seidenberg, A.* Intuitive Probability on Finite Sets // Annals of Mathematical Statistics. — 1959. — Vol. 30. — P. 408—419.
18. *Подиновский, Вик.В.* К вопросу о продолжении частичных бинарных отношений в моделях принятия решений // Вычислительные системы и вопросы принятия решений: сборник / под. ред. Л.Н. Королева, П.С. Краснощекова. — М., МГУ, 1991. — С. 166—168. [*Podinovski*, *Vic.V.* On the Question of the Extension of Partial Binary Relations in Decision-making Models / Computing Systems and Decision-Making: collection. L.N. Korolev, P.S. Krasnoshekov (eds.). — Moscow: Moscow State University, 1991. — P. 166—168. (In Russian)]
19. *Fishburn, P.C.* Linear Extensions of Additive Partial Orders // Order. — 1997—1998. — Vol. 14. — P. 153—169.
20. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971. [*Schreider*, *Y.A.* Equality, Similarity, Order. — Moscow: Nauka, 1071. (In Russian)]
21. *Warshall, S.* A theorem on Boolean matrices // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1962. — Vol. 9. — P. 11—12.
22. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 11. — С. 118—127. [*Podinovskii*, *V.V.* Multicriterial Problems with Importance-ordered Criteria // Automation and Remote Control. — 1976. — Vol. 37, no. 11, part 2. — P. 1728—1736.]
23. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Новые многокритериальные решающие правила в теории важности критериев // Доклады академии наук. — 2013. — Т. 451, № 1. — С. 21—23. [*Podinovski, V.V., Podinovskaya, O.V.* New Multicriterial Decision Rules in Criteria Importance Theory. Doklady Mathematics. — 2013. — Vol. 88, no. 1. — P. 486—488.]
24. *Podinovski, V.V.* Decision Making under Uncertainty with Unknown Utility Function and Rank-ordered Probabilities // European Journal of Operational Research. — 2014. — Vol. 239. — P. 537—541.
25. *Кривцун И.Л., Подиновский В.В.* Аналитическое решающее правило для задачи выбора при порядковой информации о предпочтениях и неопределенных факторах // Информационные технологии моделирования и управления. — 2016. — № 6. — С. 450—459. [*Krivtsun*, *I.L.*, *Podinovski*, *V.V.* Analytical Decision Rule for the Problem of Choice under Ordinal Information about Preferences and Uncertain Factors // Information Technologies of Modeling and Control. — 2016. — No. 6. — P. 450—459. (In Russian)]
26. *Райфа Г.* Анализ решений. Введение в проблему выбора в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. [*Raiffa*, *H.* Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty. — Addison-Wesley: Reading, MA, 1968.]
27. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Алгоритмическое решающее правило, использующее ординальные коэффициенты важности критериев со шкалой первой порядковой метри-

ки // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — № 1. — С. 43—59. [*Nelyubin, A.P., Podinovski, V.V.* Algorithmic Decision Rule Using Ordinal Criteria Importance Coefficients with a First Ordinal Metric Scale // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, no. 1. — P. 48—65.]
28. *Гафт М.Г., Подиновский В.В.* О построении решающих правил в задачах принятия решений // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 6. — С. 128—138. [*Gaft, M.G., Podinovskii, V.V.* Construction of Decision Rules in Decision-making Problems // Automation and Remote Control. — 1981. — Vol. 42. — P. 806—814.]
29. *Подиновский В.В.* Согласительные решения многокритериальных задач выбора // Проблемы управления. — 2017. — № 2. — С. 17—26. [*Podinovski, V.V.* Conciliative solutions for Multicriterial Choice Problems // Control Sciences. — 2017. — No. 2. (In Russian)]
30. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 5. — С. 110—123. [*Podinovskii, V.V.* Quantitative Importance of Criteria // Automation and Remote Control. — 2000. — Vol. 61, no. 5. Part 2. — P. 817—828.]
31. *Podinovski, V.V.* The Quantitative Importance of Criteria for MCDA // Journal of Multi-criteria Decision Analysis. — 2002. — Vol. 11. — P. 1—15.
32. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 8. — С. 196—203. [*Podinovskii, V.V.* The Quantitative Importance of Criteria with Discrete FIrst-order Metric Scale // Automation and Remote Control. — 2004. — Vol. 65, no. 8. — P. 1348—1354.]
33. *Podinovski, V.V.* On the Use of Importance information in MCDA Problems with Criteria Measured on the First Ordered Metric Scale // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. — 2009. — Vol. 15. — P. 163—174.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 19.05.2019, после доработки 5.09.2019.
Принята к публикации 30.09.2019.

Подиновский Владислав Владимирович — д-р техн. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ podinovski@mail.ru.

ANALYSIS OF DECISIONS UNDER UNCERTAINTY WITH NON-NUMERIC ASSESSMENT OF PREFERENCES AND PROBABILITIES

V.V. Podinovski

National Research University «Higher School of Economics», Moscow, Russia
✉ podinovski@mail.ru

Abstract. It is shown that practical decision-making problems often involve taking into account preferences not fully identified, as well as uncertain factors. Known approaches to the analysis of such problems are based on introducing of quantitative probabilities and using of utility function. However, this requires obtaining rather complex and therefore unreliable and not always available information. In this paper, such methods are proposed for analyzing decisions under uncertainty, for the implementation of which utility functions and quantitative probabilities are not required. They are based on the ideas and results of the theory of the importance of criteria in multi-criteria problems of decision-making under certainty. Partial preference and indifference relations generated by qualitative probability on a set of strategies are used. Computational methods for constructing such relations are considered. Calculation examples are given.

Keywords: decision-making under uncertainty, incomplete information about preferences and uncertain factors, preference relations, qualitative probability.

Funding. The study has been funded by the Russian Academic Excellence Project «5—100».

Поправка

В тираже номера 3, 2019 г. в статье «Стайное управление малыми беспилотными летательными аппаратами в 2D-среде с препятствиями[1]» авторов А.Ю. Ефремова, Ю.С. Леговича пропущена сноска к заголовку статьи:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 7 (30) «Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации».